Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению практических и контрольных работ по дисциплине «Реконструкция горных предприятий» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации №5 «Шахтное и подземное строительство»

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0261A6BD005DAC979B410F3EA731403511
Владелец: Упоров Сергей Александрович
Действителен: с 23.10.2020 до 23.01.2022

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению практических и контрольных работ по дисциплине «Реконструкция горных предприятий» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации №5 «Шахтное и подземное строительство»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Реконструкция горных предприятий: Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе выполнению практических и контрольных работ по дисциплине «Реконструкция горных предприятий» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации №5 «Шахтное и подземное строительство» / Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 35 с.

Материал пособия охватывает все раздела дисциплины в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов и выполнению контрольных работ со специализации №5 «Шахтное и подземное строительство» специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Реконструкция горных предприятий».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Лещуков Н.Н., Прищепа Д. В.

Оглавление

Введение 5
1. Методические указания к организации самостоятельной работы студента 6
2. Содержание курса, контрольные вопросы 7
3. Контрольные работы 11
Контрольная работа №1 11
Контрольная работа №2 29

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студента является важнейшей составной частью образовательной программы подготовки дипломированного специалиста.

По курсу «Реконструкция горных предприятий» обязательная самостоятельная работа студента осуществляется в следующих направлениях – *освоение материалов по отдельным темам, входящим в Рабочую учебную программу дисциплины; подготовка, оформление, защита практико-ориентированных заданий; подготовка и защита контрольной работы*. Дополнительная самостоятельная работа связана с углубленным изучением отдельных разделов курса на основе научно-исследовательской работы студента (НИРС).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов – освоения отдельных тем дисциплины.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В следующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Реконструкция горных предприятий». Она содержит названия 6 основных тем с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов в экзаменационном билете. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Причем в экзаменационный билет может включаться один из вопросов по такой теме. Основной объем информации по каждой теме содержится в учебнике по курсу.

При освоении указанных ниже тем *рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента:*

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По рекомендуемой литературе освойте каждый структурный элемент темы. Во всех темах указаны разделы и страницы учебника, содержащие данный материал.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Тема 1. Введение. Общие сведения по реконструкции горных предприятий

Цели, причины и основные направления реконструкции; виды капитальных затрат – новое строительство, техническое перевооружение, поддержание мощности, реконструкция действующего предприятия. Вскрытие новых горизонтов.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Какие работы относятся к новому строительству?
2. Какие работы относятся к расширению действующего предприятия?
3. Какие работы относятся к реконструкции действующего предприятия?
4. Какие работы относятся к техническому перевооружению?
5. Какие работы относятся к поддержанию действующих показателей?
6. При каких условиях проводится закрытие (ликвидация) горных предприятий?
7. Классификация горных предприятий по ТЭП.
8. Технология ликвидации вертикальных стволов.
9. Достоинства реконструкции шахт в сравнении с новым строительством.
10. Недостатки реконструкции шахт в сравнении с новым строительством.
11. Причины и цели реконструкции.

Тема 2. Углубка вертикальных и наклонных стволов.

Способ углубки вертикальных стволов с разгрузкой породы на земной поверхности, с рабочего горизонта, с углубочного горизонта. Способ углубки стволов в направлении снизу-вверх. Комбинированный способ углубки стволов. Способ углубки наклонных стволов.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Схема углубки «без остановки эксплуатационного подъема», ее достоинства и недостатки.
2. Схема углубки «с разгрузкой на рабочем горизонте», ее достоинства и недостатки.
3. Схема углубки «через углубочный горизонт», ее достоинства и недостатки.
4. Схема углубки «комбинированная», ее достоинства и недостатки.
5. Схемы углубки стволов снизу вверх, их достоинства и недосттатки.
6. Область применения многоканатных подъемных установок при углубке стволов.

7. Какие факторы влияют на выбор схемы проветривания углубляемой части ствола?
8. Когда необходимо применять комбинированное проветривание?
9. Кагда необходима установка калорифера и где его устанавливают?
10. В какие выработки должна направляться исходящая из углубляемой части ствола струя воздуха?
11. Способы откачки воды при углубке стволов, условия их применения.
12. Возможные места установки лебедок подвесных насосов.

Тема 3. Предохранительные устройства при углубке стволов.

Горизонтальные предохранительные полки-водопропускающие, водособирающие, зумпф-полки. Ферменные, клиновые, из стальных канатов предохранительные полки. Арочные инвентарные полки и метод их расчета. Породные предохранительные целики с бадьевым проемом и глухие породные целики. Сооружение породных целиков, их расчет и технология ликвидации породных целиков.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Назначение и типы предохранительных устройств.
2. Условия использования защитных целиков и способы их сооружения и ликвидации.
3. Определение нагрузок от падения сосудов на предохранительные устройства.
4. От каких факторов зависит допустимая глубина заложения защитных целиков?
5. Устройство горизонтальных предохранительных полков, их достоинства и недостатки.
6. Назначение амортизирующего костра и его устройство.
7. Назначение плиты утяжеления и ее конструкция.
8. Устройство водособирающего полка.
9. Устройство балочного предохранительного полка.
10. Устройство защитного полка и ограждающей стенки.
11. Устройство ферменных полков, их достоинства и недостатки.

Тема 4. Организация работ при углубке стволов.

Общие сведения. Буровзрывные работы. Погрузка породы. Возведение постоянной крепи. Сооружение сопряжений ствола с околоствольным двором и строительство приствольных камер. Армирование.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Особенности буровзрывных работ при углубке стволов.
2. Средства бурения шпуров.
3. Достоинства и недостатки перфораторов.
4. Средства погрузки горной массы.
5. Конструкции опалубок и условия их применения.
6. Способы формирования углубляемой части ствола при расширении передовой выработки.
7. Достоинства и недостатки применения глубоких скважин.
8. Особенности строительства сопряжений и приствольных камер.
9. Схемы армирования углубляемой части скважины.

Тема 5. Откачка воды из затопленных забоев.

Классификация способов ликвидации внезапных прорывов воды в горные выработки и условия их применения. Ликвидация прорывов воды с помощью открытого водоотлива, с помощью строительства водонепроницаемых перемычек, с помощью тампонирования с поверхности земли, с помощью подводного бетонирования.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Какие существуют группы возможного прорыва воды?
2. Возможные схемы прорыва воды в горные выработки.
3. Меры предупреждения внезапных прорывов воды и плывунов.
4. Конструкции тампонажных подушек.
5. Когда устанавливаются перемычки с дверями?
6. Назначение и устройство фильтрующих перемычек.
7. Когда устанавливаются многоступенчатые тампонажные подушки?
8. Когда применяется способ устраивания тампонажных подушек методом ВПТ?

Тема 6. Строительные работы в период реконструкции шахт.

Технические средства бурения. Совместное действие механизмов удара и резания. Зависимость энергоемкости бурения от усилий полдачи на инструмент.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. От каких факторов зависит выбор подъемных установок и вместимость бадей при углубке вертикальных стволов?
2. Какие условия должны соблюдаться при проветривании углубляемой части ствола?
3. Способы расширения АБК?
4. Способы очистки шахтных вод и бытовых стоков.
5. Конструкция песколовки.
6. На каком принципе основана работа отстойников бытовых стоков.
7. Устройство и принцип работы двухъярусных отстойников.
8. Устройство и принцип работы биофильтров.
9. Устройство и принцип работы аэротенков.
10. Назначение и принцип работы метантенка.
11. Назначение и принцип работы иловых площадок.
12. Назначение контактного бассейна.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа №1

Проектирование и расчёт сборно-разборного предохранительного полка

Цель: овладение методикой проектирования и расчета сбороно-разборного предохранительного полка.

Предохранительный полок

Предохранительные полки (ПП) представляют собой специальные инженерные сооружения, предназначающиеся для восприятия мощных ударных нагрузок от аварийных падений подъемных сосудов и транспортируемых в них грузов.

Предохранительные полки делятся на сплошные, перекрывающие все сечение ствола, и на полки, перекрывающие часть ствола. На сооружение отдельных конструкций полков расходуется до 100-200 т металла и до 100 м^3 леса.

Из многочисленных конструкций ПП наиболее эффективным является сборно-разборный предохранительный полок конструкции кафедры шахтного строительства Уральской государственной горно-геологической академии. Он отличается следующими достоинствами, малая конструктивная высота, возможность многократного использования несущих конструкций полка; универсальность; незначительные затраты средств и времени на монтаж и демонтаж полка.

Устройство и принцип работы сборно-разборных предохранительных полков

Полок представляет собой конструкцию заводского изготовления и рассчитан на многократное использование при общем сроке эксплуатации не менее 20-25 лет. Полок может применяться при углубке стволов любых диаметров и глубин, оборудованных как одно-, так и многоканатными подъемами с любыми типами подъёмных сосудов.

Основным параметром сборно-разборных ПП является их несущая способность, измеряемая максимальной величиной кинетической энергии ударных нагрузок, на восприятие которых они рассчитываются. Для эффективного использования полков в различных горно-технических условиях

предусмотрен параметрический ряд полков, включающий несколько типоразмеров, каждый из которых при определенных значениях его несущей способности и максимальной массы падающих тел может применяться в стволах любой формы и размеров поперечного сечения.

Полок состоит из несущей конструкции, распределительно-утяжеляющего блока, амортизирующего устройства, а также гидроизоляционного и монтажного перекрытий (рис. 1.1).

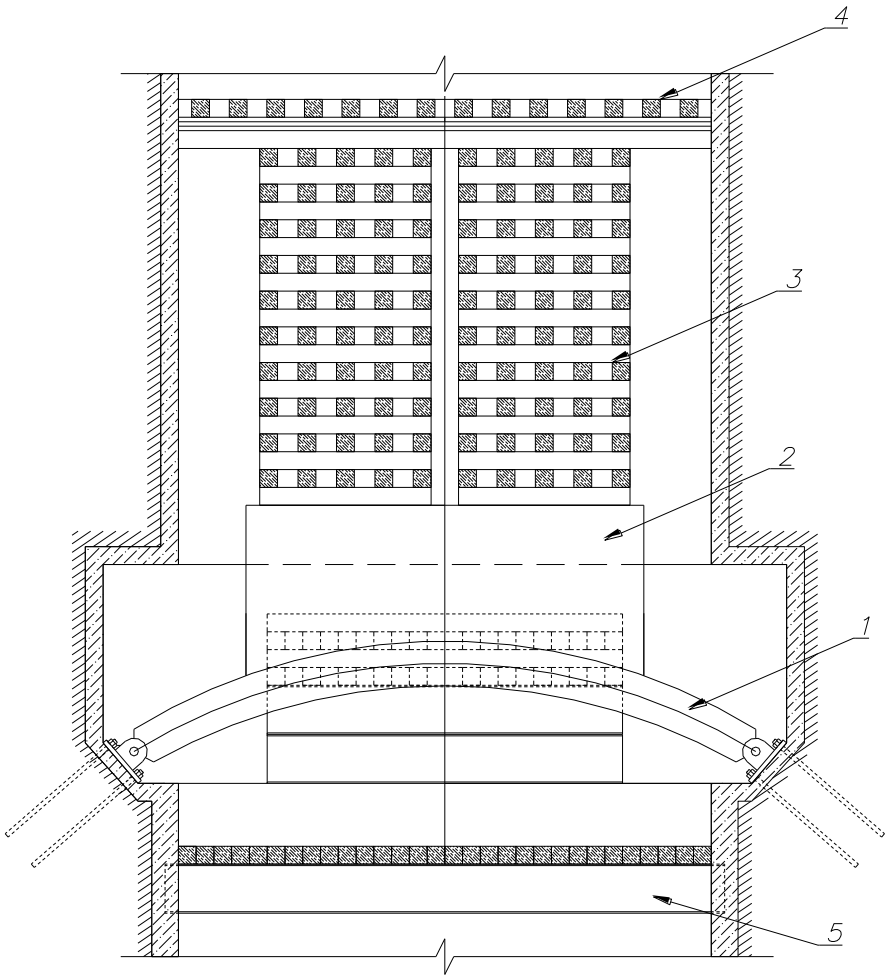


Рис.1.1 Схема сборно-разборного предохранительного полка

1 – несущая конструкция; 2 – распределительно-утяжеляющий блок; 3 – амортизирующее устройство; 4 – гидроизоляционное перекрытие; 5 – монтажное перекрытие.

Несущая конструкция полка представляет собой круговой свод (купол), выполненный из установленных параллельно друг другу двухшарнирных арок. Арки собираются из отдельных секций, изготовленных из литой стали. Каждая арка включает 1-4 (в зависимости от диаметра перекрываемого ствола) основные секции, а также две опорные секции и две опоры ящичного типа. Основные секции соединяются между собой и с опорными секциями при помощи соединительных элементов (накладок), стягиваемых болтами. Опорные

секции шарнирно соединены с опорами. Опоры соединены с бетонной крепью ниши анкерными болтами. Арки соединены между собой болтами-шпильками, что обеспечивает их совместную работу.

Поверх несущей конструкции полка в пределах отделений подъемных, сосудов и противовесов располагают распределительно-утяжеляющий блок. изготавливаемый, как правило, в виде железобетонной плиты соответствующей формы.

На распределительно-утяжеляющем блоке устанавливаются амортизирующие устройства, отдельно для - каждого подъемного отделения ствола, рассчитанные на центральное загружение. Устройства выполняются в виде клеток из сосновых брусьев, соединенных между собой скобами.

Над амортизирующем устройством располагают гидроизоляционное устройство, защищающее полок от обводнения и заиливания. Оно выполняется в виде перекрестного настила из двух рядов брусьев с трехслойным рулонным покрытием между рядами. Сверху брусья перекрываются стальными листами толщиной 2-3 мм. Перекрытие опирается на амортизирующее устройство.

При перекрытии предохранительным полком части сечения ствола полок имеет ограждающую стенку, как и у полков других конструкций, для защиты углубочного отделения от возможного падения в него фрагментов разрушавшегося подъемного сосуда и его содержимого, а также фрагментов разрушенного амортизирующего устройства.

Рассматриваемый ПП также защищает от падения тяжелых тел малого поперечного сечения (рельсы. балки, трубы), обладающих значительной пробивной силой. Сквозное пробивание полка исключается наличием мощного распределительно-утяжеляющего блока.

Монтаж полка начинается с установки монтажного перекрытия и сооружения ниши. Затем монтируются опоры и несущие арки, собирают распределительно-утяжеляющий блок, амортизирующее и гидроизоляционное устройства. Демонтаж полка производят в обратной последовательности. Монтажное перекрытие выполняется из заделываемых в крепь ствола двутавровых балок со сплошным настилом из брусьев.

Работа ПП на восприятие мощных ударных нагрузок протекает следующим образом. При падении в ствол тяжелого крупногабаритного тела оно пробивает гидроизоляционное перекрытие и входит в амортизирующее устройство. Двигаясь с замедлением до полной остановки, тело проходит путь, равный 0,7 – 0,9 начальной высоты амортизирующего устройства. Работа по его разрушению должна поглотить ту часть кинетической энергии удара, которая в соответствии с соотношением массы ударяющего тела и приведенной массы

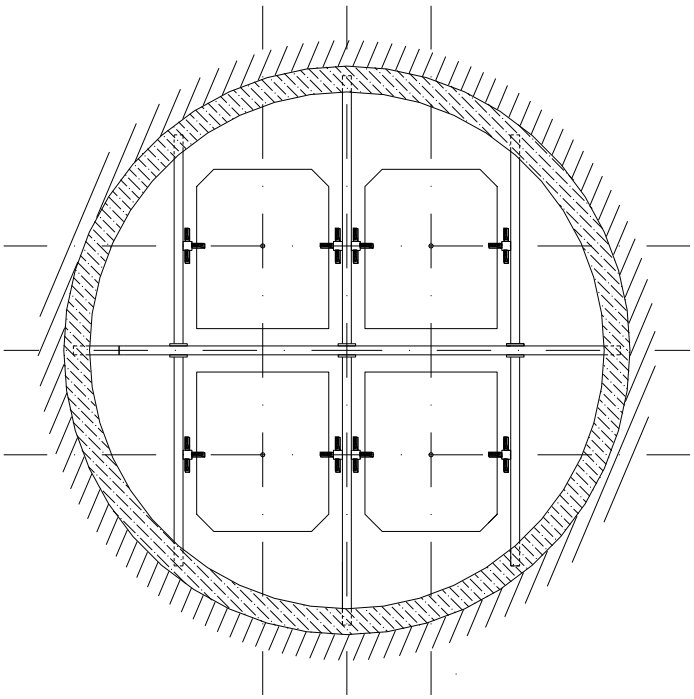
полка затрачивается на местные деформации в зоне соударения. Остальная часть кинетической энергии удара, идущая на общую деформацию полка, вызывает прогиб его арочной несущей конструкции. Динамические усилия через опоры и фундаменты полка передаются окружающему массиву горных пород (по наклонным направлениям вниз и в сторону от ствола). Благодаря значительной величине деформации амортизирующего устройства процесс ударного нагружения ПП растягивается во времени, что уменьшает действующую силу. После достижения этой силой максимального значения происходит процесс разгрузки полка с некоторым отскоком упавшего тела. Величина отскока в связи с близким к абсолютно неупругому (пластическому) характеру удара, обусловленному как значительной деформацией амортизирующего устройства, так и деформацией в ходе соударения самого падающего тела, не должна превышать 1,5 – 2,0 м. Таким образом, в процессе соударения амортизирующее устройство должно работать на разрушение и пластические деформации. распределительно-утяжеляющий блок – на упругопластические и несущая конструкция – на упругие деформации (при условии недостижения динамического предела текучести материала).

Расчет сборно-разборного предохранительного полка

Определение параметров подъемных сосудов и ствола

Рассмотрим порядок определения параметров предохранительного устройства на примере следующей ситуации:

- тип ствола – скиповой ствол;
- глубина ствола – 810 м;
- вместимости скипов – 9,5 $м^3$;
- объемный вес породы целика – 2,6 $т/м^3$;
- модуль упругости:
  - || слоистость – $2{,}83 \cdot 10^4$;
  - ⊥ слоистость – $1{,}91 \cdot 10^4$.
- коэффициент Пуассона – 0,24;
- предельное касательное напряжение – 13,2 МПа;
- Сечение углубляемого ствола:



На основании исходных данных определяем технические характеристики скипа 1УСН9, 1-1. Вместимость скипа 9 $м^3$, ширина 1540 мм, длина 1850 мм, высота 10000 мм; расстояние между проводниками 1650 мм, масса скипа 6,9 т. Определяем минимальное сечение ствола с учетом принятого оборудования и необходимых зазоров и допусков, принимаем ближайшее типовое. В результате построений принимаем следующее: $D_{св} = 6$ *м*.

Исходя из расположения подъемных сосудов в стволе определяем места приложения к полку ударных нагрузок. Поскольку для скиповых подъемов ударное нагружение будет внецентренным, определим эксцентриситет: $l_Э = 0{,}981$ *м*.

Выбор типоразмера сборно-разборного предохранительного полка и его параметров

В качестве энергии удара принимается кинетическая энергия свободно падающего подъёмного сосуда или другого тела:

$$T_0 = \frac{m_0 \cdot V_0^2}{2}, \qquad (1.1)$$

где T_0 – кинетическая энергия падающего сосуда, кДж;

m_0 – масса груженого подъемного сосуда, т;

V_0 – скорость падения сосуда перед ударом, м/с.

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}, \qquad (1.2)$$

где g – ускорение свободного падения, м/с^2;

H_0 – глубина падения подъемного сосуда (глубина ствола), м.

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 810} = \sqrt{15892{,}2} = 126 \ \ м/с.$$

Масса груженого скипа определяется следующим образом: для вместимости 9,5 м^3, грузоподъемность составит 8т, масса скипа 6,9т. Масса груженого подъемного сосуда составит

$$m_0 = 8+6{,}9=14{,}9 \ т.$$

При углубке ствола глубиной более 400 м необходимо учитывать аэродинамическое сопротивление свободному падению, поглощающее часть кинетической энергии подъемного сосуда. По графику зависимости величины скорости падения подъемных сосудов от высоты падения (рис.2) определяем истинную скорость падения скипа.

Кинетическая энергия падающего скипа составит

$$T_0 = \frac{14{,}9 \cdot 113^2}{2} = 95129{,}05 \ \ кДж = 95{,}129 \ \ МДж.$$

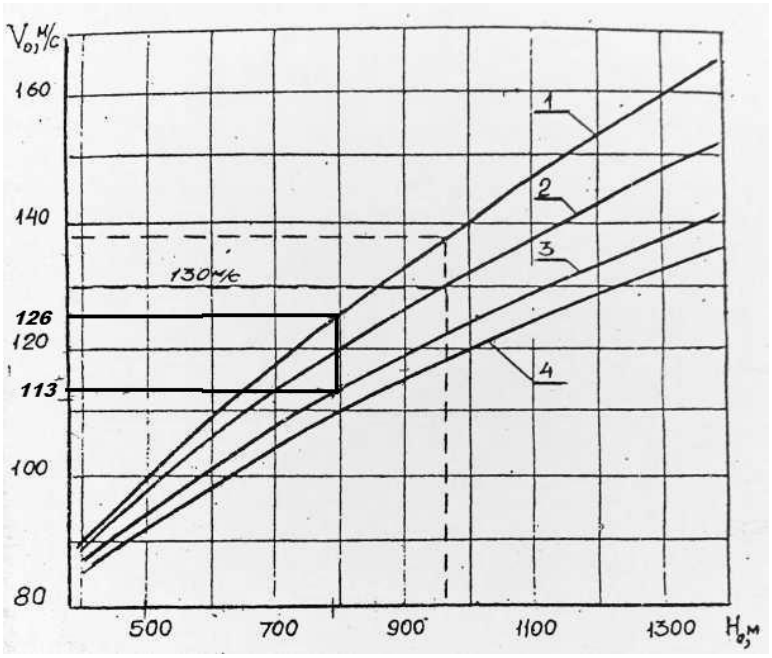


Рис.1.2 Влияние аэродинамического сопротивления воздуха на скорость падения подъемных сосудов

1 – теоретическая скорость; 2 – скип массой 25 т; 3 – скип массой 6 т; 4 – клеть массой 12 т.

Из табл. 1.1 устанавливаем, что для наших условий необходим I типоразмер полка с несущей способностью до 150 МДж.

Таблица 1.1

Технические характеристики сборно-разборного полка

Показатели	Типоразмер полка	
	I	II
Несущая способность полка, МДж	150	250
Диаметр ствола в свету, м	4,0 – 8,5	4,5 – 8,5
Максимальная масса падающих тел, т	12 – 20	20 – 25
Максимальная высота падения тел, м	1000 – 600	1300 – 900
Конструктивная высота полка, м	6 – 8	6,5 – 8,5
Масса металлического полка, т	60 – 90	70 – 100

Исходя из принятого диаметра ствола и типоразмера полка по табл. 1.1 определяем основные параметры несущей конструкции арки:

- диаметр в свету ($Dсв$) – 6 м;
- пролет арки (L_0) – 7 м;
- радиус геометрической оси арки (R_0) – 6,7 м;
- стрела подъема арки (f) – 0,99 м;

- половина центрального угла арки (α_0) – 32 град;
- масса одной арки (P_A) – 12,3 т;
- параметры арки ($H_a \times B$) – 0,6×0,5 м.

Необходимым условием ведения углубочных работ является полное перекрытие арками подъемного отделения ствола. При ширине подъемного отделения ствола 2 м и ширине полки арки 0,5 м необходимо 4 арки. При массе одной арки 12,3 т масса несущей конструкции полка составит

$$m_З = P_A \cdot n_a, \tag{1.3}$$

где $m_З$ – масса несущей конструкции полка, т;

P_A – масса одной арки, т;

n_a – количество арок, шт.

$$m_З = 12{,}3 \cdot 4 = 49{,}2 \ т.$$

Оставшийся сегмент ствола за пределами подъемного отделения перекрывается двумя рядами двутавровых балок, а сверху балки перекроем деревянным настилом из 4-х рядов бруса 200×200 мм на случай падения в него фрагментов подъемного сосуда, его содержимого и фрагментов амортизирующего устройства.

Определение параметров распределительно-утяжеляющего блока

Несущая конструкция полка сверху закрывается монолитным железобетонным распределительно-утяжеляющим блоком прямоугольной формы (бетон класса В-15). Размеры блока определяются следующим образом: ширина блока принимается равной ширине несущей конструкции полка, а длина участка блока для каждого подъемного отделения принимается симметричной относительно оси подвески скипа. Это условие выполняется при длине участка блока, равному удвоенному значению эксцентриситета ($l_Э = 0{,}981 \ м$). Следовательно, общая длина блока для двух подъемных отделений составит

$$l_Б = 4 \cdot l_Э, \tag{1.4}$$
$$l_Б = 4 \cdot 0{,}981 = 3{,}924 \ м.$$

Масса блока (m_2) составит

$$m_2 = (0{,}6 \div 0{,}8) \cdot m_З, \tag{1.5}$$
$$m_2 = 0{,}6 \cdot 49{,}2 = 29{,}52 \ т.$$

При плотности обычного тяжелого бетона $\rho = 2,5\ т/м^3$ объем блока составит

$$V_Б = m_2 / \rho, \qquad (1.6)$$
$$V_Б = 29,52 / 2,5 = 11,808\ м^3.$$

Зная площадь основания блока ($S_Б = 3,924 \cdot 2,0 = 7,848\ м^2$) можно определить его высоту

$$H_Б = V_Б / S_Б, \qquad (1.7)$$
$$H_Б = 11,808 / 7,848 = 1,504\ м.$$

Основание блока опирается на арочную несущую конструкцию и имеет форму сегмента с радиусом

$$R_C = R_0 + \frac{H_a}{2}, \qquad (1.8)$$
$$R_C = 6,7 + \frac{0,6}{2} = 6,7 + 0,3 = 7\ м.$$

Поэтому высоту блока необходимо скорректировать в сторону ее увеличения в зависимости от объема сегмента в основании блока. Для определения объема сегмента необходимо определить его высоту и площадь.
Рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 3.

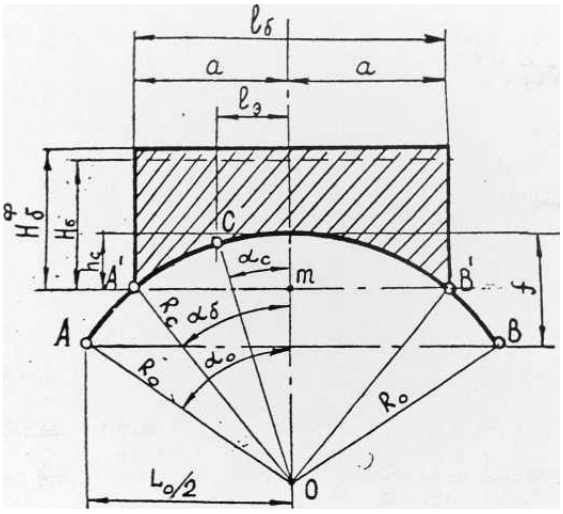


Рис. 1.3 Расчетная схема к определению параметров распределительно-утяжеляющего устройства

Определим угол между вертикальной осью арки и радиусом ее кривизны, проведенным через границу основания блока точку A'

$$Sin\alpha_Б = \frac{l_Б / 2}{R_C}, \quad (1.9)$$

$$Sin\alpha_Б = \frac{3{,}924 / 2}{7} = 0{,}2802$$

$$\alpha_Б = 16{,}05919$$

Определим длину отрезка

$$Om = R_C \cdot \cos\alpha_Б, \quad (1.10)$$

$$Om = 7 \cdot \cos(16{,}05919) = 6{,}57 \ м.$$

Поскольку $R_C = h_C + Om$, найдем высоту сегмента основания блока

$$h_C = R_C - Om, \quad (1.11)$$

$$h_C = 7 - 6{,}57 = 0{,}43 \ м.$$

Теперь можно определить площадь сегмента

$$S_C = 2/3 \cdot h_C \cdot l_Б, \quad (1.12)$$

$$S_C = 2/3 \cdot 0{,}43 \cdot 3{,}924 = 1{,}117 \ м^2.$$

Тогда объем основания блока в форме сегмента будет равен

$$V_C = S_C \cdot \rho, \quad (1.13)$$

$$V_C = 1{,}117 \cdot 2{,}5 = 2{,}794 \ м^3.$$

Выразим этот объем через дополнительную высоту блока $\Delta h_Б$ с основанием $S_Б = 7{,}848 \ м^2$

$$\Delta h_Б = V_C / S_Б, \quad (1.14)$$

$$\Delta h_Б = 2{,}794 / 7{,}848 = 0{,}356 \ м.$$

Таким образом, фактическая высота распределительно-утяжеляющего блока массой 29,52 т и объемом 11,08 м^3 составит

$$H_Б^Ф = H_Б + \Delta h_Б, \quad (1.15)$$

$$H_Б^Ф = 1{,}504 + 0{,}356 = 1{,}86 \ м.$$

Определение параметров амортизирующего устройства

Амортизирующие устройства для обеспечения устойчивости их равновесия при восприятии ударных нагрузок выполняются для каждого подъемного отделения ствола. Они рассчитываются на центральное ударное нагружение и должны иметь высоту, не превышающую их наименьший поперечный размер более чем в полтора-два раза. Амортизирующие устройства

сооружаются из укладываемых перекрестными«рядами .сосновых брусьев сечением 200×200 мм, соединенных между собой строительными скобами. Массу амортизирующего устройства m_1 определяем из соотношения

$$m_1 = (0{,}1 \div 0{,}15) \cdot m_3, \qquad (1.16)$$

$$m_1 = 0{,}1 \cdot 49{,}2 = 4{,}92 \ т.$$

Площадь основания амортизирующего устройства принимается на 25-35 % больше основания скипа. Принимаем параметры основания амортизирующего устройства

$$S_{ау} = 2{,}0 \cdot 1{,}7 = 3{,}4 \ м^2. \qquad (1.17)$$

При плотности установки брусьев $\Delta = (0{,}6 \div 0{,}8) \cdot b$ и плотности древесины $\rho_Д = (0{,}6 \div 0{,}8) \ т/м^3$ высоту амортизирующего устройства определим из следующего соотношения

$$h_{ау} = \frac{m_1}{S_{ау} \cdot \Delta \cdot \rho_Д}, \qquad (1.18)$$

$$h_{ау} = \frac{4{,}92}{3{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7} = 3{,}44 \ м.$$

Высота амортизирующего устройства принимается кратной высоте бруса, отсюда $h_{ау} = 3{,}6 \ м.$

При сечении бруса 200×200 он должен укладываться с шагом 0,25-0,35 м. Шаг укладки бруса и высота клетки уточняются в последующих расчетах.

Определение нагрузок на предохранительный полок

Определяем массу полка, приведенную к линии удара – оси скипа, удаленную от оси арок на расстояние $l_Э = 0{,}981$ *м*.

$$M_{ПР} = k_{пр1} \cdot m_1 + k_{пр2} \cdot m_2 + k_{пр3} \cdot m_3, \qquad (1.19)$$

где $k_{пр1}$ – коэффициент приведения массы амортизирующего устройства, $k_{пр1}$ = 0,33;

$k_{пр2}$ – коэффициент приведения массы распределительно-утяжеляющего блока, $k_{пр2}$ = 0,6;

$k_{пр3}$ – коэффициент приведения массы несущей арочной конструкции, $k_{пр3}$ = 0,4.

m_1, m_2, m_3 – масса соответственно: амортизирующего устройства, распределительно-утяжеляющего блока, несущей конструкции полка, т.

$$M_{ПР} = 0{,}33 \cdot 4{,}29 + 0{,}6 \cdot 29{,}52 + 0{,}4 \cdot 49{,}2 = 39{,}015 \ т.$$

Кинетическая энергия падающего скипа при ударе о полок распределяется на две части:

1. Энергия, идущая на местные деформации полка в зоне соударения и поглощаемая, в основном, амортизирующим устройством, будет равна

$$T' = \frac{M_{ПР}}{m_0 + M_{ПР}} \cdot T_0, \qquad (1.20)$$

$$T' = \frac{39{,}015}{14{,}9 + 39{,}015} \cdot 95129 = 68839{,}39 \ кДж.$$

2. Энергия, идущая на общие деформации полка и воспринимаемая его несущей конструкцией, составит

$$T'' = \frac{m_0}{m_0 + M_{ПР}} \cdot T_0, \qquad (1.21)$$

$$T'' = \frac{14{,}9}{14{,}9 + 39{,}015} \cdot 95129 = 26289{,}66 \ кДж.$$

Динамическая сила в зоне контакта скипа с амортизирующим устройством равна

$$P'_Д = \frac{2 \cdot T'}{\alpha \cdot h_{ау}}, \qquad (1.22)$$

где α – относительная деформация амортизирующего устройства при его ударном смятии, зависящая от жесткости клетки, α = 0,8.

$$P'_Д = \frac{2 \cdot 68839{,}39}{0{,}8 \cdot 3{,}2} = 47805{,}13 \ кН.$$

Динамическая сила, передаваемая на опоры несущей конструкции, равна

$$P'' = \frac{2 \cdot T''}{\alpha \cdot h_{ау}}, \qquad (1.23)$$

$$P'' = \frac{2 \cdot 26289{,}66}{0{,}8 \cdot 3{,}2} = 18256{,}71 \ кН.$$

Значительная разница между силой, действующей в зоне соударения скипа с амортизирующим устройством, и силой, на которую работает несущая конструкция полка, объясняется инерционным характером возникновения этих сил. Это отличие в действии динамических сил аналогично разнице между силами на наковальне и под наковальней при ударе по ней молотком.

Требуемая площадь сечения амортизирующего устройства, выражаемая через суммарную площадь контактов брусьев в верхних перекрестных рядах клетки, непосредственно находящихся под основанием скипа, равна

$$F_{ay} = \frac{P'_{Д} \cdot B_{П}}{\alpha \cdot c_1 \cdot c_2}, \qquad (1.24)$$

где $B_{П}$ – коэффициент, характеризующий податливость материала амортизирующего устройства, $B_{П} = 0{,}31 \cdot 10^{-4}$, м^2/кН;

c_1 – коэффициент, учитывающий увеличение площади контакта брусьев вследствие бокового расширения при ударном смятии, $c_1 = 1{,}2$;

c_2 – коэффициент, учитывающий увеличение площади древесины, участвующей в деформации при ударном смятии в связи с вовлечением в работу участков брусьев, примыкающих к площадкам контактов и к контуру ударяющего по клетке тела, $c_2 = 1{,}3$.

$$F_{ay} = \frac{53780{,}77 \cdot 0{,}31 \cdot 10^{-4}}{0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}3} = 1{,}187 \ \ м^2.$$

Тогда необходимое число площадок контактов брусьев в верхних перекрестных рядах под основанием падающего скипа составит

$$n_n = \frac{F_{ay}}{b^2}, \qquad (1.25)$$

$$n_n = \frac{1{,}187}{0{,}2 \cdot 0{,}2} = 29{,}68 \approx 30 \ \ шт.$$

Теперь необходимо подобрать такой шаг укладки брусьев, чтобы число площадок контактов брусьев в перекрестных рядах, попадающих под основание падающего скипа, удовлетворяло условию $n_n^{Ф} > n$.

В результате подбора сетки расположения брусьев в перекрестных рядах клетки обеспечило необходимое число площадок контактов попадающих под основание скипа, и составило 36 шт. Принимаем по короткой стороне 6 брусьев с шагом 0,3 м и длиной 2,0 м, а в перекрестном ряду 6 брусьев с шагом 0,36 м и длиной 1,7 м. Средняя плотность укладки брусьев составит

$$\Delta_{ср} = \frac{b \cdot n_{кор}}{l_{кор}}, \qquad (1.26)$$

где b – ширина бруса, м;

$n_{кор}$ – количество брусьев по короткой стороне стороне, шт.;

$l_{кор}$ – длина коротокй стороны, м.

$$\Delta_{ср} = \frac{0{,}2 \cdot 6}{1{,}7} = 0{,}7.$$

При такой плотность установки брусьев высота амортизирующего устройства составит:

$$h_{ау} = \frac{4{,}92}{3{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7} = 2{,}95 \ \ м.$$

Окончательно принимаем следующее: высота клетки 3,6 м, число площадок контактов 36 шт.: по длинной стороне 6 брусьев с шагом 0,36 м и длиной 1,7 м, а в перекрестном ряду 6 брусьев с шагом 0,3 м и длиной 2,0 м. Схема расположения брусьев в перекрестных рядах амортизирующего устройства приведена на рис. 5.

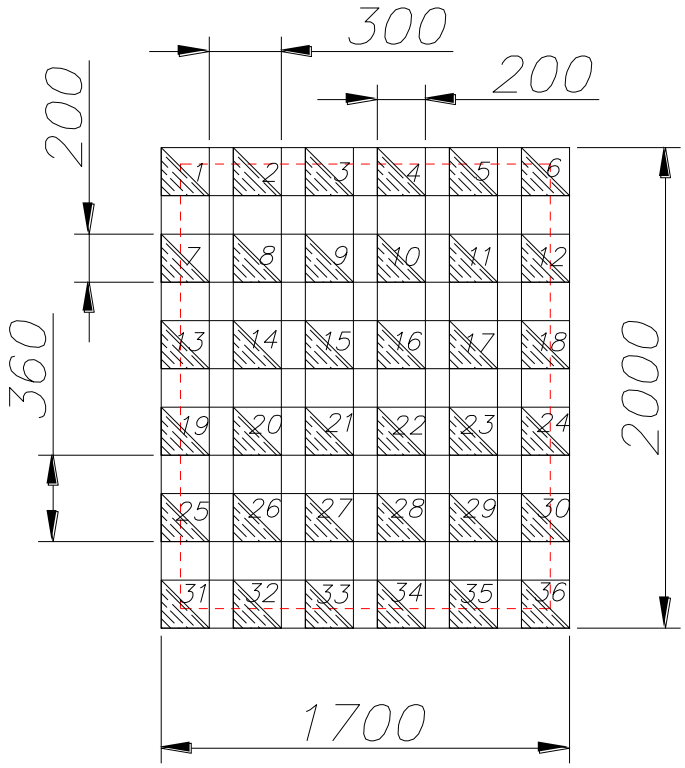


Рис. 1.4 Схема расположения брусьев в перекрестных рядах амортизирующего устройства

Определение усилий, действующих на арки несущей конструкции предохранительного полка

Действие ударной нагрузки от падающего скипа на несущую конструкцию предохранительного полка в рассматриваемом примере является внецентренным относительно ее поперечной оси в плане. Действие ударной нагрузки относительно продольной оси – практически центральным. В соответствии с этим распределение общей нагрузки по аркам несущей конструкции, осуществляемое через распределительно-утяжеляющий блок, принимается равномерным. При этом расчетная нагрузка на одну арку будет равна

$$q_a^{"} = \frac{P^{"}}{n_a}, \tag{1.27}$$

$$q_a^{"} = \frac{18256{,}71}{4} = 4564{,}177 \ \ кН.$$

В целях упрощения расчетов принимаем допущение, что нагрузка действует на арку равномерно в пределах половины длины распределительно-утяжеляющего блока (принятое допущение идет в запас прочности полка). Величина нагрузки на единицу длины загруженного участка арки составит

$$q = \frac{q_a^{"}}{l_Б / 2}, \tag{1.28}$$

$$q = \frac{4564{,}177}{3{,}924 / 2} = 2326{,}288 \ \ кН / м.$$

Определение опорных реакций арки

Вертикальные составляющие реакций для внецентренной схемы нагружения равняются

$$V_a = \frac{q \cdot a \cdot (L_0 + a)}{2 \cdot L_0}, \tag{1.29}$$

$$V_a = \frac{2326{,}288 \cdot 1{,}962 \cdot (7 + 1{,}962)}{2 \cdot 7} = 2921{,}725 \ \ кН.$$

$$V_b = \frac{q \cdot a \cdot (L_0 - a)}{2 \cdot L_0}, \tag{1.30}$$

$$V_b = \frac{2326{,}288 \cdot 1{,}962 \cdot (7 - 1{,}962)}{2 \cdot 7} = 1642{,}452 \ \ кН.$$

Горизонтальные составляющие (распор) для рассматриваемой схемы нагружения составят

$$H_A = H_B = H = k_2 \cdot q \cdot L_0, \qquad (1.31)$$

где k_2 – коэффициент, принимаемый по табл. 2.3[1].

При $f / L_0 = 0{,}1414$ и $a / L_0 = 0{,}2802$ $k_2 = 0{,}3185$.

$$H = 0{,}3185 \cdot 2326{,}288 \cdot 7 = 5187{,}111 \ кН.$$

Тогда полная величина опорных реакций будет равна

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H^2}, \qquad (1.32)$$

$$R_A = \sqrt{2921{,}725^2 + 5187{,}111^2} = 5953{,}369 \ кН.$$

$$R_B = \sqrt{V_B^2 + H^2}, \qquad (1.33)$$

$$R_B = \sqrt{1642{,}452^2 + 5187{,}111^2} = 5440{,}934 \ кН.$$

Определение максимального изгибающего момента и продольной силы, действующих в сечении “С”

Для этого необходимо определить угол между вертикальной осью арки и радиусом её кривизны, проведенным через точку *С*, а также координаты этой точки. Расчетная схема к определению этих параметров приведена на рис. 6.

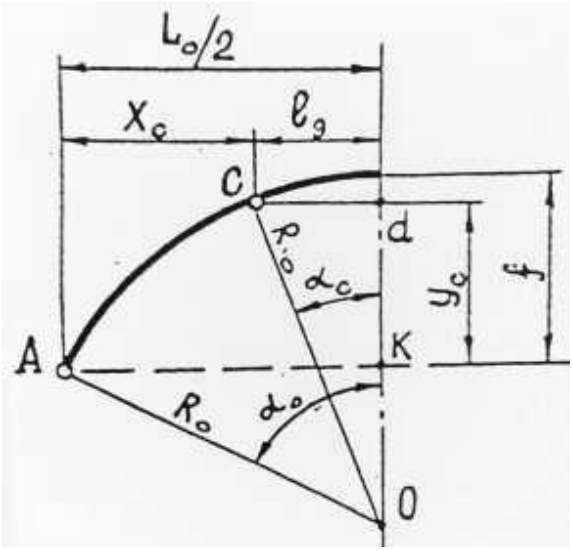


Рис.5 Расчетная схема к определению параметров точки пересечения линий действия удара “С” (оси подвески скипа) с геометрической осью арки

Из ΔOCd определим α_C и Od:

$$Sin\ \alpha_C = \frac{Cd}{OC} = \frac{l_Э}{R_0}, \tag{1.34}$$

$$Sin\ \alpha_C = \frac{0{,}981}{6{,}7} = 0{,}146;\ \ \alpha_C = 8{,}38^\circ$$

$$Od = R_0 \cdot Cos\ \alpha_C, \tag{1.35}$$

$$Od = 6{,}7 \cdot 0{,}9893 = 6{,}62\ \ м.$$

Из ΔOAk определим координату точки C - y_C

$$Ok = R_0 \cdot Cos\ \alpha_0, \tag{1.36}$$

$$Ok = 6{,}7 \cdot Cos\ 32^\circ = 5{,}58\ \ м.$$

Тогда

$$y_C = Od - Ok, \tag{1.37}$$

$$y_C = 6{,}62 - 5{,}58 = 1{,}039\ \ м.$$

$$x_C = Ak - Cd = L_0 / 2 - l_Э, \tag{1.38}$$

$$x_C = 7/2 - 0{,}981 = 2{,}519\ \ м.$$

Максимальный изгибающий момент, действующий в сечении "C" будет равен

$$M_{MAX} = \frac{V_A \cdot (L_0 - a)}{2} - \left(H \cdot y_C + \frac{q \cdot a^2}{8} \right), \tag{1.39}$$

$$M_{MAX} = \frac{2921{,}725 \cdot (7 - 1{,}962)}{2} - \left(5187{,}111 \cdot 1{,}039 + \frac{2326{,}288 \cdot 1{,}962^2}{8} \right) = 850{,}984\ \ кН \cdot м.$$

Продольная сила, действующая в этом же сечении арки, составит

$$N_C = \left(V_A - \frac{q \cdot a}{2} \right) \cdot Sin\ \alpha_C + H \cdot Cos\ \alpha_C, \tag{1.40}$$

$$N_C = \left(2921{,}725 - \frac{2326{,}288 \cdot 1{,}962}{2} \right) \cdot 0{,}146 + 5187{,}111 \cdot 0{,}9893 = 5225{,}263\ \ кН.$$

Проверочный расчет несущей конструкции предохранительного полка

Определим площадь поперечного сечения арки

$$F = 2 \cdot B_a \cdot t + h \cdot d, \tag{1.41}$$

$$F = 2 \cdot 500 \cdot 60 + 480 \cdot 70 = 93600 \ \ мм^2.$$

Радиус кривизны нейтральной оси будет равен

$$r = \frac{F}{B_a \cdot \ln(R_2 / R_1) - (B_a - d) \cdot \ln(R_4 / R_3)}, \tag{1.42}$$

$$r = \frac{93600}{500 \cdot \ln(7000 / 6400) - (500 - 70) \cdot \ln(6940 / 6460)} = 6691{,}96 \ \ мм.$$

Тогда расстояние от нейтральной оси до оси, проходящей через центр тяжести сечения, состарит

$$z_0 = R_0 - r, \tag{1.43}$$

$$z_0 = 6700 - 6691{,}96 = 8{,}04 \ \ мм.$$

Определяем статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси арки

$$S = F \cdot z_0, \tag{1.44}$$

$$S = 93600 \cdot 8{,}04 = 752068{,}4 \ \ мм^3.$$

Максимальное значение нормального напряжения от действия изгибающего момента в сечении арки будет равно

$$\sigma_1 = \frac{M_{\max}}{S} \cdot \frac{(R_2 - r)}{R_2}, \tag{1.45}$$

$$\sigma_1 = \frac{850{,}984 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{752068{,}4} \cdot \frac{(7000 - 6691{,}96)}{7000} = 49{,}79 \ \ МПа.$$

Нормальное напряжение от продольной силы в том же сечении оставит

$$\sigma_2 = \frac{N_C}{F}, \tag{1.46}$$

$$\sigma_2 = \frac{5225{,}263 \cdot 10^3}{93600} = 55{,}82 \ \ МПа.$$

Тогда суммарное наибольшее напряжение в верхних (сжатых) волокнах сечения арки будет равно

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{1.47}$$

$$\sigma_{\max} = 49{,}79 + 55{,}82 = 105{,}61 \ \ МПа.$$

Найденное напряжение ниже расчетного сопротивления стали, равного $\sigma_P^{УД} = 150 \ \ МПа$, то есть условие прочности соблюдается.

Вывод: принятая конструкция предохранительного полка обеспечит безопасные условия углубочных работ.

Контрольная работа №2

Расчет несущей способности породного предохранительного целика

Породный предохранительный целик

В практике углубки вертикальных стволов в качестве средств защиты забоев широко применяются породные целики. Предохранительные целики оставляются в стволах на 8-30 и более метров ниже отметки околоствольного двора последнего рабочего горизонта. Место расположения защитных целиков в углубляемых стволах является строго определенным и не может быть изменено.

Породные целики следует сооружать в породах крепостью не ниже $f = 4$, монолитных, несклонных к внезапным выбросам и размоканию.

Не рекомендуется располагать породные целики в трещиноватых, слоистых породах.

В зависимости от принятого способа и схемы углубки предохранительные целики бывают двух типов - перекрывающие все сечение ствола и с бадьевыми проемами, которые бывают небольшими, занимающими часть сечения целика на его периферии площадью 4-7 м^2, и большими, достигающими половины сечения ствола. Верхняя грань целика обычно покрывается бетоном и служит водосборником. Нижний торец защитных целиков может иметь плоскую или параболическую форму. При плоской форме под целиком устраивают настил из двутавровых балок. Пространство между ними и защитным целиком заполняют накатником из бревен. Настил исключает падение в забой углубляемого ствола отслоившихся кусков породы и увеличивает несущую способность породного целика.

При параболической форме нижнего торца горизонтальные напряжения в целике снижаются до минимума, а прочность его повышается. Это позволяет применить облегченные виды крепи, например, анкерной с металлической сеткой и набрызгбетоном.

Породные целики, перекрывающие часть сечения ствола, применяют в случаях ведения углубочных работ непосредственно через углубляемый ствол. Бадьевой проем может иметь форму сегмента, прямоугольника или круга. Место расположения бадьевого проема зависит от расположения в сечении ствола отделения углубочного подъема. Бадьевое отделение делают минимальным, но не более половины диаметра ствола. При увеличении сечения бадьевого проема в защитном целике возрастают напряжения, которые могут привести к его разрушению.

Бадьевой проем крепят железобетоном, деревом, анкерами, в случаях, когда породный целик перекрывает половину или близкую к ней часть сечения ствола, по боковой обнаженной стороне целика устраивают вертикальную стену из двутавровых балок, уложенных горизонтально через 0,5-0,7 м. Со стороны стены балки обшиваются листовой сталью толщиной 8-10 мм.

Высоту породных целиков принимают не менее диаметра ствола вчерне. На практике высота предохранительных целиков принимается обычно 8-10 м.

Основными достоинствами породных целиков по сравнению с предохранительными полками являются меньшие затраты времени, средств, труда и материалов как при строительстве, так и при ликвидации. Предохранительные породные целики рекомендуется применять везде, где позволяют горно-геологические условия.

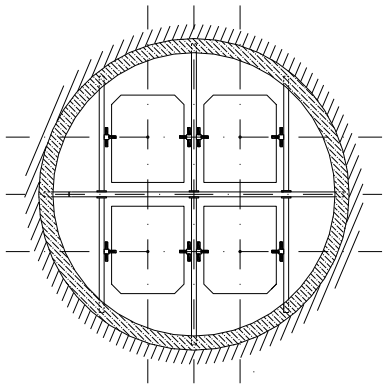
Способ сооружения породных целиков зависит от схемы углубки, организации подготовительных работ, наличия вблизи углубляемого ствола вертикальных или наклонных выработок, пройденных с подготавливаемого или последнего рабочего горизонта, и других факторов.

Расчет несущей способности породного предохранительного целика

Рассмотрим порядок определения параметров породного предохранительного целика на примере следующей ситуации:

- тип ствола – скиповой ствол;
- глубина ствола – 810 м;
- вместимости скипов – 9,5 м^3;
- объемный вес породы целика – 2,6 т/м^3;
- модуль упругости:
  - ❖ || слоистость – $2{,}83 \cdot 10^4$;
  - ❖ ⊥ слоистость – $1{,}91 \cdot 10^4$.
- коэффициент Пуассона – 0,24;
- предельное касательное напряжение – 13,2 МПа;
- Сечение углубляемого ствола:

Сечение углубляемого ствола:



В зависимости от заданного номера сечения ствола и массы груженого подъемного сосуда необходимо определить параметры подъёмных сосудов, а затем определить диаметр ствола. Принимаем диаметр ствола $D_{св} = 6$ *м*, $D_{вч} = 6{,}6$ *м*. Высоту породного целика определяем из условия $h_Ц \geq D_{ВЧ}$ и

принимаем $h_Ц = 7$ *м*. Ширину целика определяем из условия $L_Ц \geq D_{ВЧ} / 2$ и принимаем $L_Ц = 3{,}3$ *м.*

Периметр наиболее опасного сечения определяется по формуле

$$l_П = 2 \cdot a_c + b_c + 2 \cdot d, \qquad (2.1)$$

где a_c *и* b_c – параметры основания подъемного сосуда, м;

d – расстояние от границы породного целика до боковой поверхности основания подъемного сосуда, м.

$$l_П = 2 \cdot 1{,}85 + 1{,}54 + 2 \cdot 0{,}252 = 5{,}434 \ \ м.$$

Определение энергии удара

В качестве энергии удара принимаем кинетическую энергию свободно падающего тела. Она определяется по формуле (1.1) и при прочих равных исходных данных будет равна

$$T_0 = \frac{14{,}9 \cdot 113^2}{2} = 95129{,}05 \ \ кДж = 95{,}129 \ \ МДж.$$

Определение массы породного предохранительного целика

Исходя из принятых параметров породного целика, вес его будет равен

$$P_1 = S_Ц \cdot h_Ц \cdot \gamma_П = \frac{\pi \cdot R_{ВЧ}^2}{2} \cdot h_Ц \cdot \gamma_П, \qquad (2.2)$$

$$P_1 = \frac{3{,}14 \cdot 3{,}3^2}{2} \cdot 7 \cdot 2{,}6 = 311{,}17 \ \ т.$$

Определение КПД удара

Исходя из соотношения веса породного целика и массы скипа, определим КПД удара

$$\eta_0 = \frac{P_1}{(P_1 + m_0)}, \qquad (2.3)$$

$$\eta_0 = \frac{311{,}17}{(311{,}17 + 14{,}9)} = 0{,}954.$$

Определение перемещения по наиболее опасному сечению

Перемещение определяем с учетом анизотропных свойств горных пород, слагающих предохранительный целик

$$U = \sqrt{2{,}4 \cdot L_{ПР} \cdot T_0 \cdot (1-\eta_0) \cdot \frac{E_2 + 2 \cdot \nu \cdot E_1 + E_1}{E_1 \cdot E_2 \cdot h_Ц \cdot l_П}}, \qquad (2.4)$$

где $L_{ПР}$ – приведенная высота сегмента целика, $L_{ПР} = 0{,}67 \cdot L_Ц$, м;

E_1,E_2 – модуль упругости соответственно параллельно и перпендикулярно слоистости, кПа;

ν – коэффициент Пуассона.

$$U = \sqrt{2{,}4 \cdot 0{,}67 \cdot 3{,}3 \cdot 95129{,}05 \cdot (1-0{,}954) \cdot \frac{1{,}91 \cdot 10^7 + 2 \cdot 0{,}24 \cdot 2{,}83 \cdot 10^7 + 2{,}83 \cdot 10^7}{2{,}83 \cdot 10^7 \cdot 1{,}91 \cdot 10^7 \cdot 7 \cdot 5{,}744}},$$

$$U = \sqrt{65{,}15 \cdot 10^{-6}} = 8{,}07 \cdot 10^{-3} \ м.$$

Определение динамической силы, воздействующей на породный целик по наиболее опасному сечению ($R_{ДИН}$)

$$R_{ДИН} = \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot h_Ц \cdot l_П \cdot U}{\left[1{,}2 \cdot L_{ПР} \cdot (E_2 + 2 \cdot \nu \cdot E_1 + E_1)\right]}, \qquad (2.5)$$

$$R_{ДИН} = \frac{2{,}83 \cdot 10^7 \cdot 1{,}91 \cdot 10^7 \cdot 7 \cdot 5{,}744 \cdot 8{,}07 \cdot 10^{-3}}{\left[1{,}2 \cdot 0{,}67 \cdot 3{,}3 \cdot \left(1{,}91 \cdot 10^7 + 2 \cdot 0{,}24 \cdot 2{,}83 \cdot 10^7 + 2{,}83 \cdot 10^7\right)\right]},$$

$$R_{ДИН} = \frac{17{,}539 \cdot 10^{11}}{16{,}18 \cdot 10^7} = 108{,}39 \cdot 10^4 \ кН.$$

Определение расчетного касательного напряжения (напряжения сдвига, $\tau_Р$)

Расчетное касательное напряжение сдвига по наиболее опасному сечению породного предохранительного целика, вызываемое ударом скипа, определяется из условия

$$\tau_Р = \frac{0{,}167 \cdot R_{ДИН}}{h_Ц \cdot l_П}, \qquad (2.6)$$

$$\tau_Р = \frac{0{,}167 \cdot 108{,}39 \cdot 10^4}{7 \cdot 5{,}744} = 0{,}45 \cdot 10^4 \ кН/м^2 = 4{,}5 \ МПа.$$

Тогда условие прочности породного целика должно удовлетворять следующему условию $\tau_Р < [\tau]$,

$$[\tau] = 0{,}167 \cdot \tau_{ПРЕД}, \qquad (2.7)$$

где $\tau_{ПРЕД}$ – предельное касательное напряжение, МПа.

$$[\tau] = 0{,}167 \cdot 13{,}2 = 2{,}2 \ \ МПа.$$

$$4{,}5 \ \ МПа > 2{,}2 \ \ МПа.$$

Таким образом, условие прочности при падении скипа на породный предохранительный целик не выполняется.

Увеличим высоту породного целика, ширину и повторим расчет.

Высоту породного целика принимаем равной 12 м, а ширину 3,8 м.

$$l_{П} = 2 \cdot 1{,}85 + 1{,}54 + 2 \cdot 0{,}752 = 6{,}744 \ \ м.$$

$$T_0 = \frac{14{,}9 \cdot 113^2}{2} = 95129{,}05 \ \ кДж = 95{,}129 \ \ МДж.$$

$$P_1 = \left(\frac{\pi \cdot R_{ВЧ}{}^2}{2} + \frac{D_{ВЧ} + L_{ГР}}{2} \cdot d'' \right),$$

где $D_{ВЧ}$ – диаметр ствола вчерне, м;

$L_{ГР}$ – длина грани целика, м;

d'' – рассояние от границы породного целика до боковой поверхности основания нования подъемного сосуда, м.

$$P_1 = \left(\frac{3{,}14 \cdot 3{,}3^2}{2} + \frac{6{,}6 + 6{,}516}{2} \cdot 0{,}5 \right) \cdot 12 \cdot 2{,}6 = 636{,}39 \ \ т.$$

$$\eta_0 = \frac{636{,}39}{(636{,}39 + 14{,}9)} = 0{,}977.$$

$$U = \sqrt{2{,}4 \cdot 0{,}67 \cdot 3{,}8 \cdot 95129{,}05 \cdot (1 - 0{,}977) \cdot \frac{1{,}91 \cdot 10^7 + 2 \cdot 0{,}24 \cdot 2{,}83 \cdot 10^7 + 2{,}83 \cdot 10^7}{2{,}83 \cdot 10^7 \cdot 1{,}91 \cdot 10^7 \cdot 12 \cdot 6{,}734}},$$

$$U = \sqrt{18{,}53 \cdot 10^{-6}} = 4{,}3 \cdot 10^{-3} \ \ м.$$

$$R_{ДИН} = \frac{2{,}83 \cdot 10^7 \cdot 1{,}91 \cdot 10^7 \cdot 12 \cdot 6{,}744 \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-3}}{\left[1{,}2 \cdot 0{,}67 \cdot 3{,}8 \cdot \left(1{,}91 \cdot 10^7 + 2 \cdot 0{,}24 \cdot 2{,}83 \cdot 10^7 + 2{,}83 \cdot 10^7 \right) \right]},$$

$$R_{ДИН} = \frac{1883{,}48 \cdot 10^{11}}{18{,}63 \cdot 10^7} = 101{,}08 \cdot 10^4 \ \ кН.$$

$$\tau_P = \frac{0{,}167 \cdot 101{,}08 \cdot 10^4}{12 \cdot 6{,}744} = 0{,}208 \cdot 10^4 \ \ кН / м^2 = 2{,}08 \ \ МПа.$$

$$[\tau] = 0{,}167 \cdot 13{,}2 = 2{,}2 \ \ МПа.$$

$$2{,}08 \ \ МПа < 2{,}52 \ \ МПа.$$

Таким образом, условие прочности при падении скипа на породный предохранительный целик можно считать обеспеченным.

Рекомендуемая литература

1. Реконструкция горных предприятий : учебник / В. А. Федюкин, Б. И. Федунец. - Москва : Недра, 1988. - 304 с.

2. Основы горного дела. Общие сведения и понятия горного дела. Подземная, открытая и строительная геотехнологии : учебник / Б. Д. Половов, А. А. Химич, Н. Г. Валиев ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский государственный горный университет. - Екатеринбург : УГГУ, 2012. - 780 с.

3. Реконструкция горных предприятий : учебное пособие / В. В. Першин, А. И. Копытов, В. И. Сарычев. - Новосибирск : Наука, 2014. - 204 с. : ил., табл. - (Высшее горное образование). - Библиогр.: с. 201.

4. Геомеханическое обеспечение шахтного и подземного строительства [Электронный ресурс] : электронный учебник для вузов / Б. Д. Половов, М. В. Корнилков ; Министерство образования и науки РФ, Уральский государственный горный университет. - Электрон. текстовые дан. - Екатеринбург : УГГУ, 2017.

5. Строительство и углубка вертикальных стволов шахт : учебное пособие / В. В. Першин, А. И. Копытов, В. И. Сарычев. - Новосибирск : Наука, 2014. - 351 с. : ил., табл. - (Высшее горное образование). - Библиогр.: с. 344-345..

Учебное издание

Лещуков Николай Николаевич
Прищепа Дмитрий Вячеславович

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению практических и контрольных работ по дисциплине «Реконструкция горных предприятий» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации №5 «Шахтное и подземное строительство»

Редактор *Д. В. Прищепа*

Подписано в печать «__»_____2019 г. Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 3,68. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине
«Разрушение горных пород»
для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Разрушение горных пород: Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 42 с.

Пособие предназначено для выполнения контрольной работы студентов всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Разрушение горных пород».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Лещуков Н.Н.,

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ 6
1.1. Общие положения 6
1.2. Определение параметров буровзрывных работ 6
1.2.1. Выбор взрывчатых материалов 6
1.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров 11
1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов 12
1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб 12
1.2.3.2. Прямые врубы 14
1.2.4. Определение удельного заряда ВВ 18
1.2.5. Выбор диаметра шпура 20
1.2.6. Определение количества шпуров 20
1.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов 22
2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ 24
3. ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ 27
4. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ 30
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 31
ПРИЛОЖЕНИЯ 32
Приложение 1. Образец оформления обложки отчёта 31
Приложение 2. Пример паспорта БВР на прроведение выработки 32
Приложение 3. Задания по расчёту параметров и составлению паспорта БВР на проведение выработки 35
Приложение 4. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок 39

ВВЕДЕНИЕ

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип врубa, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

Отчёт по контрольной работе оформляется на листах стандартного формата А4 (210 мм х 297 мм). Обложка отчёта выполняется в соответствии с образцом, приведённым в Приложении 1.

На первой странице отчёта приводится его содержание с указанием страниц, далее – содержание задания по следующей форме (для примера взято задание № 1 настоящего пособия – Приложение 3):

Задание № 1

Выполнить расчёт и составить паспорт буровзрывных работ для проведения выработки при следующих данных:

– наименование выработки: квершлаг однопутный;
– форма поперечного сечения выработки – сводчатая;
– размеры выработки (высота и ширина) – 3,4х3,3 м;
– площадь сечения вчерне – 10,5 м^2;
– коэффициент крепости пород по шкале проф. М. М. Протодьяконова f = 15;
– категория пород – I;
– обводнённость – с;
– категория шахты по газу или пыли и наличие метана в выработке – не опасная.

После выполнения и оформления расчётной части отчёта приводится паспорт БВР, в котором указываются: характеристика выработки; характеристика пород; исходные данные; схема расположения шпуров в трёх проекциях; кон-

струкция вруба; конструкции зарядов во врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих шпурах; основные показатели взрывных работ; меры безопасности. Пример заполнения паспорта приведён в Приложении 2.

Студенты, обучающиеся по заочной форме и работающие на горном предприятии, в качестве исходных данных для выполнения настоящей работы (характеристики выработки и пород) могут по согласованию с преподавателем взять фактические исходные данные предприятия. Выполнив расчёты и составив паспорт в соответствии с рекомендациями пособия, студент приводит в отчёте также фактически действующий паспорт по принятой выработке и даёт краткий анализ расчётного и фактически действующего паспортов БВР.

1. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

1.1. Общие положения

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

1.2. Определение параметров буровзрывных работ

1.2.1. Выбор взрывчатых материалов

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Едиными правилами безопасности при взрывных работах» (ЕПБ) [1] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [2] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 1.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 1.1

Рекомендуемые ВВ

Условия взрывных работ	Условия размещения зарядов	Коэффициент крепости пород *f*	Тип ВВ	Способ заряжания
Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли	Сухие шпуры	до 12	Гранулит М Граммонит 79/21 Гранулит АС-4В Гранулит-игданит	Механизированный
			Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Гранулит АС-8В	Механизированный
			Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	Ручной
	Обводнённые шпуры	до 12	Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	
Выработки, опасные по взрыву газа и пыли	Сухие и обводнённые шпуры	Для взрывания по породе	Аммонит АП–5ЖВ	Ручной
		Для взрывания по углю с учетом степени опасности	IV кл. Аммонит Т-19 Аммонит ПЖВ-20 V кл. Угленит Э-6 VI кл. Угленит 12ЦБ	
	Для водораспыления	Открытый заряд	Ионит	

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Характеристики ВВ

Наименование ВВ	Идеальная работа взрыва, кДж/кг	Плотность в патронах или насыпная, кг/м^3	Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг	Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м^3	Расстояние передачи детонации между патронами, см		Диаметр патронов, мм	Масса патрона, кг	Длина патрона, мм
					Сухие	После выдержки в воде			
Аммонит № 6ЖВ	3561	1000-1100	3917	1,0	5-9	3-6	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал М-10	4410	950-1100	4520	1,15	4	3	32	0,2	250
Детонит М	4316	1000-1200	4963	1,27	8-18	5-15	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал скальный № 1	4420	1000-1100	4641	1,18	8-14	5-10	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонит АП-5ЖВ	2991	1000-1150	3215	0,82	5-10	2-7	36	0,3	250
Аммонит Т-19	2564	1000-1200	2820	0,72	7-12	4-8	36	0,3	240
Угленит Э-6	1946	1100-1250	2289	0,58	5-12	3-10	36	0,3	240
Угленит 12 ЦБ	1770	1200-1350	2256	0,58	4	2	36	0,3	240
Ионит	1482	1000-1200	1704	0,44	–	–	36	0,3	240
Гранулит М	3163	780-820 (1000-1150)*	3384	0,86					
Гранулит АС-4В	3645	800-850 (1100-1200)*	4192	1,07					
Гранулит АС-8В	3997	800-850 (1100-1200)*	4597	1,17					
Гранулит-игданит	3150	800-850 (1100-1200)*	3760	0,85					

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 1.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 1.3

Электродетонаторы для шахт и рудников

Тип электродетонаторов	Кол-во серий	Интервалы замедления, мс (с)	Безопасный ток, А	Гарантийный ток, А	Сопротивление, Ом	Примечание
ЭД-8Ж(Э)	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности
ЭД-3-Н	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭД-1-8-Т	1	0	1,0	5,0	0,5-0,75	Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам
ЭД-3-Т	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭДКЗ-ОП	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности
ЭДКЗ-П	5	25, 50, 75, 100, 125 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭДКЗ-ПМ	7	15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭД-КЗ-ПКМ	9	4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 1.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 1.4

Характеристики систем неэлектрического инициирования

Устройство	Интервал замедления, мс	Назначение
СИНВ-Ш	0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	Изготовление патронов-боевиков
ДБИ3	0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	

Примечание. Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

1.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 1.5.

Таблица 1.5

Тип вруба и глубина шпуров

Тип буровой техники	Сечение выработки, м^2	
	менее 6	более 6
Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла	Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м	Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м
Установки механизированного бурения	–	Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки (B) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 B, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м^2) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 1.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 1.6.

Таблица 1.6

Параметры вертикального клинового вруба

Группа крепости пород по СНиП	Коэффициент крепости пород *f*	Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм	Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$)		Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град.
			до 12	более 12	
IV-V	1-6	500	4	4-6	75-70
VI	6-8	450	4-6	6-8	68
VII	8-10	400	6-8	8-10	65
VIII	10-13	350	8-10	10-12	63
IX	13-16	300	10-12	12-14	60
X	16-18	300	10-12	12-14	58
XI	20	250	10-12	12-14	55

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (1.1)$$

где e – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 1.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

d – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 1.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 1.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 1.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (1.2)$$

где B – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 1.1).

Таблица 1.7

Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м

Ширина выработки, м	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
2,0	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
2,5	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
3,0	2,1	1,9	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2
3,5	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
4,0	2,8	2,6	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7
4,5	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	2,0	1,9
5,0	3,5	3,1	2,9	2,7	2,4	2,2	2,1

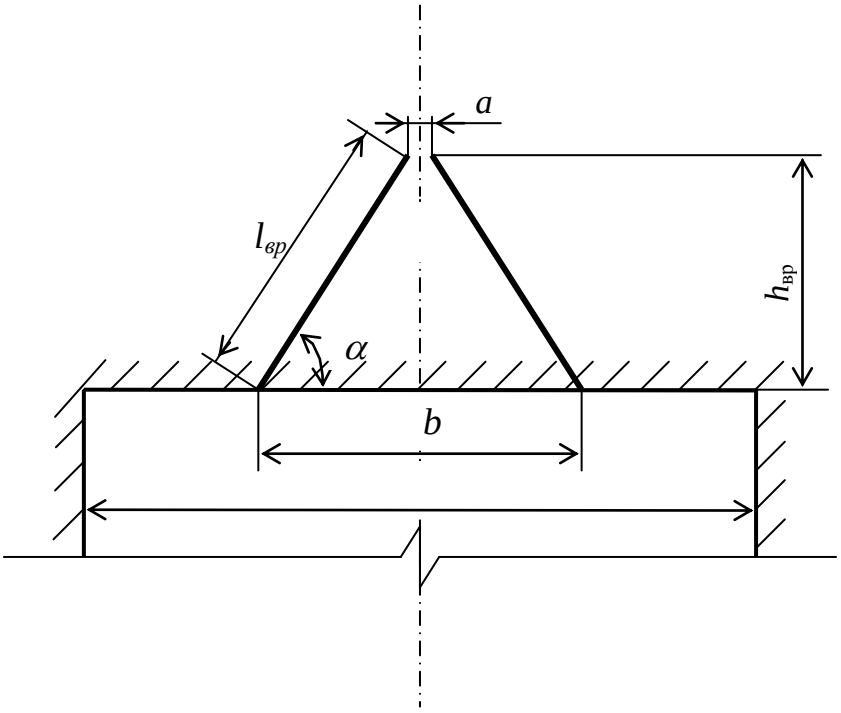


Рис. 1.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0{,}1 \div 0{,}2), \quad (1.3)$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \quad (1.4)$$

где α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \quad (1.5)$$

где *а* – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород *а* = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров α.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 1.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

1.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 1.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние W_1) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 1.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние W_1, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (1.1).

Пробивные расстояния W_1 учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе (W_1, W_2, W_3 и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

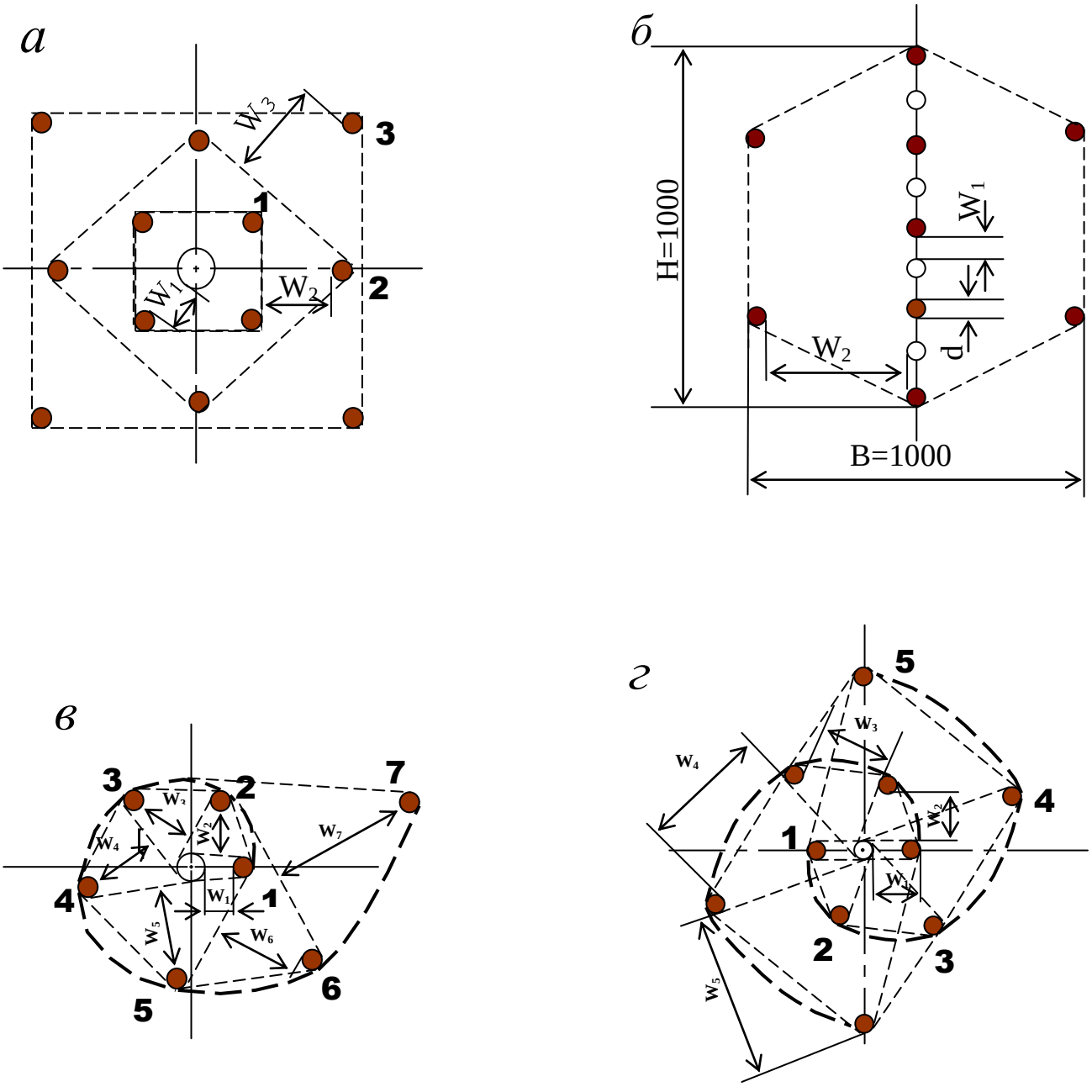


Рис. 1.2. Конструкции прямых врубов:
а – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
г – двойной спиральный

Таблица 1.8

Пробивные расстояния W_1, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	115	100	90	80	60	60	55
51	125	110	100	90	80	70	65
56	150	130	110	95	90	85	75
75	170	150	130	105	100	95	85
105	190	170	150	120	110	105	95
125	230	200	170	140	120	110	100

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 1.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (1.6)$$

где W_1 – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 1.7);

D_x – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

d – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния (W_2, W_3 и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 1.2) в масштабе 1:5.

Таблица 1.9

Пробивные расстояния W_2, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	170	150	140	130	120	115	110
51	180	160	150	140	130	120	115
56	210	180	170	160	150	140	130
75	260	210	200	185	170	150	140
105	300	260	240	215	200	185	175
125	340	300	270	250	230	220	215

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм

Диаметр шпуров, мм	Коэффициент крепости пород *f*						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	1000-900	800	700	650	600	550	500

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м^2 необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 1.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{1.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{1.8}$$

где H – высота вруба, мм;

W_1 – пробивное расстояние, мм;

d – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 1.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние W_2 для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 1.11.

В породах с f >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 1.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 1.11

Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами

Условия взрывания	Класса ВВ			
	II	III-IV	V	VI
По углю	0,6	0,6	0,5	0,4
По породе:				
при f <7	0,5	0,45	0,3	0,25
при f >10	0,4	0,3	–	–

В породах с коэффициентом крепости f < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 1.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

1.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (1.9)$$

где q – удельный заряд ВВ, кг/м^3;

f – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (1.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

f_1 – коэффициент структуры породы;

v – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

e – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (1.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

ρ, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м^3.

Необходимые данные для расчета величины e принимают из табл. 1.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (1.10) и в табл. 1.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы f_1 принимается из табл. 1.12.

Таблица 1.12

Коэффициент структуры породы f_1

Характеристика пород	Категория пород	Коэффициент структуры породы f_1
Монолитные, крепкие, вязкие, упругие	I	1,6
Трещиноватые, крепкие	II	1,2-1,4
Массивно-хрупкие	III	1,1
Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов	IV	0,8-0,9

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (1.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м^2.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах v = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

При щелевом врубе на полную высоту выработки для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (1.9) следует принимать коэффициент зажима породы v = 1,4.

Прямые (дробящие) врубы требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (1.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы v = 1,1–1,4.

1.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 1.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм (см. раздел 3). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

1.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (1.12)$$

где q – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м^3;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

γ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (1.13)$$

где d – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 1.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м^3.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с f = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (1.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 1.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт (раздел 1.2.7).

Таблица 1.13

Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок

Коэффициент крепости пород f	Сечение выработки вчерне, м^2						
	4	6	8	10	12	14	16
2-4	8-11	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	35-42
5-7	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	39-42	43-46
8-10	16-20	21-26	27-32	33-37	38-42	42-46	47-50
12-14	20-24	26-30	32-36	37-42	42-46	46-50	50-54
более 14	26-28	32-36	36-40	44-48	48-52	52-54	56-60

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{вч} - S_{вр}}{N - N_{вр}}}, \qquad (1.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м^2;

N, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87° к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

При применении прямых врубов количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \qquad (1.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м^2.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

1.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \qquad (1.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \qquad (1.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}, \qquad (1.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \qquad (1.19)$$

где d – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (1.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (1.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (1.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (1.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (1.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\ , \quad (1.25)$$

где η – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (1.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м^2, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 1.14 [4].

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м^3 взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (1.27)$$

Таблица 1.14

Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом

Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м^2	Коэффициент крепости пород f		
	1–2	2–9	10–20
до 8	5*	10	12
от 8 до 15	4	8	10
более 15	3	5	7

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\ \eta). \quad (1.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м^3 взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\ l_{шп}\ \eta). \quad (1.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (1.30)$$

где B – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взрывание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 2.1).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (2.1)$$

где R – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

l – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

S – сечение проводов, м^2.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 1.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 2.1

Взрывные приборы и машинки

Наименование прибора (исполнение)	Напряжение, В	Масса, кг	Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом	Назначение и область применения
Конденсаторный взрывной прибор КВП-1/100М (РВ) КВП-2/200М (РН)	 600 1700	 2 2,5	 320 1700	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли
Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ)	610	2,7	320	
Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН)	1600	3,0	200	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{гар}, \qquad (2.2)$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.3}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.4}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{2.5}$$

где I – сила тока в электровзрывной сети, А;

E – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

R – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

n – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

m – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

i – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

r – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{2.6}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 2.2 или рассчитывается по формуле (2.1));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 2.2

Характеристики проводов для электровзрывания

Обозначение	Назначение	Диаметр жилы, мм	Площадь сечения, мм^2	Сопротивление 1 м провода, Ом/м
ВП-05	соединительные	0,5	0,196	0,090
ВП-08	магистральные	0,8	0,502	0,034
ВП-07х2	магистральные	0,7х2	0,769	0,024

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{гар}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{гар} + R}, \tag{2.7}$$

$$m = \frac{E}{2I_{гар} + r}. \tag{2.8}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

3. ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 3.1

Область применения бурильных машин и установочных приспособлений

Коэффициент крепости пород	Тип бурильных машин и установочных приспособлений
1,5–3	Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках
4–6	Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
7–9	Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
10–20	Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с f <8.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переуста-

новку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с $f < 8$; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с f = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с f = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с f = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 3.2 – 3.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м^2 площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м^2 площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 3.2

Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики		Тип бурильной установки					
		УБШ-204 (БУЭ-1М)	УБШ-214А	УБШ-308У (1СБУ-2)	УБШ-303 (1БУР-2)	УБШ-254	УБШ-332Д
Коэффициент крепости пород f		4-8	4-16	8-14	4-16	8-14	8-14
Диаметр шпуров, мм		42	42-52	42-52	42-52	42-52	42-52
Длина шпуров, м		2,75	2,75	2,8	2,8	2,4	3,0
Зона бурения, м^2		6-12	4,2-12	до 20	до 20	до 12	8-22
Бурильная машина	тип	БУЭ	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	«Норит-1» (гидравл.)	М2 (БГА-2М)
	кол-во	1	1	2	2	1	2
Тип платформы		рельс.	рельс.	гусен.	рельс.	гусен.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении:	длина	8,2	6,0	7,8	7,1	7,2	11,0
	ширина	1,3	1,0	1,6	1,15	1,4	1,75
	высота	0,9	1,5	1,7	1,65	1,8	2,3
Масса, т		5,4	4	8,6	5	7,2	12

Таблица 3.3

Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики		Тип бурильной установки				
		Minimatic 205-40	Mini 206-60	Paramatic 305-60	Rocket Bomer 104S	Rocket Bomer 282S
Коэффициент крепости пород *f*		8-20	8-20	8-20	8-20	8-20
Диаметр шпуров, мм		32-50	32-50	32-50	32-50	32-50
Длина шпуров, м		3,4	3,4	3,4	4,0	4,0
Высота обуривания, м		6,0	6,4	7,1	4,7	6,3
Ширина обуривания, м		8,8	9,8	10,4	4,7	8,7
Зона бурения, $м^2$		8-49	8-60	12-68	до 20	до 45
Бурильная машина	тип	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	COP 1838 ME пневмат.	COP 1838 ME пневмат.
	кол-во	2	2	3	1	2
Тип платформы		пневм.	пневм.	пневм.	пневм.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении:						
	длина	12,3	12,7	5,3	9,8	12,1
	ширина	1,98	2,24	2,5	2,0	2,0
	высота	2,35	2,35	2,8	2,6	3,1
Масса, т		19	20	36	14	18

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 $м^2$.

4. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя [1]: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

Образец заполнения паспорта буровзрывных работ приведён в Приложении 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Единые правила безопасности при взрывных работах (ПБ 13-407-01). М., 2001.

2. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

3. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

4. СНиП 3.02.03-84. Подземные горные выработки.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Образец оформления обложки отчёта

Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра шахтного строительства

ОТЧЁТ
по контрольной работе «Расчёт параметров и составление паспорта БВР на проведение горизонтальной горной выработки»

Зав. кафедрой проф. М. В. Корнилков
Руководитель _____
Студент гр. _____ _____

Екатеринбург 2010

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример паспорта БВР на проведение выработки

Утверждаю:
Главный инженер
_____

Паспорт
буровзрывных работ на проведение
_____
(*наименование выработки*)

1. Характеристика выработки

1.1. Форма сечения выработки _____
1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м^2 _____
1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____
- ширина, м _____
1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

2. Характеристика пород

2.1. Наименование пород _____
2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____
2.3. Трещиноватость пород _____
2.4. Обводнённость пород _____

3. Исходные данные

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____
3.2. Способ взрывания _____
3.3. Диаметры - шпуров, мм _____
- патронов, мм _____
3.4. Тип вруба _____
3.5. Материал забойки _____
3.6. Схема соединения электродетонаторов _____
3.7. Источник электрического тока _____

4. Расчётные данные по шпурам

№№ шпуров	Наименование шпуров по назначению	Глубина шпуров, м	Угол наклона шпуров, град.	Расстояние между шпурами, м	Величина заряда в шпуре, кг	Длина заряда, м	Длина забойки в шпуре, м	Очередность взрывания, интервал замедления, мс	Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Схема расположения шпуров

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

6. Конструкции зарядов

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

7. Основные показатели буровзрывных работ

№ п/п	Показатели	Единица измерения	Количество
1	Коэффициент использования шпуров	-	
2	Подвигание забоя за взрыв	-	
3	Объём горной массы за взрыв	$м^3$	
4	Количество шпуров на цикл	шт.	
5	Количество шпурометров на цикл	м	
6	Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки	м шп./м	
7	Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы	м шп./$м^3$	
8	Расход ВВ на цикл	кг	
9	Расход ВВ на 1 метр выработки	кг/м	
10	Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы	кг/$м^3$	
11	Расход средств инициирования на цикл: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	
12	Расход средств инициирования на 1 метр выработки: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	

8. Меры безопасности

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

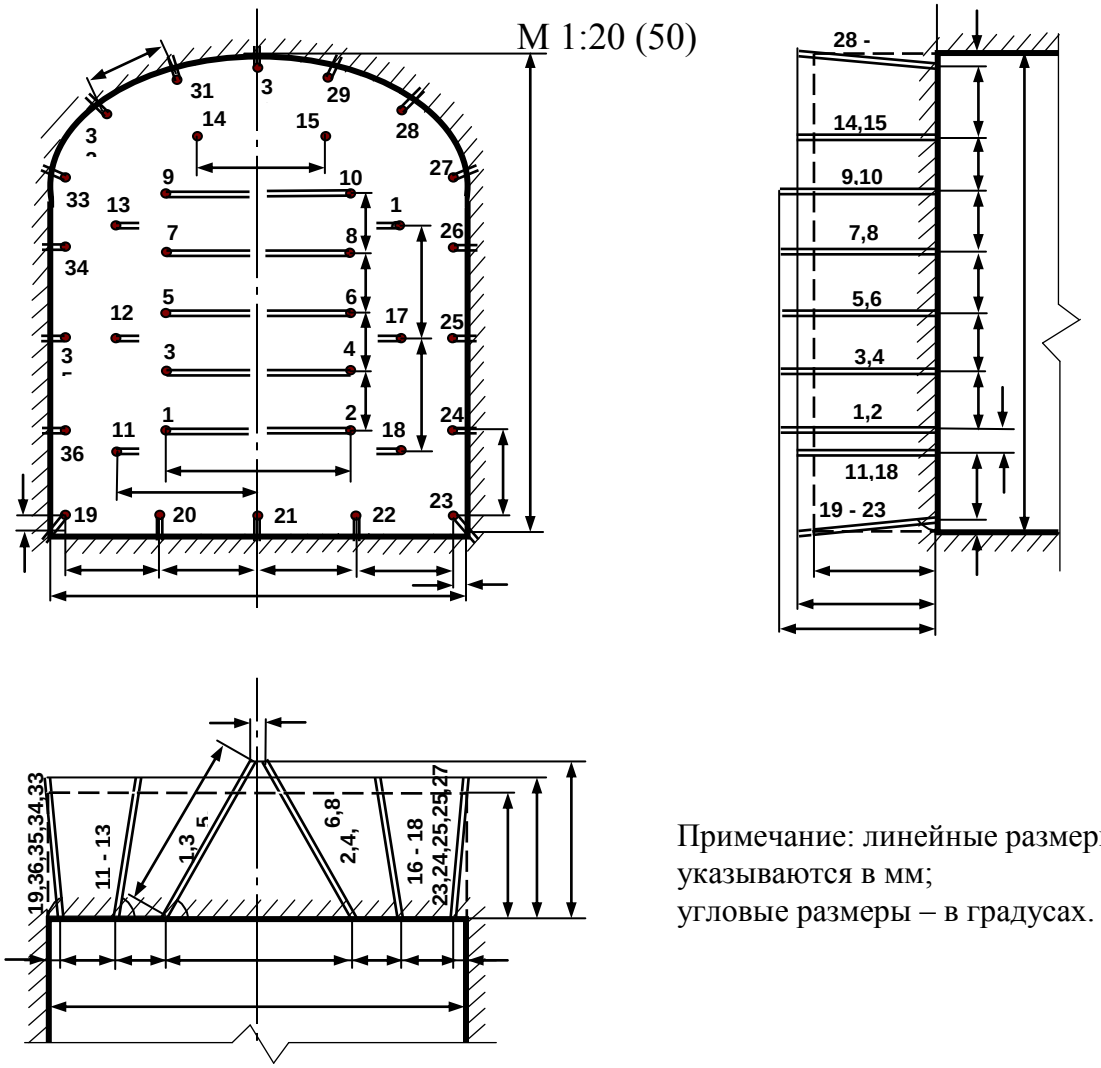
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

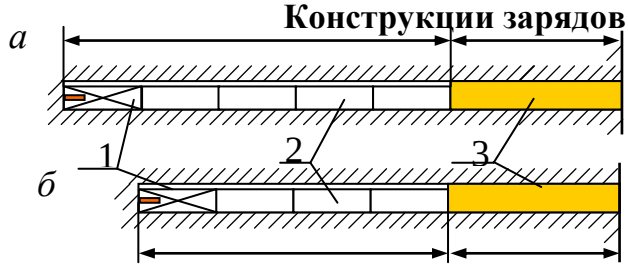
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

Схема расположения шпуров



Примечание: линейные размеры
указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

Конструкции зарядов



а – врубовые шпуры;
б – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

Примечание. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица П3.1

Задания по расчету параметров и составлению паспорта бвр на проведение выработки

№№ заданий	Наименование выработки	Форма сечения выработки*	Размеры выработки $H \times B$, м	Площадь сечения вчерне, м^2	Характеристика пород			Категория шахты по газу или пыли и наличие метана в выработке
					Коэффициент крепости f	Категория пород по табл. 1.12	Обводнённость**	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Квершлаг	Сводчатая	3,4 × 3,3	10,5	15	I	с	Не опасная
2			3,4 × 4,0	12,0	12	I	у	
3			3,4 × 3,6	11,3	14	I	о	
4			3,4 × 3,2	10,2	10	I	у	
5			3,3 × 3,5	10,7	12	I	о	
6			3,1 × 3,2	9,2	10	I	о	
7			3,3 × 3,7	11,3	6	II	о	
8			3,5 × 3,2	10,5	8	II	с	
9			3,6 × 3,8	12,7	8	IV	у	
10			3,5 × 3,9	12,6	10	II	с	
11			3,4 × 3,4	10,8	6	III	о	
12			3,2 × 3,0	9,0	12	IV	у	
13			3,5 × 3,9	12,6	18	IV	о	
14			3,1 × 3,2	9,2	5	III	о	
15			3,4 × 3,6	11,3	8	III	с	
16			3,3 × 3,5	10,7	18	II	с	
17			3,5 × 3,2	10,5	14	I	о	
18			3,1 × 3,2	9,2	20	II	у	
19			3,4 × 4,0	12,5	16	I	о	
20			3,4 × 4,0	12,5	4	III	о	

Продолжение табл. П3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	Квершлаг	Трапецевид.	3,5 × 3,7 / 3,3	12,3	8	II	с	
22			3,5 × 3,9 / 3,1	12,3	10	I	о	
23			3,5 × 3,7 / 3,0	11,7	12	III	с	
24			3,6 × 3,9 / 3,1	12,6	14	III	у	
25			3,0 × 3,6 / 2,9	9,8	16	I	о	
26			3,8 × 3,4 / 2,8	11,8	18	I	с	
27			3,6 × 4,0 / 3,3	13,1	6	VI	с	
28			3,6 × 4,2 / 3,5	13,9	8	III	о	
29			3,6 × 4,0 / 3,3	13,1	10	III	у	
30			3,6 × 4,2 / 3,5	13,9	15	I	с	
31			3,6 × 4,0 / 3,3	13,1	18	II	у	
32			3,5 × 3,9 / 3,1	12,3	6	IV	о	
33			3,2 × 3,9 / 3,1	11,2	8	III	о	
34			3,5 × 3,9 / 3,1	12,3	9	III	о	
35			3,2 × 3,9 / 3,1	11,2	14	III	у	
36			3,6 × 3,8 / 3,0	12,2	18	I	с	
37			3,6 × 3,8 / 3,0	12,2	8	III	о	
38			3,4 × 3,8 / 3,0	11,6	12	II	у	
39		Сводчатая	3,7 × 5,0	16,8	6	IV	с	
40			3,7 × 5,0	16,8	9	III	у	
41			3,7 × 4,5	15,2	11	IV	с	
42			3,7 × 5,0	16,8	13	II	с	
43			3,7 × 4,4	14,9	14	I	о	

Продолжение табл. П3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	Квершлаг	Сводчатая	3,5 × 4,6	15,5	16	II	о	Не опасная
45			3,6 × 4,9	16,0	4	IV	о	
46			3,6 × 4,7	15,4	8	III	у	
47			3,6 × 4,9	16,0	10	II	с	
48			3,6 × 4,2	13,9	12	II	о	
49			3,6 × 4,9	16,0	14	II	о	
50			3,6 × 4,9	16,0	6	II	с	
51			3,6 × 4,3	14,2	8	III	о	
52			3,7 × 4,3	14,2	4	IV	о	
53			3,7 × 4,0	13,7	6	IV	с	
54			3,7 × 4,3	14,2	9	III	о	
55			3,7 × 3,9	13,4	10	II	о	
56			3,7 × 4,9	16,5	10	II	о	
57			3,7 × 4,1	14,0	14	II	с	
58			3,9 × 4,0	14,5	16	I	у	
59	Штрек	Арочная	3,0 × 3,2	8,5	4	IV	о	I
60			3,0 × 3,4	8,9	6	IV	о	II
61			3,3 × 3,3	9,7	8	III	с	III
62			3,3 × 3,4	10,0	4	III	у	II
63			3,2 × 3,2	9,1	6	II	с	III – выделения метана отсутствуют
64			2,8 × 3,4	8,3	4	IV	о	II
65			3,0 × 3,2	8,5	10	II	о	III – выделения метана отсутствуют
66			3,0 × 2,8	7,5	2 (уголь)	IV	с	II
67			3,2 × 4,0	11,0	2 (уголь)	IV	о	II
68			3,6 × 3,8	12,1	2	IV	о	III

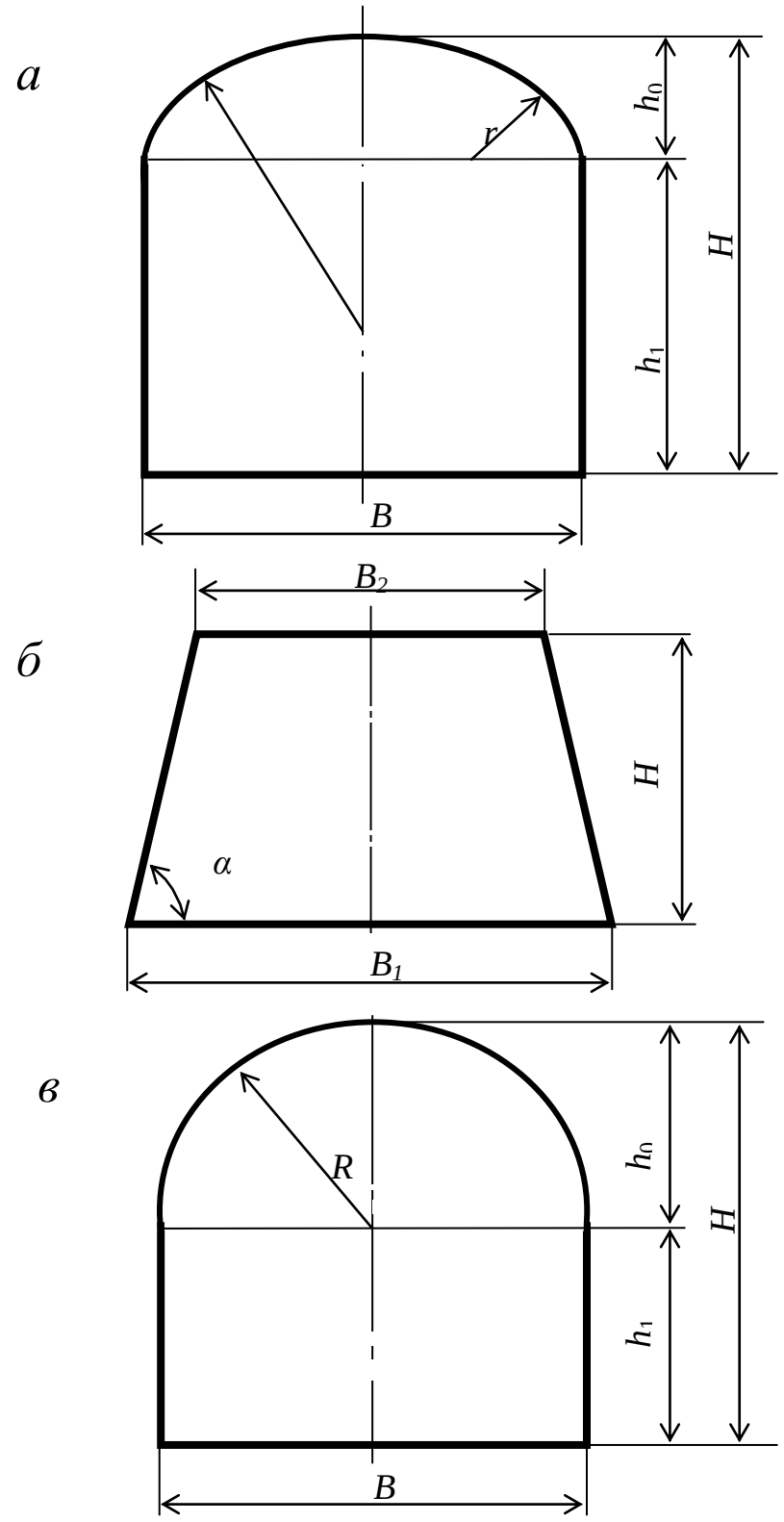
Окончание табл. П3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
69	Штрек	Сводчатая	3,2 × 4,0	11,0	5	IV	у	II
70			3,2 × 4,0	11,0	8	II	у	IV – выделения метана отсутствуют
71			3,4 × 4,0	11,8	6	III	с	
72			3,2 × 4,0	11,0	12	I	у	II – выделения метана отсутствуют
73			4,2 × 4,4	16,4	1,5 (уголь)	IV	с	I
74			4,0 × 4,2	14,9	4	IV	у	I
75			4,2 × 4,4	16,4	6	III	с	II
76			4,0 × 4,2	14,9	8	II	с	IV – выделения метана отсутствуют
77			3,8 × 4,4	14,6	7	II	о	III
78			4,2 × 5,0	18,3	8	IV	с	I
79			3,8 × 4,4	14,6	10	I	о	II – выделения метана отсутствуют
80			3,4 × 4,0	11,8	10	II	о	

[*] Рекомендации для вычерчивания контура поперечного сечения выработки приведены в Приложении 4.
[**] В столбце 8 «Обводнённость пород» приняты следующие обозначения: с – сухие, у – увлажнённые и о – обводнённые.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Формы поперечного сечения горизонтальных выработок



$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
а – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
б – трапецевидная;
в – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок приведены в табл. П4.1.

Таблица П4.1

Форма поперечного сечения выработки	Площадь поперечного сечения	Периметр
Сводчатая с коробовым сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$
Трапециевидная	$\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$	$B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$
Арочная с полуциркульным сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадьевич
Лещуков Николай Николаевич

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 3,28. Тираж 400. Заказ

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Разрушение горных пород: Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе по дисциплине для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, Н. Н. Лещуков, Д. В. Прищепа; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 59 с.

Материал пособия охватывает все раздела дисциплины в соответствии с учебником [1].

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов и выполнению практических заданий всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Разрушение горных пород».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Лещуков Н.Н.,
© Прищепа Д. В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 5
1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА 6
2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ 7
3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ 19
Практико-ориентированное задание №1 19
Практико-ориентированное задание №2 23
Практико-ориентированное задание №3 26

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студента является важнейшей составной частью образовательной программы подготовки дипломированного специалиста. В соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования объем учебной нагрузки студента составляет 180 часов или 5 зачетных единиц. Из них 89 часов отводится на самостоятельную работу студентов.

По курсу «Разрушение горных пород» обязательная самостоятельная работа студента осуществляется в следующих направлениях – *освоение материалов по отдельным темам, входящим в Рабочую учебную программу дисциплины; подготовка, оформление, защита практико-ориентированных заданий; подготовка и защита контрольной работы*. Дополнительная самостоятельная работа связана с углубленным изучением отдельных разделов курса на основе научно-исследовательской работы студента (НИРС).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов – освоения отдельных тем дисциплины.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В следующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Разрушение горных пород». Она содержит названия 30 основных тем с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов в экзаменационном билете. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Причем в экзаменационный билет может включаться один из вопросов по такой теме. Основной объем информации по каждой теме содержится в учебнике по курсу [1].

При освоении указанных ниже тем *рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента:*

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебнику [1] освойте каждый структурный элемент темы. Во всех темах указаны разделы и страницы учебника, содержащие данный материал.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Тема 1. Краткая история развития взрывных работ.

Значение взрывных работ в горнодобывающей промышленности и в строительстве. История развития взрывных работ.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Охарактеризуйте основные вехи развития взрывных работ.
2. Опишите первую технологию ведения взрывных работ в горном деле.
3. Назовите первое нитроглицериновое взрывчатое вещество.
4. Опишите историю развития средств инициирования.

Тема 2. Современные виды взрывных работ.

Современные виды взрывных работ в промышленности. Основные виды взрывных работ. Специальные виды взрывных работ.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Назовите современные виды взрывных работ.
2. Назовите современные виды специальных взрывных работ.

Тема 2. Способы бурения шпуров и скважин.

Классификация способов бурения шпуров и скважин. Механическое бурение и его виды. Термическое бурение и его виды. Специальные виды бурения шпуров и скважин.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Приведите классификацию способов бурения шпуров и скважин.
2. Опишите суть механических видов бурения шпуров и скважин.
3. Опишите суть термических видов бурения шпуров и скважин.
4. Опишите суть специальных видов бурения шпуров и скважин.
5. Укажите рациональные области применения механических, термических и специальных видов бурения шпуров и скважин.

Тема 3. Ударно-поворотный способ бурения.

Механизм разрушения горных пород при ударно-поворотном бурении. Механизмы скола и выкола. Зависимость скорости ударно-поворотного бурения от осевого усилия, частоты вращения. Оборудование.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Укажите рациональную область применения ударно-поворотного бурения.
2. Охарактеризуйте механизмы скола и выкола.
3. Опишите механизм разрушения горных пород при ударном внедрении инструмента.
4. Укажите бурильные машины ударно-поворотного бурения.
5. Отметьте факторы, которые повышают энергоемкость ударного бурения по сравнению с другими способами.
6. Укажите последовательность процессов, происходящих при разрушении породы при ударном бурении.

Тема 4. Вращательный способ бурения.

Технические средства вращательного бурения. Работа ядра уплотнения при резании пород. Зависимость объема разрушения от толщины стружки. Режимы самозаточки и затупления режущей грани сверла. Оборудование.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Назовите преимущества вращательного бурения.
2. Укажите бурильные машины вращательного бурения.
3. Охарактеризуйте основные механизмы износа и затупления бурового инструмента при вращательном бурении.
4. Опишите механизм разрушения горных пород при вращательном бурении.

Тема 5. Ударно-вращательный и вращательно-ударный способ бурения.

Технические средства бурения. Совместное действие механизмов удара и резания. Зависимость энергоемкости бурения от усилий полдачи на инструмент.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Укажите область применения вращательно-ударного бурения.
2. Укажите область применения ударно-вращательного бурения.
3. Назовите преимущества вращательно-ударного бурения.
4. Охарактеризуйте зависимость энергоемкости бурения от усилия подачи.
5. Назовите машины и механизмы, реализующие ударно-вращательный способ бурения.
6. Назовите машины и механизмы, реализующие вращательно-ударный способ бурения.

Тема 6. Шарошечное бурение.

Технические средства бурения. Механизм шарошечного бурения. Режимы бурения в зависимости от осевого усилия. Контактная прочность пород как критерий буримости.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Назовите особенности шарошечного бурения.
2. Опишите зависимость скорости бурения от величины осевого усилия.
3. Назовите машины и механизмы, реализующие шарошечное бурение.
4. Укажите область применения шарошечного бурения.

Тема 7. Основы теории взрыва и взрывчатых веществ.

Виды взрыва: механический, тепловой, электрический, ядерный, химический. Необходимые условия химического взрыва. Взрывчатое вещество. Классификация взрывчатых систем по физическому состоянию.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию взрыв.
2. Приведите пример механического взрыва.
3. Приведите пример Теплового взрыва.
4. Приведите примеры тепловых взрывов.
5. Охарактеризуйте химический взрыв.
6. Назовите необходимые условия химического взрыва.

Тема 8. Свойства взрывчатых веществ.

Классификация свойств взрывчатых веществ. Технологические свойства взрывчатых веществ. Специальные свойства взрывчатых веществ.

Литература: [1, 2]

Контрольные вопросы:

1. Приведите классификацию свойств взрывчатых веществ.
2. Назовите основные технологические свойства взрывчатых веществ.
3. Что такое кислородный баланс.
4. Назовите виды кислородного баланса.
5. Какие газы выделяются при положительном кислородном балансе.
6. При каком кислородном балансе образуется окись углерода (CO)?

Тема 9. Начальный импульс и чувствительность взрывчатых веществ.

Начальный импульс. Виды начального импульса. Инициирование. Чувствительность взрывчатых веществ. Способы изменения чувствительности.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию «Начальный импульс».
2. Охарактеризуйте тепловой начальный импульс.
3. Какой вид начального импульса является основным для горного дела?
4. Перечислите пробы на чувствительность.
5. Что такое сенсибилизатор?
6. Приведите пример веществ вводимых в состав взрывчатых веществ для флегматизации.

Тема 10. Формы химического превращения взрывчатых веществ.

Основные формы химического превращения взрывчатых веществ. Режимы химического превращения: термический распад, горение, конвективное горение, детонация

Литература: [1, 2, 3]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные формы химического превращения.
2. Дайте характеристику горению как форме химического превращения.
3. Дайте характеристику детонации как форме химического превращения.

Тема 11. Основные положения теории детонации.

Механизм детонации. Графическая интерпретация процесса детонации – адиабата Гюгонио. Количественная оценка характеристик процесса детонации.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите особенности детонационной волны.
2. Дайте определение понятию «Детонация».
3. Приведите основные детонационные характеристики взрывчатых веществ.

Тема 12. Экспериментальные методы определения скорости детонации.

Классификация методов определения скорости детонации взрывчатых веществ. Метод Дотриша. Осциллографический метод. Метод скоростной фотосъемки. Реостатный метод.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Охарактеризуйте метод Дотриша, для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
2. Назовите отличительные особенности осциллографического метода для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
3. Опишите процедуру измерения скорости детонации используя реостатный метод.

Тема 13. Факторы, влияющие на скорость и устойчивость детонации.

Группы факторов влияющие на скорость и устойчивости детонации. Влияние внутреннего состава и строения на скорость и устойчивость детонации. Влияние условий взрывания на скорость детонации.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Как влияет дисперсность взрывчатого вещества на скорость и устойчивость детонации?
2. Как влияет плотность взрывчатого веществ на скорость детонации?
3. Дайте определение понятию «критический диаметр детонации».
4. Как влияет на скорость и устойчивость детонации наличие плотной оболочки на заряде взрывчатого вещества.
5. Влияние величины начального импульса на устойчивость детонации.

Тема 14. Работа взрыва.

Работа взрыва: баланс энергии при взрыве. Потери при переходе потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва. Полезная работа взрыва. Бризантность и фугасность. Пробы на бризантность и фугасность.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Опишите переход потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва.
2. Чем обусловлены химические потери при взрыве?
3. Чем обусловлены тепловые потери при взрыве?
4. Охарактеризуйте бесполезные формы работы взрыва.
5. Что такое бризантность взрывчатых веществ.
6. Назовите формы проявления фугасной работы взрыва.

Тема 15. Основные положения теории предохранительных взрывчатых веществ.

Необходимость применения предохранительных взрывчатых веществ. Теории предохранительных взрывчатых веществ. Методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

Литература: [1, 2]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию пламегаситель.
2. Дайте определение понятию ингибитор.
3. Перечислите основные гипотезы воспламенения горючих шахтных сред.
4. Перечислите возможные пути предотвращения воспламенения горючих шахтных сред.
5. Охарактеризуйте методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

Тема 16. Заряд взрывчатого вещества.

Заряды взрывчатых веществ. Классификация. Воронка взрыва и ее элементы. Показатель действия взрыва.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. По каким признакам классифицируются заряды взрывчатых веществ.
2. Перечислите элементы воронки взрыва.
3. Что такое показатель действия взрыва.
4. Как классифицируются заряды взрывчатых веществ по показателю действия взрыва.

Тема 17. Действие взрыва.

Действие сосредоточенного заряда в твердой однородной безграничной среде и при наличии обнаженной поверхности. Стадии разрушения: образование газовой полости, зоны дробления, зона радиальных и кольцевых трещин, откольные явления. Соотношение бризантного и фугасного действия взрыва в зависимости от акустической жесткости разрушаемых пород.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Отразите последовательность развития взрыва в горных породах.
2. Отметьте области действия взрыва, образующие зону регулируемого дробления.
3. Какие трещины образуются в горной породе при падении давления и обратной деформации пород в сторону зарядной полости?

4. Какие трещины образуются при отражении волны сжатия от свободной поверхности горной породы?

Тема 18. Классификации промышленных взрывчатых веществ.

Классификация ВВ: по характеру воздействия на окружающую среду, по чувствительности к простым формам начального импульса, физическому состоянию. Классификация по химическому составу – индивидуальные ВВ и взрывчатые смеси. Классы ВВ по условиям применения.

Литература: [1, 2, 4, 6]

Контрольные вопросы:

1. К какой группе относятся взрывчатые вещества, имеющие скорость детонации 4000 м/с?
2. Какие классы промышленных ВВ выделяют по химическому составу?
3. К какому классу промышленных ВВ по химическому составу относится тротил, детонит?
4. Какие ВВ можно использовать только при взрывных работах на поверхности, в шахтах опасных по газу и пыли? Укажите номер класса и цвет оболочки.
5. Какой цвет имеют патроны предохранительных ВВ?
6. По какому характерному признаку выделяют первичные и вторичные ВВ?

Тема 19. Непредохранительные взрывчатые вещества I класса по условиям применения.

Предъявляемые требования. Нитросоединения: свойства, ассортимент, область применения. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные свойства гранулотола.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ.
3. Бестротиловые взрывчатые вещества: особенности, свойства.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ.

Тема 20. Непредохранительные взрывчатые вещества II класса по условиям применения.

Предъявляемые требования. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Порошкообразные ВВ – аммониты и аммоналы. Свойства и область применения.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные свойства граммонита 79/21.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.
3. Назовите отличительные особенности патронированных аммонитов.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.

Тема 21. Предохранительные взрывчатые вещества III – VII классов по условиям применения.

Требования к энергетическим и детонационным характеристикам предохранительных ВВ. Требования к кислородному балансу. Требования к составу и строению зарядов.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите названию взрывчатых веществ III класса по условиям применения.
2. Какие добавки вводят в состав предохранительных взрывчатых веществ?
3. Укажите требования, предъявляемые к предохранительным ВВ.

Тема 22. Методы производства взрывных работ.

Классификация методов производства взрывных работ. Метод шпуровых зарядов. Метод скважинных зарядов. Метод камерных зарядов. Метод наружных зарядов. Область применения, достоинства и недостатки методов.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите области применения метода шпуровых зарядов в подземных условиях.
2. Укажите область применения метода шпуровых зарядов при открытой разработке месторождений.
3. Укажите область применения метода скважинных зарядов.
4. Укажите область применения метода наружных зарядов.

Тема 23. Метод шпуровых зарядов при проведении подземных горных выработок.

Состав проходческого цикла. Коэффициент использования шпуров (КИШ). Коэффициент излишка сечения (КИС). Врубовые, отбойные и оконтуривающие шпуры. Очередность взрывания. Конструкции шпуровых зарядов. Размер и качество забойки. Прямое и обратное инициирование зарядов. Назначение и типы врубов. Конструкции наклонных врубов; их достоинства и недостатки. Конструкции прямых врубов; их достоинства и недостатки. Комбинированные врубы. Принципы расчета параметров буровзрывных работ.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите типы шпуров при проходке выработки.
2. Укажите очередность взрывания шпуров в типовой технологии проходки выработок.
3. Укажите условия, соответствующие обратному инициированию заряда.
4. Отметьте достоинства прямого инициирования заряда ВВ по сравнению с обратным.
5. Отметьте достоинства обратного инициирования заряда ВВ по сравнению с прямым.

Тема 24. Метод шпуровых зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.

Технология шпуровой отбойки при разработке рудных месторождений. Расчет параметров БВР. Технология шпуровой отбойки угля. Правила безопасности при использовании метода шпуровой отбойки.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Опишите существо метода шпуровых зарядов при добыче полезных ископаемых подземным спопобом.
2. Укажите классы ВВ допущенные к применению при шпуровой отбойке по углю.
3. Какой способ взрывания допущен к применению при шпуровой отбойке угля?
4. Какова допустимая величина уходки (м) при добыче угля методом шпуровых зарядов?

5. Какова величина предельного содержание метана в забое (в %), при котором разрешена отбойка угля методом шпуровых зарядов?

Тема 25. Метод скважинных зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.

Отбойка вертикальными и горизонтальными слоями. Параллельное и веерное расположение скважин – преимущества и недостатки. Схемы отбойки руды в блоке. Расчет параметров скважинной отбойки. Бурение, заряжание и взрывание скважин. Правила безопасности при скважинной отбойке.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите преимущества параллельного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с веерным расположением скважин).
2. Укажите преимущества веерного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с параллельным расположением скважин).
3. Укажите способы бурения скважин при отбойке руды в подземных условиях.
4. Какой тип ВВ обычно применяют при механизированном заряжании скважин?
5. Укажите показатели, входящие в формулу определения удельного расхода ВВ при скважинной отбойке руды в подземных условиях.

Тема 26. Метод скважинных зарядов при открытой разработке месторождений полезных ископаемых.

Расположение скважин на уступе и их бурение. Принципы расчета параметров буровзрывных работ. Схемы взрывания скважинных зарядов при однорядном и многорядном взрывании скважин.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите рациональные способы бурения скважин при открытой разработке месторождений.
2. Удельный расход ВВ на карьерах определяется по эталонному $q_э$ с учетом поправочных коэффициентов. Укажите факторы, определяющие величину данных коэффициентов.
3. Укажите основные способы взрывании зарядов взрывчатых веществ, используемых на земной поверхности.

4. Перечислите основные взрывчатые вещества, используемые при ведении взрывных работ на земной поверхности.

Тема 27. Метод камерных зарядов.

Расположение выработок при использовании камерных зарядов. Камерные заряды рыхления и их расчет. Камерные заряды выброса и их расчет. Камерные заряды на сброс и их расчет.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. В каких случаях целесообразно использовать метод камерных зарядов при открытой разработке месторождений?
2. Назовите достоинства и недостатки метода камерных зарядов.

Тема 28. Взрывное разрушение негабарита.

Характеристики, область применения, достоинства и недостатки различных способов разделки негабарита: наружными, шпуровыми, кумулятивными зарядами, гидровзрывание.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита накладными зарядами.
2. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита шпуровыми зарядами.
3. Укажите способы взрывного дробления негабарита при открытой разработке месторождений.

Тема 29. Техническая документация для производства взрывных работ.

Необходимая техническая документация для производства взрывных работ: типовой проект взрывных работ, проект массового взрыва, паспорт буровзрывных работ, схема взрывных работ.

Литература: [1, 4, 6, 8]

Контрольные вопросы:

1. Что входит в состав типового проекта взрывных работ?
2. Опишите процедуру составления и утверждения паспорта буровзрывных работ.
3. Для каких работ составляется схема взрывных работ.
4. В каких случаях составляется проект массового взрыва?

Тема 30. Персонал для взрывных работ.

Требования к лицам, допущенным к ведению взрывных работ: руководитель взрывных работ, мастер-взрывник, заведующий складом ВМ, раздатчики ВМ и лаборанты складов ВМ.

Литература: [1, 4, 6, 8]

Контрольные вопросы:

1. Какие требования предъявляются к руководителям взрывных работ?
2. Какие требования предъявляются к взрывникам?
3. В течение какого периода времени проходит стажировка взрывника?
4. Требования в заведующему склада взрывчатых материалов.

3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Практико-ориентированное задание №1

Расчет кислородного баланса и составление рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Цель: овладение методикой расчета кислородного баланса взрывчатых веществ и принципами составления рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Краткая теория

Определение кислородного баланса

Кислородным балансом называется отношение избытка или недостатка кислорода во взрывчатом веществе (ВВ) для полного окисления горючих элементов (водорода, углерода, металлов и т. п.), выраженное в грамм-атомах, к грамм-молекулярной массе ВВ. Кислородный баланс выражается в долях или процентах.

Под полным окислением понимается окисление водорода в воду, а углерода в углекислый газ. При этом выделяется также молекулярный азот и кислород. Если в составе ВВ находится металл, то образуется его высший окисел.

Реакции полного окисления:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 + 396 \text{ кДж/моль};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O \rightarrow H_2O + 283 \text{ кДж/моль при воде жидкой};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + 241 \text{ кДж/моль при воде парообразной};$$

$$2Al + 1.5O_2 \rightarrow Al_2O_3 + 1671 \text{ кДж/моль}.$$

Следовательно, если ВВ имеет состав в виде $C_aH_bN_cO_d$, то кислородный баланс (%)

$$K_б = \frac{\left[d - \left(2a + \frac{b}{2}\right)\right] \cdot 16}{M_{BB}} 100\%, \quad (1.1)$$

где 16 – относительный атомная масса кислорода; M_{BB} – молекулярная масса ВВ.

При

$$d > 2a + \frac{b}{2} \quad (1.2)$$

имеет положительный кислородный баланс;

при

$$d = 2a + \frac{b}{2} \quad (1.3)$$

нулевой кислородный баланс;

при

$$d < 2a + \frac{b}{2} \quad (1.4)$$

отрицательный кислородный баланс.

Взрывчатые вещества с нулевым кислородным балансом выделяют максимальное количество энергии и минимальное количество ядовитых газов.

При взрыве ВВ с отрицательным кислородным балансом в зависимости от относительного количества кислорода образуются либо ядовитая окись углерода (угарный газ) с меньшим выделением тепла, чем при образовании углекислоты, т. е.

$$C + 0{,}5O_2 \rightarrow CO + 109 \text{ кДж/моль;}$$

либо чистый углерод в виде сажи, резко снижающий образование газов.

При положительном кислородном балансе уменьшается выделение энергии, так как образуется ядовитая окись азота с поглощением тепла по реакции

$$0{,}5N_2 + 0{,}5O_2 \rightarrow NO - 90{,}5 \text{ кДж/моль.}$$

Пример 1. Определить кислородный баланс тротила $C_7H_5(NO_2)_3$, относительная молекулярная масса которого 227.

Для полного окисления необходимо $2a + b/2$ или $2 \cdot 7 + 5/2 = 16{,}5$ атомов кислорода.

В наличии имеется 6 атомов кислорода.

Следовательно,

$$K_6 = \frac{\left[6 - \left(2 \cdot 7 + \frac{5}{2}\right)\right] \cdot 16}{227} 100\% = -74\%.$$

Пример 2. Определить кислородный баланс граммонита 30/70. Граммонит 30/70 состоит из 30% аммиачной селитры NH_4NO_3 и 70% тротила.

Кислородный баланс аммиачной селитры АС, определенный вышеуказанным способом, равен +20%.

Кислородный баланс граммонита 30/70:

$$0{,}3 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot -74 = -45{,}5\%.$$

Составление рецептуры промышленных ВВ

При изготовлении промышленных ВВ обычно состав подбирается таким, чтобы был нулевой кислородный баланс. Для изготовления патронированных ВВ принимается небольшой положительный кислородный баланс для окисления материала оболочки патронов. Для подземных работ при взрыве 1 кг ВВ должно выделятся не более 40 л ядовитых газов в пересчете на условную окись углерода. Если образуются окислы азота и сернистый газ, то для перевода их к условной окиси углерода принимается поправочный коэффициент соответственно 6,5 и 2,5.

Для открытых горных работ, особенно для ВВ, применяемых в обводненных условиях, требования к кислородному балансу ВВ не такие жесткие.

Пример 1. Составить рецептуру игданита с нулевым кислородным балансом па основе аммиачной селитры и дизельного топлива (ДТ) с кислородным балансом – 320%.

Количество весовых частей аммиачной селитры для окисления одной части дизельного топлива равно

$$n = \frac{[\text{КБ}_{DT}]}{[\text{КБ}_{\text{АС}}]},$$

где КБ_{DT} – кислородный баланс дизельного топлива;

$\text{КБ}_{\text{АС}}$ – кислородный баланс аммиачной селитры.

$$n = \frac{320}{20} = 16.$$

Содержание дизельного топлива во взрывчатом веществе:

$$x = \frac{100}{1+n},$$

$$x = \frac{100}{1+16} = 5{,}9\ \%.$$

Соответственно содержание аммиачной селитры

$$100 - x = 100 - 5{,}9 = 94{,}1\%.$$

Следовательно, формула игданита:

$$94{,}1\%\ \text{аммиачной селитры};\ 5{,}9\%\ \text{дизельного топлива}.$$

Пример 2. Определить рецептуру ВВ с пулевым кислородным балансом на основе аммиачной селитры (NH_4NO_3) и тротила ($C_7H_5(NO_2)_3$).

Кислородный баланс тротила –74%, относительная молекулярная масса 227. Кислородный баланс аммиачной селитры +20%, относительная молекулярная масса 80.

Состав смеси должен отвечать условию:

$$x\ (-74\%) + (100 - x)\ 20\% = 0,$$

где x – содержание в смеси тротила, %.

Решение данного уравнения показывает, что $x \approx 21\%$ и $(100 - x) = 79\%$. Такому составу смеси отвечают граммонит 79/21 и аммонит 6ЖВ.

Обозначим число молей аммиачной селитры через y, число молей тротила через z. Тогда из соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 227} = \frac{79}{21},$$

получим

$$y = \frac{79 \cdot z \cdot 227}{21 \cdot 80} = 10{,}7z.$$

Приняв z = 1, получим y = 10,7.

Следовательно, молекулярное уравнение граммонита имеет вид

$$z + 10{,}7y = C_7H_5(NO_2)_3 + 10{,}7NH_4NO_3.$$

Пример 3. Определить молекулярную формулу гранулита АС-8, имеющего следующий состав: 89% аммиачной селитры NH_4NO_3; 3% солярового масла $C_{16}H_{34}$ (относительная молекулярная масса 226); 8% алюминиевой пудры А1 (относительная молекулярная масса — 27).

Обозначив число молей солярового масла x, аммиачной селитры y, алюминиевой пудры z, можно написать химическую формулу в виде

$$y NH_4NO_3 + x\ C_{16}H_{34} + z\ Al.$$

В соответствии с весовым составом можно записать следующие соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 226} = \frac{89}{3};\quad \frac{z \cdot 27}{x \cdot 226} = \frac{8}{3},$$

Отсюда y = 83,9x; z = 22,4x.

Примем x = 1, тогда молекулярное уравнение гранулита АС-8 имеет вид

$$83{,}9\ NH_4NO_3 + C_{16}H_{34} + 22{,}4\ Al.$$

Практико-ориентированное задание №2

Определение работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Цель: овладение методикой определения работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Краткая теория

Расчет идеальной работоспособности ВВ

Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии газов равно количеству тепла, сообщенного окружающей среде и произведенной работе:

$$-dE = dQ + pdV. \quad (2.1)$$

Если техническим назначением взрыва ВВ является производство механической работы, то затраты на теплообмен продуктов взрыва (ПВ) с окружающей средой являются энергетическими потерями (dQ). Эти потери называются термодинамическими.

Идеальным с точки зрения отсутствия термодинамических потерь является адиабатический процесс расширения ПВ, т.е. $dQ = 0$. В этом случае изменение внутренней энергии ПВ равно количеству работы, совершаемой газами, т.е.

$$-dE = pdV = dA. \quad (2.2)$$

В реальных условиях взрывания наиболее близким к адиабатическому процессу является взрыв ПВ в воздушной среде, а, например, в горных породах термодинамические потери возрастают. Они существенно выше в пористых, хрупких, легко дробимых породах и минимальны в пластичных средах типа глин.

Мерой идеальной работоспособности ВВ может служить максимальная работа, которую совершают ПВ при своем адиабатическом расширении до давления окружающей среды (воздушной, водной, горной), т.е. когда остаточное давление ПВ уравновешивается противодавлением среды атмосферным, гидростатическим или горным давлением.

Идеальная работоспособность ВВ является одной из важнейших энергетических характеристик ВВ. Она дополняет теплоту взрыва, показывая теоретическую возможность реализации энергетического потенциала ВВ в механическую работу.

Идеальную работоспособность (полную идеальную работу взрыва) можно определить, как разность между значениями внутренней энергии ПВ в момент их образования и к концу расширения:

$$\text{А}_\text{и} = \int dE = \int_{T_1}^{T_2} \overline{C_V} dT = \overline{C_V} * (T_1 - T_2) = \overline{C_V} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (2.3)$$

где $\overline{C_V}$ - средняя теплоемкость продуктов взрыва в интервалах изменения температуры взрыва от T_1 до T_2;

T_1 - начальная температура взрыва;

T_2 - конечная температура ПВ.

Для газовых взрываемых систем, расширение ПВ которых происходит вдоль изоэнтропы вида pV' = const, пользуясь уравнением Клайперона $(PV'=RT)$, получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}} \quad (2.4)$$

Окончательно получаем

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad (2.5)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1}\right); \quad (2.6)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right); \quad (2.7)$$

где $Q_{\text{взр}}$- потенциальная энергия ВВ (полная тепловая энергия), кДж/кг;

V_1 и V_2 - начальный и конечный удельные объемы ПВ, м^3/кг;

P_1 и P_2 - начальное и конечное давление ПВ, Па;

$y = Cp/Cv$ – показатель адиабаты.

Эти же формулы могут быть использованы для расчета A_u конденсированных ВВ.

При взрыве в воздухе (P_2 = 1,01·10^{5}Па) полная идеальная работа взрыва определяется

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right), \text{ кДж/кг.} \quad (2.8)$$

Расчет полного термодинамического КПД взрыва

Вышеприведенную формулу (2.8) можно представить в виде

$$A_u = Q_{\text{взр}} - q_T \quad (2.9)$$

Здесь величина $q_T = Q_{\text{взр}} - A_u = C_{v2} * T_2$ - термодинамические потери энергии ВВ в продуктах взрыва по достижении ими атмосферного давления. Это остаточное тепло идет на свечение ПВ после их расширения.

Отношение идеальной работоспособности к выделившейся тепловой энергии взрыва называется идеальным термодинамическим КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}}, \tag{2.10}$$

или с учетом формулы (2.7)

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}, \tag{2.11}$$

Идеальный термодинамический КПД взрыва определяет часть тепловой энергии, которая может быть использована для совершения механической работы взрыва.

Величины идеальной работоспособности (A_u) и полного термодинамического КПД (П) существенно зависят от свойств продуктов взрыва, влияющих на показатель адиабаты, *y= Cp/Cv*. Если в ПВ содержится 2/3 молекул двухатомных газов и 1/3 — одноатомных (гексоген), то *y* = 1,25. Если в ПВ содержится 2/3 трехатомных газов и 1/3 двухатомных (нитроглицерин), то *y* = 1,2. Величина *y* снижается (соответственно снижается A_u и η), если в ПВ содержатся четырех и пятиатомные газы, а также твердые продукты (NaCl, $A1_2O_3$ и др.). В этих случаях *y* = 1,15, и 1,05.

Пример 1. Определить полную идеальную работоспособность и термодинамический КПД аммонита 6ЖВ при плотности заряжания 900 кг/м^3 и следующих параметрах взрывного превращения:

$V_{пв}$= 0,86 м^3/кг,

$Q_{взр}$ = 4300кДж/кг;

$T_{взр}$=2600° К.

Для расчета показатель адиабаты принимается y=1,25. Определение давления ПВ при взрыве аммонита 6ЖВ:

$$P = \frac{1{,}01*10^5*0{,}86*2600*900}{273*(1-0{,}001*0{,}86*900)} = 3{,}3 * 10^9,$$

Откуда полная идеальная работоспособность

$$A_u = Q_{\text{взр}}\left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right) = 4300 * \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{3{,}3 * 10^9}\right)^{\frac{1{,}25-1}{1{,}25}}\right) = 3762{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Полный термодинамический КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}} = \frac{3762{,}2}{4300} = 0{,}875$$

или $\eta = 87{,}5\%$

Практико-ориентированное задание №3

Расчет параметров и составление паспорта буровзрывных работ на проведение горизонтальной горной выработки.

Цель: овладение методикой расчета параметров буровзрывных работ (БВР) при проведении подземных горных выработок и составления паспорта БВР.

Краткая теория

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип вруба, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

3.1. Общие положения

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа

бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

3.2. Определение параметров буровзрывных работ

3.2.1. Выбор взрывчатых материалов

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Правилами безопасности при взрывных работах» [6] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [7] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 3.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 3.1

Рекомендуемые ВВ

Условия взрывных работ	Условия размещения зарядов	Коэффициент крепости пород *f*	Тип ВВ	Способ заряжания
Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли	Сухие шпуры	до 12	Гранулит М Граммонит 79/21 Гранулит АС-4В Гранулит-игданит	Механизированный
			Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Гранулит АС-8В	Механизированный
			Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	Ручной
	Обводнённые шпуры	до 12	Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	
Выработки, опасные по взрыву газа и пыли	Сухие и обводнённые шпуры	Для взрывания по породе	Аммонит АП–5ЖВ	Ручной
		Для взрывания по углю с учетом степени опасности	IV кл. Аммонит Т-19 Аммонит ПЖВ-20 V кл. Угленит Э-6 VI кл. Угленит 12ЦБ	
	Для водораспыления	Открытый заряд	Ионит	

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Характеристики ВВ

Наименование ВВ	Идеальная работа взрыва, кДж/кг	Плотность в патронах или насыпная, кг/м^3	Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг	Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м^3	Расстояние передачи детонации между патронами, см		Диаметр патронов, мм	Масса патрона, кг	Длина патрона, мм
					Сухие	После выдержки в воде			
Аммонит № 6ЖВ	3561	1000-1100	3917	1,0	5-9	3-6	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал М-10	4410	950-1100	4520	1,15	4	3	32	0,2	250
Детонит М	4316	1000-1200	4963	1,27	8-18	5-15	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал скальный № 1	4420	1000-1100	4641	1,18	8-14	5-10	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонит АП-5ЖВ	2991	1000-1150	3215	0,82	5-10	2-7	36	0,3	250
Аммонит Т-19	2564	1000-1200	2820	0,72	7-12	4-8	36	0,3	240
Угленит Э-6	1946	1100-1250	2289	0,58	5-12	3-10	36	0,3	240
Угленит 12 ЦБ	1770	1200-1350	2256	0,58	4	2	36	0,3	240
Ионит	1482	1000-1200	1704	0,44	–	–	36	0,3	240
Гранулит М	3163	780-820 (1000-1150)*	3384	0,86					
Гранулит АС-4В	3645	800-850 (1100-1200)*	4192	1,07					
Гранулит АС-8В	3997	800-850 (1100-1200)*	4597	1,17					
Гранулит-игданит	3150	800-850 (1100-1200)*	3760	0,85					

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 3.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 3.3

Электродетонаторы для шахт и рудников

Тип электродетонаторов	Кол-во серий	Интервалы замедления, мс (с)	Безопасный ток, А	Гарантийный ток, А	Сопротивление, Ом	Примечание
ЭД-8Ж(Э)	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности
ЭД-3-Н	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭД-1-8-Т	1	0	1,0	5,0	0,5-0,75	Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам
ЭД-3-Т	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭДКЗ-ОП	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности
ЭДКЗ-П	5	25, 50, 75, 100, 125 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭДКЗ-ПМ	7	15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭД-КЗ-ПКМ	9	4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 3.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 3.4

Характеристики систем неэлектрического инициирования

Устройство	Интервал замедления, мс	Назначение
СИНВ-Ш	0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	Изготовление патронов-боевиков
ДБИ3	0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	

Примечание. Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

3.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 3.5.

Таблица 3.5

Тип вруба и глубина шпуров

Тип буровой техники	Сечение выработки, м^2	
	менее 6	более 6
Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла	Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м	Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м
Установки механизированного бурения	–	Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки (B) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 B, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м^2) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 1.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

1.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

1.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 3.6.

Таблица 3.6

Параметры вертикального клинового вруба

Группа крепости пород по СНиП	Коэффициент крепости пород *f*	Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм	Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$)		Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град.
			до 12	более 12	
IV-V	1-6	500	4	4-6	75-70
VI	6-8	450	4-6	6-8	68
VII	8-10	400	6-8	8-10	65
VIII	10-13	350	8-10	10-12	63
IX	13-16	300	10-12	12-14	60
X	16-18	300	10-12	12-14	58
XI	20	250	10-12	12-14	55

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (3.1)$$

где e – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 1.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

d – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 3.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 3.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 1.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (3.2)$$

где B – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 3.1).

Таблица3.7

Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м

Ширина выработки, м	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
2,0	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
2,5	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
3,0	2,1	1,9	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2
3,5	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
4,0	2,8	2,6	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7
4,5	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	2,0	1,9
5,0	3,5	3,1	2,9	2,7	2,4	2,2	2,1

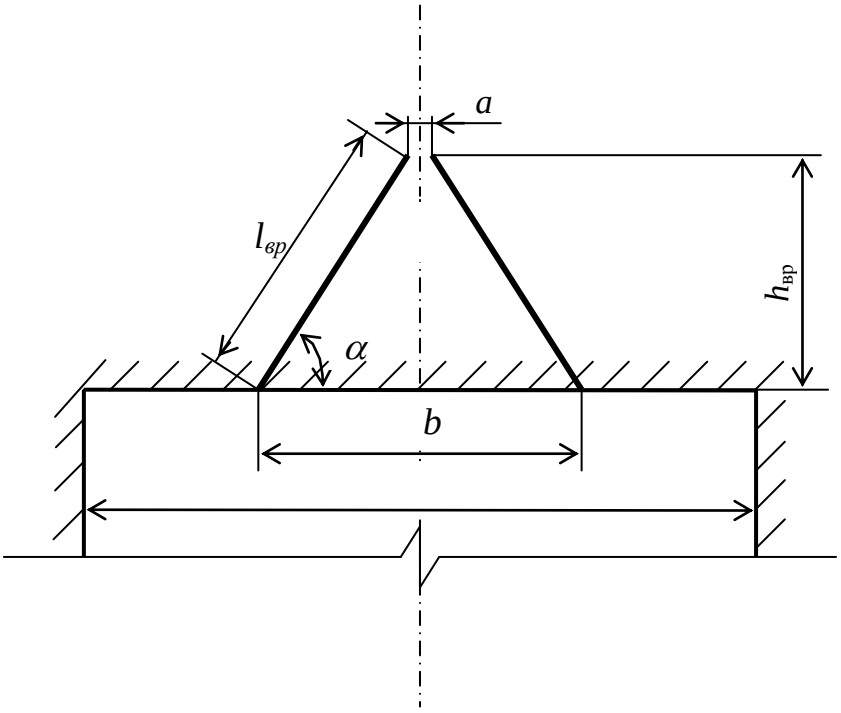


Рис. 3.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0,1 \div 0,2), \quad (3.3)$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \quad (3.4)$$

где α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \quad (3.5)$$

где *а* – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород *а* = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров α.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 3.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

3.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 1.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние W_1) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 1.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние W_1, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (1.1).

Пробивные расстояния W_1 учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе (W_1, W_2, W_3 и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

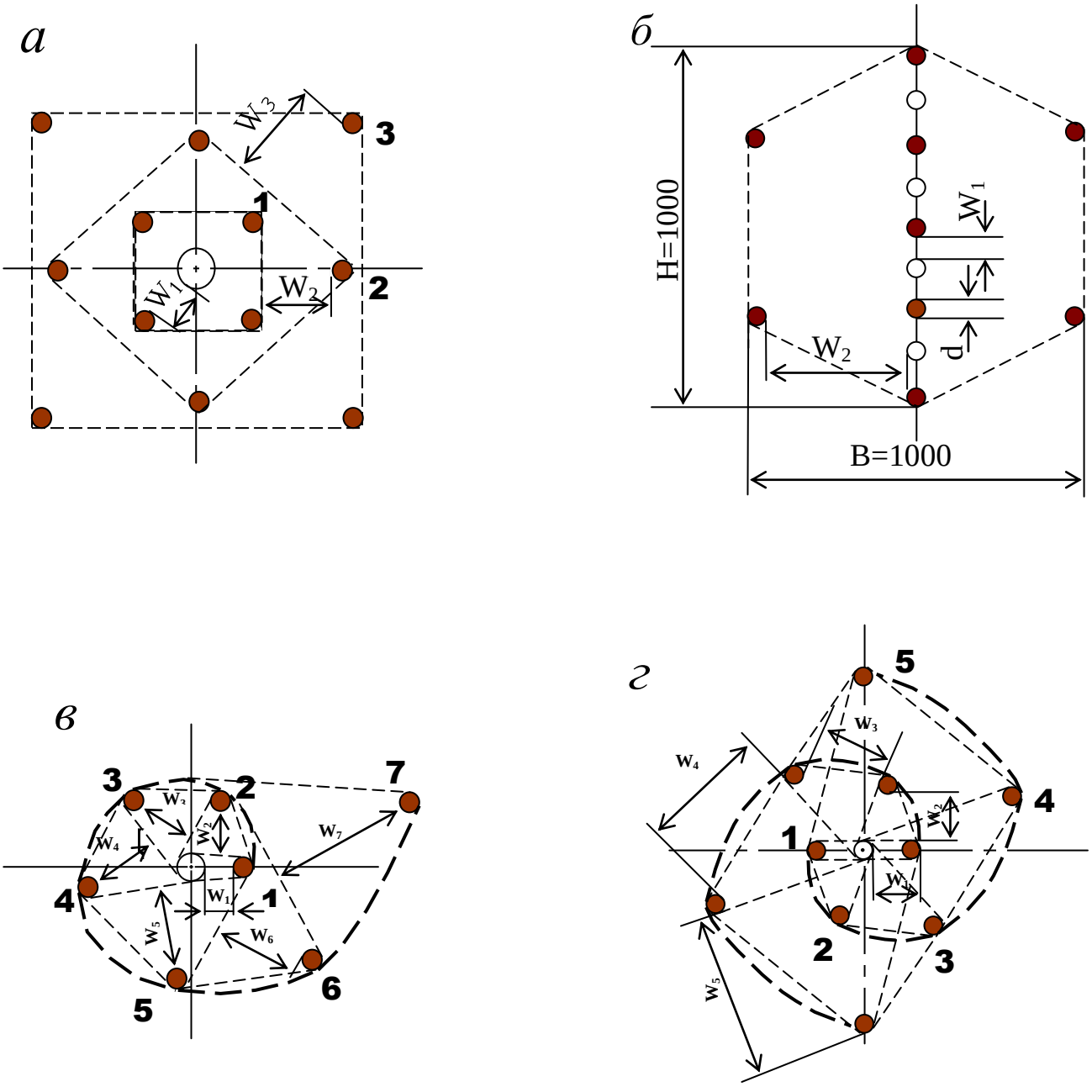


Рис. 3.2. Конструкции прямых врубов:
а – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
г – двойной спиральный

Таблица 3.8

Пробивные расстояния W_1, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	115	100	90	80	60	60	55
51	125	110	100	90	80	70	65
56	150	130	110	95	90	85	75
75	170	150	130	105	100	95	85
105	190	170	150	120	110	105	95
125	230	200	170	140	120	110	100

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 3.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (3.6)$$

где W_1 – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 1.7);

D_x – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

d – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния (W_2, W_3 и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 1.2) в масштабе 1:5.

Таблица 3.9

Пробивные расстояния W_2, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	170	150	140	130	120	115	110
51	180	160	150	140	130	120	115
56	210	180	170	160	150	140	130
75	260	210	200	185	170	150	140
105	300	260	240	215	200	185	175
125	340	300	270	250	230	220	215

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм

Диаметр шпуров, мм	Коэффициент крепости пород *f*						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	1000-900	800	700	650	600	550	500

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м^2 необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 1.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{3.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{3.8}$$

где H – высота вруба, мм;

W_1 – пробивное расстояние, мм;

d – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 3.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние W_2 для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 3.11.

В породах с f >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 3.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 3.11

Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами

Условия взрывания	Класса ВВ			
	II	III-IV	V	VI
По углю	0,6	0,6	0,5	0,4
По породе:				
при f <7	0,5	0,45	0,3	0,25
при f >10	0,4	0,3	–	–

В породах с коэффициентом крепости f < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 3.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

3.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (3.9)$$

где q – удельный заряд ВВ, кг/м^3;

f – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (3.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

f_1 – коэффициент структуры породы;

v – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

e – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (3.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

ρ, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м^3.

Необходимые данные для расчета величины e принимают из табл. 3.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (3.10) и в табл. 3.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы f_1 принимается из табл. 3.12.

Таблица 3.12

Коэффициент структуры породы f_1

Характеристика пород	Категория пород	Коэффициент структуры породы f_1
Монолитные, крепкие, вязкие, упругие	I	1,6
Трещиноватые, крепкие	II	1,2-1,4
Массивно-хрупкие	III	1,1
Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов	IV	0,8-0,9

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (3.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м^2.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах v = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

При щелевом врубе на полную высоту выработки для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (3.9) следует принимать коэффициент зажима породы v = 1,4.

Прямые (дробящие) врубы требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (3.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы v = 1,1–1,4.

3.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 1.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм. При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

3.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (3.12)$$

где q – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м^3;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

γ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (3.13)$$

где d – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 3.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м^3.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с f = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (3.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 3.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт.

Таблица 3.13

Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок

Коэффициент крепости пород f	Сечение выработки вчерне, м^2						
	4	6	8	10	12	14	16
2-4	8-11	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	35-42
5-7	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	39-42	43-46
8-10	16-20	21-26	27-32	33-37	38-42	42-46	47-50
12-14	20-24	26-30	32-36	37-42	42-46	46-50	50-54
более 14	26-28	32-36	36-40	44-48	48-52	52-54	56-60

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{вч} - S_{вр}}{N - N_{вр}}}, \qquad (3.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м^2;

N, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87° к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

При применении прямых врубов количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \qquad (3.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м^2.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

3.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \qquad (3.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \qquad (3.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot(S_{вч} – S_{вр}) \cdot l_{шп}, \qquad (3.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \qquad (3.19)$$

где d – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (3.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (3.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (3.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (3.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (3.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\,, \quad (3.25)$$

где η – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (3.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м^2, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 3.14.

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м^3 взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (3.27)$$

Таблица 3.14

Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом

Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м^2	Коэффициент крепости пород f		
	1–2	2–9	10–20
до 8	5*	10	12
от 8 до 15	4	8	10
более 15	3	5	7

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\, \eta). \quad (3.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м^3 взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\, l_{шп}\, \eta). \quad (3.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (3.30)$$

где B – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

3.3 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взры-

вание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 3.15).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (3.31)$$

где R – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

l – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

S – сечение проводов, м^2.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 1.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 3.15

Взрывные приборы и машинки

Наименование прибора (исполнение)	Напряжение, В	Масса, кг	Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом	Назначение и область применения
Конденсаторный взрывной прибор КВП-1/100М (РВ) КВП-2/200М (РН)	 600 1700	 2 2,5	 320 1700	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли
Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ)	610	2,7	320	
Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН)	1600	3,0	200	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.32}$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.33}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.34}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{3.35}$$

где I – сила тока в электровзрывной сети, А;

E – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

R – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

n – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

m – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

i – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

r – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{3.36}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 3.16 или рассчитывается по формуле (3.31));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 3.16

Характеристики проводов для электровзрывания

Обозначение	Назначение	Диаметр жилы, мм	Площадь сечения, мм^2	Сопротивление 1 м провода, Ом/м
ВП-05	соединительные	0,5	0,196	0,090
ВП-08	магистральные	0,8	0,502	0,034
ВП-07х2	магистральные	0,7х2	0,769	0,024

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{\text{гар}}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + R}, \tag{3.37}$$

$$m = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + r}. \tag{3.38}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

3.4 ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 3.17

Область применения бурильных машин и установочных приспособлений

Коэффициент крепости пород	Тип бурильных машин и установочных приспособлений
1,5–3	Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках
4–6	Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
7–9	Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
10–20	Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с f <8.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переустановку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с f < 8; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с f = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с f = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с f = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 3.2 – 3.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м^2 площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м^2 площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 3.18

Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики	Тип бурильной установки					
	УБШ-204 (БУЭ-1М)	УБШ-214А	УБШ-308У (1СБУ-2)	УБШ-303 (1БУР-2)	УБШ-254	УБШ-332Д
Коэффициент крепости пород f	4-8	4-16	8-14	4-16	8-14	8-14
Диаметр шпуров, мм	42	42-52	42-52	42-52	42-52	42-52
Длина шпуров, м	2,75	2,75	2,8	2,8	2,4	3,0

Зона бурения, м^2		6-12	4,2-12	до 20	до 20	до 12	8-22
Бурильная машина	тип	БУЭ	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	«Норит-1» (гидравл.)	М2 (БГА-2М)
	кол-во	1	1	2	2	1	2
Тип платформы		рельс.	рельс.	гусен.	рельс.	гусен.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении: длина		8,2	6,0	7,8	7,1	7,2	11,0
ширина		1,3	1,0	1,6	1,15	1,4	1,75
высота		0,9	1,5	1,7	1,65	1,8	2,3
Масса, т		5,4	4	8,6	5	7,2	12

Таблица 3.9

Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики		Тип бурильной установки				
		Minimatic 205-40	Mini 206-60	Paramatic 305-60	Rocket Bomer 104S	Rocket Bomer 282S
Коэффициент крепости пород *f*		8-20	8-20	8-20	8-20	8-20
Диаметр шпуров, мм		32-50	32-50	32-50	32-50	32-50
Длина шпуров, м		3,4	3,4	3,4	4,0	4,0
Высота обуривания, м		6,0	6,4	7,1	4,7	6,3
Ширина обуривания, м		8,8	9,8	10,4	4,7	8,7
Зона бурения, м^2		8-49	8-60	12-68	до 20	до 45
Бурильная машина	тип	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	COP 1838 ME пневмат.	COP 1838 ME пневмат.
	кол-во	2	2	3	1	2
Тип платформы		пневм.	пневм.	пневм.	пневм.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении: длина		12,3	12,7	5,3	9,8	12,1
ширина		1,98	2,24	2,5	2,0	2,0
высота		2,35	2,35	2,8	2,6	3,1
Масса, т		19	20	36	14	18

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 м^2.

3.5. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

Пример оформления графической части:

Паспорт
буровзрывных работ на проведение

_____

(*наименование выработки*)

1. Характеристика выработки

1.1. Форма сечения выработки _____

1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м^2 _____

1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____

- ширина, м _____

1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

2. Характеристика пород

2.1. Наименование пород _____

2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____

2.3. Трещиноватость пород _____

2.4. Обводнённость пород _____

3. Исходные данные

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____

3.2. Способ взрывания _____

3.3. Диаметры - шпуров, мм _____

- патронов, мм _____

3.4. Тип вруба _____

3.5. Материал забойки _____

3.6. Схема соединения электродетонаторов _____

3.7. Источник электрического тока _____

4. Расчётные данные по шпурам

№№ шпуров	Наименование шпуров по назначению	Глубина шпуров, м	Угол наклона шпуров, град.	Расстояние между шпурами, м	Величина заряда в шпуре, кг	Длина заряда, м	Длина забойки в шпуре, м	Очередность взрывания, интервал замедления, мс	Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Схема расположения шпуров

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

6. Конструкции зарядов

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

7. Основные показатели буровзрывных работ

№ п/п	Показатели	Единица измерения	Количество
1	Коэффициент использования шпуров	-	
2	Подвигание забоя за взрыв	-	
3	Объём горной массы за взрыв	$м^3$	
4	Количество шпуров на цикл	шт.	
5	Количество шпурометров на цикл	м	
6	Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки	м шп./м	
7	Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы	м шп./$м^3$	
8	Расход ВВ на цикл	кг	
9	Расход ВВ на 1 метр выработки	кг/м	
10	Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы	кг/$м^3$	
11	Расход средств инициирования на цикл: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	
12	Расход средств инициирования на 1 метр выработки: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	

8. Меры безопасности

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

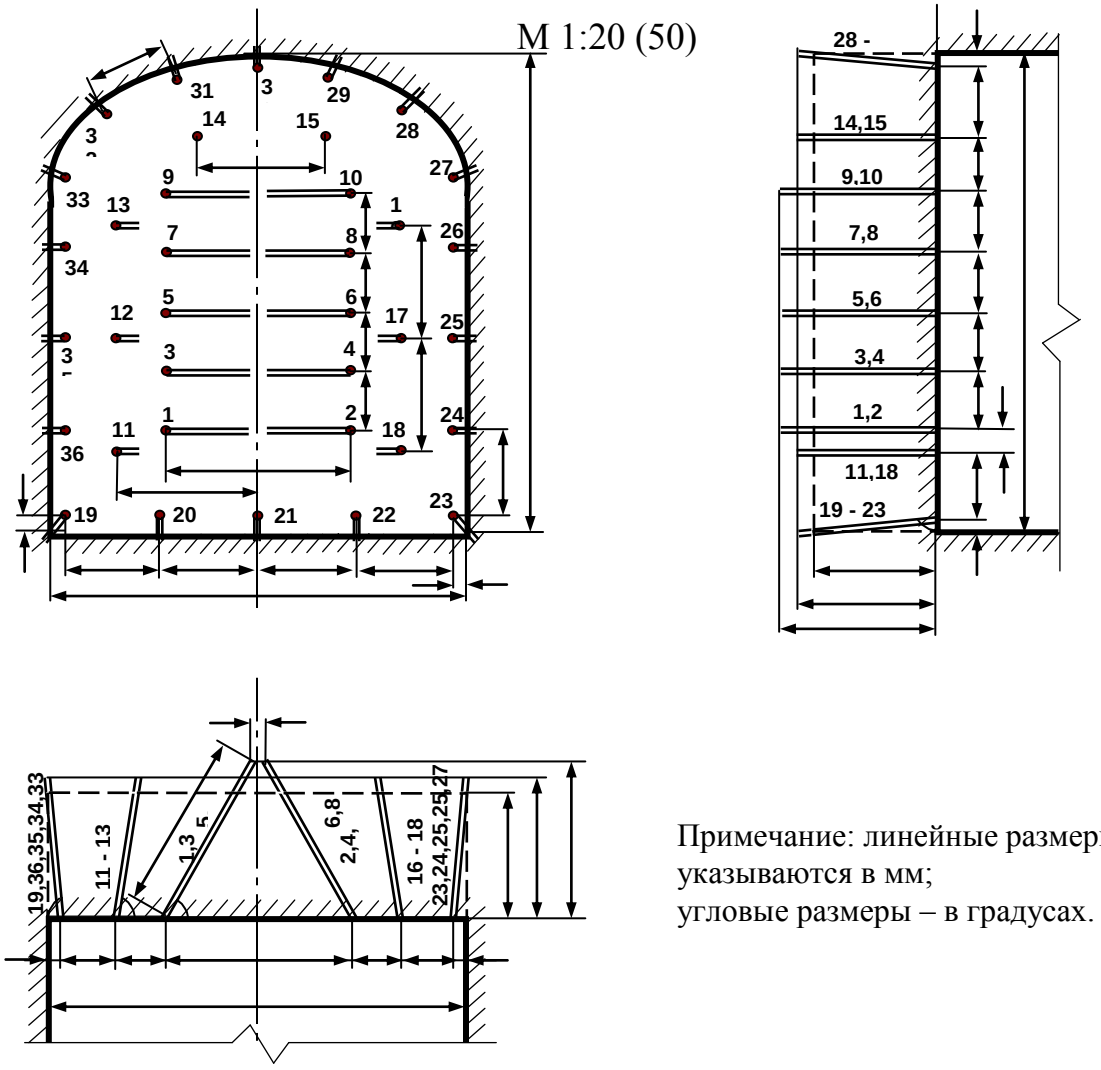
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

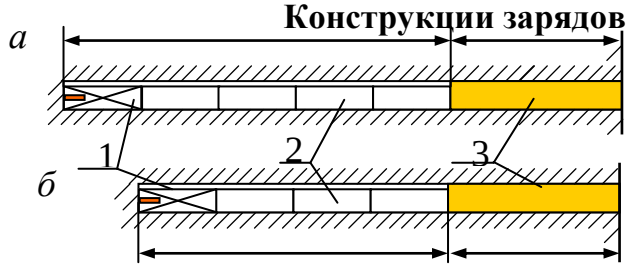
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

Схема расположения шпуров



Примечание: линейные размеры указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

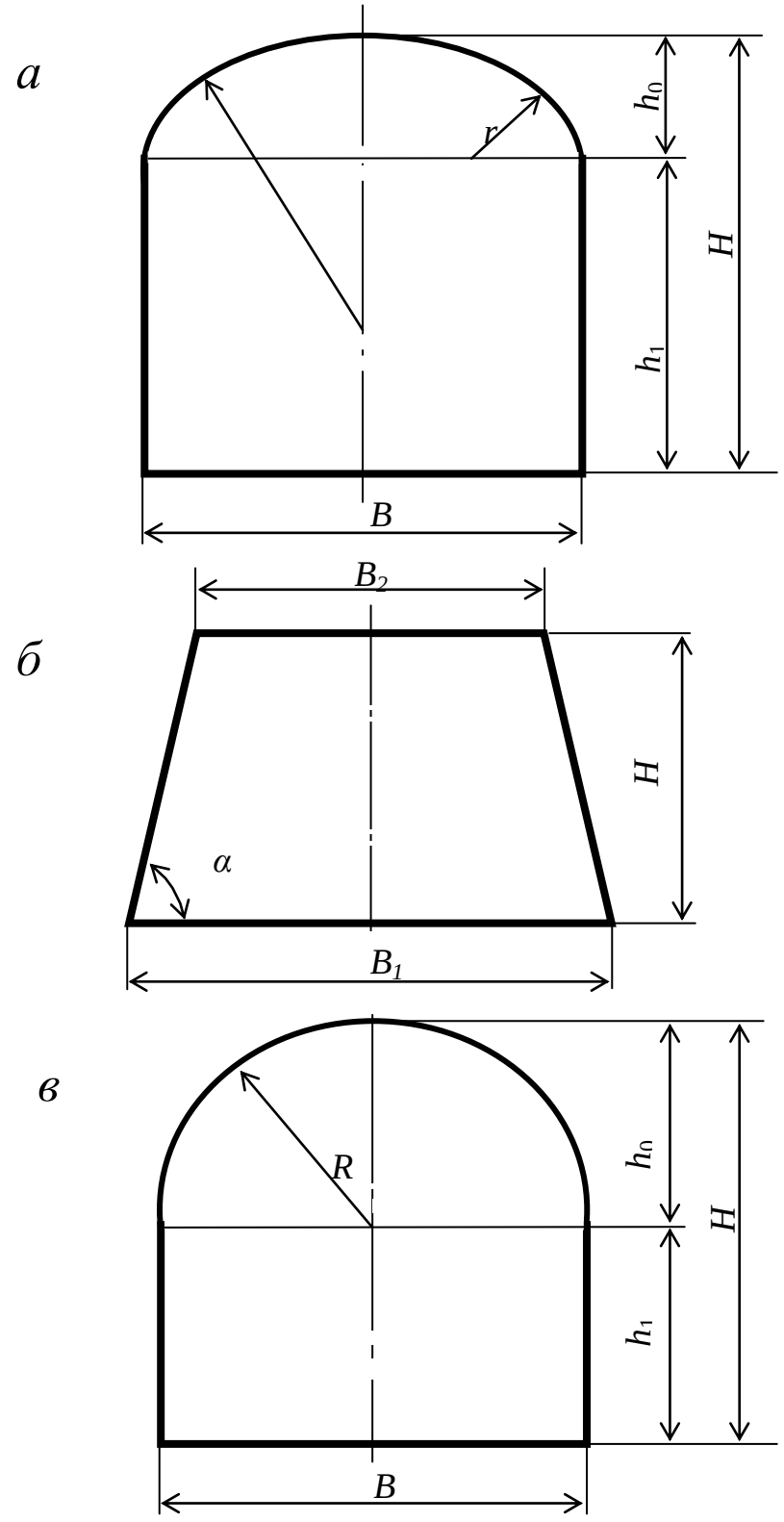
Конструкции зарядов



а – врубовые шпуры;
б – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

Примечание. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

Формы поперечного сечения горизонтальных выработок



$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
а – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
б – трапецевидная;
в – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок:

Форма поперечного сечения выработки	Площадь поперечного сечения	Периметр
Сводчатая с коробовым сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$
Трапециевидная	$\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$	$B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$
Арочная с полуциркульным сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$

Рекомендуемая литература

1. Корнилков М.В. Разрушение горных пород взрывом: конспект лекций. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. - 202 с.

2. Латышев О.Г., Петрушин А.Г., Азанов М.А. Промышленные взрывчатые материалы: учебное пособие. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. - 221 с.

3. Кутузов Б.Н. Методы ведения взрывных работ. Часть 1. Разрушение горных пород взрывом: Учебник. – М.: Изд. МГГУ, 2007. – 345 с.

4. Кутузов Б.Н. Безопасность взрывных работ в горном деле и промышленности. – М.: Горная книга, 2009. – 670 с.

5. Латышев О.Г. Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2004. – 201 с.

6. Правила безопасности при взрывных работах (утверждены приказом Ростехнадзора от 16.12.2013 г. № 605; в редакции приказа Ростехнадзора от 30.11.2017 г. № 518). – М., 2018.

7. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

8. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадиевич
Лещуков Николай Николаевич
Прищепа Дмитрий ВЯчеславович

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе и выполнению практических работ по дисциплине «Разрушение горных пород» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Редактор *Д. В. Прищепа*

Подписано в печать «__»_____2019 г. Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 3,68. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа

ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Екатеринбург – 2019

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

Методической комиссией горно-технологического факультета

«_____» _____ 2019 г.

Председатель комиссии

_____ст.преп. Н. В. Колчина

А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа

ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Рецензенты: Лель Ю. И., зав. кафедрой РМОС УГГУ, профессор,
д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «Технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» / А. Г. Петрушин, М. А. Азанов, Д. В. Прищепа; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 65 с.

Материал пособия охватывает все раздела дисциплины в соответствии с учебником [1].

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов, выполнению контрольных и практических заданий всех специализаций специальности 21.05.04 «Горное дело» по курсу «Технология и безопасность взрывных работ».

© Уральский государственный
горный университет, 2019
© Петрушин А.Г., Азанов М.А.,
© Прищепа Д. В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 5
1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА 6
2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ 7
3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ 19
Практико-ориентированное задание №1 19
Практико-ориентированное задание №2 23
Практико-ориентированное задание №3 26
Практико-ориентированное задание №4 30
Практико-ориентированное задание №5 32

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студента является важнейшей составной частью образовательной программы подготовки дипломированного специалиста. В соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования объем учебной нагрузки студента составляет 144 часов или 4 зачетных единиц.

По курсу «Технология и безопасность взрывных работ» обязательная самостоятельная работа студента осуществляется в следующих направлениях – *освоение материалов по отдельным темам, входящим в Рабочую учебную программу дисциплины; подготовка, оформление, защита практико-ориентированных заданий; подготовка и защита контрольной работы*. Дополнительная самостоятельная работа связана с углубленным изучением отдельных разделов курса на основе научно-исследовательской работы студента (НИРС).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов – освоения отдельных тем дисциплины.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В следующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Технология и безопасность взрывных работ». Она содержит названия 30 основных тем с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов в экзаменационном билете. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Причем в экзаменационный билет может включаться один из вопросов по такой теме. Основной объем информации по каждой теме содержится в учебнике по курсу [1].

При освоении указанных ниже тем *рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента:*

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебнику [1] освойте каждый структурный элемент темы. Во всех темах указаны разделы и страницы учебника, содержащие данный материал.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА, КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Тема 1. Краткая история развития взрывных работ.

Значение взрывных работ в горнодобывающей промышленности и в строительстве. История развития взрывных работ.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Охарактеризуйте основные вехи развития взрывных работ.
2. Опишите первую технологию ведения взрывных работ в горном деле.
3. Назовите первое нитроглицериновое взрывчатое вещество.
4. Опишите историю развития средств инициирования.

Тема 2. Современные виды взрывных работ.

Современные виды взрывных работ в промышленности. Основные виды взрывных работ. Специальные виды взрывных работ.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Назовите современные виды взрывных работ.
2. Назовите современные виды специальных взрывных работ.

Тема 2. Способы бурения шпуров и скважин.

Классификация способов бурения шпуров и скважин. Механическое бурение и его виды. Термическое бурение и его виды. Специальные виды бурения шпуров и скважин.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Приведите классификацию способов бурения шпуров и скважин.
2. Опишите суть механических видов бурения шпуров и скважин.
3. Опишите суть термических видов бурения шпуров и скважин.
4. Опишите суть специальных видов бурения шпуров и скважин.
5. Укажите рациональные области применения механических, термических и специальных видов бурения шпуров и скважин.

Тема 3. Ударно-поворотный способ бурения.

Механизм разрушения горных пород при ударно-поворотном бурении. Механизмы скола и выкола. Зависимость скорости ударно-поворотного бурения от осевого усилия, частоты вращения. Оборудование.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Укажите рациональную область применения ударно-поворотного бурения.
2. Охарактеризуйте механизмы скола и выкола.
3. Опишите механизм разрушения горных пород при ударном внедрении инструмента.
4. Укажите бурильные машины ударно-поворотного бурения.
5. Отметьте факторы, которые повышают энергоемкость ударного бурения по сравнению с другими способами.
6. Укажите последовательность процессов, происходящих при разрушении породы при ударном бурении.

Тема 4. Вращательный способ бурения.

Технические средства вращательного бурения. Работа ядра уплотнения при резании пород. Зависимость объема разрушения от толщины стружки. Режимы самозаточки и затупления режущей грани сверла. Оборудование.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Назовите преимущества вращательного бурения.
2. Укажите бурильные машины вращательного бурения.
3. Охарактеризуйте основные механизмы износа и затупления бурового инструмента при вращательном бурении.
4. Опишите механизм разрушения горных пород при вращательном бурении.

Тема 5. Ударно-вращательный и вращательно-ударный способ бурения.

Технические средства бурения. Совместное действие механизмов удара и резания. Зависимость энергоемкости бурения от усилий полдачи на инструмент.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Укажите область применения вращательно-ударного бурения.
2. Укажите область применения ударно-вращательного бурения.
3. Назовите преимущества вращательно-ударного бурения.
4. Охарактеризуйте зависимость энергоемкости бурения от усилия подачи.
5. Назовите машины и механизмы, реализующие ударно-вращательный способ бурения.
6. Назовите машины и механизмы, реализующие вращательно-ударный способ бурения.

Тема 6. Шарошечное бурение.

Технические средства бурения. Механизм шарошечного бурения. Режимы бурения в зависимости от осевого усилия. Контактная прочность пород как критерий буримости.

Литература: [1, 5]

Контрольные вопросы:

1. Назовите особенности шарошечного бурения.
2. Опишите зависимость скорости бурения от величины осевого усилия.
3. Назовите машины и механизмы, реализующие шарошечное бурение.
4. Укажите область применения шарошечного бурения.

Тема 7. Основы теории взрыва и взрывчатых веществ.

Виды взрыва: механический, тепловой, электрический, ядерный, химический. Необходимые условия химического взрыва. Взрывчатое вещество. Классификация взрывчатых систем по физическому состоянию.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию взрыв.
2. Приведите пример механического взрыва.
3. Приведите пример Теплового взрыва.
4. Приведите примеры тепловых взрывов.
5. Охарактеризуйте химический взрыв.
6. Назовите необходимые условия химического взрыва.

Тема 8. Свойства взрывчатых веществ.

Классификация свойств взрывчатых веществ. Технологические свойства взрывчатых веществ. Специальные свойства взрывчатых веществ.

Литература: [1, 2]

Контрольные вопросы:

1. Приведите классификацию свойств взрывчатых веществ.
2. Назовите основные технологические свойства взрывчатых веществ.
3. Что такое кислородный баланс.
4. Назовите виды кислородного баланса.
5. Какие газы выделяются при положительном кислородном балансе.
6. При каком кислородном балансе образуется окись углерода (CO)?

Тема 9. Начальный импульс и чувствительность взрывчатых веществ.

Начальный импульс. Виды начального импульса. Инициирование. Чувствительность взрывчатых веществ. Способы изменения чувствительности.

Литература: [1]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию «Начальный импульс».
2. Охарактеризуйте тепловой начальный импульс.
3. Какой вид начального импульса является основным для горного дела?
4. Перечислите пробы на чувствительность.
5. Что такое сенсибилизатор?
6. Приведите пример веществ вводимых в состав взрывчатых веществ для флегматизации.

Тема 10. Формы химического превращения взрывчатых веществ.

Основные формы химического превращения взрывчатых веществ. Режимы химического превращения: термический распад, горение, конвективное горение, детонация

Литература: [1, 2, 3]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные формы химического превращения.
2. Дайте характеристику горению как форме химического превращения.
3. Дайте характеристику детонации как форме химического превращения.

Тема 11. Основные положения теории детонации.

Механизм детонации. Графическая интерпретация процесса детонации – адиабата Гюгонио. Количественная оценка характеристик процесса детонации.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите особенности детонационной волны.
2. Дайте определение понятию «Детонация».
3. Приведите основные детонационные характеристики взрывчатых веществ.

Тема 12. Экспериментальные методы определения скорости детонации.

Классификация методов определения скорости детонации взрывчатых веществ. Метод Дотриша. Осциллографический метод. Метод скоростной фотосъемки. Реостатный метод.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Охарактеризуйте метод Дотриша, для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
2. Назовите отличительные особенности осциллографического метода для определения скорости детонации взрывчатых веществ.
3. Опишите процедуру измерения скорости детонации используя реостатный метод.

Тема 13. Факторы, влияющие на скорость и устойчивость детонации.

Группы факторов влияющие на скорость и устойчивости детонации. Влияние внутреннего состава и строения на скорость и устойчивость детонации. Влияние условий взрывания на скорость детонации.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Как влияет дисперсность взрывчатого вещества на скорость и устойчивость детонации?
2. Как влияет плотность взрывчатого веществ на скорость детонации?
3. Дайте определение понятию «критический диаметр детонации».
4. Как влияет на скорость и устойчивость детонации наличие плотной оболочки на заряде взрывчатого вещества.
5. Влияние величины начального импульса на устойчивость детонации.

Тема 14. Работа взрыва.

Работа взрыва: баланс энергии при взрыве. Потери при переходе потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва. Полезная работа взрыва. Бризантность и фугасность. Пробы на бризантность и фугасность.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Опишите переход потенциальной энергии взрывчатого вещества в механическую работу взрыва.
2. Чем обусловлены химические потери при взрыве?
3. Чем обусловлены тепловые потери при взрыве?
4. Охарактеризуйте бесполезные формы работы взрыва.
5. Что такое бризантность взрывчатых веществ.
6. Назовите формы проявления фугасной работы взрыва.

Тема 15. Основные положения теории предохранительных взрывчатых веществ.

Необходимость применения предохранительных взрывчатых веществ. Теории предохранительных взрывчатых веществ. Методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

Литература: [1, 2]

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение понятию пламегаситель.
2. Дайте определение понятию ингибитор.
3. Перечислите основные гипотезы воспламенения горючих шахтных сред.
4. Перечислите возможные пути предотвращения воспламенения горючих шахтных сред.
5. Охарактеризуйте методы испытаний предохранительных взрывчатых веществ.

Тема 16. Заряд взрывчатого вещества.

Заряды взрывчатых веществ. Классификация. Воронка взрыва и ее элементы. Показатель действия взрыва.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. По каким признакам классифицируются заряды взрывчатых веществ.
2. Перечислите элементы воронки взрыва.
3. Что такое показатель действия взрыва.
4. Как классифицируются заряды взрывчатых веществ по показателю действия взрыва.

Тема 17. Действие взрыва.

Действие сосредоточенного заряда в твердой однородной безграничной среде и при наличии обнаженной поверхности. Стадии разрушения: образование газовой полости, зоны дробления, зона радиальных и кольцевых трещин, откольные явления. Соотношение бризантного и фугасного действия взрыва в зависимости от акустической жесткости разрушаемых пород.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Отразите последовательность развития взрыва в горных породах.
2. Отметьте области действия взрыва, образующие зону регулируемого дробления.
3. Какие трещины образуются в горной породе при падении давления и обратной деформации пород в сторону зарядной полости?

4. Какие трещины образуются при отражении волны сжатия от свободной поверхности горной породы?

Тема 18. Классификации промышленных взрывчатых веществ.

Классификация ВВ: по характеру воздействия на окружающую среду, по чувствительности к простым формам начального импульса, физическому состоянию. Классификация по химическому составу – индивидуальные ВВ и взрывчатые смеси. Классы ВВ по условиям применения.

Литература: [1, 2, 4, 6]

Контрольные вопросы:

1. К какой группе относятся взрывчатые вещества, имеющие скорость детонации 4000 м/с?
2. Какие классы промышленных ВВ выделяют по химическому составу?
3. К какому классу промышленных ВВ по химическому составу относится тротил, детонит?
4. Какие ВВ можно использовать только при взрывных работах на поверхности, в шахтах опасных по газу и пыли? Укажите номер класса и цвет оболочки.
5. Какой цвет имеют патроны предохранительных ВВ?
6. По какому характерному признаку выделяют первичные и вторичные ВВ?

Тема 19. Непредохранительные взрывчатые вещества I класса по условиям применения.

Предъявляемые требования. Нитросоединения: свойства, ассортимент, область применения. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные свойства гранулотола.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ.
3. Бестротиловые взрывчатые вещества: особенности, свойства.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ.

Тема 20. Непредохранительные взрывчатые вещества II класса по условиям применения.

Предъявляемые требования. Аммиачно-селитренные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Эмульсионные взрывчатые вещества: свойства, ассортимент, область применения. Порошкообразные ВВ – аммониты и аммоналы. Свойства и область применения.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные свойства граммонита 79/21.
2. Особенности аммиачно-селитренных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.
3. Назовите отличительные особенности патронированных аммонитов.
4. Назовите отличительные особенности эмульсионных взрывчатых веществ, применяемых в подземных условиях.

Тема 21. Предохранительные взрывчатые вещества III – VII классов по условиям применения.

Требования к энергетическим и детонационным характеристикам предохранительных ВВ. Требования к кислородному балансу. Требования к составу и строению зарядов.

Литература: [1, 2, 7]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите названию взрывчатых веществ III класса по условиям применения.
2. Какие добавки вводят в состав предохранительных взрывчатых веществ?
3. Укажите требования, предъявляемые к предохранительным ВВ.

Тема 22. Методы производства взрывных работ.

Классификация методов производства взрывных работ. Метод шпуровых зарядов. Метод скважинных зарядов. Метод камерных зарядов. Метод наружных зарядов. Область применения, достоинства и недостатки методов.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите области применения метода шпуровых зарядов в подземных условиях.
2. Укажите область применения метода шпуровых зарядов при открытой разработке месторождений.
3. Укажите область применения метода скважинных зарядов.
4. Укажите область применения метода наружных зарядов.

Тема 23. Метод шпуровых зарядов при проведении подземных горных выработок.

Состав проходческого цикла. Коэффициент использования шпуров (КИШ). Коэффициент излишка сечения (КИС). Врубовые, отбойные и оконтуривающие шпуры. Очередность взрывания. Конструкции шпуровых зарядов. Размер и качество забойки. Прямое и обратное инициирование зарядов. Назначение и типы врубов. Конструкции наклонных врубов; их достоинства и недостатки. Конструкции прямых врубов; их достоинства и недостатки. Комбинированные врубы. Принципы расчета параметров буровзрывных работ.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите типы шпуров при проходке выработки.
2. Укажите очередность взрывания шпуров в типовой технологии проходки выработок.
3. Укажите условия, соответствующие обратному инициированию заряда.
4. Отметьте достоинства прямого инициирования заряда ВВ по сравнению с обратным.
5. Отметьте достоинства обратного инициирования заряда ВВ по сравнению с прямым.

Тема 24. Метод шпуровых зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.

Технология шпуровой отбойки при разработке рудных месторождений. Расчет параметров БВР. Технология шпуровой отбойки угля. Правила безопасности при использовании метода шпуровой отбойки.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Опишите существо метода шпуровых зарядов при добыче полезных ископаемых подземным спопобом.
2. Укажите классы ВВ допущенные к применению при шпуровой отбойке по углю.
3. Какой способ взрывания допущен к применению при шпуровой отбойке угля?
4. Какова допустимая величина уходки (м) при добыче угля методом шпуровых зарядов?

5. Какова величина предельного содержание метана в забое (в %), при котором разрешена отбойка угля методом шпуровых зарядов?

Тема 25. Метод скважинных зарядов при подземной разработке месторождений полезных ископаемых.

Отбойка вертикальными и горизонтальными слоями. Параллельное и веерное расположение скважин – преимущества и недостатки. Схемы отбойки руды в блоке. Расчет параметров скважинной отбойки. Бурение, заряжание и взрывание скважин. Правила безопасности при скважинной отбойке.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите преимущества параллельного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с веерным расположением скважин).
2. Укажите преимущества веерного расположения скважин при подземной отбойке руды (по сравнению с параллельным расположением скважин).
3. Укажите способы бурения скважин при отбойке руды в подземных условиях.
4. Какой тип ВВ обычно применяют при механизированном заряжании скважин?
5. Укажите показатели, входящие в формулу определения удельного расхода ВВ при скважинной отбойке руды в подземных условиях.

Тема 26. Метод скважинных зарядов при открытой разработке месторождений полезных ископаемых.

Расположение скважин на уступе и их бурение. Принципы расчета параметров буровзрывных работ. Схемы взрывания скважинных зарядов при однорядном и многорядном взрывании скважин.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите рациональные способы бурения скважин при открытой разработке месторождений.
2. Удельный расход ВВ на карьерах определяется по эталонному $q_э$ с учетом поправочных коэффициентов. Укажите факторы, определяющие величину данных коэффициентов.
3. Укажите основные способы взрывании зарядов взрывчатых веществ, используемых на земной поверхности.

4. Перечислите основные взрывчатые вещества, используемые при ведении взрывных работ на земной поверхности.

Тема 27. Метод камерных зарядов.

Расположение выработок при использовании камерных зарядов. Камерные заряды рыхления и их расчет. Камерные заряды выброса и их расчет. Камерные заряды на сброс и их расчет.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. В каких случаях целесообразно использовать метод камерных зарядов при открытой разработке месторождений?
2. Назовите достоинства и недостатки метода камерных зарядов.

Тема 28. Взрывное разрушение негабарита.

Характеристики, область применения, достоинства и недостатки различных способов разделки негабарита: наружными, шпуровыми, кумулятивными зарядами, гидровзрывание.

Литература: [1, 3]

Контрольные вопросы:

1. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита накладными зарядами.
2. Укажите достоинства и недостатки способа разделки негабарита шпуровыми зарядами.
3. Укажите способы взрывного дробления негабарита при открытой разработке месторождений.

Тема 29. Техническая документация для производства взрывных работ.

Необходимая техническая документация для производства взрывных работ: типовой проект взрывных работ, проект массового взрыва, паспорт буровзрывных работ, схема взрывных работ.

Литература: [1, 4, 6, 8]

Контрольные вопросы:

1. Что входит в состав типового проекта взрывных работ?
2. Опишите процедуру составления и утверждения паспорта буровзрывных работ.
3. Для каких работ составляется схема взрывных работ.
4. В каких случаях составляется проект массового взрыва?

Тема 30. Персонал для взрывных работ.

Требования к лицам, допущенным к ведению взрывных работ: руководитель взрывных работ, мастер-взрывник, заведующий складом ВМ, раздатчики ВМ и лаборанты складов ВМ.

Литература: [1, 4, 6, 8]

Контрольные вопросы:

1. Какие требования предъявляются к руководителям взрывных работ?
2. Какие требования предъявляются к взрывникам?
3. В течение какого периода времени проходит стажировка взрывника?
4. Требования в заведующему склада взрывчатых материалов.

3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Практико-ориентированное задание №1

Расчет кислородного баланса и составление рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Цель: овладение методикой расчета кислородного баланса взрывчатых веществ и принципами составления рецептур промышленных взрывчатых веществ.

Краткая теория

Определение кислородного баланса

Кислородным балансом называется отношение избытка или недостатка кислорода во взрывчатом веществе (ВВ) для полного окисления горючих элементов (водорода, углерода, металлов и т. п.), выраженное в грамм-атомах, к грамм-молекулярной массе ВВ. Кислородный баланс выражается в долях или процентах.

Под полным окислением понимается окисление водорода в воду, а углерода в углекислый газ. При этом выделяется также молекулярный азот и кислород. Если в составе ВВ находится металл, то образуется его высший окисел.

Реакции полного окисления:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 + 396 \text{ кДж/моль};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O \rightarrow H_2O + 283 \text{ кДж/моль при воде жидкой};$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + 241 \text{ кДж/моль при воде парообразной};$$

$$2Al + 1.5O_2 \rightarrow Al_2O_3 + 1671 \text{ кДж/моль}.$$

Следовательно, если ВВ имеет состав в виде $C_aH_bN_cO_d$, то кислородный баланс (%)

$$K_б = \frac{\left[d - \left(2a + \frac{b}{2}\right)\right] \cdot 16}{M_{BB}} 100\%, \quad (1.1)$$

где 16 – относительный атомная масса кислорода; M_{BB} – молекулярная масса ВВ.

При

$$d > 2a + \frac{b}{2} \quad (1.2)$$

имеет положительный кислородный баланс;

при

$$d = 2a + \frac{b}{2} \quad (1.3)$$

нулевой кислородный баланс;

при

$$d < 2a + \frac{b}{2} \quad (1.4)$$

отрицательный кислородный баланс.

Взрывчатые вещества с нулевым кислородным балансом выделяют максимальное количество энергии и минимальное количество ядовитых газов.

При взрыве ВВ с отрицательным кислородным балансом в зависимости от относительного количества кислорода образуются либо ядовитая окись углерода (угарный газ) с меньшим выделением тепла, чем при образовании углекислоты, т. е.

$$C + 0{,}5O_2 \rightarrow CO + 109 \text{ кДж/моль;}$$

либо чистый углерод в виде сажи, резко снижающий образование газов.

При положительном кислородном балансе уменьшается выделение энергии, так как образуется ядовитая окись азота с поглощением тепла по реакции

$$0{,}5N_2 + 0{,}5O_2 \rightarrow NO - 90{,}5 \text{ кДж/моль.}$$

Пример 1. Определить кислородный баланс тротила $C_7H_5(NO_2)_3$, относительная молекулярная масса которого 227.

Для полного окисления необходимо $2a + b/2$ или $2 \cdot 7 + 5/2 = 16{,}5$ атомов кислорода.

В наличии имеется 6 атомов кислорода.

Следовательно,

$$K_6 = \frac{\left[6 - \left(2 \cdot 7 + \frac{5}{2}\right)\right] \cdot 16}{227} 100\% = -74\%.$$

Пример 2. Определить кислородный баланс граммонита 30/70. Граммонит 30/70 состоит из 30% аммиачной селитры NH_4NO_3 и 70% тротила.

Кислородный баланс аммиачной селитры АС, определенный вышеуказанным способом, равен +20%.

Кислородный баланс граммонита 30/70:

$$0{,}3 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot -74 = -45{,}5\%.$$

Составление рецептуры промышленных ВВ

При изготовлении промышленных ВВ обычно состав подбирается таким, чтобы был нулевой кислородный баланс. Для изготовления патронированных ВВ принимается небольшой положительный кислородный баланс для окисления материала оболочки патронов. Для подземных работ при взрыве 1 кг ВВ должно выделятся не более 40 л ядовитых газов в пересчете на условную окись углерода. Если образуются окислы азота и сернистый газ, то для перевода их к условной окиси углерода принимается поправочный коэффициент соответственно 6,5 и 2,5.

Для открытых горных работ, особенно для ВВ, применяемых в обводненных условиях, требования к кислородному балансу ВВ не такие жесткие.

Пример 1. Составить рецептуру игданита с нулевым кислородным балансом па основе аммиачной селитры и дизельного топлива (ДТ) с кислородным балансом – 320%.

Количество весовых частей аммиачной селитры для окисления одной части дизельного топлива равно

$$n = \frac{[\text{КБ}_{DT}]}{[\text{КБ}_{\text{АС}}]},$$

где КБ_{DT} – кислородный баланс дизельного топлива;

$\text{КБ}_{\text{АС}}$ – кислородный баланс аммиачной селитры.

$$n = \frac{320}{20} = 16.$$

Содержание дизельного топлива во взрывчатом веществе:

$$x = \frac{100}{1+n},$$

$$x = \frac{100}{1+16} = 5{,}9\ \%.$$

Соответственно содержание аммиачной селитры

$$100 - x = 100 - 5{,}9 = 94{,}1\%.$$

Следовательно, формула игданита:

$$94{,}1\%\ \text{аммиачной селитры};\ 5{,}9\%\ \text{дизельного топлива}.$$

Пример 2. Определить рецептуру ВВ с пулевым кислородным балансом на основе аммиачной селитры (NH_4NO_3) и тротила ($C_7H_5(NO_2)_3$).

Кислородный баланс тротила –74%, относительная молекулярная масса 227. Кислородный баланс аммиачной селитры +20%, относительная молекулярная масса 80.

Состав смеси должен отвечать условию:

$$x\ (-74\%) + (100 - x)\ 20\% = 0,$$

где x – содержание в смеси тротила, %.

Решение данного уравнения показывает, что $x \approx 21\%$ и $(100 - x) = 79\%$. Такому составу смеси отвечают граммонит 79/21 и аммонит 6ЖВ.

Обозначим число молей аммиачной селитры через y, число молей тротила через z. Тогда из соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 227} = \frac{79}{21},$$

получим

$$y = \frac{79 \cdot z \cdot 227}{21 \cdot 80} = 10{,}7z.$$

Приняв z = 1, получим y = 10,7.

Следовательно, молекулярное уравнение граммонита имеет вид

$$z + 10{,}7y = C_7H_5(NO_2)_3 + 10{,}7NH_4NO_3.$$

Пример 3. Определить молекулярную формулу гранулита АС-8, имеющего следующий состав: 89% аммиачной селитры NH_4NO_3; 3% солярового масла $C_{16}H_{34}$ (относительная молекулярная масса 226); 8% алюминиевой пудры А1 (относительная молекулярная масса — 27).

Обозначив число молей солярового масла x, аммиачной селитры y, алюминиевой пудры z, можно написать химическую формулу в виде

$$y NH_4NO_3 + x\ C_{16}H_{34} + z\ Al.$$

В соответствии с весовым составом можно записать следующие соотношения

$$\frac{y \cdot 80}{x \cdot 226} = \frac{89}{3};\quad \frac{z \cdot 27}{x \cdot 226} = \frac{8}{3},$$

Отсюда y = 83,9x; z = 22,4x.

Примем x = 1, тогда молекулярное уравнение гранулита АС-8 имеет вид

$$83{,}9\ NH_4NO_3 + C_{16}H_{34} + 22{,}4\ Al.$$

Практико-ориентированное задание №2

Определение работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Цель: овладение методикой определения работоспособности взрывчатых веществ и работы взрыва.

Краткая теория

Расчет идеальной работоспособности ВВ

Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии газов равно количеству тепла, сообщенного окружающей среде и произведенной работе:

$$-dE = dQ + pdV. \quad (2.1)$$

Если техническим назначением взрыва ВВ является производство механической работы, то затраты на теплообмен продуктов взрыва (ПВ) с окружающей средой являются энергетическими потерями (dQ). Эти потери называются термодинамическими.

Идеальным с точки зрения отсутствия термодинамических потерь является адиабатический процесс расширения ПВ, т.е. $dQ = 0$. В этом случае изменение внутренней энергии ПВ равно количеству работы, совершаемой газами, т.е.

$$-dE = pdV = dA. \quad (2.2)$$

В реальных условиях взрывания наиболее близким к адиабатическому процессу является взрыв ПВ в воздушной среде, а, например, в горных породах термодинамические потери возрастают. Они существенно выше в пористых, хрупких, легко дробимых породах и минимальны в пластичных средах типа глин.

Мерой идеальной работоспособности ВВ может служить максимальная работа, которую совершают ПВ при своем адиабатическом расширении до давления окружающей среды (воздушной, водной, горной), т.е. когда остаточное давление ПВ уравновешивается противодавлением среды атмосферным, гидростатическим или горным давлением.

Идеальная работоспособность ВВ является одной из важнейших энергетических характеристик ВВ. Она дополняет теплоту взрыва, показывая теоретическую возможность реализации энергетического потенциала ВВ в механическую работу.

Идеальную работоспособность (полную идеальную работу взрыва) можно определить, как разность между значениями внутренней энергии ПВ в момент их образования и к концу расширения:

$$\text{А}_\text{и} = \int dE = \int_{T_1}^{T_2} \overline{C_V} dT = \overline{C_V} * (T_1 - T_2) = \overline{C_V} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (2.3)$$

где $\overline{C_V}$ - средняя теплоемкость продуктов взрыва в интервалах изменения температуры взрыва от T_1 до T_2;

T_1 - начальная температура взрыва;

T_2 - конечная температура ПВ.

Для газовых взрываемых систем, расширение ПВ которых происходит вдоль изоэнтропы вида pV' = const, пользуясь уравнением Клайперона $(PV'=RT)$, получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}} \quad (2.4)$$

Окончательно получаем

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad (2.5)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{y-1}\right); \quad (2.6)$$

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right); \quad (2.7)$$

где $Q_{\text{взр}}$- потенциальная энергия ВВ (полная тепловая энергия), кДж/кг;

V_1 и V_2 - начальный и конечный удельные объемы ПВ, м^3/кг;

P_1 и P_2 - начальное и конечное давление ПВ, Па;

$y = Cp/Cv$ – показатель адиабаты.

Эти же формулы могут быть использованы для расчета A_u конденсированных ВВ.

При взрыве в воздухе (P_2 = 1,01·10^{5}Па) полная идеальная работа взрыва определяется

$$A_u = Q_{\text{взр}} \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right), \text{ кДж/кг.} \quad (2.8)$$

Расчет полного термодинамического КПД взрыва

Вышеприведенную формулу (2.8) можно представить в виде

$$A_u = Q_{\text{взр}} - q_T \quad (2.9)$$

Здесь величина $q_T = Q_{\text{взр}} - A_u = C_{v2} * T_2$ - термодинамические потери энергии ВВ в продуктах взрыва по достижении ими атмосферного давления. Это остаточное тепло идет на свечение ПВ после их расширения.

Отношение идеальной работоспособности к выделившейся тепловой энергии взрыва называется идеальным термодинамическим КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}}, \tag{2.10}$$

или с учетом формулы (2.7)

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{y-1}{y}}, \tag{2.11}$$

Идеальный термодинамический КПД взрыва определяет часть тепловой энергии, которая может быть использована для совершения механической работы взрыва.

Величины идеальной работоспособности (A_u) и полного термодинамического КПД (П) существенно зависят от свойств продуктов взрыва, влияющих на показатель адиабаты, *y= Cp/Cv*. Если в ПВ содержится 2/3 молекул двухатомных газов и 1/3 — одноатомных (гексоген), то *y* = 1,25. Если в ПВ содержится 2/3 трехатомных газов и 1/3 двухатомных (нитроглицерин), то *y* = 1,2. Величина *y* снижается (соответственно снижается A_u и η), если в ПВ содержатся четырех и пятиатомные газы, а также твердые продукты (NaCl, $A1_2O_3$ и др.). В этих случаях *y* = 1,15, и 1,05.

Пример 1. Определить полную идеальную работоспособность и термодинамический КПД аммонита 6ЖВ при плотности заряжания 900 кг/м^3 и следующих параметрах взрывного превращения:

$V_{пв}$= 0,86 м^3/кг,

$Q_{взр}$ = 4300кДж/кг;

$T_{взр}$=2600° К.

Для расчета показатель адиабаты принимается y=1,25. Определение давления ПВ при взрыве аммонита 6ЖВ:

$$P = \frac{1{,}01*10^5*0{,}86*2600*900}{273*(1-0{,}001*0{,}86*900)} = 3{,}3 * 10^9,$$

Откуда полная идеальная работоспособность

$$A_u = Q_{\text{взр}}\left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{P_{\text{пв}}}\right)^{\frac{y-1}{y}}\right) = 4300 * \left(1 - \left(\frac{1{,}01 * 10^5}{3{,}3 * 10^9}\right)^{\frac{1{,}25-1}{1{,}25}}\right) = 3762{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Полный термодинамический КПД взрыва

$$\eta = \frac{A_u}{Q_{\text{взр}}} = \frac{3762{,}2}{4300} = 0{,}875$$

или $\eta = 87{,}5\%$

Практико-ориентированное задание №3

Расчет скважинного заряда при уступной отбойке на карьере

Цель работы – овладение методикой расчета параметров буровзрывных работ при использовании скважинной отбойки при открытой разработке месторождений полезных ископаемых.

Краткая теория

При разработке месторождений открытым способом (на карьерах и разрезах) используют в основном метод скважинных зарядов. В слабых породах используют вращательное (шнековое) бурение. В более прочных породах преобладает шарошечное бурение. В крепчайших породах с коэффициентом крепости f > 14-16 наиболее эффективно термическое бурение скважин. Скважины на уступе карьера располагают в один или несколько рядов по различным схемам в зависимости от свойств разрушаемых пород и требуемой конфигурации забоя. Расположение скважин на уступе характеризуют следующими показателями (рис. 1):

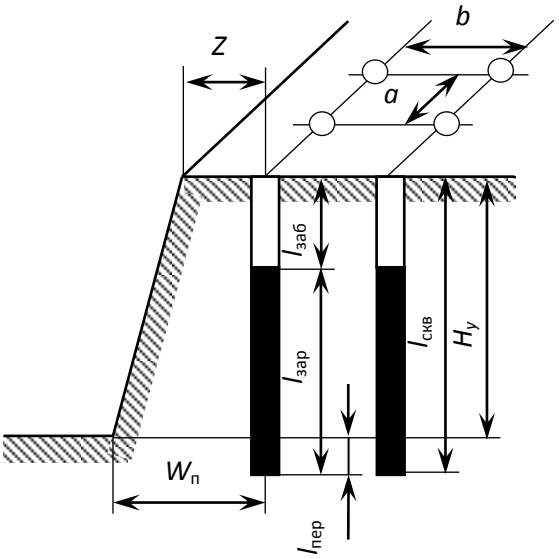


Рис. 3.1. Схема расположения скважин на уступе

$H_у$ – высота уступа, м;
$W_п$ – линия сопротивления по подошве (ЛСПП);
a – расстояние между скважинами, м;
b – расстояние между рядами скважин, м;
Z – безопасное расстояние от оси скважины до верхней бровки уступа, м;
$l_{зар}$ – длина заряда, м;
$l_{пер}$ – длина перебура, м;
$l_{заб}$ – длина забойки, м;
$l_{скв}$ – длина (глубина) скважины, м;
α - угол откоса уступа.

Характеристики и расположение скважин в первую очередь зависят от удельного расхода ВВ. Оптимальная величина удельного расхода ВВ определяется множеством факторов. При этом определяющую роль играют свойства разрушаемого массива, размеры его блоков (расстояние между трещинами), степень и качество заполнения трещин, их расположение относительно вектора смещения породы и т. п. Учесть все эти факторы в единой теоретической модели не представляется возможным. Поэтому во многом оптимальные параметры процесса определяются путем опытного взрывания и интерпретации его результатов на основе общефизических представлений.

Удельный расход «эталонного» ВВ ($q_э$) может быть определен по данным таблицы 1.

Таблица 3.1

Эталонный удельный расход ВВ, кг/м^3

Категория пород по степени трещиноватости	Коэффициент крепости горных пород f по шкале проф. М. М. Протодьяконова			
	2 - 6	6 - 10	10 – 14	более 14
I	0,2	0,25	0,3	0,35
II	0,3	0,35	0,4	0,45
III	0,45	0,5	0,6	0,67
IV	0,67	0,75	0,8	0,9
V	0,9	1,0	1,1	1,2

Реальный удельный расход ВВ рекомендуется определять путем введения серии поправочных коэффициентов, учитывающих тип ВВ, конструкцию заряда, наличие свободных поверхностей, заданную степень дробления и др:

$$q_р = q_э \cdot e \cdot k_d \cdot \frac{\rho_{гп}}{2{,}6}, \qquad (3.1)$$

где $q_э$ – эталонный расход Граммонита 79/21, кг/м^3;

e – коэффициент относительной работоспособности ВВ, определяемый по формуле

$$e = A_{эт} / A_{ВВ}, \qquad (3.2)$$

$A_{эт}$ = 3560 кДж/кг - идеальная работа взрыва эталонного ВВ (Граммонит 79/21);

$A_{ВВ}$ – идеальная работа взрыва принятого ВВ, кДж/кг;

k_d - поправочный коэффициент на кондиционный размер куска;

$\rho_{гп}$ – плотность горных пород, т/м^3.

Таблица 3.2

Значения поправочного коэффициента на кондиционный размер куска k_d

Допустимый размер крупных кусков, мм	250	500	750	1000	1250	1500
k_d	1,3	1,0	0,85	0,75	0,7	0,65

Диаметр заряда определяется диаметром рабочего органа буровой машины (долота, коронки или резца) $d_{скв}$ с учетом характеристик разрабатываемых пород:

$$d_{зар} = k_р d_{скв}, \quad (3.3)$$

где $k_р$ = 1,06 – (f – 2) 0,003 – коэффициент расширения скважин.

Удельная вместимость 1 м скважины:

$$P = 0{,}785 \cdot d_{зар}^2 \cdot \Delta, \quad (3.4)$$

где Δ, кг/м^3 - плотность заряда в скважине.

Линия сопротивления по подошве (ЛСПП) для одиночной скважины:

$$W_п = 0{,}9 \cdot \sqrt{\frac{P}{q_р}}, \quad (3.5)$$

В соответствии с правилами безопасности при бурении первого ряда скважин станок располагается перпендикулярно верхней бровке уступа, за призмой обрушения, но не ближе 2 м от верхней бровки уступа, поэтому минимально допустимая по условиям безопасного расположения бурового станка линия сопротивления по подошве (W_{min}) для вертикальных скважин рассчитывается из соотношения

$$W_{min} = H_у \operatorname{ctg}\alpha + Z, \quad (3.6)$$

где α – угол откоса рабочего уступа, град;

Z – ширина призмы обрушения, $Z \geq 2$ м.

Величина принимаемой при расчетах линии сопротивления по подошве ($W_п$) должна удовлетворять соотношению:

$$W_{min} < W_п. \quad (3.7)$$

Если значения $W_{min} > W_п$, это означает, что принятые параметры скважин и характеристики ВВ не обеспечивают проработку подошвы уступа. В этом случае следует изменить диаметр скважины, тип применяемого ВВ или перейти к наклонным скважинам.

Глубина перебура:

$$l_{пер} = (10 \div 15) \cdot d_{скв} \quad (3.8)$$

Глубина забойки:

$$l_{\text{заб}} = (20 \div 35) \cdot d_{\text{скв}} \quad (3.9)$$

Глубина скважины:

$$l_{\text{скв}} = H_{\text{у}} + l_{\text{пер}} \quad (3.10)$$

Расстояние между скважинами в ряду:

$$a = mW_{\text{п}}, \quad (3.11)$$

где m = 0,8 – 1,4 - коэффициент сближения скважин; меньшее значение m принимается для крепких пород.

Расстояние между рядами скважин:

$$b = (0{,}9\text{-}1{,}0)W_{\text{п}}. \quad (3.12)$$

Масса заряда в скважине:

$$Q = q_{\text{р}} \cdot a \cdot W_{\text{п}} \cdot H_{\text{у}} \quad (3.13)$$

Длина заряда:

$$l_{\text{зар}} = \frac{Q}{P}. \quad (3.14)$$

Задание: рассчитать параметры буровзрывных работ при скважинной отбойке в условиях открытой разработки месторождений полезных ископаемых.

Практико-ориентированное задание №4

Расчёт безопасных расстояний по разлету кусков породы при взрывании скважинных зарядов

Цель работы – овладение методикой расчета безопасных расстояний по разлету кусков породы при взрывании скважинных зарядов.

При определении зон, опасных по разлету отдельных кусков породы при взрывании скважинных зарядов на земной поверхности, следует выделять и отдельно рассчитывать безопасные расстояния для людей зданий и сооружений, машин и механизмов.

При взрывании скважинных зарядов рыхления (дробления) расстояние опасное для людей, рассчитывается по формуле:

$$r_{разл} = 1250 \cdot h_3 \cdot \sqrt{\frac{f}{1+h_{заб}} \cdot \frac{d}{a}} \qquad (4.1)$$

где $h_з$ – коэффициент заполнения скважины взрывчатым веществом, определяемый по формуле

$$h_3 = \frac{l_{зар}}{l_c}, \qquad (4.2)$$

$l_{зар}$ – длина заряда ВВ, м;

$l_{зар}$ – глубина скважины, м;

f – коэффициент крепости горных пород;

$h_з$ – коэффициент заполнения скважины забойкой:

$$h_3 = \frac{l_{заб}}{l_н}, \qquad (4.3)$$

$l_{зар}$ – длина забойки, м;

$l_н$ – длина свободной от заряда верхней части скважины, м;

d – диаметр взрываемой скважины, м;

a – расстояние между скважинами в ряду или между рядами, м.

Расчётные значения радиусов разлета осколков округляются в большую сторону до значения, кратного 50 м. Окончательно принимаемое безопасное расстояние не должно быть меньше указанных в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Минимально допустимые безопасные расстояния для людей при взрывных работах

№ п/п	Методы взрывных работ	Минимально допустимые радиусы опасных зон, м
1.	Наружных зарядов, в том числе кумулятивных	300 (по проекту)
2.	Шпуровых зарядов	200
3.	Котловых шпуров	200
4.	Малокамерных зарядов (рукавов)	200*
5.	Скважинных зарядов	Не менее 200**
6.	Котловых скважин	Не менее 300
7.	Камерных зарядов	Не менее 300

* - при взрывании на косогорах в направлении вниз по склону величина радиуса опасной зоны должна приниматься не менее 300 м.

** - радиус опасной зоны указан для взрывания зарядов с забойкой.

Практико-ориентированное задание №5

Составление паспорта буровзрывных работ на проведение горизонтальной горной выработки.

Цель работы – овладение методикой расчета параметров буровзрывных работ (БВР) при проведении подземных горных выработок и составления паспорта БВР.

Краткая теория

Проведение горных выработок буровзрывным способом осуществляется по паспортам буровзрывных работ (БВР). Паспорта утверждаются руководителем того предприятия, которое ведёт взрывные работы. С паспортом БВР ознакомляется весь персонал, осуществляющий буровзрывные работы в данной выработке.

Паспорт составляется для каждого забоя выработки на основании расчетов и утверждается с учётом результатов не менее трёх опытных взрываний. По разрешению руководителя предприятия (шахты, рудника) допускается вместо опытных взрываний использовать результаты взрывов, проведённых в аналогичных условиях.

Расчёт, необходимый для составления паспорта, сводится к выбору и определению основных параметров буровзрывных работ для проведения выработки. К основным параметрам относятся: тип взрывчатого вещества (ВВ) и средства инициирования (СИ), диаметр и глубина шпуров, тип вруба, удельный заряд ВВ, количество шпуров и конструкции зарядов, расход взрывчатых материалов.

5.1. Общие положения

Буровзрывной комплекс работ занимает от 30 до 60 % общего времени проходческого цикла в зависимости от горнотехнических условий.

При проведении горных выработок буровзрывные работы должны обеспечить заданные размеры и форму поперечного сечения выработки, точное оконтуривание её профиля, качественное дробление породы и сосредоточенное размещение её в забое, нормативную величину коэффициента излишка сечения (КИС), высокий коэффициент использования шпуров (КИШ).

Эти требования соблюдаются при условии правильного выбора параметров буровзрывных работ: типа ВВ, типа и параметров вруба, величины и конструкции заряда в шпуре, диаметра и глубины шпуров, числа и

расположения их в забое, способа и очередности взрывания зарядов, типа бурового оборудования, качества буровых работ, организации проходческих работ и т. д.

5.2. Определение параметров буровзрывных работ

5.2.1. Выбор взрывчатых материалов

При выборе взрывчатых материалов (ВМ) руководствуются требованиями безопасного производства взрывных работ, регламентированных «Правилами безопасности при взрывных работах» [6] с учетом физико-механических свойств горных пород и горнотехнических условий.

Рекомендуемые взрывчатые вещества (ВВ) [7] в зависимости от условий работ, обводнённости и крепости пород, способа заряжания представлены в табл. 5.1.

В шахтах, не опасных по газу или пыли, при проведении горизонтальных выработок допускается применение электрического взрывания и систем неэлектрического взрывания с низкоэнергетическими волноводами.

Таблица 5.1

Рекомендуемые ВВ

Условия взрывных работ	Условия размещения зарядов	Коэффициент крепости пород *f*	Тип ВВ	Способ заряжания
Выработки, не опасные по взрыву газа или пыли	Сухие шпуры	до 12	Гранулит М Граммонит 79/21 Гранулит АС-4В Гранулит-игданит	Механизированный
			Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Гранулит АС-8В	Механизированный
			Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	Ручной
	Обводнённые шпуры	до 12	Аммонит № 6ЖВ	Ручной
		более 12	Аммонал М-10 Детонит М Аммонал скальный № 1	
Выработки, опасные по взрыву газа и пыли	Сухие и обводнённые шпуры	Для взрывания по породе	Аммонит АП–5ЖВ	Ручной
		Для взрывания по углю с учетом степени опасности	IV кл. Аммонит Т-19 Аммонит ПЖВ-20 V кл. Угленит Э-6 VI кл. Угленит 12ЦБ	
	Для водораспыления	Открытый заряд	Ионит	

На угольных шахтах, опасных по газу или пыли, разрешается только взрывание с применением электродетонаторов. При полном отсутствии в забоях проходимых выработок метана или угольной пыли, допускается применение непредохранительных ВВ II класса и электродетонаторов мгновенного, короткозамедленного и замедленного действия со временем замедления до 2 с без ограничения количества приёмов и пропускаемых серий замедлений.

Основные характеристики ВВ, применяемых при проходке подземных горных выработок, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Характеристики ВВ

Наименование ВВ	Идеальная работа взрыва, кДж/кг	Плотность в патронах или насыпная, кг/м^3	Удельная объемная энергия взрыва при средней плотности, кДж/кг	Коэффициент взрывной эффективности при плотности ВВ 1000 кг/м^3	Расстояние передачи детонации между патронами, см		Диаметр патронов, мм	Масса патрона, кг	Длина патрона, мм
					Сухие	После выдержки в воде			
Аммонит № 6ЖВ	3561	1000-1100	3917	1,0	5-9	3-6	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал М-10	4410	950-1100	4520	1,15	4	3	32	0,2	250
Детонит М	4316	1000-1200	4963	1,27	8-18	5-15	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонал скальный № 1	4420	1000-1100	4641	1,18	8-14	5-10	32 36	0,2 0,25	250 250
Аммонит АП-5ЖВ	2991	1000-1150	3215	0,82	5-10	2-7	36	0,3	250
Аммонит Т-19	2564	1000-1200	2820	0,72	7-12	4-8	36	0,3	240
Угленит Э-6	1946	1100-1250	2289	0,58	5-12	3-10	36	0,3	240
Угленит 12 ЦБ	1770	1200-1350	2256	0,58	4	2	36	0,3	240
Ионит	1482	1000-1200	1704	0,44	–	–	36	0,3	240
Гранулит М	3163	780-820 (1000-1150)*	3384	0,86					
Гранулит АС-4В	3645	800-850 (1100-1200)*	4192	1,07					
Гранулит АС-8В	3997	800-850 (1100-1200)*	4597	1,17					
Гранулит-игданит	3150	800-850 (1100-1200)*	3760	0,85					

* Плотность при механизированном заряжании

Технические характеристики электродетонаторов, применяемых при проведении горных выработок, приведены в табл. 5.3. Все электродетонаторы являются водоустойчивыми.

Таблица 5.3

Электродетонаторы для шахт и рудников

Тип электродетонаторов	Кол-во серий	Интервалы замедления, мс (с)	Безопасный ток, А	Гарантийный ток, А	Сопротивление, Ом	Примечание
ЭД-8Ж(Э)	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы непредохранительные нормальной чувствительности
ЭД-3-Н	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭД-1-8-Т	1	0	1,0	5,0	0,5-0,75	Электродетонаторы непредохранительные пониженной чувствительности к блуждающим токам
ЭД-3-Т	36	20, 40, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 мс 5,6,7,8,9,10 с				
ЭДКЗ-ОП	1	0	0,2	1,0	1,8-3,6	Электродетонаторы предохранительные нормальной чувствительности
ЭДКЗ-П	5	25, 50, 75, 100, 125 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭДКЗ-ПМ	7	15, 30, 45, 60, 80, 100, 120 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	
ЭД-КЗ-ПКМ	9	4, 20, 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200 мс	0,2	1,0	1,8-3,6	

Детонирующие шнуры ДША, ДШВ и ДШЭ-12 и др. применяют при необходимости одновременного взрывания врубовых, нижних подошвенных шпуров, а также в рассредоточенных зарядах с целью передачи детонации всем частям шпурового заряда.

В последние годы на подземных взрывных работах получил широкое распространение новый способ инициирования зарядов ВВ – система неэлектрического взрывания различных модификаций: Нонель (Швеция), СИНВ, Эдилин (Россия) и др.

В табл. 3.4 представлены характеристики систем СИНВ и ДБИ для взрывных работ в рудниках и угольных шахтах, где допущено применение непредохранительных взрывчатых веществ II класса.

Устройства СИНВ-Ш и ДБИ3 служат для трансляции инициирующего сигнала и инициирования боевиков шпуровых зарядов с заданной временной задержкой. В боевике каждого шпурового заряда размещается КД устройства СИНВ-Ш или ДБИ3 заданного интервала замедления.

Таблица 5.4

Характеристики систем неэлектрического инициирования

Устройство	Интервал замедления, мс	Назначение
СИНВ-Ш	0, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	Изготовление патронов-боевиков
ДБИ3	0, 17, 25, 42, 55, 67, 109, 125, 150, 176, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000	

Примечание. Интервалы замедлений приведены при длине ударно-волновой трубки (УВТ) 1 м. Добавление каждого метра длины УВТ увеличивает время замедления на 0,5 мс.

УВТ, выходящие из шпуров, инициируются одновременно от устройств СИНВ-П мгновенного действия (СИНВ-П-0), смонтированных в единую сеть. Длина УВТ стартового устройства (магистральной части сети) выбирается из условия безопасного подрыва и может составлять несколько сот метров.

При проходке подземных выработок обычно применяется следующая схема: УВТ, выходящие из шпуров, собираются в связки (пучки), которые соединяются в единую сеть детонирующим шнуром. Детонирующий шнур обвязывается вокруг связки двойной петлёй. Количество УВТ в одной связке не должно превышать 15 шт. Инициирование сети из детонирующего шнура производится электродетонатором или электрозажигательной трубкой.

5.2.2. Выбор типа вруба и глубины шпуров

Расположение шпуров в забое, величина заходки и показатели взрыва во многом определяются типом вруба. Врубы по характеру действия делятся на две группы:

– врубы с наклонными к оси выработки шпурами – наклонные врубы;

– врубы с параллельными к оси выработки шпурами – прямые врубы.

Тип вруба и глубину шпуров с учетом горнотехнических условий следует принимать по данным табл. 5.5.

Таблица 5.5

Тип вруба и глубина шпуров

Тип буровой техники	Сечение выработки, м^2	
	менее 6	более 6
Переносные перфораторы, ручные электросвёрла и пневмосвёрла	Прямые врубы при глубине шпуров более 1,5 м	Наклонные врубы при глубине шпуров не более (0,35–0,5) ширины выработки; прямые врубы при глубине шпуров до 2–2,5 м
Установки механизированного бурения	–	Прямые врубы с максимально возможной глубиной по технической характеристике машины

Из наклонных врубов наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Другие врубы с наклонными шпурами (пирамидальный, горизонтальный клиновой и его разновидности, веерный и т. д.) не получили достаточно широкого распространения из-за сложности обуривания и узкой рекомендуемой области применения (забои, проводимые по пласту угля при малой его мощности, при наличии слабых прослоек пород по забою, при ярко выраженном контакте слабых пород с более крепкими вмещающими породами и т. д.).

Высокая эффективность врубов с наклонными шпурами и преимущества их по сравнению с прямыми врубами достигаются только при ограниченной глубине шпуров и определенном сечении выработки. При проходке выработок в крепких породах ($f > 12$) с применением вертикального клинового вруба длина заходки не превышает обычно 0,35 ширины выработки (B) из-за технической невозможности бурения врубовых шпуров под углом наклона, обеспечивающим эффективную работу вруба. При глубине шпуров более 0,5 B, применении буровых кареток, а также в выработках малого сечения (менее 6 м^2) наиболее эффективны прямые врубы, глубина которых ограничивается точностью бурения в зависимости от типа буровой техники.

При глубине шпуров, принятой по рекомендациям табл. 5.5, проектную величину КИШ следует принимать равной 0,85-0,95 с учётом крепости горных пород.

5.2.3. Выбор конструкции и параметров врубов

5.2.3.1. Вертикальный клиновой вруб

При ограниченной глубине шпуров (1,2–2,0 м) наибольшее распространение имеет вертикальный клиновой вруб. Параметры вертикального клинового вруба в зависимости от крепости пород применительно к аммониту № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм в шпурах диаметром 42 мм ориентировочно по данным практики можно принять по данным табл. 5.6.

Таблица 5.6

Параметры вертикального клинового вруба

Группа крепости пород по СНиП	Коэффициент крепости пород *f*	Расстояние по вертикали между парами шпуров, мм	Количество шпуров во врубе при сечении выработки ($м^2$)		Угол наклона шпуров к плоскости забоя α, град.
			до 12	более 12	
IV-V	1-6	500	4	4-6	75-70
VI	6-8	450	4-6	6-8	68
VII	8-10	400	6-8	8-10	65
VIII	10-13	350	8-10	10-12	63
IX	13-16	300	10-12	12-14	60
X	16-18	300	10-12	12-14	58
XI	20	250	10-12	12-14	55

При применении другого типа ВВ и изменении диаметра шпуров расстояние между парами врубовых шпуров определяется с учётом поправочного коэффициента по формуле:

$$k = 1{,}25\sqrt{e}\cdot d_з/d, \qquad (5.1)$$

где e – коэффициент взрывной эффективности (см. табл. 5.2),

$d_з$ – диаметр заряда,

d – диаметр заряжаемой полости (шпура или скважины).

С увеличением коэффициента крепости пород (см. табл. 5.6) угол наклона врубовых шпуров к плоскости забоя уменьшается. Поэтому предельную глубину вертикального клинового вруба (рис. 5.1) при бурении шпуров ручными перфораторами в зависимости от коэффициента крепости пород и ширины выработки рекомендуется принимать по табл. 5.7 или по формуле:

$$h_{вр} = 0{,}25B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 0{,}3, \qquad (5.2)$$

где B – ширина выработки, м

α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град. (см. рис. 3.1).

Таблица 5.7

Предельная глубина вертикального клинового вруба $h_{вр}$, м

Ширина выработки, м	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
2,0	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
2,5	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
3,0	2,1	1,9	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2
3,5	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
4,0	2,8	2,6	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7
4,5	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	2,0	1,9
5,0	3,5	3,1	2,9	2,7	2,4	2,2	2,1

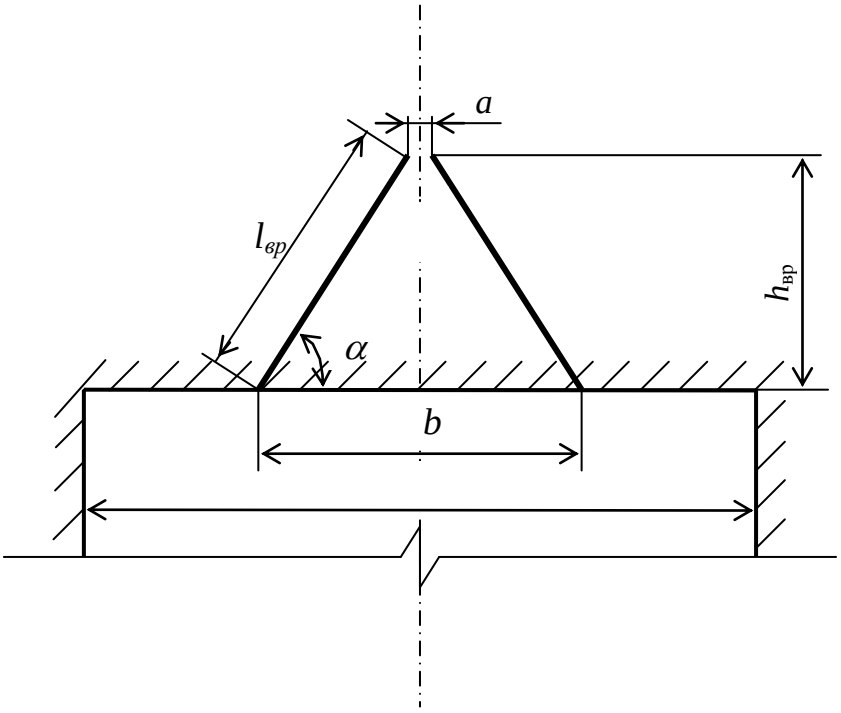


Рис. 5.1. Схема вертикального клинового вруба

Глубину врубовых шпуров следует принимать на 0,1-0,2 м больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров:

$$h_{вр} = h_{шп} + (0{,}1 \div 0{,}2), \qquad (5.3)$$

где $h_{шп}$ – глубина (длина) вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Длину шпуров клинового вруба определяют с учетом угла их наклона:

$$l_{вр} = h_{вр} / \sin \alpha, \qquad (5.4)$$

где α – угол наклона шпуров к плоскости забоя, град.

Расстояние между устьями в паре шпуров клинового вруба определяют по зависимости:

$$b = 2\, h_{вр} / \mathrm{tg}\, \alpha + a, \qquad (5.5)$$

где a – расстояние между забоями пары сходящихся шпуров клинового вруба, м (в зависимости от коэффициента крепости пород a = 0,15-0,2 м).

После расчета основных параметров вруба следует проверить графическим способом техническую возможность обуривания вертикального клинового вруба с учетом принятого бурового оборудования. С этой целью в масштабе 1:20 – 1:50 вычерчивается план забоя (вид сверху) с наложением пары врубовых шпуров и обязательного соблюдения принятого угла наклона шпуров α.

Если ширина выработки не позволяет с учётом габаритов бурильной машины (см. рис. 3.1) обурить рассчитанный вруб, то следует уменьшить глубину врубовых шпуров или принять другой тип вруба. При применении бурильных установок стрела автоподатчика должна свободно размещаться при заданном угле наклона врубовых шпуров между точкой забуривания врубового шпура и стенкой выработки. При бурении переносными перфораторами или ручными электросвёрлами врубовые шпуры могут буриться в 2-3 приёма комплектом штанг различной длины (например: 0,5 м; 1,2 м; 2,0 м).

5.2.3.2. Прямые врубы

Из прямых врубов (рис. 5.2) наиболее широкое распространение получили следующие конструкции: призматический симметричный *а*; щелевой *б*; спиральный *в* и двойной спиральный *г*.

Прямые врубы представляют собой комбинацию параллельных заряженных шпуров, взрыв которых работает на компенсационную полость, создаваемую холостым шпуром (системой холостых шпуров) или скважиной. Взрыв последующих шпуров расширяет врубовую полость до размеров, достаточных для последующей отбойки вспомогательными (отбойными) шпурами с постоянной, предельной для конкретных горнотехнических условий линией сопротивления.

Параметры прямых врубов принимаются в зависимости от конструкции вруба, крепости пород, диаметра компенсационной полости (шпура или скважины, их количества). Наиболее ответственными являются первый шпур или серия шпуров, взрываемых на компенсационную полость. Поэтому для повышения эффективности взрыва целесообразно в качестве компенсационной полости использовать шпур увеличенного диаметра, систему холостых шпуров или скважину.

Расстояние между компенсационной полостью и первым взрываемым шпуром или серией шпуров (пробивное расстояние W_1) рекомендуется принимать для шпуров диаметром 42 мм при использовании аммонита № 6 ЖВ в патронах диаметром 32 мм по табл. 5.8.

При применении другого типа ВВ или другой конструкции заряда пробивное расстояние W_1, определенное по табл. 1.7, умножается на поправочный коэффициент, рассчитанный по формуле (5.1).

Пробивные расстояния W_1 учитывают возможное отклонение шпуров от заданного направления. С увеличением глубины шпуров растет их отклонение, поэтому при глубине шпуров до 2,5 м достаточно принимать диаметр первона-

чальной компенсационной полости не более 50-60 мм; при шпурах глубиной до 3 м – 70-105 мм и при шпурах до 4 м – 105-125 мм, что позволит сохранить КИШ в пределах 0,85-0,9.

Пробивные расстояния для шпуров, взрываемых вторыми и последующими во врубе (W_1, W_2, W_3 и т. д.), принимаются равными 0,8 от ширины (наибольшего размера) ранее образованной врубовой полости.

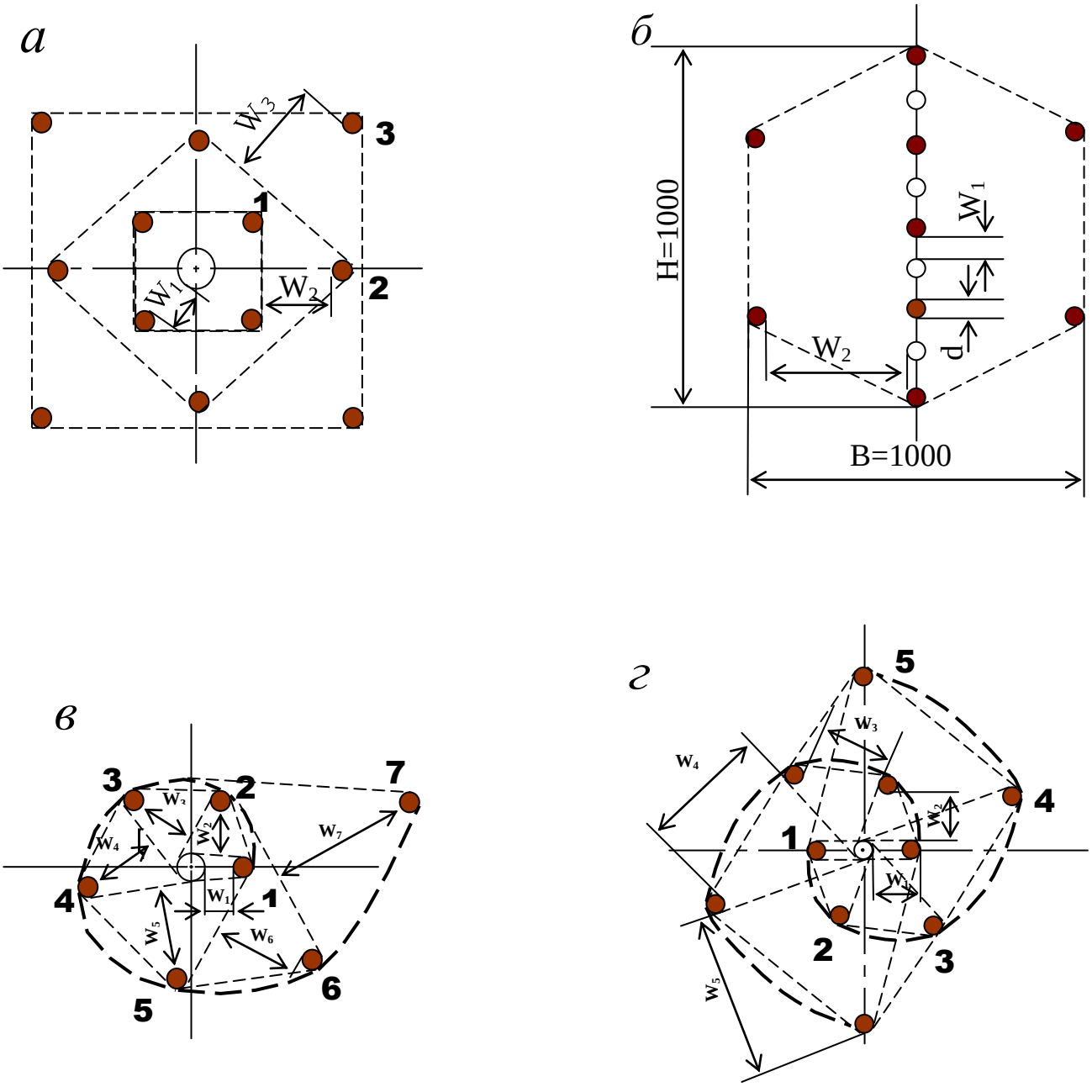


Рис. 5.2. Конструкции прямых врубов:
а – призматический симметричный; *б* – щелевой; *в* – спиральный;
г – двойной спиральный

Таблица 5.8

Пробивные расстояния W_1, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	115	100	90	80	60	60	55
51	125	110	100	90	80	70	65
56	150	130	110	95	90	85	75
75	170	150	130	105	100	95	85
105	190	170	150	120	110	105	95
125	230	200	170	140	120	110	100

Например, пробивное расстояние для шпуров спирального вруба, взрываемых вторыми, т. е. на обнаженную поверхность, образованную взрывом первого шпура, определяют по данным табл. 3.9 или по зависимости, мм:

$$W_2 = 0{,}8 \cdot (W_1 + D_x + d), \qquad (5.6)$$

где W_1 – пробивное расстояние для первого шпура (см. табл. 5.7);

D_x – диаметр компенсационной полости (холостого шпура или скважины);

d – диаметр заряженных шпуров.

Пробивные расстояния (W_2, W_3 и т. д.) для любого типа вруба могут быть определены графически путем последовательного построения расширяющейся врубовой полости (см. рис. 5.2) в масштабе 1:5.

Таблица 5.9

Пробивные расстояния W_2, мм

Диаметр холостого шпура или скважины D_x, мм	Коэффициент крепости пород f						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	170	150	140	130	120	115	110
51	180	160	150	140	130	120	115
56	210	180	170	160	150	140	130
75	260	210	200	185	170	150	140
105	300	260	240	215	200	185	175
125	340	300	270	250	230	220	215

Расчёты и построения выполняются до тех пор, пока не образуется врубовая полость размером в пределах от 0,9×0,9 до 1,2×1,2 м. Такой размер врубовой полости является достаточным и позволяет в дальнейшем производить отбойку породы вспомогательными и оконтуривающими шпурами уже с постоянной линией наименьшего сопротивления, которая соответствует предельному пробивному расстоянию шпурового заряда при взрывании его на неограниченную свободную поверхность.

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров при их диаметре 42 мм, заряженных аммонитом № 6ЖВ в патронах диаметром 32 мм, приведены в табл. 5.10.

Таблица 5.10

Предельные пробивные расстояния для вспомогательных и оконтуривающих шпуров, мм

Диаметр шпуров, мм	Коэффициент крепости пород *f*						
	2-5	6-7	8-9	10-12	13-15	16-17	18-20
42	1000-900	800	700	650	600	550	500

Опыт работы и расчёты показывают, что для образования врубовой полости сечением 0,8-1,4 м^2 необходимо принять 8-12 шпуров в зависимости от диаметра компенсационной полости и коэффициента крепости пород.

При применении щелевого вруба пробивное расстояние между заряжаемыми и холостыми шпурами принимается по данным табл. 5.8. Количество заряжаемых $N_з$ и холостых $N_х$ шпуров в щелевом врубе при их одинаковом диаметре определяют по формулам:

$$N_з = \frac{H}{2(W_1 + d)} + 1, \tag{5.7}$$

$$N_x = \frac{H}{2(W_1 + d)}, \tag{5.8}$$

где H – высота вруба, мм;

W_1 – пробивное расстояние, мм;

d – диаметр шпуров, мм.

Щелевой вруб (рис. 5.2, *б*) высотой 1000 мм с последующим расширением полости четырьмя шпурами дает высокие показатели в породах любой крепости и в выработках любого сечения. Пробивное расстояние W_2 для шпуров, взрываемых во вторую очередь, принимается равным 500 мм, а расстояние между шпурами по вертикали 700–800 мм в породах любой крепости.

Могут быть приняты другие конструкции прямых врубов, но принцип расчета их параметров будет аналогичен.

После расчета параметров принятого прямого вруба (пробивных расстояний и числа шпуров во врубе) определяется площадь вруба по забою выработки, что необходимо для определения количества остальных шпуров.

Глубина (длина) холостых и заряжаемых шпуров прямого вруба должна приниматься больше на 10 % по сравнению с глубиной вспомогательных и оконтуривающих шпуров.

При ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по газу или пыли, при определении расстояний между смежными шпурами следует придерживаться дополнительных требований ЕПБ.

Расстояние от заряда ВВ до ближайшей поверхности должно быть не менее 0,5 м по углю и не менее 0,3 м по породе, в том числе и при взрывании зарядов в породном негабарите. В случае применения ВВ VI класса при взрывании по углю это расстояние допускается уменьшать до 0,3 м.

Минимально допустимые расстояния между смежными (взрываемыми последовательно) шпуровыми зарядами должны соответствовать данным табл. 5.11.

В породах с f >10 расстояние между смежными шпуровыми зарядами должно определяться нормативами, разработанными по согласованию с организацией-экспертом по безопасности работ.

Поскольку при применении прямых врубов с незаряжаемыми шпурами (см. рис. 3.2) данные требования, как правило, невыполнимы, то в угольных шахтах, опасных по газу или пыли, применяются прямые врубы, работающие по принципу воронкообразования.

Таблица 5.11

Минимально допустимые расстояния между смежными шпуровыми зарядами

Условия взрывания	Класса ВВ			
	II	III-IV	V	VI
По углю	0,6	0,6	0,5	0,4
По породе:				
при f <7	0,5	0,45	0,3	0,25
при f >10	0,4	0,3	–	–

В породах с коэффициентом крепости f < 6 обычно применяется прямой призматический вруб из 4–6 шпуров, которые располагаются по контуру окружности или периметру прямоугольника и взрываются одновременно в один приём. Расстояние между врубовыми шпурами следует принимать в соответствии с рекомендациями табл. 5.11. При проведении выработок в более крепких породах целесообразно использовать двойной призматический вруб из 6–8 шпуров с соблюдением тех же требований, которые взрываются короткозамедленно и последовательно в два приёма.

5.2.4. Определение удельного заряда ВВ

Величина удельного заряда ВВ, т. е. количество ВВ, необходимое для заряжания в шпуры единицы объёма обуренного массива (с учетом эффективного разрушения), зависит от крепости пород, сечения выработки, типа ВВ и условий взрывания (наличия обнажённой поверхности, структуры породы, плотности ВВ при заряжании, типа вруба).

Удельный заряд **при врубах с наклонными шпурами** рекомендуется определять по видоизменённой формуле Н. М. Покровского:

$$q = 0{,}1 \cdot f \cdot f_1 \cdot v / e, \qquad (5.9)$$

где q – удельный заряд ВВ, кг/м^3;

f – коэффициент крепости по М. М. Протодьяконову. В породах с $f > 16$ в формуле (5.9) принимать 0,08 вместо 0,1;

f_1 – коэффициент структуры породы;

v – коэффициент зажима породы, зависящий от площади поперечного сечения выработки и количества обнажённых поверхностей;

e – коэффициент взрывной эффективности заряда ВВ.

Коэффициент относительной эффективности заряда ВВ определяется из выражения

$$e = \frac{Q_{\text{ид}} \cdot \rho}{Q_{\text{ид.э}} \cdot \rho_{\text{э}}}, \qquad (5.10)$$

где $Q_{\text{ид}}$, $Q_{\text{ид.э}}$ – идеальная работа взрыва принятого и эталонного ВВ, кДж/кг;

ρ, $\rho_{\text{э}}$ – плотность заряда принятого и эталонного ВВ, кг/м^3.

Необходимые данные для расчета величины e принимают из табл. 5.2. При средней плотности заряда ВВ значение коэффициента взрывной эффективности можно принять из этой же таблицы. В качестве эталонного ВВ в формуле (5.10) и в табл. 5.2 принят аммонит № 6ЖВ.

Значение коэффициента структуры породы f_1 принимается из табл. 5.12.

Таблица 5.12

Коэффициент структуры породы f_1

Характеристика пород	Категория пород	Коэффициент структуры породы f_1
Монолитные, крепкие, вязкие, упругие	I	1,6
Трещиноватые, крепкие	II	1,2-1,4
Массивно-хрупкие	III	1,1
Сильнотрещиноватые, мелкослоистые, большинство пород угольных бассейнов	IV	0,8-0,9

Коэффициент зажима породы при одной обнаженной поверхности в забоях горизонтальных и наклонных выработок определяется из выражения

$$v = \frac{6{,}5}{\sqrt{S_{\text{вч}}}}, \qquad (5.11)$$

где $S_{\text{вч}}$ – площадь поперечного сечения вчерне, м^2.

При двух обнаженных поверхностях коэффициент зажима принимается в пределах v = 1,1–1,4 (меньшие значения – для больших сечений выработок).

При щелевом врубе на полную высоту выработки для определения удельного заряда для шпуров по забою, кроме врубовых, в формуле (5.9) следует принимать коэффициент зажима породы v = 1,4.

Прямые (дробящие) врубы требуют повышенного удельного заряда ВВ. По формуле (5.9) при применении прямых врубов определяют удельный заряд только для вспомогательных и оконтуривающих шпуров с коэффициентом зажима породы v = 1,1–1,4.

5.2.5. Выбор диаметра шпура

Диаметр шпуров выбирается в зависимости от стандартного диаметра патрона принятого типа ВВ. В табл. 5.2 указаны стандартные диаметры патронов промышленных ВВ. При выпуске ВВ в патронах различных диаметров следует принимать диаметр патрона с учётом сечения выработки и типа буровой техники. При использовании мощных бурильных машин и при больших сечениях выработки принимают патроны с большим диаметром или механизированное заряжание гранулированными ВВ.

При применении метода контурного взрывания в оконтуривающих шпурах следует уменьшить линейную плотность заряжания. С этой целью рекомендуется применять, например, специальные патроны типа ЗКВК из аммонита № 6ЖВ диаметром 26 мм длиной 360 мм в полиэтиленовых оболочках. Эти патроны имеют соединительные муфты с лепестками, позволяющими стыковать их и центрировать по оси шпура с созданием воздушного промежутка между патронами и стенками шпура.

Диаметр шпуров при использовании патронированных ВВ принимается не менее чем на 5 мм больше диаметра патрона. При применении машин ударного-поворотного и вращательного-ударного бурения и патронированных ВВ диаметр шпуров обычно составляет 38–42 мм. При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ в горнорудной промышленности диаметр шпуров принимается в пределах от 38 до 52 мм в зависимости от сечения выработки, детонационной способности ВВ и взрываемости пород.

При бурении по углю и породам угольной формации используются шпуры диаметром 37–46 мм.

5.2.6. Определение количества шпуров

Количество шпуров в забое зависит от физико-механических свойств пород, поперечного сечения выработки, параметров зарядов и типа принятого вруба.

Количество шпуров на забой **при врубах с наклонными шпурами** определяют по формуле проф. Н. М. Покровского

$$N = q \cdot S_{вч} / \gamma, \qquad (5.12)$$

где q – удельный заряд ВВ, определяемый по формуле (1.9), кг/м^3;

$S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

γ – весовое количество ВВ (вместимость), приходящееся на 1 м шпура, кг/м.

$$\gamma = 3{,}14\, d^{\,2} \rho \alpha / 4, \qquad (5.13)$$

где d – диаметр заряда (патрона ВВ или шпура), м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения шпуров.

При ручном заряжании без уплотнения ВВ в шпуре используется параметр «диаметр патрона», а параметр «диаметр шпура» – при уплотнении патронов вручную с разрезанием оболочки или при механизированном заряжании.

При разрезании оболочки патронов плотность ВВ в шпуре принимается равной 0,9 от плотности ВВ в патроне (см. табл. 5.2). При механизированном заряжании шпуров гранулированными ВВ плотность ВВ в шпуре составляет 1150–1200 кг/м^3.

Коэффициент заполнения шпуров в выработках шахт, не опасных по взрыву газа или пыли, проходимых в крепких породах, принимается максимальным (0,7-0,9).

В выработках шахт, опасных по газу или пыли и в породах с f = 2-8 – коэффициент заполнения принимается 0,35-0,55; в более крепких породах – 0,5-0,6. При этом при ведении взрывных работ на угольных шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, величина забойки должна быть не менее 0,5 м.

Во всех случаях с увеличением длины шпуров коэффициент заполнения шпуров увеличивается.

Полученное по формуле (5.12) количество шпуров является ориентировочным (см. табл. 5.13) и может быть изменено при необходимости на 10–15 %. Окончательно число шпуров принимается после вычерчивания схемы расположения шпуров в сечении выработки (рекомендуемый масштаб – 1:50-1:20), и только затем возобновляется расчёт.

Таблица 5.13

Ориентировочное количество шпуров на забой в зависимости от коэффициента крепости пород и сечения выработок

Коэффициент крепости пород f	Сечение выработки вчерне, м^2						
	4	6	8	10	12	14	16
2-4	8-11	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	35-42
5-7	12-16	17-21	22-27	28-33	34-38	39-42	43-46
8-10	16-20	21-26	27-32	33-37	38-42	42-46	47-50
12-14	20-24	26-30	32-36	37-42	42-46	46-50	50-54
более 14	26-28	32-36	36-40	44-48	48-52	52-54	56-60

При вычерчивании схемы расположения шпуров при любом типе вруба среднее расстояние между рядами вспомогательных шпуров, между вспомогательными и оконтуривающими и между шпурами в рядах должно быть примерно одинаковым и приниматься в соответствии с рекомендациями табл. 1.10 или определяться из выражения

$$a = \sqrt{\frac{S_{вч} - S_{вр}}{N - N_{вр}}}, \qquad (5.14)$$

где $S_{вч}$ – площадь сечения выработки вчерне, м^2;

$S_{вр}$ – площадь сечения врубовой полости (для вертикального клинового вруба принимается равной половине площади прямоугольника, образованного устьями врубовых шпуров на плоскости забоя), м^2;

N, $N_{вр}$ – общее число на забой и число врубовых шпуров.

Оконтуривающие шпуры располагают с наклоном 85–87° к плоскости забоя с таким расчетом, чтобы их концы вышли за проектный контур сечения выработки вчерне только за линией уходки. Забуриваются оконтуривающие шпуры на минимальном расстоянии (150–200 мм) от проектного контура выработки с учётом принятой буровой техники.

При применении прямых врубов количество шпуров определяется по формуле

$$N = N_{вр} + q\cdot(S_{вч}–S_{вр})/\gamma, \qquad (5.15)$$

где $N_{вр}$ – количество врубовых шпуров (см. раздел 1.2.3.2);

$S_{вр}$ – площадь поперечного сечения прямого вруба, м^2.

При контурном взрывании число оконтуривающих шпуров необходимо увеличивать. При этом параметры зарядов в оконтуривающих шпурах (удельный заряд, расстояние между шпурами и др.) рассчитываются по специальным методикам ([3] и др.).

3.2.7. Определение расхода взрывчатых материалов

Количество ВВ (кг) на цикл при **врубах с наклонными шпурами**

$$Q = q \cdot S_{вч} \cdot l_{шп}, \qquad (5.16)$$

где $l_{шп}$ – глубина заходки, равная глубине вспомогательных и оконтуривающих шпуров, м.

Средняя величина заряда (кг) на один шпур

$$q'_{ср} = Q / N. \qquad (3.17)$$

Количество ВВ (кг) на цикл **при врубах с прямыми шпурами** (кг)

$$Q = Q_{вр} + q \cdot(S_{вч} – S_{вр}) \cdot l_{шп}, \qquad (5.18)$$

где $Q_{вр}$ – количество ВВ во врубовых шпурах, принимается как сумма зарядов врубовых шпуров. Величина заряда (кг) во врубовый шпур принимается

$$q'_{вр} = 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot l_{вр}, \qquad (5.19)$$

где d – диаметр патрона ВВ или шпура, в зависимости от способа заряжания, м;

ρ – плотность ВВ в заряде, кг/м^3;

α – коэффициент заполнения врубового шпура, 0,7-0,95 (в зависимости от длины шпуров и крепости пород);

$l_{вр}$ – длина врубовых шпуров, м (принимается на 10 % больше длины вспомогательных и оконтуривающих шпуров).

Средняя величина заряда (кг) на один вспомогательный и оконтуривающий шпур **при прямых врубах**

$$q''_{ср} = \frac{q \cdot (S_{вч} - S_{вр}) \cdot l_{шп}}{N - N_{вр}} . \quad (5.20)$$

При распределении ВВ по шпурам величину заряда во врубовые шпуры **при наклонных врубах** следует принимать на 10-20 % больше средней величины $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{вр} = (1{,}1 \div 1{,}2)\, q'_{ср}. \quad (5.21)$$

В оконтуривающих шпурах, кроме почвенных, при любых типах врубов величину заряда следует уменьшать на 10-20 % по сравнению со средней величиной $q'_{ср}$ (кг)

$$q^*_{ок} = (0{,}9 \div 0{,}8)\, q'_{ср}. \quad (5.22)$$

Обычно в практике взрывных работ величина заряда во вспомогательных шпурах принимается равной средней величине заряда в шпурах $q'_{ср}$:

$$q^*_{всп} = q'_{ср}. \quad (5.23)$$

Полученные величины зарядов во врубовых, вспомогательных и оконтуривающих шпурах при ручном заряжании патронированными ВВ принимают **кратными массе патронов ВВ.**

При механизированном заряжании заряд ВВ в шпуре состоит из патрона-боевика (0,2 или 0,25 кг) и собственно заряда гранулированного ВВ, масса которого принимается кратной 0,1 кг.

После определения величин зарядов ВВ в шпурах каждой группы следует проверить возможность размещения их в шпурах, учитывая длину и массу патронов, а также линейную плотность заряжания при применении гранулированных ВВ.

Фактический расход ВВ (кг) на цикл

$$Q_ф = \sum q^*_{вр} + \sum q^*_{всп} + \sum q^*_{ок}. \quad (5.24)$$

Расход ВВ (кг) на погонный метр выработки

$$Q_м = Q_ф / (l_{шп}\, \eta)\,, \quad (5.25)$$

где η – КИШ (принимается равным 0,85-0,95 в зависимости от крепости пород).

Объём горной массы за взрыв

$$Q_{гм} = S_{пр}\, l_{шп}\, \eta, \quad (5.26)$$

где $S_{пр} = S_{вч} \cdot КИС$ – сечение выработки в проходке, м^2, которое следует определять в соответствии с рекомендациями таблицы 5.14.

Удельный расход ВВ (кг) на 1 м^3 взорванной породы

$$q_р = Q_ф / Q_{гм}. \quad (5.27)$$

Таблица 5.14

Допустимое нормативное увеличение (в %) поперечного сечения горизонтальных горных выработок при проходке буровзрывным способом

Поперечное сечение горных выработок вчерне (по проекту), м^2	Коэффициент крепости пород f		
	1–2	2–9	10–20
до 8	5*	10	12
от 8 до 15	4	8	10
более 15	3	5	7

*Коэффициент излишка сечения: КИС = 1 + Δ = 1 + 5/100 = 1,05.

Расход ЭД, КД (систем неэлектрического взрывания) определяется по числу взрываемых зарядов.

Расход ЭД, КД на 1 метр выработки:

$$N_м = N_{кд} /(l_{шп}\, \eta). \quad (5.28)$$

Удельный расход ЭД, КД на 1 м^3 взорванной породы:

$$N_р = N_{кд} /(S_{пр}\, l_{шп}\, \eta). \quad (5.29)$$

Заводы-изготовители производят неэлектрические системы инициирования с длинами волноводов, определяемыми заказами потребителей.

Длина УВТ ориентировочно определяется по формуле:

$$L_{увт} = l_{шт} + B / 4 + 0{,}5, \quad (5.30)$$

где B – ширина выработки, м;

0,5 –длина УВТ для сборки пучков, м.

5.3 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОВЗРЫВНОЙ СЕТИ

При расчете электровзрывной сети определяют её сопротивление и сопротивление её отдельных ветвей. Для проверки обеспечения безотказности взрывания всех электродетонаторов, включённых в сеть, при известном напряжении (принятом источнике тока) выполняется проверочный расчет, при котором определяют общую величину тока в сети и величину тока, поступающего в каждый электродетонатор.

Если необходимо выбрать источник тока, определяют общее сопротивление сети и минимальную силу тока в цепи, обеспечивающую безотказное взры-

вание всех электродетонаторов, после чего находят необходимое напряжение и подбирают источник тока (табл. 5.15).

Сопротивление магистральных и соединительных проводов, а также участковых, если они имеются при конкретной схеме взрывания, принимается по табличным данным или вычисляется по формуле

$$R = \rho\,(l/S), \qquad (5.31)$$

где R – сопротивление проводов, Ом;

ρ – удельное сопротивление материала проводов, которое принимается для медных проводов $0{,}0172\cdot10^{-6}$, для алюминиевых $0{,}0286\cdot10^{-6}$ и для стальных $0{,}12\cdot10^{-6}$ Ом·м;

l – длина проводов, м. Длину проводов принимают на 10 % больше расчётной, учитывая изгибы и сростки;

S – сечение проводов, м^2.

Сопротивление электродетонаторов при расчёте сети принимается по табличным данным с учётом длины выводных проводов (см. табл. 5.3). Сопротивление электродетонаторов нормальной чувствительности в зависимости от длины выводных медных проводов с диаметром жилы 0,5 мм составляет от 1,8 до 3,6 Ом. При расчёте величину сопротивления электродетонаторов нормальной чувствительности обычно принимают равной 3 Ом.

Таблица 5.15

Взрывные приборы и машинки

Наименование прибора (исполнение)	Напряжение, В	Масса, кг	Максимальное сопротивление электровзрывной сети, Ом	Назначение и область применения
Конденсаторный взрывной прибор КВП-1/100М (РВ) КВП-2/200М (РН)	 600 1700	 2 2,5	 320 1700	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, опасных и не опасных по взрыву газа или пыли
Конденсаторный взрывной прибор ПИВ-100М (РВ)	610	2,7	320	
Конденсаторная взрывная машинка КПМ-3 (РН)	1600	3,0	200	Взрывание ЭД нормальной чувствительности на поверхности и в шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли

При электрическом способе взрывания в каждый электродетонатор нормальной чувствительности должен поступать постоянный гарантийный ток силой не менее $I_{гар}$ = 1 А при числе ЭД до 100 штук и не менее $I_{гар}$ = 1,3 А при числе ЭД более 100 штук, или переменный ток силой не менее $I_{гар}$ = 2,5 А.

Для электродетонаторов пониженной чувствительности к блуждающим токам (ЭД-1-8-Т, ЭД-1-3-Т) гарантийный ток следует принимать не менее 5 А.

Проверочный расчёт электровзрывной сети производится по следующим формулам в зависимости от схемы соединения:

а) при последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn}, \quad i = I \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.32}$$

б) при параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + r/n}, \quad i = I/n \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.33}$$

в) при смешанном последовательно-параллельном соединении

$$I = \frac{E}{R + rn/m}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.34}$$

г) при смешанном параллельно-последовательном соединении

$$I = \frac{E}{R + rm/n}, \quad i = I/m \geq I_{\text{гар}}, \tag{5.35}$$

где I – сила тока в электровзрывной сети, А;

E – электродвижущая сила источника тока или напряжение на клеммах, В;

R – сопротивление всех проводов (магистральных, соединительных, участковых) и внутреннее сопротивление источника, Ом;

n – число последовательно соединённых электродетонаторов в сети или группе;

m – число параллельно включённых групп электродетонаторов при смешанном соединении;

i – сила тока, поступающего в каждый электродетонатор, А;

$I_{\text{гар}}$ – гарантийная сила тока, необходимая для безотказного взрывания электродетонаторов, А;

r – сопротивление электродетонатора, Ом.

При проведении горизонтальных выработок обычно применяется последовательная схема соединения электродетонаторов во взрывной сети. В этом случае общее сопротивление взрывной сети можно определить по формуле:

$$R_{\text{общ}} = r_{\text{п}} + r_{\text{с}}L_{\text{с}} + r_{\text{м}}L_{\text{м}}, \tag{5.36}$$

где $r_{\text{с}}$, $r_{\text{м}}$ – сопротивление соответственно 1 м соединительных и магистральных проводов, Ом (принимается по данным табл. 3.16 или рассчитывается по формуле (5.31));

$L_{\text{с}}$, $L_{\text{м}}$ – длина соответственно соединительных и магистральных проводов, м.

Таблица 5.16

Характеристики проводов для электровзрывания

Обозначение	Назначение	Диаметр жилы, мм	Площадь сечения, мм^2	Сопротивление 1 м провода, Ом/м
ВП-05	соединительные	0,5	0,196	0,090
ВП-08	магистральные	0,8	0,502	0,034
ВП-07х2	магистральные	0,7х2	0,769	0,024

Магистральные провода (постоянная взрывная магистраль) подключаются обычно на расстоянии не ближе 30 м от забоя и могут отставать от места взрыва не более чем на 100 м. Место укрытия взрывника при проходке горизонтальных выработок должно находиться не ближе 150 м от забоя. Электровзрывная сеть должна быть двухпроводной.

В шахтах (рудниках), опасных по газу или пыли, должны применяться электродетонаторы только с медными проводами. Это требование также распространяется на соединительные и магистральные провода (кабели) электровзрывной сети.

Если проверочный расчет показывает неприменимость последовательной схемы соединения электродетонаторов (ввиду того, что $i < I_{\text{гар}}$), следует принимать последовательно-параллельную схему соединения. Тогда число последовательно включённых электродетонаторов в сети или группе и число групп, включённых параллельно, определяют по формулам

$$n = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + R}, \tag{5.37}$$

$$m = \frac{E}{2I_{\text{гар}} + r}. \tag{5.38}$$

Если общее число электродетонаторов, подлежащих взрыванию, равно $M = n \cdot m$, то, определив один из множителей, вычисляют другой.

5.4 ВЫБОР БУРОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Тип бурильной машины выбирается в зависимости от коэффициента крепости горных пород, глубины шпуров и необходимой производительности машины при выполняемом объёме буровых работ.

Бурение шпуров производится ручными, колонковыми электро- и пневмосвёрлами, переносными перфораторами и бурильными установками.

Выбор типа бурильной машины и установочного приспособления в зависимости от крепости пород ориентировочно можно производить по табл. 3.1.

Ручные электросвёрла ЭР14Д-2М, ЭР18Д-2М, СЭР-19М применяются для бурения шпуров диаметром 36-44 мм и глубиной до 3 м по углю и породам с коэффициентом крепости до 4.

При бурении по крепким углям и породам средней крепости применяются электросвёрла ЭРП18Д-2М и СРП-1 с принудительной подачей.

Ручные пневматические свёрла СР-3, СР-3М, СПР-8 применяются на шахтах, опасных по газу или пыли, для бурения шпуров диаметром 36 мм и глубиной до 3 м при проведении выработок по углю и породам с коэффициентом крепости до 4. Сверло СГ-3Б с применением пневмоподдержки применяются для бурения шпуров в породах с коэффициентом крепости до 6.

При проведении горизонтальных и наклонных выработок при бурении шпуров диаметром 40-46 мм и глубиной до 5 м в крепких и средней крепости с коэффициентом более 5 применяют переносные перфораторы ПП36В, ПП54В, ПП54ВБ, ПП63В, ПП63ВБ, ПП63П, ПП63С, ПП63СВП массой 24-33 кг с энергией удара от 36 до 63 Дж. Обычно глубина шпуров при бурении переносными перфораторами составляет 1,5-2,5 м.

Таблица 5.17

Область применения бурильных машин и установочных приспособлений

Коэффициент крепости пород	Тип бурильных машин и установочных приспособлений
1,5–3	Ручные электросвёрла и пневмосвёрла, лёгкие перфораторы на пневмоподдержках
4–6	Бурильные установки вращательного действия, перфораторы лёгкого и среднего веса на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
7–9	Бурильные установки вращательно-ударного действия, перфораторы среднего веса и тяжёлые на пневмоподдержках, колонковые или длинноходовые электросвёрла на манипуляторах
10–20	Бурильные установки вращательно-ударного действия, тяжёлые перфораторы на пневмоподдержках, колонковые перфораторы на распорных колонках или манипуляторах

Телескопные перфораторы ПТ-29М, ПТ36М, ПТ38, ПТ48 применяются при проведении восстающих выработок и для бурения шпуров в крепких породах под анкерную (штанговую) крепь.

Для облегчения труда бурильщиков и повышения скорости бурения применяются колонковые электросвёрла, электросвёрла на манипуляторах и колонковые перфораторы.

Колонковые электросвёрла применяются при бурении шпуров диаметром 36-50 мм в породах с коэффициентом крепости 5-10. Промышленностью выпускаются колонковые электросвёрла ЭБГП-1, ЭБГП-2У5, которые устанавливаются на распорных колонках или на манипуляторах бурильных установок.

Съёмные бурильные машины типа БУЭ вращательного действия применяют на бурильных установках при бурении шпуров диаметром 42 мм, длиной до 3 м в породах с f <8.

Колонковые перфораторы, более мощные чем ручные, применяются для бурения шпуров с колонок, манипуляторов и буровых кареток при проведении выработок в крепких и очень крепких породах.

В горнодобывающей промышленности применяют колонковые перфораторы ПК-50, ПК-65, ПК-75, ПК-120, ПК-150. Применение колонковых перфораторов и электросвёрл на распорных колонках при проходке выработок ограничено из-за значительных затрат времени на монтаж, демонтаж и переустановку колонок. Поэтому чистое время бурения составляет 20-35 % от общих затрат времени на бурения шпуров.

Механизированное бурение шпуров производят бурильными установками (каретками) и навесным оборудованием, смонтированным на погрузочных машинах.

Отечественной промышленностью выпускаются бурильные установки (каретки) вращательного бурения с колонковыми электросверлами БУЭ-1м, БУЭ-2, вращательно-ударного и ударно-поворотного бурения БУ-1, БУР-2, СБУ-2м, СБУ-2К, УБШ.

В угольной промышленности наибольшее распространение получили установки БУ-1, БУР-2, БУЭ-1 и БУЭ-2. С использованием этих установок проводят около 50 % выработок.

Установки вращательного бурения применяют при проведении выработок в породах с f < 8; ударно вращательного действия с машинами БГА-1 в породах с f = 6-10, с машинами БГА-1М, БГА-2М в породах с f = 10-14; ударно-поворотного действия в породах с f = 10-20.

Технические характеристики бурильных установок приведены в табл. 5.2 – 5.3.

При определении бурильного оборудования следует принимать один перфоратор (сверло) не менее чем на 2 м^2 площади забоя горизонтальной или наклонной выработки; на каждые три рабочие машины одну резервную.

Одну бурильную установку принимают не менее чем на 9 м^2 площади забоя горизонтальной выработки. На каждую работающую в забое установку – рабочий и резервный комплекты инструмента.

Таблица 5.18

Характеристики отечественных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики	Тип бурильной установки					
	УБШ-204 (БУЭ-1М)	УБШ-214А	УБШ-308У (1СБУ-2)	УБШ-303 (1БУР-2)	УБШ-254	УБШ-332Д
Коэффициент крепости пород f	4-8	4-16	8-14	4-16	8-14	8-14
Диаметр шпуров, мм	42	42-52	42-52	42-52	42-52	42-52
Длина шпуров, м	2,75	2,75	2,8	2,8	2,4	3,0

Зона бурения, м^2		6-12	4,2-12	до 20	до 20	до 12	8-22
Бурильная машина	тип	БУЭ	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	М2 (БГА-2М)	«Норит-1» (гидравл.)	М2 (БГА-2М)
	кол-во	1	1	2	2	1	2
Тип платформы		рельс.	рельс.	гусен.	рельс.	гусен.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении: длина		8,2	6,0	7,8	7,1	7,2	11,0
ширина		1,3	1,0	1,6	1,15	1,4	1,75
высота		0,9	1,5	1,7	1,65	1,8	2,3
Масса, т		5,4	4	8,6	5	7,2	12

Таблица 5.19

Характеристики зарубежных бурильных установок для бурения шпуров при проходке горизонтальных выработок

Характеристики		Тип бурильной установки				
		Minimatic 205-40	Mini 206-60	Paramatic 305-60	Rocket Bomer 104S	Rocket Bomer 282S
Коэффициент крепости пород *f*		8-20	8-20	8-20	8-20	8-20
Диаметр шпуров, мм		32-50	32-50	32-50	32-50	32-50
Длина шпуров, м		3,4	3,4	3,4	4,0	4,0
Высота обуривания, м		6,0	6,4	7,1	4,7	6,3
Ширина обуривания, м		8,8	9,8	10,4	4,7	8,7
Зона бурения, м^2		8-49	8-60	12-68	до 20	до 45
Бурильная машина	тип	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	HL 510S-45 гидравл.	COP 1838 ME пневмат.	COP 1838 ME пневмат.
	кол-во	2	2	3	1	2
Тип платформы		пневм.	пневм.	пневм.	пневм.	пневм.
Размеры (м) в транспортном положении: длина		12,3	12,7	5,3	9,8	12,1
ширина		1,98	2,24	2,5	2,0	2,0
высота		2,35	2,35	2,8	2,6	3,1
Масса, т		19	20	36	14	18

При применении бурильных установок глубина шпуров изменяется от 2 до 3,75 м. В этом случае необходимо использование прямых врубов, так как обуривание вертикального клинового вруба в большинстве случаев технически неосуществимо из-за невозможности соблюдения требуемого угла наклона врубовых шпуров.

При ручном бурении шпуров площадь забоя, приходящаяся на одну бурильную машину, изменяется в широких пределах – от 2 до 5 м^2.

5.5. СОСТАВЛЕНИЕ ПАСПОРТА БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ

На основании выполненных расчетов составляется паспорт буровзрывных работ, который включает в себя: характеристику выработки; характеристику пород; схему расположения шпуров в трёх проекциях; наименования ВМ; способ взрывания; данные о способе заряжания, числе шпуров, их глубине и диаметре, массе и конструкции зарядов, последовательности и количестве приёмов взрывания зарядов, материале забойке и её длине, длинах ударно-волновых трубок систем неэлектрического взрывания; схему монтажа взрывной (электровзрывной) сети с указанием длины (сопротивления), замедлений, схемы и времени проветривания забоя.

Дополнительно указывается величина радиуса опасной зоны, места укрытий взрывника и рабочих, установки постов охраны и предупредительных знаков.

В шахтах, опасных по взрыву газа или пыли, в паспорте должны быть указаны количество и схема расположения специальных средств по предотвращению взрывов газа (пыли), а также режим взрывных работ.

Пример оформления графической части:

Паспорт
буровзрывных работ на проведение

_____

(*наименование выработки*)

1. Характеристика выработки

1.1. Форма сечения выработки _____

1.2. Площадь поперечного сечения выработки вчерне, м^2 _____

1.3. Размеры сечения выработки - высота, м _____

- ширина, м _____

1.4. Категория шахты по газу или пыли _____

2. Характеристика пород

2.1. Наименование пород _____

2.2. Коэффициент крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова _____

2.3. Трещиноватость пород _____

2.4. Обводнённость пород _____

3. Исходные данные

3.1. Наименование ВВ и средств инициирования _____

3.2. Способ взрывания _____

3.3. Диаметры - шпуров, мм _____

- патронов, мм _____

3.4. Тип вруба _____

3.5. Материал забойки _____

3.6. Схема соединения электродетонаторов _____

3.7. Источник электрического тока _____

4. Расчётные данные по шпурам

№№ шпуров	Наименование шпуров по назначению	Глубина шпуров, м	Угол наклона шпуров, град.	Расстояние между шпурами, м	Величина заряда в шпуре, кг	Длина заряда, м	Длина забойки в шпуре, м	Очередность взрывания, интервал замедления, мс	Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Схема расположения шпуров

Схема расположения вычерчивается в масштабе 1:50 или 1:20 в трёх проекциях (см. Приложение 3). При применении прямых врубов дополнительно в масштабе 1:20 или 1:10 приводится схема вруба.

6. Конструкции зарядов

В схемах конструкций врубовых, вспомогательных (отбойных) и оконтуривающих зарядов указывается место установки патронов-боевиков, количество патронов, длина заряда и забойки.

7. Основные показатели буровзрывных работ

№ п/п	Показатели	Единица измерения	Количество
1	Коэффициент использования шпуров	-	
2	Подвигание забоя за взрыв	-	
3	Объём горной массы за взрыв	$м^3$	
4	Количество шпуров на цикл	шт.	
5	Количество шпурометров на цикл	м	
6	Количество шпурометров на 1 погонный метр выработки	м шп./м	
7	Количество шпурометров на 1 $м^3$ взорванной породы	м шп./$м^3$	
8	Расход ВВ на цикл	кг	
9	Расход ВВ на 1 метр выработки	кг/м	
10	Расход ВВ на 1 $м^3$ взорванной породы	кг/$м^3$	
11	Расход средств инициирования на цикл: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	
12	Расход средств инициирования на 1 метр выработки: ЭД КД (СИНВ-Ш) детонирующего шнура	 шт. шт. м	

8. Меры безопасности

8.1. Место укрытия взрывника и рабочих на момент взрыва_____

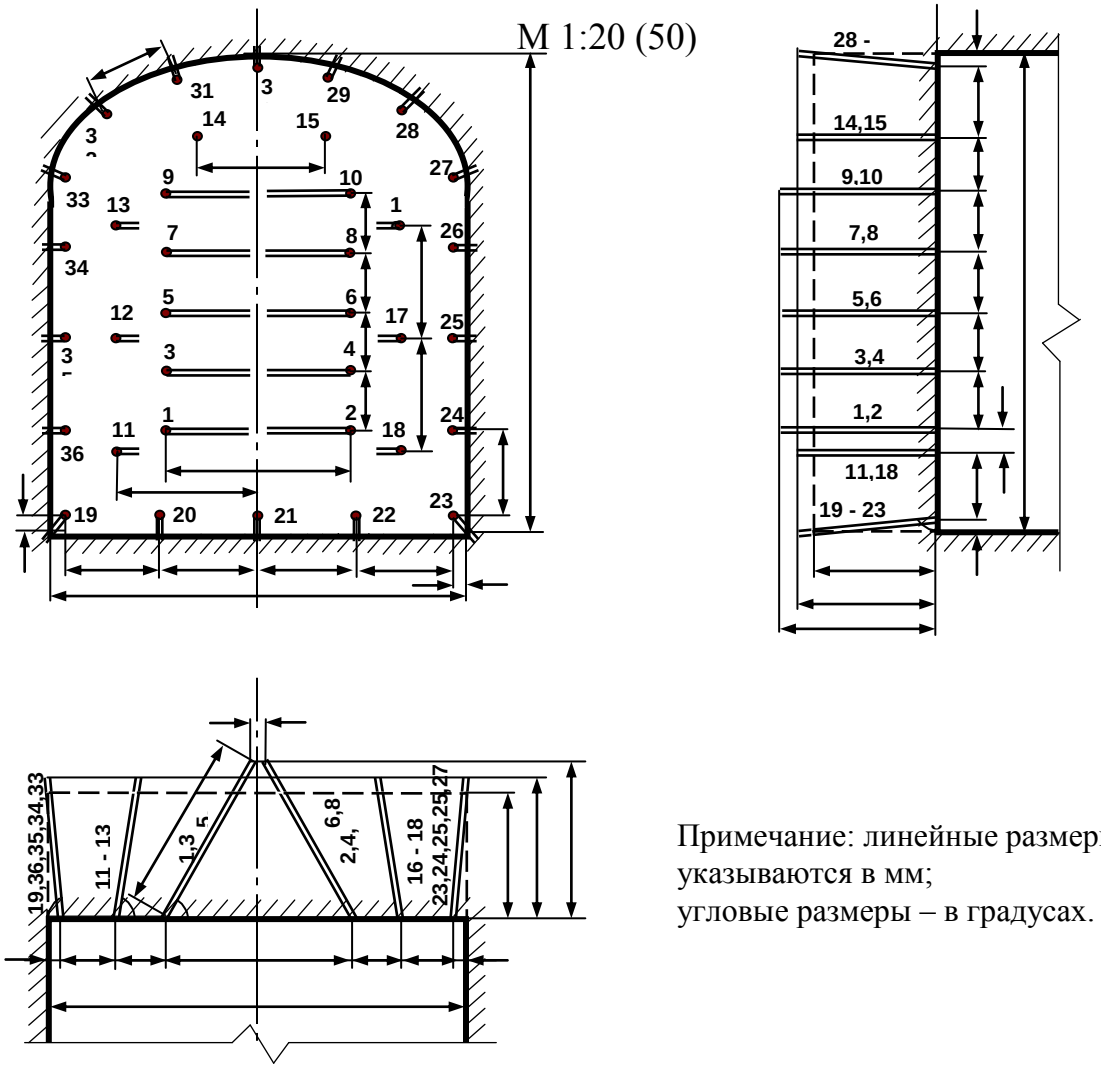
8.2. Место выставления постов_____

8.3. Время проветривания после взрыва_____

8.4. Мероприятия по подавлению пыли_____

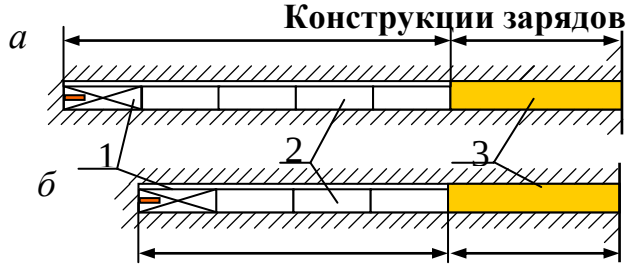
8.5. Другие дополнительные меры безопасности_____

Схема расположения шпуров



Примечание: линейные размеры
указываются в мм;
угловые размеры – в градусах.

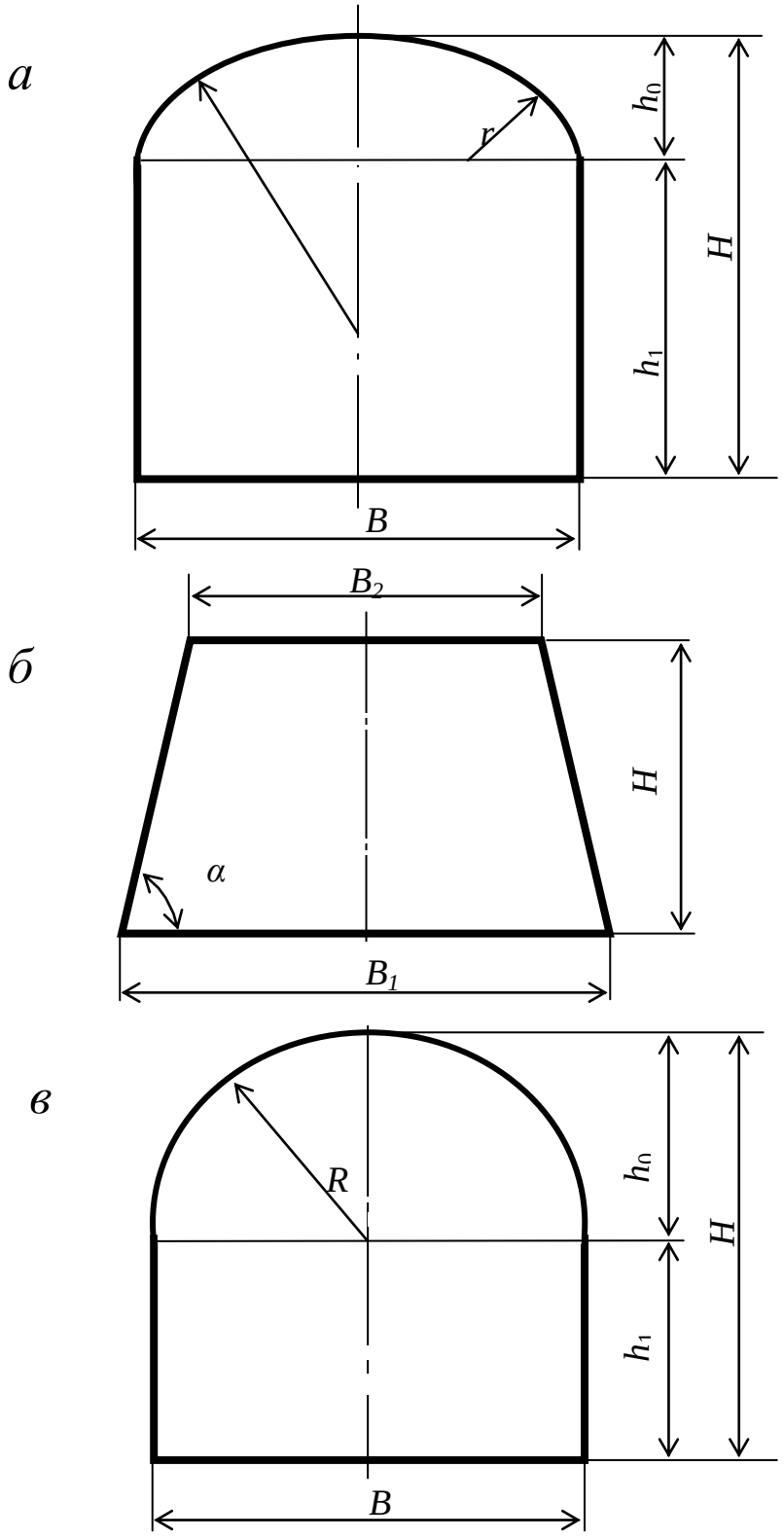
Конструкции зарядов



а – врубовые шпуры;
б – вспомогательные (отбойные) и оконтуривающие шпуры;
1 – патрон-боевик (аммонит № 6ЖВ);
2 – патроны ВВ (аммонит № 6ЖВ);
3 – забойка (песчано-глиняная, водяная)

Примечание. В шахтах, не опасных по взрыву газа или пыли, допускается взрывание зарядов без забойки (устанавливается руководителем предприятия и указывается в паспорте БВР).

Формы поперечного сечения горизонтальных выработок



$h_0 = B / 3$;
$h_1 = B - h_0$;
$R = 0{,}694\ B$;
$R = 0{,}262\ B$.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2H}{B_1 - B_2}$$

Рис. П4.1. Формы поперечного сечения горизонтальных выработок:
а – сводчатая с трёхциркульным (коробовым) сводом;
б – трапецевидная;
в – арочная с полуциркульным сводом

Формулы для вычисления площади поперечного сечения и периметра выработок:

Форма поперечного сечения выработки	Площадь поперечного сечения	Периметр
Сводчатая с коробовым сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}26 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}33 \cdot B$
Трапециевидная	$\frac{B_1 + B_2}{2} \cdot H$	$B_1 + B_2 + \frac{2H}{\cos \alpha}$
Арочная с полуциркульным сводом	$B \cdot (h_1 + 0{,}39 \cdot B)$	$2 \cdot h_1 + 2{,}57 \cdot B$

Рекомендуемая литература

1. Корнилков М.В. Разрушение горных пород взрывом: конспект лекций. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. - 202 с.

2. Латышев О.Г., Петрушин А.Г., Азанов М.А. Промышленные взрывчатые материалы: учебное пособие. - Урал. гос. горный ун-т. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. - 221 с.

3. Кутузов Б.Н. Методы ведения взрывных работ. Часть 1. Разрушение горных пород взрывом: Учебник. – М.: Изд. МГГУ, 2007. – 345 с.

4. Кутузов Б.Н. Безопасность взрывных работ в горном деле и промышленности. – М.: Горная книга, 2009. – 670 с.

5. Латышев О.Г. Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2004. – 201 с.

6. Правила безопасности при взрывных работах (утверждены приказом Ростехнадзора от 16.12.2013 г. № 605; в редакции приказа Ростехнадзора от 30.11.2017 г. № 518). – М., 2018.

7. Взрывчатые вещества и средства инициирования. Каталог. М.: ГосНИП «РАСЧЕТ», 2003. 269 с.

8. Справочник взрывника / Под общей редакцией Б. Н. Кутузова. М.: Недра, 1988. 511 с.

Учебное издание

Петрушин Алексей Геннадиевич
Азанов Михаил Алексеевич
Прищепа Дмитрий Вячеславович

ТЕХНОЛОГИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ РАБОТ

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, выполнению контрольных и практических работ по дисциплине «технология и безопасность взрывных работ» для студентов специальности 21.05.04 «горное дело»

Редактор *Д. В. Прищепа*

Подписано в печать «__»_____2019 г. Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 3,68. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 100. Заказ №

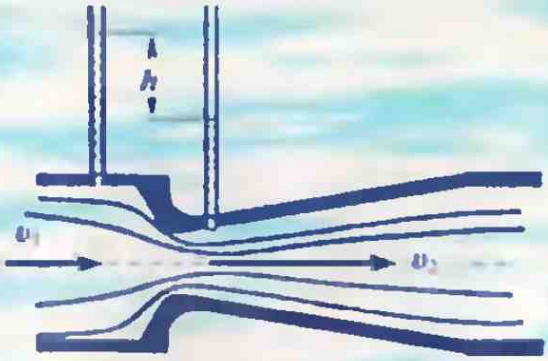
Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

С.И. Часс

ГИДРОМЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие



Екатеринбург
2006

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»



С. И. Часс

ГИДРОМЕХАНИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Издательство УГГУ Екатеринбург – 2006

УДК 532
Ч 24

Часс С. И.
Ч 24 Гидромеханика в примерах и задачах: *Учебное пособие.* – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2006. 216 с.
ISBN 5-8019-0119-1

В учебном пособии изложены теоретические положения, примеры гидравлических расчётов и задачи для самостоятельной работы по основным разделам курса гидромеханики (гидравлики).

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Горное дело"; "Горные машины и оборудование"; "Технологические машины и оборудование", а также может быть рекомендовано для студентов других вузов, изучающих курсы "Гидромеханика"; "Гидравлика"; "Механика жидкости и газа".

Рис. 126. Табл. 10. Библ.: 7 назв.

Рецензент: Лаптева Н. Е., кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики Уральского государственного технического университета.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

ISBN 5-8019-0119-1

© Часс С. И., 2006
© Уральский государственный горный университет, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Успешное изучение любого курса прикладных технических дисциплин, в том числе технической гидромеханики, или гидравлики, зависит от умения студента работать самостоятельно. Основное назначение данного учебного пособия – помочь изучающим гидромеханику применить теоретические знания и освоить методику гидравлических расчётов для решения практических и инженерных задач.

Книга включает три основных раздела курса гидромеханики: "Гидростатика", "Гидродинамика", "Прикладная гидромеханика". Каждый раздел содержит несколько глав конкретной тематики. Глава начинается с теоретической части, в которой приводятся основные расчётные формулы с подробным пояснением их применения для решения примеров по данной теме.

Учебное пособие содержит разнообразные по тематике и степени сложности примеры, охватывающие основные разделы курса гидромеханики. Примеры гидравлических расчётов приближены к горному производству.

В приложении приводятся таблицы справочного характера, которые используются при решении примеров и задач. Кроме приведённых справочных таблиц можно пользоваться справочным материалом других учебников и учебных пособий.

Опыт преподавания гидромеханики показал, что студенты сравнительно легко усваивают те сведения, которые поясняются в учебнике при помощи чертежей. Именно поэтому в данном учебном пособии примеры гидравлических расчётов содержат большое количество графического материала. Задачи даются с подробными численными решениями. Некоторые приведённые примеры общеизвестны по другим учебным пособиям, но отличаются методикой решения, которой нет в других учебниках и учебных пособиях.

По каждой теме предложены задачи с ответами для самостоятельной работы. Такое изложение материала позволяет студентам проверить свои знания и способности в решении задач по гидромеханике.

ВВЕДЕНИЕ

Гидромеханика (гидравлика) – наука о механических свойствах жидкой среды, о законах равновесия и движения жидкости, взаимодействия жидкости с твёрдыми поверхностями. Гидромеханика – техническая прикладная дисциплина, выводы и законы которой предназначены для решения технических и инженерных задач.

Гидромеханика является одной из наук, составляющих фундамент инженерных знаний, и включает несколько разделов.

В разделе "Гидростатика" даётся вывод основного уравнения гидростатики, определяется давление в покоящейся жидкости, действие жидкости на плоские и криволинейные поверхности.

В разделе "Гидродинамика" рассматриваются основные законы движения жидкости, уравнение Д. Бернулли, изучаются режимы движения жидкости и потери напора в гидравлических сопротивлениях.

Раздел "Гидравлический расчёт трубопроводных систем" является основой для решения инженерных задач по расчёту простых и сложных трубопроводных систем.

В разделе "Истечение жидкости через отверстия и насадки" даётся расчёт малых и больших отверстий, истечения жидкости из насадков.

В соответствии со специализацией изучаются вопросы равномерного движения жидкости в открытых руслах, фильтрации, взаимодействия потока жидкости и твёрдого тела и другие .

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖИДКОСТЯХ

Жидкость – непрерывная среда, обладающая свойством текучести и чрезвычайно малым сопротивлением деформации разрыва.

Различают капельные, газообразные и многофазные жидкости. ***Капельные жидкости*** (вода, масла, спирт, ртуть и т. п.), в отличие от газообразных, образуют ***свободную поверхность***, т. е. поверхность, отделяющую капельную жидкость от газообразной среды. К многофазным жидкостям относятся туман, дым, илистые растворы и т. п.

Прежде чем перейти к изучению физических свойств жидкости и законов равновесия и движения жидкости, отметим, что единицы измерения в гидромеханике приняты согласно Международной системе единиц измерения (СИ). Вместе с этим, в некоторых расчётах пользуются внесистемными единицами, широко применяющимися в производственной деятельности.

Плотность и удельный вес жидкости

Плотность – это масса жидкости, заключённая в единице объёма, единица измерения кг/м^3:

$$\rho = m/V.$$

Удельный вес – сила тяжести жидкости в единице объёма, единица измерения Н/м^3:

$$\gamma = G/V.$$

Так как сила тяжести $G=mg$, получим пересчётную формулу между удельным весом и плотностью:

$$\gamma = \rho g.$$

Удельный вес не является справочной величиной, так как зависит от ускорения силы тяжести (g) в месте измерения, поэтому в дальнейших расчётах будем пользоваться справочной величиной плотности (ρ).

Для технических расчётов с достаточной точностью можно принимать плотность воды (в дальнейшем будем записывать без индекса) $\rho = 10^3$ кг/м^3, плотность ртути $\rho_{рт}=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3. Для других жидкостей следует пользоваться табл. 1 (см. приложение). В этой таблице приводятся коэффициенты плотности жидкостей.

Физические свойства жидкостей

В курсе гидромеханики следует изучить по любому учебнику или курсу лекций следующие физические свойства жидкостей: ***сжимаемость, капиллярность, кавитацию и вязкость.***

Обратим внимание на физическое свойство жидкости - вязкость. ***Вязкость*** – свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу или относительному перемещению слоёв жидкости.

В технических расчётах и при решении задач пользуются двумя коэффициентами вязкости: коэффициент динамической вязкости μ, размерность Па·с; коэффициент кинематической вязкости ν, представляющий собой отношение динамической вязкости к плотности:

$$\nu = \mu / \rho \ .$$

Подставив размерности μ и ρ в расчётную формулу коэффициента кинематической вязкости, получим размерность ν в системе СИ – м^2/с.

Экспериментально вязкость жидкости определяется вискозиметрами. По вискозиметру определяют вязкость относительную, условную (ВУ), или так называемый градус Энглера ($^\circ E$). Для перехода от условной вязкости к коэффициенту кинематической вязкости ν пользуются эмпирической формулой Уббелоде:

$$\nu = (0{,}0731\ ^\circ E - 0{,}0631/\ ^\circ E)\cdot10^{-4}.$$

Отметим, что значение коэффициентов вязкости жидкостей приводится в табл.1 (см. приложение) и будет использовано при решении задач в разделе "Гидродинамика".

Раздел первый

ГИДРОСТАТИКА

Глава 1

ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ

1. Понятие гидростатического давления

В результате действия внешних сил (поверхностных и массовых) в жидкости возникают ***внутренние нормальные*** напряжения, называемые ***гидростатическим давлением***. Таким образом, гидростатическое давление – это нормальное сила с точностью до бесконечно малых (dR), равномерно распределённая на бесконечно малой площадке (dA):

$$p=dR/dA.$$

Единица измерения давления соответствует размерности напряжения Н/м^2.

Примечание. В данном учебном пособии силу давления будем обозначать буквой R, чтобы не путать при написании давление p и силу P, площадь буквой A, как это принято в дисциплинах механического профиля.

1.1 . Свойства гидростатического давления

Первое свойство. Давление, как нормальное напряжение, всегда направлено по внутренней нормали к площадке, величина давления является функцией только координат точки и не изменяется во времени:

$$p = f(x, y, z).$$

Второе свойство. Давление в точке жидкости действует по всем направлениям и имеет одинаковую величину.

1.2. Основное уравнение гидростатики. Абсолютное, манометрическое, вакуумметрическое давление

Для определения давления в покоящейся жидкости пользуются основным уравнением гидростатики:

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (1.1)$$

Давление в любой точке покоящейся жидкости складывается из давления на поверхности жидкости (p_0) и силы тяжести столба жидкости с основанием, равным единице, и высотой, равной глубине погружения точки в жидкость ($\rho g h$). Величина $\rho g h$ может быть названа ***весовым*** давлением, или ***избыточным*** давлением жидкости.

Поверхностное давление p_0 может быть обусловлено давлением на поверхности капельной жидкости газа, воздуха или твёрдого тела, например поршня.

Давление на поверхности жидкости p_0 может быть равным атмосферному давлению, больше атмосферного или недостающим до атмосферного.

Давление, рассчитанное от абсолютного нуля, т. е. с учётом атмосферного давления, называется ***абсолютным***. Так, если в уравнении (1.1) давление на поверхности жидкости равно атмосферному ($p_0 = p_a$), то у давления p следует поставить индекс "абс" и считать его абсолютным давлением:

$$p_{абс} = p_a + \rho g h . \qquad (1.2)$$

Если абсолютное давление больше атмосферного, то давление, ***превышающее*** атмосферное, называется ***манометрическим***, или ***избыточным*** (термины равнозначны). В закрытом резервуаре при условии, что $p_{0абс} > p_a$, величина манометрического давления

$$p_{ман} = p_{0абс} - p_a + \rho g h$$

Манометрическое давление в открытом резервуаре на глубине h

$$p_{ман} = \rho g h. \qquad (1.3)$$

Давление, ***недостающее*** до атмосферного, называется ***вакуумметрическим***:

$$p_{вак} = p_a - p_{абс}, \qquad (1.4)$$

при условии, что $p_{абс} < p_a$.

При решении задач манометрическое давление учитывается со знаком "+", вакуумметрическое - со знаком "-".

Следует запомнить: чтобы записать абсолютное давление в месте установки ***манометра***, нужно к атмосферному давлению ***прибавить*** манометрическое, т. е.

$$p_{абс} = p_a + p_{ман}.$$

Чтобы записать абсолютное давление в месте установки ***вакуумметра***, нужно к атмосферному давлению ***прибавить $p_{вак}$ со знаком минус***, т. е.

$$p_{абс} = p_a - p_{вак}.$$

В соответствии с изложенным учтём, как в дальнейших расчётах пользоваться понятиями манометрического, вакуумметрического и абсолютного давлений.

1.3. Плоскость уровня. Понятие пьезометрической высоты. Эпюры гидростатического давления

При решении задач по определению давления в покоящейся жидкости используют условие равновесия жидкости относительно ***плоскости уровня*** (плоскости равного давления).

Плоскость уровня – это плоскость с постоянным гидростатическим давлением во всех точках этой плоскости. Вывод уравнения плоскости уровня

и примеры плоскости уровня приводятся в учебниках и учебных пособиях по гидромеханике (см. библиографический список).

Частным случаем плоскости уровня является ***горизонтальная*** плоскость в однородной покоящейся жидкости, находящейся в поле действия только сил тяжести.

Пьезометрическая высота, или пьезометрический напор, - это такая высота столба жидкости, которая своим весовым давлением ($\rho g h$) соответствует давлению (p) в покоящейся жидкости. Характерные случаи представления пьезометрической высоты приведены в учебной литературе.

Рассмотрим один из случаев. Пусть имеем закрытый резервуар, в котором на свободной поверхности действует абсолютное давление, больше атмосферного ($p_{абс} > p_а$) (рис. 1.1,а). На глубине h выведена открытая стеклянная трубка, называемая ***пьезометром***. Если бы резервуар был открыт, уровни жидкости в резервуаре и в пьезометре были бы на одном горизонте (как в сообщающихся сосудах). Поскольку давление на поверхности жидкости в резервуаре больше, чем атмосферное, уровень жидкости в пьезометре будет выше, чем в резервуаре.

Высота, на которую поднимется жидкость в пьезометре, называется ***пьезометрической*** высотой и обозначается h_p. Докажем, что пьезометрическая высота h_p соответствует избыточному давлению. Проведём горизонтальную ***плоскость уровня*** 0 - 0 на глубине h и составим условие равенства давления, рассчитанного слева по пьезометру (p_1), и давления (p_2) справа в баке на глубине h:

$$p_1 = p_2.$$

Согласно основному уравнению гидростатики (1.1):

$$p_1 = p_а + \rho g h_p; \quad p_2 = p_{абс} - \rho g h;$$

$$p_а + \rho g h_p = p_{абс} + \rho g h;$$

$$h_p = \frac{p_{абс} - p_а + \rho g h}{\rho g} = \frac{p_{изб}}{\rho g}. \qquad (1.5)$$

Условие доказано, таким образом, избыточное давление в любой точке покоящейся жидкости можно заменить давлением столба жидкости в пьезометре. Аналогичные рассуждения можно провести по вакуумметрическому давлению.

Графическое представление величины и направления гидростатического давления, действующего на любую точку поверхности, называется ***эпюрой давления***. Согласно основному уравнению гидростатики (1.1), закон распределения давления (p) по глубине (h) линейный.

На рис. 1.1 представлены эпюры абсолютного давления (б) и весового давления жидкости без учёта давления на поверхности жидкости (в).

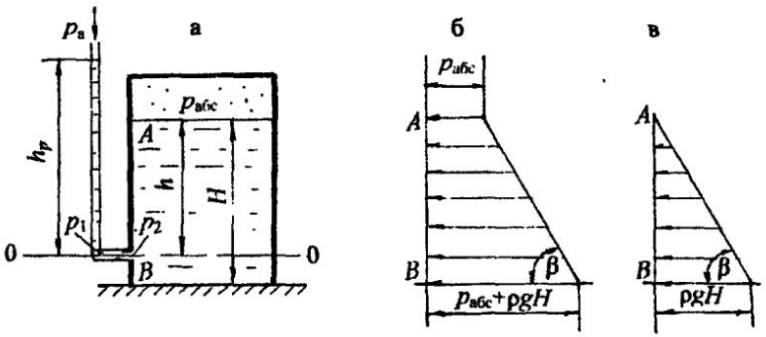


Рис. 1.1

Эпюры давления представляют соответственно равномерно распределённую нагрузку в виде трапеции для абсолютного или полного давления и в виде треугольника для весового давления. Угол наклона эпюры β зависит от величины плотности жидкости ρ. Стрелками показано, что давление в любой точке по глубине действует по внутренней нормали к поверхности *AB*.

1.4. Единицы измерения давления

Основной системой единиц измерения давления является система СИ. Но наряду с этой системой при технических расчётах и в производственной практике пользуются технической системой (CGS) и внесистемными единицами измерения.

Система СИ: $Н/м^2$ = Па; 10^3 Па = кПа; 10^6 Па = МПа; бар = 10^5 Па.

Техническая система: 1 $кгс/см^2$ = 1 ат; $кгс/м^2$.

Внесистемные единицы измерения: мм рт. ст.; м вод. ст.; мм вод. ст.

Покажем перевод единиц измерения давления:

1 ат = 1 $кгс/см^2$ = 10^4 $кгс/м^2$ = $9{,}8 \cdot 10^4$ $Н/м^2$ ≈ 98 кПа;
1 ат = 735,6 мм рт. ст.
1 ат = 10 м вод. ст.
1 мм рт. ст. = 133,3 Па.

Перевод единиц измерения давления из ат или Па в высоту столба жидкости и наоборот может быть выполнен по формулам:

$$H = p/\rho g \quad \text{и} \quad p = \rho g H.$$

Проверим приведённые выше величины. Переведём 1 ат в м вод.ст., зная, что плотность воды $\rho = 10^3$ $кг/м^3$:

$$H_{\text{вод.ст.}} = (98 \cdot 10^3) / (10^3 \cdot 9{,}8) = 10 \text{ м}.$$

Теперь переведём 1 ат в мм рт. ст. при плотности ртути $\rho_{\text{рт.}} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3:

$$H_{\text{рт.ст.}} = (98 \cdot 10^3) / (13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8) = 0{,}7356 \text{ м} = 735{,}6 \text{ мм}.$$

В приложении (табл. 2) приведено соотношение между единицами давления.

1.5. Примеры решения задач по теме: "Гидростатическое давление в жидкости"

Задача 1.5.1. К резервуару (рис. 1.2), заполненному бензином плотностью $\rho_{\text{бенз.}} = 700$ кг/м^3, присоединён U-образный ртутный манометр, показание которого $h_{\text{рт}} = 0{,}1$ м; уровень масла над ртутью $h_{\text{м}} = 0{,}2$ м.

Определить абсолютное давление $p_{\text{абс}}$ паров на поверхности бензина и показание пружинного манометра (см. обозначение буквой М), установленного на крышке резервуара, а также возможную высоту уровня бензина в пьезометре $h_{\text{п}}$ при условии, что $h = 0{,}75$ м; $a = 0{,}15$ м; $H = 1{,}1$ м; принять плотность ртути $\rho_{\text{рт}} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3; плотность масла $\rho_{\text{мас.}} = 820$ кг/м^3.

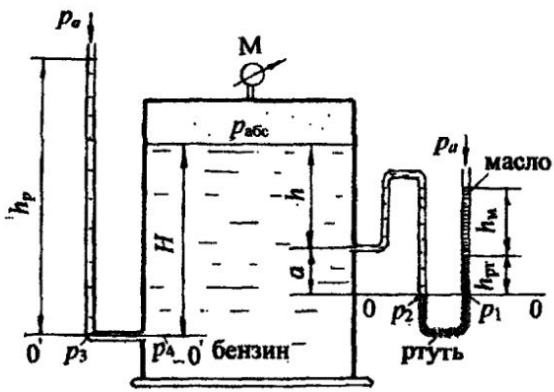


Рис. 1.2

Решение. Решение ведём с учётом атмосферного давления, так как по условию задачи требуется определить абсолютное давление паров бензина.

Для решения задачи воспользуемся понятием ***плоскости уровня***. Выберем плоскость уровня 0–0 на разделе жидкостей бензин - ртуть и составим условие равенства давления, приравняв давления в правом (p_1) и левом колене (p_2) U–образного манометра:

$$p_1 = p_2;$$

$$p_1 = p_a + \rho_{мас} g h_м + \rho_{рт} g h_{рт};$$

$$p_2 = p_{абс} + \rho_{бенз} g(h + a).$$

Приравняем давление в правом и левом колене U-образного манометра:

$$p_a + \rho_{мас} g h_м + \rho_{рт} g h_{рт} = p_{абс} + \rho_{бенз} g(h + a),$$

отсюда абсолютное давление паров бензина:

$$p_{абс} = p_a + \rho_{мас} g h_м + \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_{бенз} g(h + a).$$

Принимая атмосферное давление $p_a = 98 \cdot 10^3$ Па = 98 кПа, получим:

$$p_{абс} = 98 \cdot 10^3 + 820 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1 - 700 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}9 = 106{,}76 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Показание манометра, установленного на крышке бака, можно определить так:

$$p_{ман} = p_{абс} - p_a = \rho_{мас} g h_м + \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_{бенз} g(h + a) = 8{,}76 \text{ кПа} = 0{,}089 \text{ ат}.$$

Для определения возможной высоты бензина в пьезометрической трубке h_p составим условие равновесия жидкости относительно ***плоскости уровня*** 0-0, в этом случае расчёты можно вести по избыточному (манометрическому) давлению. Для плоскости уровня 0'-0' запишем равенство давлений $p_3 = p_4$:

$$\rho_{бенз} g h_p = p_{ман} + \rho_{бенз} g H,$$

отсюда

$$h_p = \frac{p_{ман}}{\rho_{бенз} g} + H = 2{,}38 \text{ м}.$$

Ответ: $p_{абс} = 106{,}76 \cdot 10^3$ Па = 106,76 кПа; $p_{ман} = 8{,}76$ кПа; $h_p = 2{,}38$ м.

Задача 1.5.2. Два резервуара, заполненные водой и бензином, линии центров которых находятся на одном уровне, соединены двухколенным ртутным манометром (рис. 1.3). Пространство между уровнями ртути в манометре заполнено маслом плотностью $\rho_{мас} = 900$ кг/м^3.

Определить, в каком резервуаре давление больше и на какую величину, если высоты уровней жидкостей соответственно: $h_1 = 250$ мм; $h_2 = 120$ мм; $h_3 = 80$ мм; $h_4 = 50$ мм. Принять плотность бензина $\rho_{бенз} = 720$ кг/м^3, ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Резервуары закрыты, поэтому давление будем рассчитывать по избыточному давлению без учёта атмосферного давления. Обозначим давление на уровне центра в левом резервуаре p_A, в правом - p_B.

Покажем положение ***плоскостей уровня*** для данной равновесной системы: это плоскости 0–0; 0'–0' и 0''-0''. Эти горизонтальные плоскости проводятся по однородной жидкости: плоскость 0–0 по маслу, две другие по ртути. Для этих плоскостей запишем условие равенства давлений: $p_1 = p_2$;

$p_3 = p_4$; $p_5 = p_6$. Плоскость 0–0 является основной плоскостью равновесного состояния, для которой $p_1 = p_2$.

Согласно основному уравнению гидростатики (1.1), чтобы записать давление p_1, нужно к давлению в центре резервуара A (p_A) прибавить давление столба воды $\rho g h_1$ - получим давление $p_3 = p_4$, из давления p_4 вычтем (поднимаемся вверх) давление столба ртути $\rho_{рт} g h_2$ и, таким образом, получим давление p_1:

$$p_1 = p_A + \rho g h_1 - \rho_{рт} g h_2.$$

Аналогично запишем давление p_2: к давлению в центре резервуара B (p_B) прибавим давление столба бензина $\rho_{бенз} g h_5$ и давление столба ртути $\rho_{рт} g h_4$- получим давление $p_6 = p_5$. Затем от плоскости $0'' - 0''$ поднимемся вверх до плоскости 0–0, т. е. вычтем давление столба масла $\rho_{мас} g h_3$ и получим давление p_2:

$$p_2 = p_B + \rho_{бенз} g h_5 + \rho_{рт} g h_4 - \rho_{мас} g h_3.$$

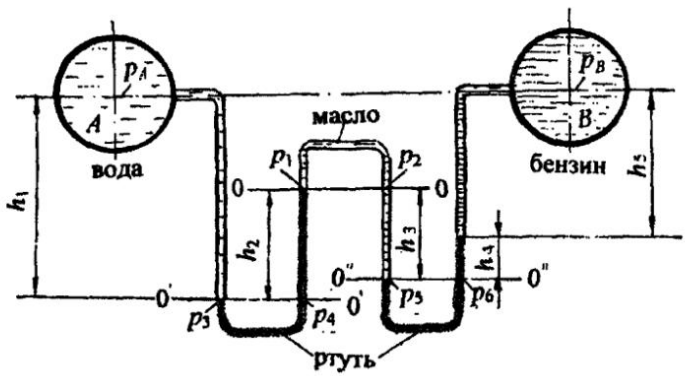


Рис. 1.3

Согласно чертежу, высота столба бензина $h_5 = h_1 - h_2 + h_3 - h_4 = 160$ мм.

По распределению уровня ртути в дифференциальном манометре предполагаем, что давление в резервуаре A больше, чем давление в резервуаре B. Находим эту разность:

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho_{бенз} g h_5 + \rho_{рт} g h_4 - \rho_{мас} g h_3 - \rho g h_1 + \rho_{рт} g h_2.$$

При подстановке численных значений следует перевести высоты уровней жидкости в м.

Ответ: $\Delta p = p_A - p_B = 20{,}63$ кПа.

Ответ получился положительным, значит, предположение, что давление в резервуарс A больше, верно.

Задача 1.5.3. Определить, какое давление - манометрическое или вакуум, показывает мановакуумметр ($p_{мв}$), установленный по оси резервуара *B* с керосином, если показание манометра по центру резервуара *A* с водой $p_{ман} = 0{,}12$ ат. Между резервуарами подключён *U*-образный ртутный манометр, показание которого $h_{рт} = 200$ мм; расстояние от уровня ртути в левом колене до оси резервуара *A* $h = 300$ мм. Оси центров резервуаров находятся на одной линии (рис. 1.4).

Принять плотность керосина $\rho_{кер} = 820$ кг/м^3; ртути - $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Примечание. Мановакуумметр – это прибор для измерения как манометрического, так и вакуумметрического давления, имеющий шкалу измерения со знаком "+" (манометрическое давление) и со знаком "-" (вакуумметрическое давление).

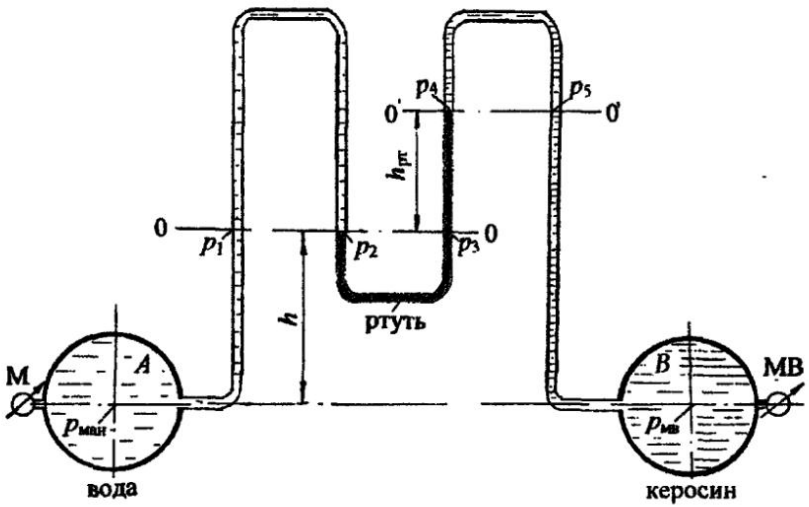


Рис. 1.4

Решение. В задачах 1.5.1 и 1.5.2 подробно изложена методика определения давления путём составления условия равенства давления относительно плоскости уровня. Из этих решений следует сделать ***выводы***.

Во-первых, по плоскости уровня можно перейти в любую точку жидкости, и давление останется той же величины.

Во-вторых, при расчёте весового давления жидкости (ρgh) в случае ***увеличения глубины*** (отсчёты вниз) давление увеличивается и учитывается со знаком "+", в случае ***уменьшения глубины*** (поднимаемся вверх) давление уменьшается и учитывается со знаком "-".

В данной задаче (см. рис. 1.4) основной плоскостью уровня для всей системы является плоскость 0-0, в левой части она проходит по воде, в правой - по ртути *U*-образного манометра. Для этой плоскости $p_1 = p_2 = p_3$. В другой плоскости 0'-0', проведённой в керосине, $p_4 = p_5$. Задачу будем решать без учёта атмосферного давления. Значит, если рассчитанное давление на уровне установки мановакуумметра (МВ) получится положительным, прибор работает как манометр, если давление получится отрицательным, т. е. вакуумметрическим, прибор работает как вакуумметр.

А теперь запишем давление на уровне установки мановакуумметра путем следующих рассуждений. Имеем манометрическое давление $p_{ман}$ по оси резервуара *A*, ***поднимаемся*** до плоскости уровня 0-0, значит, ***вычитаем*** давление столба воды ρgh, получаем давление p_1, по плоскости уровня переходим в левое колено *U*-образного манометра, где $p_1 = p_2$. Затем переходим в правое колено манометра, где $p_3 = p_2$; ***поднимаемся*** к плоскости 0'-0', значит, ***вычитаем*** давление столба ртути $\rho_{рт} g h_{рт}$, получаем давление p_4; переходим по плоскости уровня 0'-0' к давлению $p_5 = p_4$. И последний этап: к полученному давлению p_5 ***прибавляем*** давление столба керосина $\rho_{кер} g(h+h_{рт})$, поскольку ***опускаемся вниз*** до оси резервуара *B*.

Таким образом, записали давление по оси резервуара с керосином, где установлен ***мановакуумметр***.

Представленные рассуждения запишем следующим образом:

$$p_{ман} - \rho gh - \rho_{рт} g h_{рт} + \rho_{кер} g(h+h_{рт}) = p_{мв}.$$

Подставим численные значения:

$$p_{мв} = 0{,}12 \cdot 98 \cdot 10^3 - 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3 - 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 + 820 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 9{,}8 \cdot 10^3 \cdot (1{,}2 - 0{,}3 - 2{,}72 + 0{,}41) = -1{,}41 \cdot 9{,}8 \cdot 10^3 \text{ Па} = -13{,}82 \text{ кПа}.$$

Знак "-" свидетельствует о том, что ***мановакуумметр*** работает как ***вакуумметр***. Показание вакуумметра $p_{вак} = 13{,}82$ кПа $= 0{,}14$ ат (в такой записи индекс ***вак*** заменяет знак "-").

Ответ: мановакуумметр работает как вакуумметр и показывает вакуумметрическое давление $p_{вак} = 0{,}14$ ат.

В разделе 1.6 приведены задачи для самостоятельной работы по усвоению знаний определения давления в покоящейся жидкости.

1.6. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Гидростатическое давление в жидкости"

Задача 1.6.1

Определить, каким прибором следует измерять давление в баке, заполненном маслом, и показание этого прибора (в ат), установленного на глубине h = 1,2 м, если показание U-образного ртутного манометра, установленного на поверхности масла, $h_{рт}$ = 200 мм. Принять плотность масла $\rho_{мас}$ = 900 кг/м^3 (рис. 1.5).

Ответ: следует пользоваться вакуумметром, $p_{приб} = p_{вак} = 0{,}163$ ат.

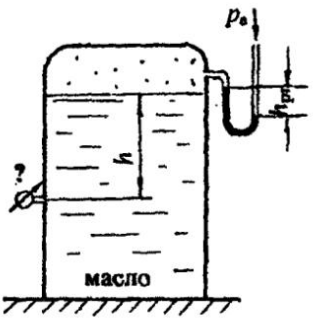


Рис. 1.5

Задача 1.6.2

Определить показание U-образного ртутного манометра ($h_{рт}$), подключённого к резервуару с маслом на глубине h = 0,8 м, если показание пружинного манометра, установленного на глубине h_1 = 1,2 м, $p_{ман}$ = 0,15 ат. Принять поправку ртутного манометра a = 0,3 м, плотность масла $\rho_{мас}$ = 900 кг/ м^3, плотность ртути $\rho_{рт}$ = 13,6 ·10^3 кг/м^3 (рис. 1.6) .

Ответ: $h_{рт.}$=104 мм.

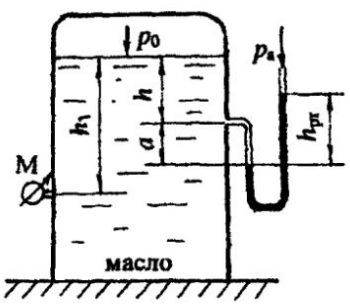


Рис. 1.6

Задача 1.6.3

Определить давление (p_0) на поверхности бензина в закрытом резервуаре и показание мановакуумметра ($p_{мв}$), установленного на глубине h = 1,5 м, если показание U-образного ртутного манометра $h_{рт}$ = 400 мм. Принять глубину h_1 = 1,0 м, плотность бензина $\rho_{бенз}$ = 720 кг/м^3 (рис. 1.7).

Ответ: $p_0 = p_{вак}$ = 60,4 кПа; $p_{мв} = p_{вак}$ = 49,8 кПа.

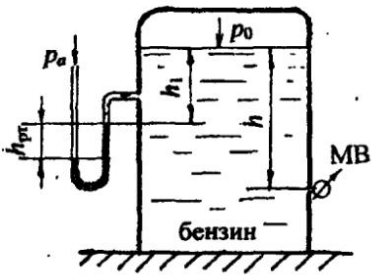


Рис. 1.7

Задача 1.6.4

Определить абсолютное давление на поверхности бензина в закрытом резервуаре ($p_{абс}$), а также показание мановакуумметра ($p_{мв}$ в бар), установленного на глубине h_1 = 1,6 м при заданных величинах h = 0,5 м, $h_{рт}$ = 300 мм, атмосферное давление p_a = 740 мм рт. ст. Принять плотность бензина $\rho_{бенз}$ = 720 кг/м^3; ртути $\rho_{рт}$ = 13,6·10^3 кг/м^3. Давлением воздуха в U-образном ртутном манометре можно пренебречь (рис. 1.8).

Ответ: $p_{абс}$ = 55,13 кПа; $p_{мв} = p_{вак}$ = 0,32 бар.

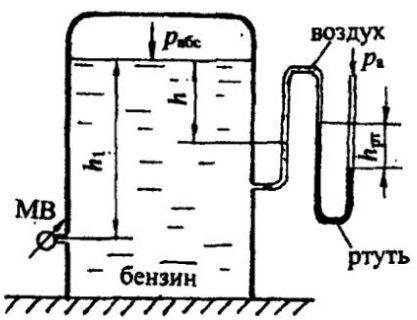


Рис. 1.8

Задача 1.6.5

Определить, каким прибором (манометром или вакуумметром) следует измерить давление газа в баллоне по показанию (h) двухжидкостного чашечного манометра, заполненного водой и ртутью ($\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м ^{3}), если $H = 0{,}6$ м; $h = 100$ мм; $\Delta h = 40$ мм. Показание прибора представить в ат (рис. 1.9).

Ответ: следует пользоваться вакуумметром, $p_{прибор} = p_{вак} = 0{,}13$ ат.

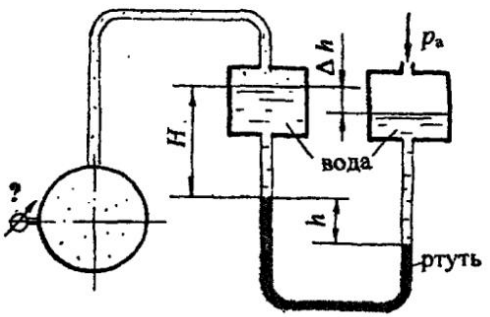


Рис. 1.9

Задача 1.6.6

Определить абсолютное давление воздуха в резервуаре B, если показание манометра, установленного по центру резервуара A, заполненного маслом, $p_{ман} = 0{,}12$ ат, высоты уровней масла и ртути в U-образном ртутном дифференциальном манометре $h_м = 600$ мм; $h_{рт} = 200$ мм (рис. 1.10).

Принять плотность масла $\rho_{мас} = 900$ кг/ м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $p_{абс} = 88{,}4$ кПа.

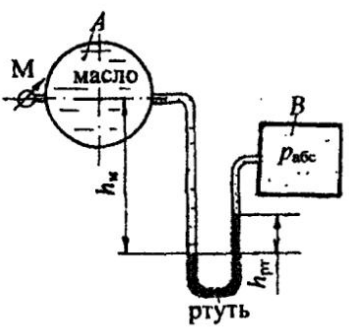


Рис. 1.10

Задача 1.6.7

Определить разность давлений (в ат) в центрах трубопроводов A и B, заполненных водой и маслом, если высоты уровней воды и масла в U-образном ртутном дифференциальном манометре: $h_в = 500$ мм; $h_м = 400$ мм (рис. 1.11).

Принять плотность масла $\rho_{мас} = 900$ кг/м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\Delta p = p_A - p_B = 0{,}122$ ат.

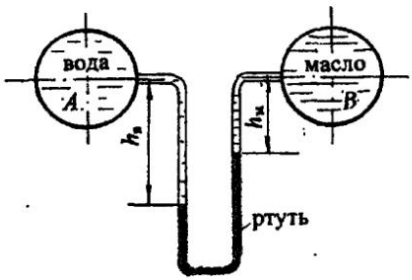


Рис. 1.11

Задача 1.6.8

Два сосуда наполнены разнородными жидкостями: маслом и керосином. На поверхности жидкостей в сосудах действуют давления p_1 и p_2.

Найти разность этих давлений, если показание U-образного ртутного манометра $h = 100$ мм, высота уровня масла $H = 500$ мм, превышение уровня керосина $\Delta h = 40$ мм. Принять плотности жидкостей: масла $\rho_{мас} = 900$ кг/м^3; керосина $\rho_{кер} = 800$ кг/м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 (рис. 1.12).

Ответ: $\Delta p = p_1 - p_2 = 0{,}126$ ат.

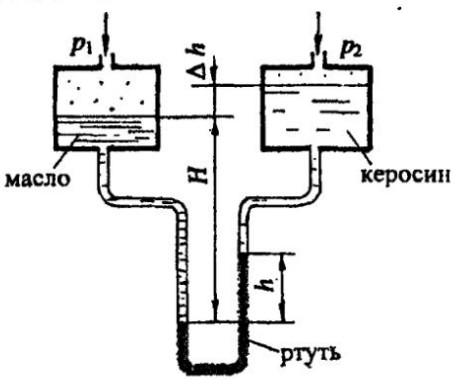


Рис. 1.12

Задача 1.6.9

Из открытого резервуара C через трубу B вода поднята в резервуар A с глубиной заполнения h = 0,5 м. Давление воздуха на поверхности воды в резервуаре A измерено U-образным ртутным манометром, показание которого $h_{рт}$ = 200 мм (рис. 1.13). Определить высоту воды H в трубе B. Принять плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: H=2,22 м.

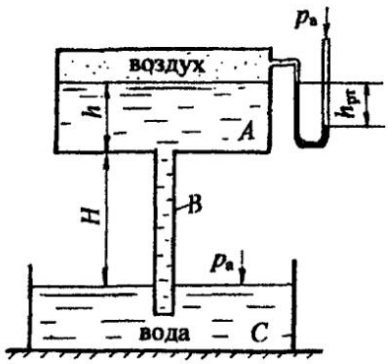


Рис. 1.13

Задача 1.6.10

Определить избыточное давление p_x (в бар) в центре сосуда с бензином, если показание манометра, включённого на уровне центра сосуда с водой $p_{ман}$ = 0,12 ат, высоты уровней жидкостей: h_1 = 400 мм; h_2 = 200 мм.

Центры резервуаров находятся на одном уровне. Принять плотность бензина $\rho_{бенз}$ = 720 кг/м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$кг/м^3 (рис. 1.14).

Ответ: $p_x = p_{изб}$ =0,354 бар.

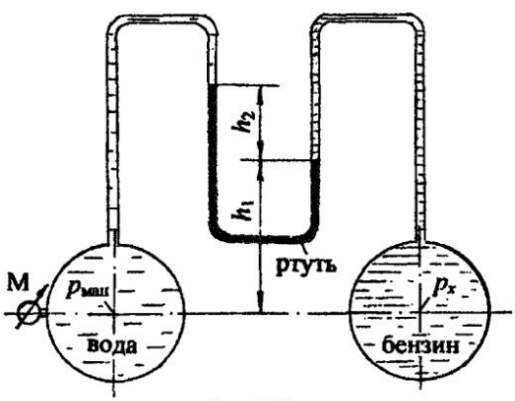


Рис. 1.14

Задача 1.6.11

Определить показание манометра $p_{ман}$ (в ат), установленного на маслопроводе диаметром $d = 200$ мм, если абсолютное давление в воздушном резервуаре $p_{абс} = 0{,}9$ ат. Между воздушным резервуаром и маслопроводом подключён U-образный ртутный манометр, показание которого $h_{рт} = 200$ мм. Высота столба масла от оси маслопровода до уровня ртути в U-образном манометре $h_м = 600$ мм. Принять плотность масла $\rho_{мас} = 900$ кг/м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 (рис. 1.15).

Ответ: $p_{ман} = 0{,}11$ ат.

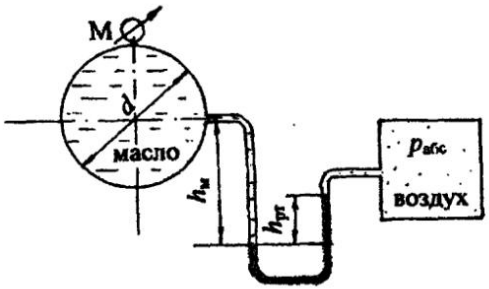


Рис. 1.15

Задача 1.6.12

В закрытом резервуаре A, заполненном маслом, давление на поверхности жидкости p_0. На глубине $h = 0{,}6$ м подключён U-образный ртутный манометр, показание которого $h_{рт} = 40$ мм, понижение уровня ртути в правом колене $a = 0{,}2$м. Определить давление p_0 (в бар) на поверхности масла, а также высоту подъёма воды ($h_в$) в стеклянной трубке, опущенной в открытый резервуар B, заполненный водой (рис. 1.16).

Принять плотность масла $\rho_{мас} = 900$ кг/м^3; ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $p_0 = p_{вак} = 0{,}124$ бар; $h_в = 1{,}264$ м.

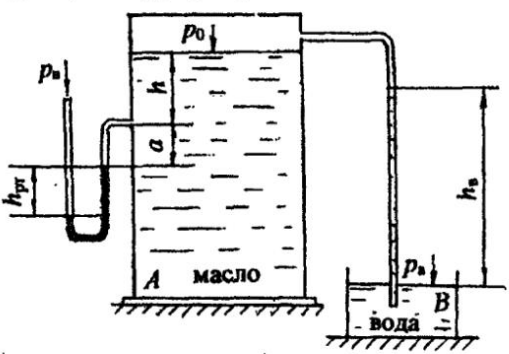


Рис. 1.16

Задача 1.6.13

Определить, на какой высоте Z находится уровень ртути в левом колене U-образного ртутного манометра, если при манометрическом давлении по центру маслопровода $p_{ман}$ = 0,24 бар и показании ртутного манометра $h_{рт}$ = 110 мм система находится в равновесии. Принять плотность масла $\rho_{мас}$ = 900 кг/м^3, плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 (рис. 1.17).

Ответ: Z = 1,06 м.

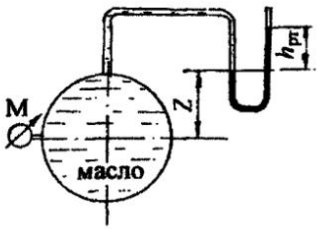


Рис. 1.17

Задача 1.6.14

Два резервуара A и B, линии центров которых совпадают, соединены двухколенным ртутным манометром. Определить, каким прибором следует измерять давление воздуха p_x в резервуаре B, если давление на поверхности воды в резервуаре A $p_{ман}$ = 0,18 ат, а разности уровней ртути в диффсренциальном манометре: h_1 = 100 мм; h_2 = 120 мм. Уровень ртути в левом колене расположен ниже уровня воды в резервуаре A на величину h = 0,5 м. Пространство между уровнями ртути в манометре заполнено маслом плотностью $\rho_{мас}$ = 880 кг/м^3. Принять плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Плотностью воздуха при расчётах можно пренебречь (рис. 1.18).

Ответ: давление измеряется вакуумметром: $p_x = p_{вак}$ = 5,9 кПа = 0,06 ат.

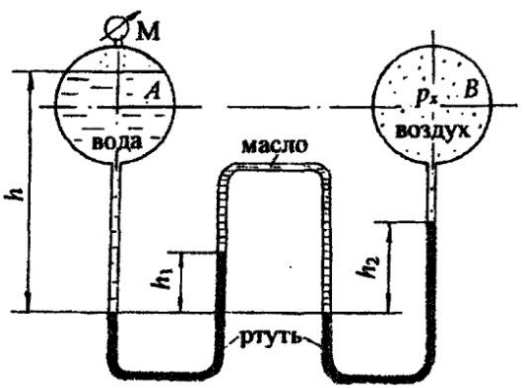


Рис. 1.18

Глава 2

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В практике гидравлических расчётов часто приходится определять величину и точку приложения силы давления жидкости на плоские стенки различной конфигурации. Такими плоскими стенками, воспринимающими давление жидкости, являются стенки резервуаров, плоские затворы, крышки, грани плотин, элементы гидротехнических сооружений и др.

Для определения силы давления жидкости на плоские стенки пользуются двумя методами - ***аналитическим и графо-аналитическим***. Аналитический метод применим для плоских стенок любой формы, графо-аналитический - только для прямоугольных стенок.

2.1. Аналитический метод определения силы давления жидкости

Для расчёта силы полного или абсолютного давления жидкости на плоскую поверхность пользуются аналитической расчётной зависимостью:

$$R_{полн} = p_C A. \qquad (2.1)$$

Сила полного давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки (A) на полное давление на глубине погружения центра тяжести стенки в жидкость (p_C).

Согласно ***основному уравнению гидростатики*** (1.1), давление на глубине погружения центра тяжести стенки (p_C)

$$p_C = p_0 + \rho g h_C, \qquad (2.2)$$

где h_C – глубина погружения центра тяжести стенки в жидкость, отсчитанная от ***свободной*** поверхности;

ρ - плотность жидкости;

g - ускорение свободного падения.

В формуле (2.2) давление на поверхности жидкости (p_0) может быть атмосферным, манометрическим (избыточным), вакуумметрическим. Формулу (2.1) с учётом формулы (2.2) можно записать:

$$R_{полн} = p_0 A + \rho g h_C A. \qquad (2.3)$$

Таким образом, сила полного давления может быть представлена в виде двух составляющих:

сила ***внешнего, или поверхностного,*** давления

$$R_0 = p_0 A; \qquad (2.4)$$

сила ***весового*** давления жидкости

$$R_ж = \rho g h_C A. \qquad (2.5)$$

Сила полного давления $R_{полн}$ находится как геометрическая сумма двух параллельных сил R_0 и $R_ж$:

$$\vec{R}_{полн} = \vec{R}_0 + \vec{R}_ж.$$

Давление на поверхности жидкости, согласно закону Паскаля, передаётся внутрь жидкости всем точкам без изменения. Это значит, что эпюра внешнего давления (p_0) представляет равномерно распределённую прямоугольную нагрузку, а равнодействующая такой нагрузки (R_0) ***приложена в центре тяжести поверхности стенки***, т. е. на глубине h_C.

Составляющая от весового давления жидкости $R_ж$ приложена в точке, называемой ***центром давления***.

Центр давления силы $R_ж$ всегда располагается ниже центра тяжести стенки. Глубина погружения центра давления (h_D) рассчитывается по формуле

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A}, \qquad (2.6)$$

где $\frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A} = e$ – эксцентриситет центра давления, его величина соответствует смещению центра давления относительно центра тяжести;

I_C – центральный момент инерции плоской стенки относительно ***горизонтальной*** оси;

α – угол наклона плоской стенки к горизонту.

В приложении (табл. 3) для некоторых плоских симметричных фигур приведены формулы ***для определения центральных моментов инерции относительно горизонтальной оси, площадей и координат их центров тяжести.***

Для определения точки приложения силы полного давления $R_{полн}$ нужно воспользоваться ***теоремой о моменте равнодействующей***: момент равнодействующей относительно какой-либо оси равен сумме моментов её составляющих относительно той же оси. Применение этой теоремы будет рассмотрено далее при разборе решения задачи 2.3.2.

2.2. Графо-аналитический метод расчёта силы давления и центра давления на прямоугольные поверхности

Графо-аналитический метод расчёта силы давления основан на построении эпюр гидростатического давления. Эпюры давления представляют собой равномерно распределённую нагрузку по ширине (или длине) плоской прямоугольной поверхности. Для поверхностей в виде круга, эллипса, треугольника и им подобных эпюра давления в объёмном представлении является довольно сложной фигурой, так как изменение давления следует учитывать при переменной глубине по всей плоской поверхности. Для таких поверхностей графо-аналитический метод не применяется.

Определим силу давления жидкости на прямоугольную стенку *AB* высотой *H* и длиной (*l*), перпендикулярной плоскости чертежа. Удерживаемый напор равен высоте стенки (рис. 2.1). Совместим прямоугольную стенку с плоскостью чертежа и покажем положение центра тяжести стенки точку - *C*.

Рассчитаем силу давления жидкости $R_ж$ ***аналитически и графически.***

Аналитический метод расчёта. Согласно формуле **(2.5)**, сила давления жидкости

$$R_ж = \rho g h_C A = \frac{\rho g H^2}{2} l, \qquad (2.7)$$

где $h_C = H/2$; $A = H\,l$.

Положение центра давления рассчитываем по формуле **(2.6)**

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A},$$

где $I_C = \frac{l H^3}{12}$ – центральный момент инерции относительно горизонтальной оси для прямоугольника (см. приложение табл. 3); $\alpha = 90^0$; $\sin \alpha = 1{,}0$.

Таким образом, $$h_D = \frac{H}{2} + \frac{l H^3 2}{12 H^2 l} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3} H. \qquad (2.8)$$

А теперь перейдём к ***графо-аналитическому*** методу расчёта силы давления и центра давления. Построим эпюру гидростатического давления. Давление жидкости в точке A $p_A = 0$, в точке B - $p_B = \rho g H$.

Эпюра давления в плоскости чертежа представляет равномерную нагрузку в виде треугольника, в объёмном представлении – это треугольная призма. Равнодействующая такой равномерной нагрузки равна объёму треугольной призмы и проходит через центр тяжести этой призмы, т. е. через центр тяжести эпюры гидростатического давления.

Проверим:

$$R_ж = V_{прив.} = S_{эп} l = \frac{\rho g H^2}{2} l, \qquad (2.9)$$

где $S_{эп}$ – площадь эпюры давления в виде треугольника.

Центр тяжести эпюры располагается на расстоянии **2/3** H (центр тяжести треугольника):

$$h_{ц.т.эп.} = 2/3\ H. \qquad (2.10)$$

Сравнивая формулы (2.7) и (2.9), а также (2.8) и (2.10), приходим к выводу: ***графо-аналитически сила давления жидкости на прямоугольные поверхности равна произведению площади эпюры гидростатического давления на длину (или ширину) плоской стенки и проходит через центр тяжести эпюры давления*:**

$$R_{ж} = S_{эп}\ l; \quad h_D = h_{ц.т.эп.} \qquad (2.11)$$

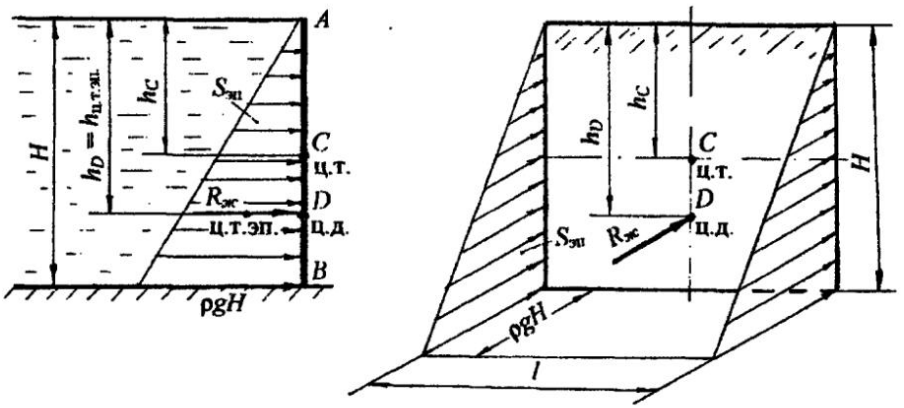


Рис. 2.1

Используя выше изложенные теоретические положения, рассмотрим примеры определения силы давления на плоские поверхности.

2.3. Примеры решения задач по теме: "Расчёт силы давления жидкости на плоские поверхности"

Задача 2.3.1. Прямоугольная крышка *AB* (рис. 2.2), расположенная под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту, перекрывает патрубок закрытого резервуара с водой. Высота патрубка h = 600 мм, ширина b = 400 мм. Крышка может поворачиваться вокруг шарнира *A*. Высота уровня воды над шарниром a = 200 мм. Давление на поверхности воды соответствует показанию *U*-образного ртутного манометра $h_{рт} = 80$ мм.

Определить силу натяжения троса *T* для удержания крышки *AB* в закрытом положении. Угол натяжения троса $\beta = 45^0$. Принять плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Решение. Чтобы определить силу натяжения троса *T* для удержания крышки *AB* в закрытом положении, нужно определить силу от внешнего давления R_0 и силу давления воды $R_{ж}$.

Рассмотрим ***аналитический способ*** расчёта силы давления и центра давления.

Методика расчёта силы давления включает следующую последовательность:

- рассчитывается сила давления жидкости и сила от внешнего давления, при этом на чертеже обозначаются центральные оси плоской стенки и глубина погружения центра тяжести стенки от свободной поверхности (h_C);
- определяются точки приложения сил, на чертеже обозначается точка приложения силы давления жидкости, т. е. центр давления, и глубина погружения центра давления h_D;
- показывается направление действия сил. Следует помнить, что сила давления всегда направлена ***по нормали*** к поверхности.

1. Определим ***силу от внешнего давления*** R_0. Значение давления p_0 по показанию U-образного манометра получим из условия равновесия жидкости относительно плоскости уровня 0-0. Давление p_0 является избыточным:

$$p_0 = \rho_{рт} g h_{рт}; \qquad p_0 = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}08 = 10{,}66 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad 10{,}7 \text{ кПа}.$$

Значение p_0 можно получить другим способом, а именно перевести показание манометра 80 мм рт. ст. в Па:

$$p_0 = 80 \cdot 133{,}3 = 10{,}66 \cdot 10^3 \text{ Па} = 10{,}7 \text{ кПа}.$$

Сила от внешнего давления, согласно формуле (2.4), $R_0 \quad p_0 A$,
где A – площадь крышки, м^2.

Для наглядности крышку совместим с плоскостью чертежа, тогда ширина крышки равна b, а высота $h/\sin\alpha = h/\sin 60^0 = 0{,}693$ м.

Площадь крышки $A = bh/\sin 60^0$.

Сила от внешнего давления

$$R_0 = 10{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}693 = 2{,}97 \text{ кН}.$$

Покажем ***линию действия и точку приложения*** силы R_0. Согласно пояснениям в разделе 2.1, эпюра давления p_0 представляет равномерно распределённую прямоугольную нагрузку, равнодействующая от такой нагрузки (R_0) ***проходит*** через центр тяжести эпюры и ***приложена*** в центре тяжести стенки на глубине h_C (рис. 2.2,б). Сила R_0 направлена ***по нормали*** из жидкости на стенку, как сила внешнего, ***избыточного давления***.

2. Определим ***силу давления жидкости*** $R_ж$ согласно формуле (2.5):

$$R_ж = \rho g h_C A,$$

где $h_C = (a + h/2) = 0{,}5$ м; глубину погружения центра тяжести стенки в жидкость h_C отсчитываем от ***свободной*** поверхности (см. рис. 2.2, а).

Подставим значения:

$$R_ж = \rho g (a + h/2)\ h\, b/\sin\alpha;$$

$$R_ж = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}693 \cdot 0{,}4 = 1{,}36 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1{,}36 \text{ кН}.$$

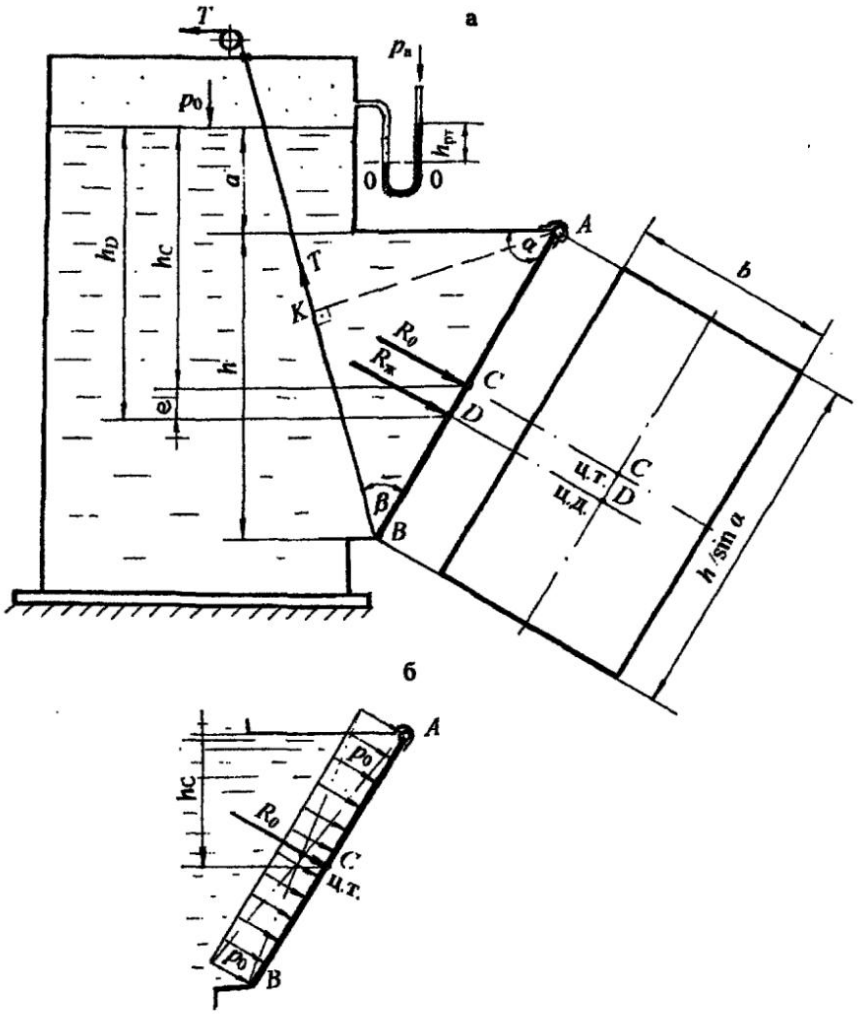


Рис. 2.2

Чтобы показать геометрическое положение силы давления жидкости $R_ж$, рассчитаем глубину погружения центра давления h_D, т.е. точки приложения силы $R_ж$ по формуле (2.6):

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A},$$

где $I_C = \dfrac{bh^3}{12\sin^3\alpha}$ – центральный момент инерции прямоугольной крышки относительно горизонтальной оси (т. е. проходящей через центр тяжести крышки).

Подставив все параметры в буквенном выражении, чтобы сделать возможные сокращения, получим глубину погружения центра давления h_D:

$$h_D = h_C + h^2/12h_C = 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}56 \text{ м}.$$

Эксцентриситет $e = h^2/12h_C$, т. е. понижение центра давления относительно центра тяжести $e = 0{,}06$ м = 60 мм.

Покажем на чертеже (рис. 2.2,а) h_D и e. Сила давления жидкости $R_ж$ приложена в центре давления (точка D) ***по нормали*** из жидкости на крышку.

3. Рассчитаем ***силу натяжения троса*** T. При решении этой задачи можно не находить равнодействующую сил давления. Составим уравнение механики: сумма моментов сил относительно шарнира A равна нулю: $\Sigma M_A = 0$. От каждой силы R_0, $R_ж$ и T берётся момент относительно точки A:

$$R_0 \cdot AC + R_ж \cdot AD - T \cdot AK = 0;$$

$$\frac{R_0 h}{2\sin 60^\circ} + \frac{R_ж (h_D - a)}{\sin 60^\circ} - \frac{Th\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 0.$$

После сокращения на $\sin 60^0$ и преобразований получим $T = 3{,}25$ кН.

Ответ: для удержания крышки AB в закрытом положении необходима сила натяжения троса $T \geq 3{,}25$ кН.

Рассмотрим другой вариант в условии задачи 2.3.1, когда показание U-образного манометра будет представлено так, что уровень ртути в левом колене U-образного манометра будет выше на величину $h_{рт}$ (рис. 2.3).

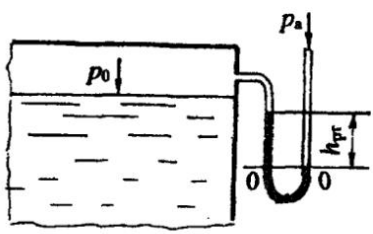


Рис. 2.3

Из условия равенства давления относительно плоскости уровня 0-0 (см. рис. 2.3) запишем:

$$p_{0абс} + \rho_{рт} g h_{рт} = p_а \text{ или } p_а - p_{0абс} = \rho_{рт} g h_{рт};$$

$$p_а - p_{0абс} = p_{вак}, \text{ значит, } p_{вак} = \rho_{рт} g h_{рт}.$$

На поверхности воды действует вакуумметрическое давление. Это значит, что сила от ***внешнего вакуумметрического давления*** будет приложена в центре тяжести стенки, но направлена по нормали ***внутрь*** жидкости (рис. 2.4).

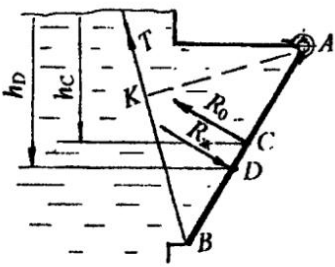


Рис. 2.4

В уравнении моментов сил относительно точки A момент от силы R_0 нужно учитывать со знаком минус, как и момент от силы T:

$$R_ж \cdot AD - R_0 \cdot AC - T \cdot AK = 0.$$

Возможно, получится такой случай, когда не потребуется трос, а момент от силы давления жидкости будет равен или меньше момента от внешней вакуумметрической силы. Под действием вакуумметрического давления на поверхности воды крышка будет в закрытом положении:

$$R_ж \cdot AD = R_0 \cdot AC.$$

Можно рассчитать предельный вакуум для удержания крышки в закрытом положении. Из приведённого равенства следует: $R_0 = 1{,}632$ кН.

Зная, что $R_0 = p_{вак} A$, определим $p_{вак}$:

$$p_{вак} = R_0/A; \quad A = bh/\sin 60° = 0{,}2772 \text{ м}^2; \text{ тогда } p_{вак} = 5{,}89 \text{ кПа}.$$

Рассчитаем высоту столба ртути $h_{рт}$ в U-образном манометре (см. рис. 2.3), при котором крышка будет в закрытом положении под действием вакуума на поверхности воды:

$$p_{вак} = \rho_{рт} g h_{рт}, \text{ отсюда } h_{рт} = 0{,}044 \text{ м} = 44 \text{ мм}.$$

Задача 2.3.2. В торцевой стенке цистерны, заполненной бензином, предусмотрена плоская круглая крышка диаметром $d = 1{,}6$ м, укреплённая при помощи болтов. Определить силу давления бензина на крышку и точку приложения силы, если высота уровня бензина над нижней кромкой крышки $H = 2{,}0$ м. На поверхности бензина действует вакуумметрическое давление $p_{вак} = 0{,}2$ ат.

Принять плотность бензина $\rho_{бенз} = 720$ кг/м^3 (рис. 2.5).

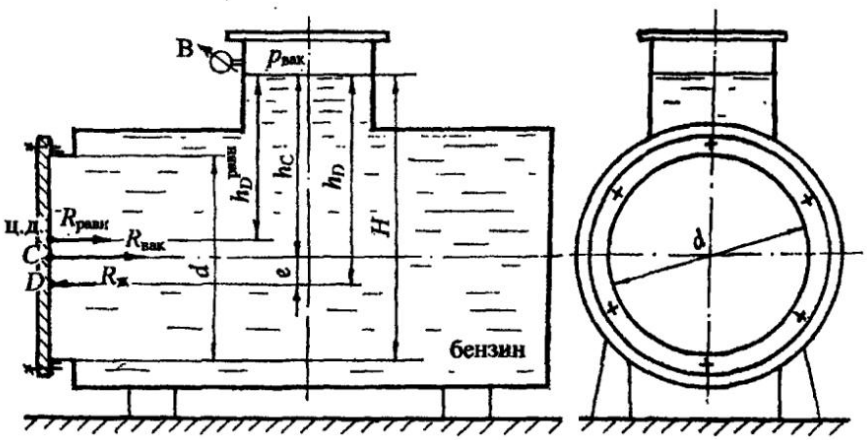


Рис. 2.5

Решение. Для определения ***равнодействующей давления*** воспользуемся аналитическим методом. Согласно формуле (2.3), равнодействующая, или сила полного давления:

$$R_{равн} = p_0 A + \rho g h_C A \text{ или } \vec{R}_{равн} = \vec{R}_0 + \vec{R}_ж.$$

1. Определим силу от внешнего, ***вакуумметрического*** давления:

$$R_0 = R_{вак} = p_{вак} A,$$

где A – площадь крышки; $A = \pi d^2/4 = 3{,}14 \cdot 1{,}6^2/4 = 2{,}0$ м^2.

$$R_{вак} = 0{,}2 \cdot 98 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0 = 39{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 39{,}4 \text{ кН}.$$

Показываем линию действия $R_{вак}$. Эта сила приложена в центре тяжести крышки (т. *C*) и направлена ***по нормали внутрь*** жидкости, как сила отрицательного, вакуумметрического давления.

2. Рассчитаем силу давления ***бензина*** на круглую крышку по формуле (2.5)

$$R_{ж} = \rho_{бенз} g h_C A,$$

где h_C – глубина погружения центра тяжести крышки в жидкость, отсчитанная от свободной поверхности. Определяем h_C по чертежу (см. рис. 2.5): $h_C = H - d/2 = 1{,}2$ м.

$$R_{ж} = 720 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 2{,}0 = 16{,}9 \cdot 10^3 \text{ Н} = 16{,}9 \text{ кН}.$$

Показываем линию действия силы давления бензина. Сила давления жидкости ($R_{ж}$) приложена ***в центре давления*** на глубине h_D и направлена по нормали из жидкости. По формуле (2.6) глубина погружения центра давления

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A},$$

где $\alpha = 90°$; $\sin \alpha = 1{,}0$ для вертикальной крышки;
I_C – центральный момент инерции круглой крышки относительно горизонтальной оси: $I_C = \frac{\pi d^4}{64}$ (см. приложение, табл. 3).

После подстановки данных в буквенное выражение h_D получим:

$$h_D = h_C + \frac{d^2}{16 h_C}; \quad h_D = 1{,}2 + 0{,}13 = 1{,}33 \text{ м}.$$

Эксцентриситет $e = 0{,}13$ м.
Покажем на чертеже h_D и e.

3. Определим величину и положение ***равнодействующей*** $R_{равн}$ (или силы полного давления) путём векторного сложения сил R_0 и $R_{ж}$:

$$\vec{R}_{равн} = \vec{R_0} + \vec{R_{ж}};$$
$$R_{равн} = R_0 - R_{ж} = 22{,}5 \text{ кН}.$$

Положение равнодействующей можно определить, пользуясь теоремой Вариньона: момент от равнодействующей равен сумме моментов составляющих .

Составим сумму моментов сил относительно оси, проходящей по свободной поверхности бензина. Введём обозначение: пусть $h_D^{равн}$ глубина погружения центра давления для равнодействующей, тогда

$$M_{R\,равн} = M_{R\,0} + M_{Rж};$$

$$R_{равн}\, h_D^{равн} = R_0 h_C - R_ж h_D,$$

отсюда $$h_D^{равн} = (R_0 h_C - R_ж h_D)/R_{равн}.$$

После подстановки численных значений $h_D^{равн} = 1{,}1$ м. Покажем на чертеже $h_D^{равн}$, центр давления для равнодействующей и линию действия равнодействующей $R_{равн.}$ по нормали внутрь жидкости.

Ответ: $R_{равн} = 22{,}5$ кН; $h_D^{равн} = 1{,}1$ м.

Задача 2.3.3. Квадратный затвор AB со стороной $a = 1{,}2$ м, перекрывающий выход воды из зумпфа, укреплён шарнирно и может поворачиваться относительно оси, проходящей через центр затвора (рис. 2.6).

Определить силу F, которую нужно приложить на расстоянии $0{,}1a$ от нижнего края затвора, чтобы удерживать затвор в закрытом положении при глубине воды перед затвором $h = 1{,}5$ м.

Решение. Слева от затвора имеем открытую свободную поверхность с атмосферным давлением, справа щит также находится под действием атмосферного давления, поэтому при определении силы давления будем учитывать только силу давления жидкости, силу от атмосферного давления в таком случае не учитывают.

Решение задачи проведём ***аналитическим и графо-аналитическим*** методами.

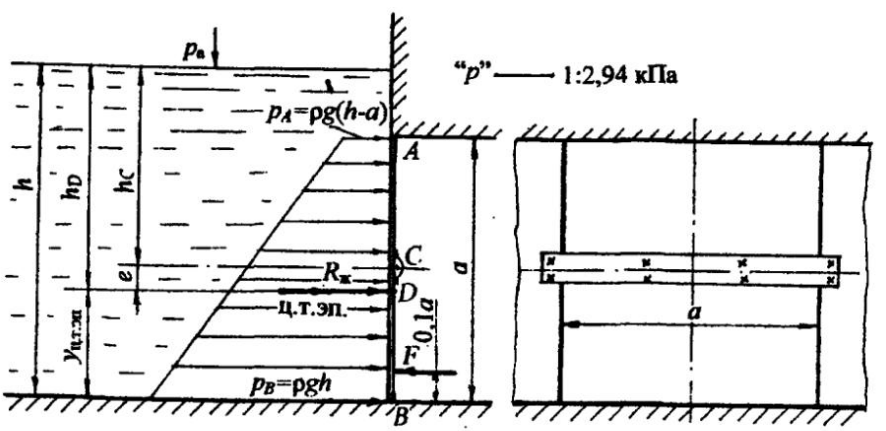


Рис. 2.6

1. ***Аналитический метод расчёта.***

а) Рассчитаем силу давления воды по формуле (2.5)

$$R_ж = \rho g h_C A,$$

где A – площадь затвора: $A = a^2 = 1{,}44$ м^2;

h_C – глубина погружения центра тяжести затвора: $h_C = h - a/2 = 0{,}9$ м; покажем h_C на чертеже.

$$R_ж = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}44 = 12{,}7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 12{,}7 \text{ кН}.$$

б) Определим глубину погружения центра давления h_D, т. е. точки приложения силы давления $R_ж$ по формуле (2.6)

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A},$$

где $\alpha = 90°$; $\sin\alpha = 1{,}0$; центральный момент инерции относительно горизонтальной оси для квадратного затвора $I_C = a^4/12$.

После подстановки всех значений в буквенное выражение h_D и соответствующих сокращений получим:

$$h_D = h_C + \frac{a^2}{12 h_C}; \quad h_D = 0{,}9 + 0{,}13 = 1{,}03 \text{ м}.$$

Эксцентриситет e =0,13 м.

Покажем на чертеже h_D, e и силу $R_ж$, приложенную в центре давления (т. D)

в) Определим силу F для удержания затвора в закрытом положении, т. е. в состоянии равновесия, составив уравнение механики: сумма моментов сил относительно шарнира C равна нулю:

$$\Sigma M_C = 0; \quad R_ж e - F \cdot 0{,}4a = 0, \text{ отсюда } F = 3{,}44 \text{ кН}.$$

2. ***Графо-аналитический метод*** расчёта силы давления воды $R_ж$ и глубины погружения центра давления h_D.

а) Определим давление воды в точках A и B:

$$p_A = \rho g (h-a); \quad p_A = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3 = 2{,}94 \cdot 10^3 \text{ Па} = 2{,}94 \text{ кПа};$$

$$p_B = \rho g h; \qquad p_B = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5 = 14{,}7 \text{ кПа}.$$

б) Строим ***эпюру гидростатического давления*** воды: в ***любом*** выбранном масштабе по нормали к стенке откладываем величину давления p_A и p_B, соединяем полученные значения наклонной прямой, так как закон изменения давления по глубине линейный (см. раздел 1.3), и заштриховываем горизонтальными штриховыми линиями, стрелками обозначив направление

давления. Получим эпюру давления воды в виде трапеции в вертикальной плоскости.

в) Рассчитаем силу давления воды $R_ж$. Согласно формуле (2.11):

$$R_ж = S_{эп}\, a;$$

$$S_{эп} = S_{трап} = \frac{p_A + p_B}{2}\, a = \frac{\rho g(h-a) + \rho g h}{2}\, a.$$

После подстановки данных получим: $S_{эп} = 10{,}6$ кПа·м; $R_ж = 12{,}7$ кН.

г) Определим положение центра давления. Согласно графо-аналитическому методу сила давления жидкости ***проходит через центр тяжести эпюры гидростатического давления***: $h_D = h_{ц.т.эп}$. Положение центра тяжести эпюры в виде трапеции определяется по табл. 3 (см. приложение):

$$y_{ц.т.эп.} = \frac{a(2p_A + p_B)}{3(p_A + p_B)} = 0{,}47 \text{ м}.$$

Согласно чертежу, глубина погружения центра давления h_D

$$h_D = h - y_{ц.т.эп} = 1{,}5 - 0{,}47 = 1{,}03 \text{ м}.$$

Таким образом, ***аналитический и графо-аналитический*** методы расчёта силы давления $R_ж$ и глубины погружения центра давления h_D дают одинаковые значения.

Ответ: сила $F = 3{,}44$ кН.

Задача 2.3.4. Определить равнодействующую давления воды и положение центра давления на грани напорной грани плотины ABC, удерживающей напоры: $H_1 = 3{,}0$ м; $H_2 = 2{,}0$ м. Угол наклона наклонной грани плотины $\alpha = 60°$. Длина плотины в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, $l = 10$ м (рис. 2.7). Решение выполнить ***графо-аналитическим*** методом.

Решение. Графо-аналитический метод решения предусматривает выполнение чертежа в масштабе. Представим в удобном выбранном масштабе сечение плотины и действующие напоры. Равнодействующая давления воды на грани плотины определится путём векторного сложения сил, действующих на наклонную (R_{AB}) и вертикальную (R_{BC}) грани плотины:

$$\vec{R} = \vec{R}_{AB} + \vec{R}_{BC}.$$

Расчёт силы давления на плоские поверхности ***графо-аналитическим методом*** проводим ***по следующей методике.***

1. Определяем давление воды в характерных точках плотины *A*, *B* и *C*:

$$p_A = 0; \quad p_B = \rho g H_1; \quad p_C = \rho g (H_1 + H_2);$$

$$p_B = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}0 = 29{,}4 \cdot 10^3 \text{ Па} = 29{,}4 \text{ кПа};$$

$$p_C = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 5{,}0 = 49{,}0 \cdot 10^3 \text{ Па} = 49{,}0 \text{ кПа}.$$

2. Строим эпюры гидростатического давления воды.

В выбранном масштабе откладываем величину давления в точках *A*, *B* и *C*, помня, что давление действует нормально к плоской поверхности (см. рис. 2.7).

Эпюра давления на наклонную грань плотины представляет равномерную нагрузку в виде треугольника. Основание треугольника соответствует величине давления $p_B = \rho g H_1$, т. е. давлению в точке *B*, отложенному ***по нормали к наклонной грани.***

При построении эпюры давления на вертикальную грань то же самое давление в точке *B* откладываем ***нормально к вертикальной грани*** плотины. В точке *C* откладываем давление $p_C = \rho g (H_1 + H_2)$ также по нормали к вертикальной грани плотины. Для вертикальной грани эпюра давления представляет равномерную нагрузку в виде трапеции (см. рис. 2.7).

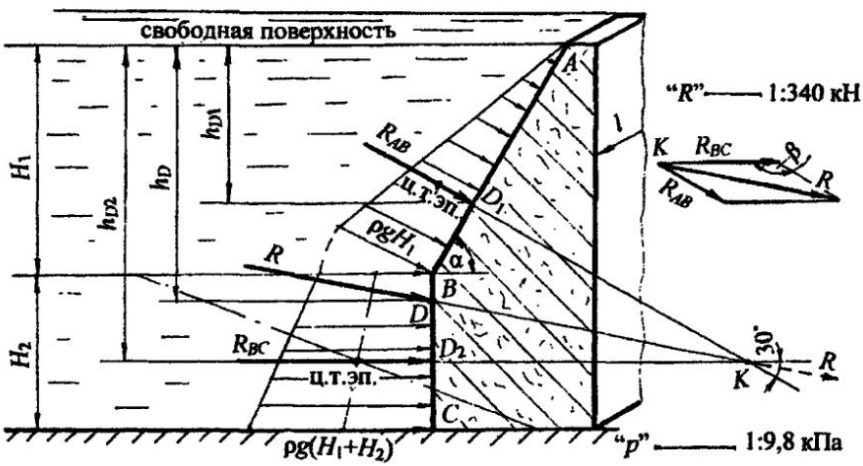


Рис. 2.7

3. Рассчитываем силы давления воды на грани плотины согласно формуле (2.11):

$$R_{AB} = S_{эп_1}\, l = S_{треуг}\, l = \frac{\rho g H_1^2}{2 \cdot \sin 60^\circ} l; \quad R_{AB} = 509{,}2 \text{ кН};$$

$$R_{BC} = S_{эп_2}\, l = S_{трап}\, l = \frac{\rho g H_1 + \rho g (H_1 + H_2)}{2} H_2\, l; \; R_{BC} = 784{,}0 \text{ кН}.$$

4. Показываем линию действия сил R_{AB} и R_{BC}.

Согласно формуле (2.11), графически сила давления жидкости ***проходит*** через центр тяжести эпюры гидростатического давления. Центр тяжести эпюры в виде треугольной нагрузки расположен на расстоянии 2/3 высоты треугольника, т. е. $2/3AB = 2/3 \cdot H_1 / \sin 60^\circ$. Находим в масштабе центр тяжести треугольника и показываем линию действия силы R_{AB}. Сила ***проходит*** через центр тяжести треугольника и ***приложена нормально*** к наклонной грани плотины в центре давления (точка D_1). Показываем на чертеже глубину погружения центра давления $h_{D1} = 2/3\, H_1$.

Для определения положения центра тяжести эпюры в виде трапеции можно воспользоваться табл. 3 (см. приложение), как было отмечено в задаче 2.3.3. Поскольку метод решения задачи графо-аналитический, рассмотрим ***геометрический*** способ определения центра тяжести трапеции:

а) к меньшему основанию трапеции на его продолжении в любую сторону прибавляем большее основание трапеции;

б) к большему основанию трапеции в противоположную сторону прибавляем меньшее основание;

в) соединяем полученные две точки прямой линией;

г) через середины оснований трапеции проводим вторую линию;

д) точка пересечения двух линий построения является центром тяжести эпюры давления в виде трапеции.

Показываем центр тяжести трапеции и через эту точку проводим силу R_{BC} по нормали к вертикальной грани. Учитывая масштаб действующих напоров, находим величину $h_{D2} = 4{,}1$ м.

5. Определяем величину и линию действия ***равнодействующей*** сил давления R путём ***векторного сложения*** сил R_{AB} и R_{BC}. Продолжаем силы по линии действия до взаимного пересечения в точке K. По линии действия откладываем величины сил в удобном принятом масштабе и складываем их

"по правилу треугольника" или "по правилу параллелограмма". Может быть вариант, когда точка пересечения составляющих сил расположена так, что её следует вынести за пределы чертежа, как представлено в данном решении, и произвести сложение векторов сил, затем по линии действия равнодействующую R параллельно перенести в точку пересечения составляющих и определить точку пересечения равнодействующей с плоской поверхностью.

В данной задаче (см. рис. 2.7) силу R, найденную путём векторного сложения, переносим параллельно в точку пересечения составляющих - K, по линии действия силу R продолжаем до пересечения её с гранью плотины в точке D. ***Точка D является центром давления для равнодействующей R*** . Глубину погружения центра давления h_D следует определить по масштабу. Величину равнодействующей силы определим по принятому масштабу при сложении сил. По масштабу глубина погружения центра давления $h_D = 3,5$ м.

Проверим значение силы R аналитическим расчётом, пользуясь ***теоремой косинусов***. Угол между силами R_{AB} и R_{BC} при их сложении "по правилу треугольника" $\beta = 150^\circ$ (см. рис. 2.7). Равнодействующая сила давления воды:

$$R = \sqrt{R_{AB}^2 - 2R_{AB}\,R_{BC}\cos 150^\circ + R_{BC}^2}\,;$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -0,866;$$

$$R = \sqrt{509,2^2 + 2 \cdot 509,2 \cdot 784,0 \cdot 0,866 + 784^2} = 1251,2 \text{ кН}.$$

Проверив значение силы R по масштабу, получим с допустимой точностью то же самое значение.

Ответ. Сила давления воды на напорную грань плотины R =1251,2 кН. Глубина погружения центра давления $h_D = 3,5$ м.

Задача 2.3.5. Определить величину, направление и точку приложения силы давления воды на наклонную стенку AB, удерживающую напоры: слева H = 4,5 м, справа - h =1,5 м. Длина стенки в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, l = 5,0 м. Угол наклона стенки к горизонту $\alpha = 45^\circ$ (рис. 2.8). Представить ***графо-аналитический*** метод решения.

Решение. Методика расчёта силы давления на плоские прямоугольные поверхности графо-аналитическим методом подробно рассмотрена в задаче 2.3.4. Решение данной задачи будет представлено более кратко.

Равнодействующую силу давления воды определим путём построения результирующей эпюры гидростатического давления.

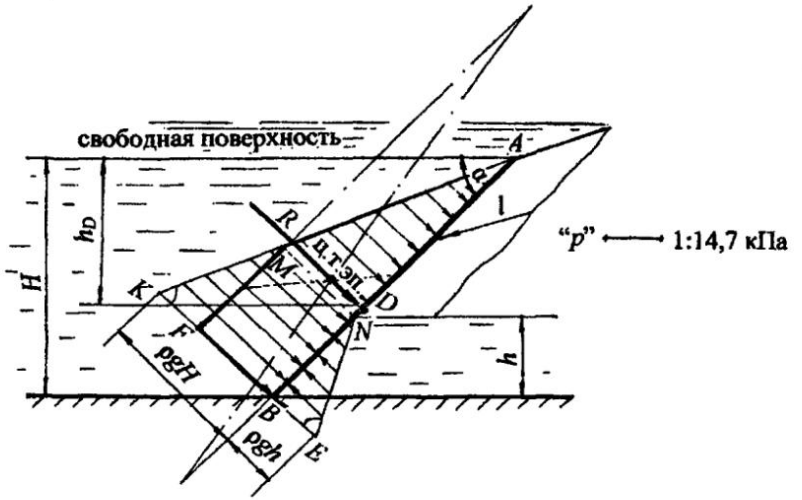


Рис. 2.8

1. Давление воды в характерных точках:

слева $p_A = 0$; $p_B^{сл} = \rho g H = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}5 = 44{,}1 \cdot 10^3$ Па = 44,1 кПа;

справа $p_N = 0$; $p_B^{спр} = \rho g h = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5 = 14{,}7 \cdot 10^3$ Па = 14,7 кПа.

2. Строим эпюры давления воды слева и справа.

Слева эпюра давления представляет равномерную нагрузку в виде прямоугольного треугольника *ABK* с основанием $KB = p_B^{сл} = \rho g H$. Это давление откладываем в масштабе по нормали к стенке *AB*, стрелками показываем направление давления из жидкости на стенку. Справа эпюра давления также представляет равномерную нагрузку в виде треугольника *NBE* с основанием $BE = p_B^{спр} = \rho g h$. Давление справа является ***противодавлением***, поэтому направление давления соответственно показано стрелками навстречу давлению слева, по аналогии из жидкости на плоскость. Углы наклона эпюр одинаковые, так как слева и справа жидкости одинаковой плотности - вода (см. раздел 1.3).

Из построения эпюр следует, что из эпюры давления слева (из треугольника *ABK*) можно вычесть эпюру давления справа (треугольник *NBE*). Результирующая эпюра давления представляет трапецию *FMAB* (см. рис. 2.8).

3. Рассчитываем равнодействующую силу давления воды:

$$R = S_{эп}\, l = S_{трап}\, l = \frac{FM + AB}{2} FB \cdot l .$$

Из построения эпюр (см. рис. 2.8) находим:

$$AB = H/\sin\alpha = H/\sin 45^\circ = 6{,}36 \text{ м};$$

$$FM = NB = h/\sin\alpha = h/\sin 45^\circ = 2{,}15 \text{ м};$$

$$FB = p_B^{сл} - p_B^{спр} = \rho g\,(H-h) = 29{,}4 \text{ кПа}.$$

$$R = \frac{2{,}15 + 6{,}36}{2} \cdot 29{,}4 \cdot 5{,}0 = 625{,}5 \text{ кН}.$$

4. Показываем линию действия равнодействующей R.

Сила проходит через центр тяжести эпюры в виде трапеции. В задаче 2.3.4 рассмотрено ***геометрическое*** определение центра тяжести трапеции. Путём геометрических построений покажем центр тяжести трапеции и через него проведём равнодействующую R по нормали к стенке AB. Точка пересечения линии действия равнодействующей с плоской стенкой является центром давления т. D.

Глубину погружения центра давления $h_D = 2{,}87$ м можно определить по ***масштабу***, ***вычислить*** по формуле (см. приложение, табл. 3) или через координаты центров тяжести сложной фигуры, состоящей из прямоугольника и треугольника. Этот метод рассматривается в курсе сопротивления материалов. В данном учебном пособии такой метод будет представлен при определении силы давления на криволинейные поверхности.

Ответ: равнодействующая давления воды $R = 625{,}5$ кН, глубина погружения центра давления $h_D = 2{,}87$ м.

При расчёте силы давления жидкости на плоские, а в дальнейшем и на криволинейные поверхности могут быть случаи, когда резервуар закрыт, находится под некоторым напором, отсутствует свободная поверхность жидкости, но известно показание прибора для измерения давления на определённом уровне. Такими приборами могут быть пьезометр, манометр механический или жидкостный, вакуумметр, мановакуумметр.

В этом случае рациональным считается метод расчёта силы давления, при котором производится ***перевод давления из ат, бар, мм рт. ст. и т. п. в давление столба жидкости по пьезометру.***

Задача 2.3.6. Определить силу давления масла на плоскую круглую крышку диаметром d = 600 мм закрытого резервуара и положение центра давления, если показание манометра, установленного на расстоянии a = 200 мм от нижней кромки крышки $p_{ман}$ = 0,11 ат, плотность масла $\rho_{масл} = 900$ кг/м^3 (рис. 2.9).

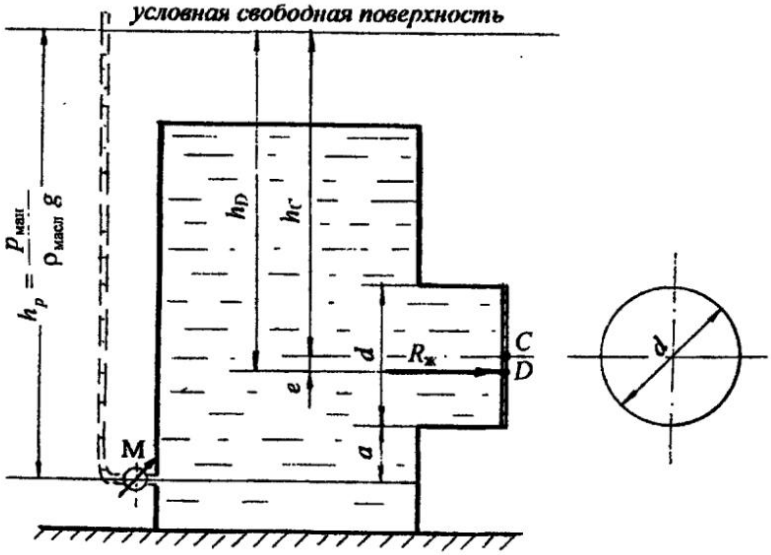


Рис. 2.9

Решение. Силу давления на плоскую круглую крышку следует рассчитывать ***аналитическим*** методом, графо-аналитический метод не применим.

Рассмотрим два варианта решения.

1. ***Первый вариант.*** Силу давления жидкости определяем по известной формуле (2.1):

$$R_ж = p_C\, A,$$

где p_C – давление масла на уровне центра тяжести круглой крышки:

$$p_C = p_{ман} - \rho_{масл}\, g\, (a + d/2);$$

A – площадь крышки: $$A = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}2826\,м^2.$$

Значит, сила давления масла

$$R_ж = \left[p_{ман} - \rho_{масл}\, g \left(a + \frac{d}{2} \right) \right] \frac{\pi d^2}{4};$$

$$R = (0{,}11 \cdot 98 \cdot 10^3 - 900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}2826 = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1{,}8 \text{ кН}.$$

Для определения положения силы $R_ж$ находим эксцентриситет из формулы (2.6)

$$e = \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A}; \quad \text{где } \alpha = 90°; \quad \sin \alpha = 1{,}0; \quad I_C = \frac{\pi d^4}{64}.$$

После подстановки параметров в буквенном выражении получаем:

$$e = \frac{d^2}{16 h_C},$$

где h_C – глубина погружения центра тяжести крышки или напор на уровне центра тяжести, который можно рассчитать по формуле

$$h_C = \frac{p_C}{\rho_{масл}\, g} = \frac{p_{ман}}{\rho_{масл}\, g} - \left(a + \frac{d}{2}\right);$$

$$h_C = \frac{0{,}11 \cdot 98 \cdot 10^3}{900 \cdot 9{,}8} - 0{,}5 = 0{,}72 \text{ м};$$

$$e = \frac{0{,}6^2}{16 \cdot 0{,}72} = 0{,}031 \text{м} = 31 \text{ мм}.$$

Отмечаем на чертеже эксцентриситет e = 31 мм. Эту величину откладываем ниже центра тяжести стенки и на этом уровне показываем положение силы давления масла $R_ж$ (см. рис. 2.9). Сила приложена по нормали к крышке в центре давления (т. *D*).

2. ***Второй вариант***. Давление $p_{ман}$ на уровне установки манометра можно перевести в давление столба жидкости, условно заменив манометр пьезометром. На рис. 2.9 пьезометр представлен пунктирной линией.

Рассчитываем высоту уровня масла в пьезометре по формуле (1.5)

$$h_p = \frac{p_{ман}}{\rho_{масл}\, g}; \qquad h_p = \frac{0{,}11 \cdot 98 \cdot 10^3}{900 \cdot 9{,}8} = 1{,}22 \text{ м}.$$

Так как пьезометр – это ***открытая*** стеклянная трубка, то таким образом можно показать ***условную свободную поверхность, или пьезометрическую плоскость*** (П П). От условной свободной поверхности отсчитывается глубина погружения центра тяжести крышки (ц.т.) и глубина погружения центра давления (ц.д.).

Силу давления масла рассчитываем по формуле (2.5)

$$R_ж = \rho_{масл}\, g\, h_C\, A,$$

где h_C – глубина погружения центра тяжести крышки, отсчитанная от условной свободной поверхности:

$$h_C = h_p - (a + d/2); \quad h_C = 1{,}22 - 0{,}5 = 0{,}72 \text{ м}.$$

Тогда сила давления масла

$$R_ж = 900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}2826 = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1{,}8 \text{ кН}.$$

Глубина погружения центра давления от условной свободной поверхности согласно формуле (2.6) :

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A} = h_C + \frac{d^2}{16 h_C};$$

$$h_D = 0{,}72 + 0{,}031 = 0{,}751 \text{ м}.$$

На глубине h_D показываем силу давления масла. Центр давления ниже центра тяжести крышки на величину второго слагаемого, т. е. эксцентриситета $e = 0{,}031$ м = 31 мм.

Таким образом, оба варианта расчётов совпадают.

Ответ. Сила давления масла $R_ж$ = 1,8 кН, глубина погружения центра давления $h_D = 0{,}751$ м, эксцентриситет $e = 31$ мм.

Рассмотрим ещё несколько случаев установки измерительных приборов давления, перевод давления по прибору в давление столба жидкости и определения положения свободной поверхности.

Задача 2.3.7. Определить величину силы давления бензина на прямоугольную крышку AB высотой $h = 600$ мм и шириной $b = 400$ мм, если показания U–образного ртутного манометра: ртути $h_{рт} = 40$ мм, масла $h_{масл} = 30$ мм; расстояния: a =100 мм, $c = 200$ мм (рис. 2.10).

Найти геометрическое положение центра давления.

Принять плотности жидкостей: масла $\rho_{масл} = 900$ кг/м^3, ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, бензина $\rho_{бенз} = 720$ кг/м^3.

Решение представить ***аналитическим и графо-аналитическим*** методами.

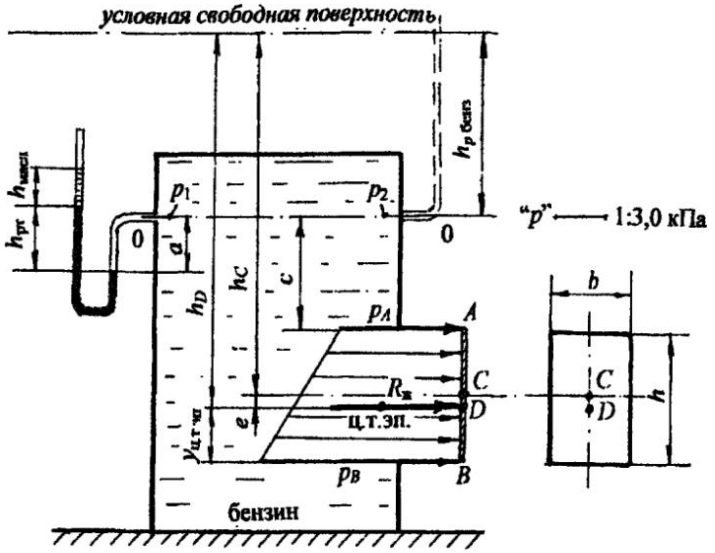


Рис. 2.10

Решение.

1. ***Аналитический метод.*** Силу давления бензина рассчитаем по формуле (2.5)

$$R_ж = \rho_{бенз}\, g\, h_C\, A,$$

где A – площадь крышки, $A = bh$;

$$R_ж = \rho_{бенз} g h_C\, bh.$$

Перведём показание U–образного манометра в давление столба жидкости по пьезометру.

Вспомним условие равенства давления относительно плоскости уровня 0-0 (см. главу 1; параграф 1.5), учитывая только избыточное давление (см. рис. 2.10):

$$p_1 = p_2;$$

$$p_1 = \rho_{масл}\, g\, h_{масл} + \rho_{рт}\, g\, h_{рт} - \rho_{бенз}\, g\, a;$$

$$p_2 = \rho_{бенз}\, g\, h_{p\ бенз};$$

$$\rho_{масл}\, g\, h_{масл} + \rho_{рт}\, g\, h_{рт} - \rho_{бенз}\, g\, a = \rho_{бенз}\, g\, h_{p\ бенз}.$$

Отсюда

$$h_{p_{бенз}} = \frac{\rho_{масл}\, h_{масл} + \rho_{рт}\, h_{рт}}{\rho_{бенз}} - a;$$

$$h_{p_{бенз}} = \frac{900 \cdot 0{,}03 + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04}{720} - 0{,}1 = 0{,}693\,м.$$

Рассчитаем глубину погружения центра тяжести крышки от условной свободной поверхности:

$$h_C = h_{p\,бенз} + c + h/2; \quad h_C = 1{,}193\ м = 1{,}2\ м.$$

Определим силу давления бензина:

$$R_ж = 720 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 2{,}0 \cdot 10^3\ Н = 2{,}0\ кН.$$

Глубину погружения центра давления от условной свободной поверхности определяем по известной формуле (2.6)

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A}; \quad \alpha = 90°; \quad \sin\alpha = 1{,}0.$$

Подставив в формулу h_D значение центрального момента инерции для прямоугольника $I_C = bh^3/12$ (см. табл. 3, приложение), получим:

$$h_D = h_C + h^2/12h_C; \quad h_D = 1{,}2 + 0{,}025\ м = 1{,}225\ м.$$

Эксцентриситет соответствует второму слагаемому: $e = 0{,}025\ м = 25\ мм$.

2. ***Графо-аналитический метод*** определения силы давления бензина:
а) определяем давление в характерных точках A и B:

$$p_A = \rho_{масл} g h_{масл} + \rho_{рт} g h_{рт} + \rho_{бенз} g(c-a); \quad p_A = 6{,}3\ кПа;$$

$$p_B = p_A + \rho_{бенз} g h; \quad p_B = 10{,}53\ кПа.$$

б) строим эпюры гидростатического давления в удобном масштабе. По нормали к стенке AB откладываем величину давления p_A и p_B (см. рис. 2.10).

в) рассчитываем силу давления бензина $R_ж$ по формуле (2.11)

$$R_ж = S_{эп}\, b;$$

$$R_ж = \frac{p_A + p_B}{2} hb; \quad R_ж = 2{,}0\ кН.$$

г) определяем положение центра тяжести эпюры, т. е. центра тяжести трапеции по табл. 3 (см. приложение):

$$y_{\text{ц.т.эп.}} = \frac{h(p_B + 2p_A)}{3(p_A + p_B)}; \qquad y_{\text{ц.т.эп}} = 0{,}275 \text{ м}.$$

д) через центр тяжести эпюры проводим силу давления бензина $R_ж$. Проверяем величину эксцентриситета e:

$$e = h/2 - y_{\text{ц.т.эп.}};$$

$$e = 0{,}3 - 0{,}275 = 0{,}025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

Результаты расчёта силы давления бензина и геометрического положения центра давления двумя методами совпадают.

Ответ: $R_ж = 2{,}0$ кН; $h_D = 1{,}225$ м; $e = 25$ мм.

Задача 2.3.8. Определить силу давления воды на наклонную прямоугольную стенку AB, перпендикулярную плоскости чертежа, наклонённую под углом α к горизонту, перекрывающую патрубок шириной b и высотой h. Давление на поверхности воды соответствует $p_{\text{ман}}$. Уровень воды над верхней кромкой крышки равен a (рис. 2.11).

Решение представить в буквенном выражении.

Решение. Схема расположения прямоугольной крышки AB аналогична схеме к задаче 2.3.1 (см. рис. 2.2). Покажем более рациональный подход к решению задачи.

Переведём показание манометра в давление столба воды. Покажем на чертеже (см. рис. 2.11) пунктиром пьезометр от свободной поверхности воды, получим высоту (напор) $h_{\text{ман}} = \dfrac{p_{ман}}{\rho g}$.

Условно можно представить, что над свободной поверхностью ***взамен манометрического давления действует давление столба воды*** $h_{\text{ман}}$. Покажем пунктиром эту жидкость и ***условную свободную поверхность.***

Теперь от условной свободной поверхности будем отсчитывать глубину погружения центра тяжести плоской стенки (h_C) и глубину погружения центра давления (h_D).

Рассчитываем силу давления жидкости $R_ж$ по формуле (2.5)

$$R_ж = \rho g h_C A,$$

где h_C – глубина погружения центра тяжести стенки:

$$h_C = h_{\text{ман}} + a + h/2;$$

A – площадь стенки: $A = bh/\sin\alpha$.

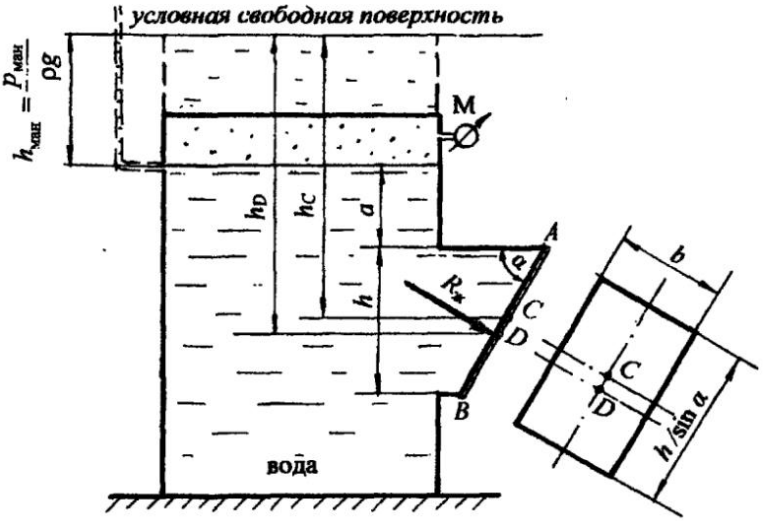


Рис. 2.11

Покажем на рис. 2.11 глубину погружения центра тяжести стенки h_C. Получим выражение для силы давления воды:

$$R_ж = \rho g\,(h_{ман} + a + h/2)\,bh/\sin\alpha.$$

Покажем линию действия силы давления воды. Сила $R_ж$ приложена по нормали из жидкости на стенку AB на глубине h_D, согласно формуле (2.6)

$$h_D = h_C + \frac{I_C \sin^2\alpha}{h_C A},$$

где I_C - центральный момент инерции стенки AB относительно горизонтальной оси для прямоугольника (см. табл. 3 в приложении):

$$I_C = \frac{bh^3}{12\sin^3\alpha}.$$

После подстановки данных и соответствующих сокращений получим:

$$h_D = h_C + \frac{h^2}{12h_C}.$$

Покажем на рис. 2.11 глубину погружения центра давления h_D и силу давления воды $R_ж$: сила приложена в центре давления по нормали к наклонной поверхности.

Таким образом, этот метод решения следует признать более простым и рациональным и применять при расчёте силы давления жидкости как на плоские, так и на криволинейные поверхности.

Рассмотрим случай, когда известно ***вакуумметрическое давление*** на определённом уровне закрытого резервуара. В этом случае можно не показывать пьезометр и условную свободную поверхность, а представить решение путём ***логических рассуждений*** (см. задачу 2.3.9).

Задача 2.3.9. Определить силу давления воды на круглую крышку диаметром d закрытого резервуара, если известно показание вакуумметра $p_{вак}$ на высоте h от центра тяжести крышки (рис. 2.12).

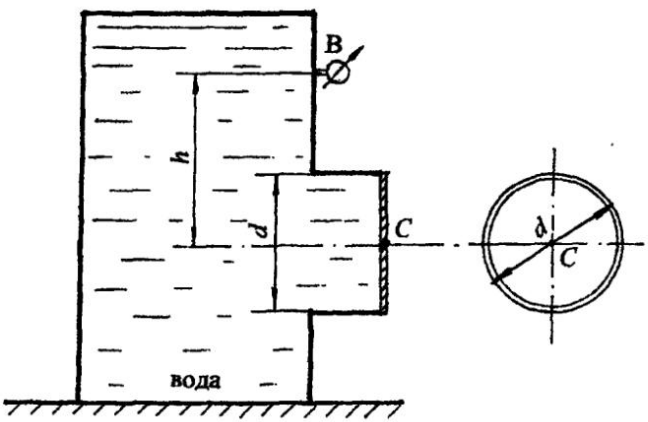


Рис. 2.12

Силу давления воды рассчитаем по известной формуле (2.1)

$$R_ж = p_C \ A,$$

где A = площадь крышки: $A = \pi d^2/4$;

p_C – давление на уровне центра тяжести крышки.

Здесь следует помнить, что при решении задачи ***манометрическое*** давление учитывается со знаком "+", а ***вакуумметрическое*** - со знаком "-" (см. раздел 1.2):

$$p_C = (- p_{вак} + \rho g h),$$

тогда $$R_ж = (\rho g h - p_{вак})\,\pi d^2/4. \qquad (2.12)$$

Пересчитаем пьезометрический напор на уровне центра тяжести крышки *AB*:

$$h_C = \frac{p_C}{\rho g} = h - \frac{p_{вак}}{\rho g}.$$

Центр давления находится на расстоянии эксцентриситета e от центра тяжести крышки, из формулы (2.6) имеем:

$$e = \frac{I_C \sin^2 \alpha}{h_C A}, \quad \text{где } \alpha = 90°; \quad \sin\alpha = 1{,}0; \quad I_C = \frac{\pi d^4}{64}.$$

После подстановки параметров получим:

$$e = \frac{d^2}{16 h_C}.$$

Рассмотрим три возможных варианта значения силы давления $R_ж$ и положения центра давления (рис. 2.13).

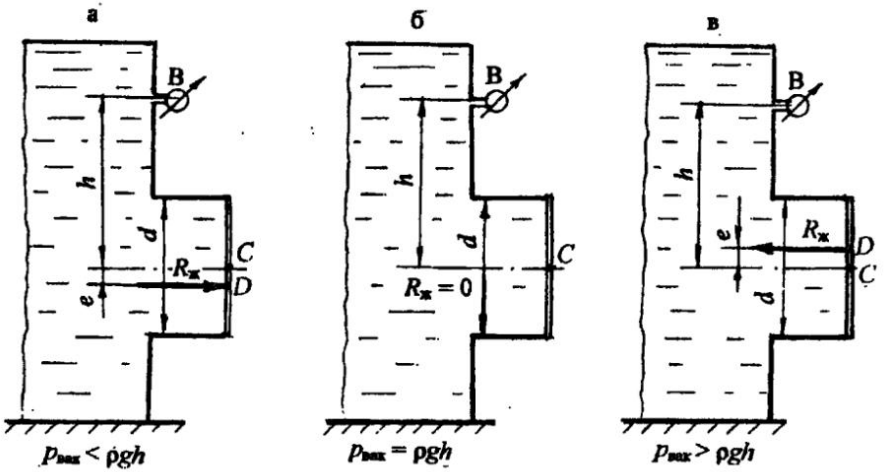


Рис. 2.13

1. Вакуумметрическое давление ***меньше*** давления воды от уровня установки вакуумметра до центра тяжести крышки, т. е. $\rho g h > p_{вак}$. Согласно формуле (2.12), получим положительное значение силы давления жидкости $R_ж$.

Сила направлена из жидкости на стенку. Значение эксцентриситета e также величина положительная. Сила давления приложена ниже центра тяжести на величину эксцентриситета (e) (см. рис. 2.13, а).

2. Вакуумметрическое давление $p_{вак} = \rho g h$. Из расчётной формулы (2.12) получим $R_ж = 0$. Это значит, что сила давления воды уравновешивается силой вакуумметрического давления (см. рис. 2.13, б).

3. Вакуумметрическое давление ***больше*** давления воды на уровне центра тяжести крышки: $p_{вак} > \rho g h$. При подстановке в расчётную формулу (2.12) получим отрицательное значение силы $R_ж$. Это значит, что сила будет направлена ***внутрь*** жидкости за счёт вакуумметрического давления.

Значение эксцентриситета e также получается ***отрицательным***, ***значит***, ***центр давления расположен выше центра тяжести крышки*** (см. рис. 2.13, в).

Ниже предлагаются задачи для самостоятельной работы с использованием теоретических положений по определению силы давления жидкости на плоские поверхности.

2.4. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Сила давления жидкости на плоские поверхности"

Задача 2.4.1

Выход из резервуара, заполненного водой, представляет патрубок, который закрывается круглой крышкой диаметром D = 600 мм. Крышка может поворачиваться вокруг шарнира A.

Определить силу T для удержания крышки в закрытом положении, если показание ртутного манометра $h_{рт}$ = 120 мм, высота уровня масла над ртутью $h_м$ = 50 мм. Принять a = 500 мм, плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность масла $\rho_{мас}$ = 900 кг/м^3 (рис. 2.14).

Ответ: $T \geq 3{,}53$ кН.

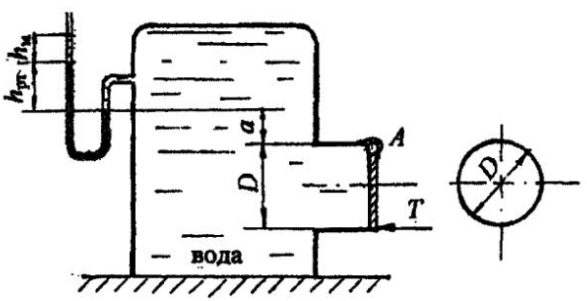


Рис. 2.14

Задача 2.4.2

Патрубок резервуара с маслом перекрывается круглой крышкой, поворачивающейся вокруг шарнира *A*. Определить, каким должно быть показание U-образной трубки, заполненной ртутью ($h_{рт}$), установленной на поверхности масла, чтобы крышка находилась в закрытом положении за счёт вакуума.

Принять: диаметр крышки D = 600 мм, глубину масла до шарнира *A* равной h = 200 мм, плотность масла $\rho_{мас}$= 900 кг/м ^{3}, плотность ртути $\rho_{рт}$=13,6 ·10^3 кг/м^3 (рис. 2.15). **Ответ:** $h_{рт}$ = 38 мм.

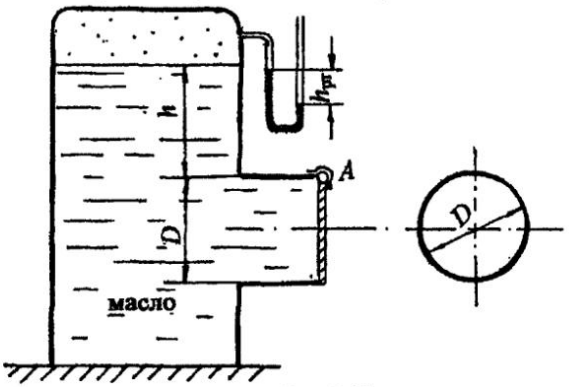


Рис. 2.15

Задача 2.4.3

В вертикальной перегородке отстойника, состоящего из двух резервуаров - *A* и *B*, сделано квадратное отверстие со стороной a = 600 мм, которое перекрывается крышкой, поворачивающейся вокруг шарнира *O*.

Определить, какой наименьший вакуум нужно создать на поверхности воды в закрытом резервуаре *A*, чтобы крышка оставалась в закрытом положении. Резервуар *B* открыт. Принять H_1 = 1,5 м ; H_2 = 0,8 м (рис. 2.16).

Ответ: $p_{вак}$ = 6,86 кПа.

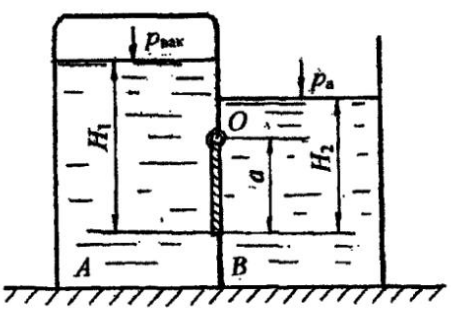


Рис. 2.16

Задача 2.4.4

Отстойник для воды разделён вертикальной перегородкой, в которой сделано круглое отверстие диаметром D = 0,6 м с крышкой, поворачивающейся вокруг шарнира O. Закрытое положение крышки обеспечивается избыточным давлением на поверхности воды в закрытом резервуаре B. Резервуар A открыт.

Определить, при каком показании манометра в резервуаре B крышка останется в закрытом положении. Принять H_1 = 2,3 м; H_2 = 0,8 м (рис. 2.17).

Ответ: $p_{ман}$ = 0,15 ат.

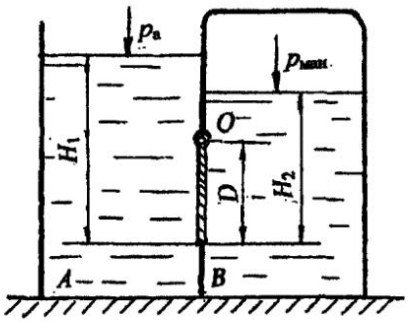


Рис. 2.17

Задача 2.4.5

Определить величину и направление силы N, приложенной к штоку гидроцилиндра для удержания его на месте, если показание мановакуумметра $p_{мв}$: а) $p_{мв} = p_{ман}$ = 0,12 ат, б) $p_{мв} = p_{вак}$ = 0,11 ат. Гидроцилиндр заполнен маслом плотностью $\rho_{мас}$ = 900 кг/м^3, диаметр поршня d = 100 мм, высота уровня масла на уровне оси поршня H = 0,8 м (рис. 2.18).

Ответ: а) N = 147,7Н (направлена влево), б) N = 29,2 Н (направлена вправо).

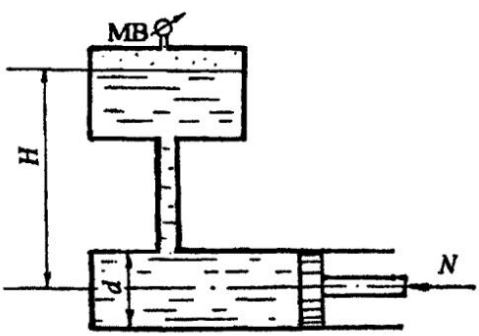


Рис. 2.18

Задача 2.4.6

Определить силу давления бензина на треугольный затвор шириной $b = 600$ мм и высотой $h = 800$ мм, а также положение центра давления, если показание манометра, установленного на расстоянии $a = 300$ мм от верхней кромки затвора $p_{ман} = 0,11$ ат (рис. 2.19).

Плотность бензина принять $\rho_{бенз} = 720$ кг/м^3.

Ответ: $R_ж = 4,0$ кН, эксцентриситет $e = 15,0$ мм.

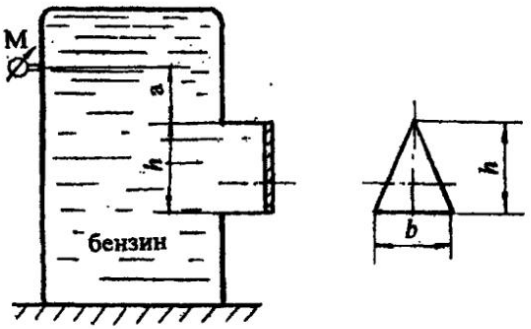


Рис. 2.19

Задача 2.4.7

Определить величину и положение равнодействующей сил давления воды на плоскую ломаную стенку ABC, удерживающую слева напор воды $H = 5,0$ м, справа $h = 2,0$ м. Длина стенки в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, $L = 6,0$ м. Верхняя часть стенки наклонена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Расчёт выполнить графо-аналитическим методом (рис. 2.20).

Ответ: $R = 636$ кН.

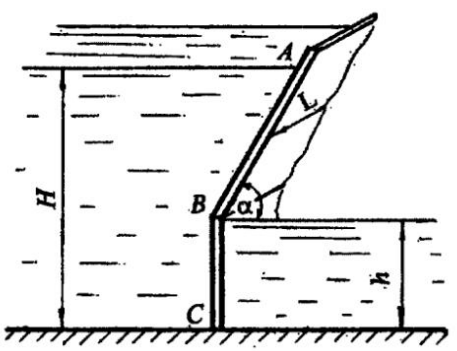


Рис. 2.20

Задача 2.4.8

Определить величину и положение равнодействующей сил давления воды на плоскую ломаную стенку *ABC*, удерживающую напоры $H_1 = 3{,}0$ м и $H_2 = 1{,}5$ м, если длина стенки $L = 5{,}0$ м, угол наклона нижней части стенки к горизонту $\alpha = 45^0$. Расчёты выполнить графо-аналитическим методом, показать положение центра давления (рис. 2.21).

Ответ: $R = 568$ кН.

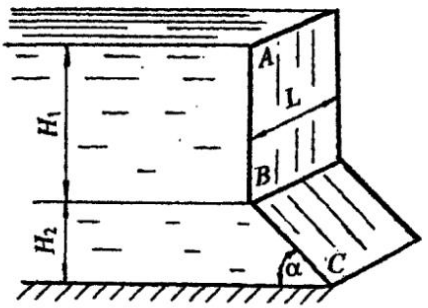


Рис. 2.21

Задача 2.4.9

Определить нормальное усилие F, приложенное к наклонной крышке *AB* для удержания крышки в закрытом положении. Крышка расположена под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту, укреплена с помощью шарнира *B* и перекрывает патрубок квадратного сечения со стороной $a = 200$ мм. Патрубок заполнен маслом плотностью $\rho_{масл} = 900$ кг/м^3.

К дну патрубка присоединён пьезометр, показание которого $H = 300$ мм. Сила F приложена на расстоянии $b = 50$ мм от стенки патрубка (рис. 2.22).

Ответ: $F_{min} = 27{,}9$ Н.

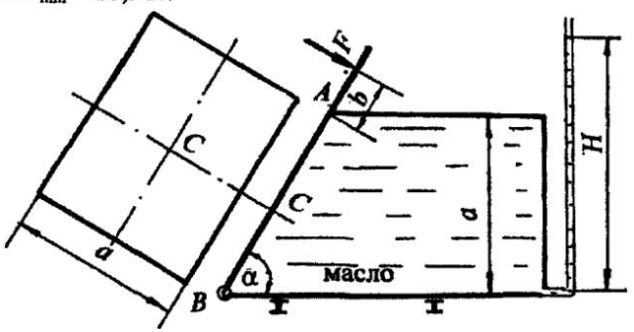


Рис. 2.22

Задача 2.4.10

Патрубок маслобака квадратного сечения со стороной a = 150 мм перекрывается крышкой AB, перемещающейся в вертикальных пазах. Определить силу F для открытия крышки, если показание манометра, установленного на верхней стенке патрубка, $p_{ман}$ = 0,12 ат. Принять плотность масла $\rho_{мас}$ = 900 кг/м^3, коэффициент трения скольжения в пазах f = 0,5. Масса крышки M = 2,0 кг (рис. 2.23).

Ответ: F = 159,0 Н.

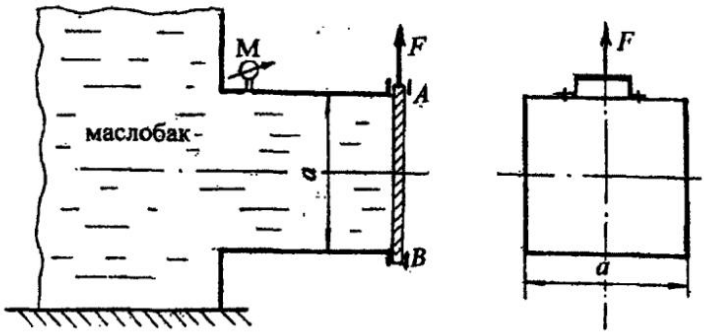


Рис. 2.23

Задача 2.4.11

В закрытом резервуаре с водой круглое донное отверстие закрывается крышкой D = 300 мм, шарнирно укреплённой в точке A.

Определить наименьшую силу натяжения троса T для открытия крышки. Трос укреплён под углом $\alpha = 60^0$. Принять показание манометра на поверхности воды $p_{ман}$ = 0,12 ат; глубину заполнения резервуара H = 1,5 м; массу крышки M = 2,0 кг. Трением в шарнире и направляющих троса пренебречь (рис. 2.24).

Ответ: T_{min} = 1, 09 кН.

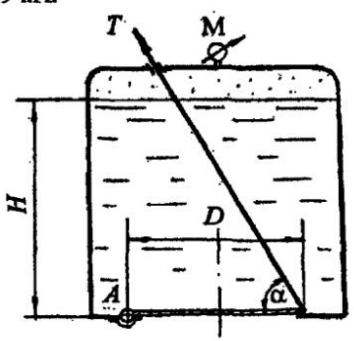


Рис. 2.24

Задача 2.4.12

Закрытый резервуар, заполненный водой, находится под давлением. В резервуаре донное круглое отверстие диаметром $d = 300$ мм закрывается крышкой $D = 380$ мм, закреплённой шарниром в точке A. Определить силу F, удерживающую крышку в закрытом положении, если масса крышки $M = 3{,}0$ кг. Показание манометра на расстоянии $h = 1{,}5$ м от дна $p_{ман} = 0{,}25$ ат (рис. 2.25).

Ответ: $F = 1{,}4$ кН.

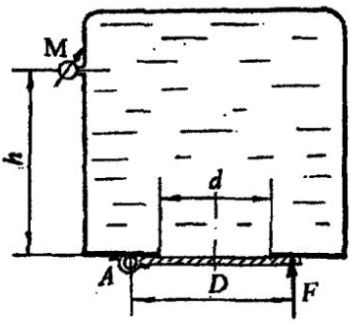


Рис. 2.25

Задача 2.4.13

Определить давление p в правой части гидроцилиндра диаметром $D = 200$ мм, заполненного маслом "Индустриальное 20". Сила, действующая на шток $d = 50$ мм при равновесном состоянии поршня, $F = 2{,}0$ кН. Принять избыточное давление на поверхности масла $p_0 = 0{,}8$ ат, напор масла на уровне оси поршня $H = 1{,}5$ м, плотность масла $\rho_{масл} = 890$ кг/м^3 (рис. 2.26).

Ответ: $p = 29{,}55$ кПа.

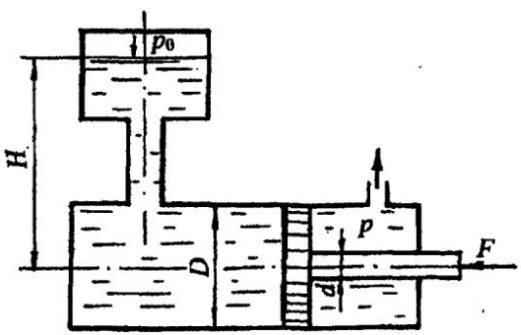


Рис. 2.26

Задача 2.4.14

Прямоугольный плоский щит, перекрывающий канал шириной $B = 2{,}0$ м, вверху поддерживается двумя крюками, а внизу соединён шарнирно с дном канала. Слева щит удерживает напор воды $h_1 = 2{,}1$ м, справа - $h_2 = 0{,}9$ м. Крюки укреплены на расстоянии $a = 0{,}5$ м от верхнего уровня воды. Определить реакции крюков $R_{кр}$ от действия воды на щит (рис. 2.27).

Ответ: $R_{кр} = 5{,}36$ кН.

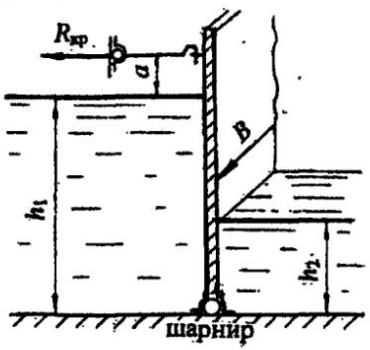


Рис. 2.27

Задача 2.4.15

Определить усилие T, которое нужно приложить к вертикальному тросу для открытия щита, перекрывающего канал прямоугольного сечения. Щит расположен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту и закреплён шарнирно в т. O к опоре. Ширина щита в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, $B = 3{,}0$ м. Глубина воды перед щитом $H_1 = 2{,}0$ м, за щитом $H_2 = 0{,}7$ м. Уровень воды над шарниром $h = 0{,}5$ м. Масса щита $M = 400$ кг (рис. 2.28).

Представить аналитическое и графо-аналитическое решение.

Ответ: $T = 64{,}4$ кН.

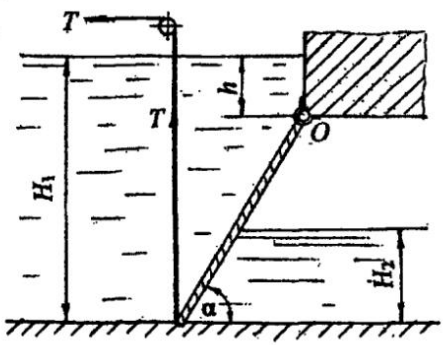


Рис. 2.28

Глава 3

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

3.1. Основные понятия и теоретические положения

Примерами криволинейных поверхностей, испытывающих давление покоящейся жидкости, являются сферические и цилиндрические стенки резервуаров, секторные, сферические и цилиндрические затворы, клапаны насосов, поверхности трубопроводов и т. п.

В практике инженерных расчётов ставятся задачи определения силы давления на криволинейные поверхности, необходимые усилия для открытия клапанов и затворов или удержания их в закрытом положении.

Сложность определения силы давления на криволинейные поверхности заключается в том, что каждое элементарное усилие, действующее на криволинейную поверхность, направлено по нормали к элементарной площадке и имеет угол наклона по отношению к другому элементарному усилию.

Это значит, что при определении силы давления жидкости придётся интегрировать зависимость элементарной силы dR по площади криволинейной поверхности. Для инженерных расчётов это затруднительно.

В связи с этим принят ***метод***, согласно которому равнодействующая давления на криволинейную поверхность определяется как геометрическая сумма составляющих по двум или трём выбранным направлениям:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z. \qquad (3.1)$$

Чаще всего криволинейные поверхности, используемые в технике, имеют ось симметрии или ось вращения. Для таких поверхностей при определении силы давления жидкости достаточно двух составляющих горизонтальной и вертикальной:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \qquad (3.2)$$

Горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе давления жидкости на плоскую вертикальную проекцию криволинейной поверхности:

$$R_x = \rho g y_C A_y, \qquad (3.3)$$

где ρ – плотность жидкости;

A_y - площадь вертикальной проекции криволинейной поверхности;

y_C - координата центра тяжести вертикальной проекции, отсчитанная от свободной поверхности.

Глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции h_C совпадает с координатой центра тяжести y_C, поэтому в дальнейшем y_C можно называть глубиной погружения центра тяжести или напором на уровне центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности.

Другими словами, чтобы найти горизонтальную составляющую, нужно криволинейную поверхность спроектировать внутрь жидкости на вертикальную плоскость и найти силу давления на полученную проекцию.

Сравнивая формулу (3.3) с формулой силы давления жидкости на плоскую стенку (2.5), видим аналогию расчётных зависимостей. Значит, координату y_D или глубину погружения точки приложения горизонтальной составляющей, т. е. центра давления, определяем по формуле для ***вертикальной плоской*** поверхности:

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A_y}, \qquad (3.4)$$

где I_C – центральный момент инерции вертикальной проекции относительно горизонтальной оси.

Вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе тяжести жидкости в объёме " тела давления":

$$R_y = \rho g V_{т.д.}, \qquad (3.5)$$

где $V_{т.д.}$ – объём тела давления.

Рассмотрим понятие ***" тело давления"***.

Тело давления – это криволинейный объём, ограниченный:

а) ***самой криволинейной поверхностью***;

б) поверхностью, образованной ***вертикальными проектирующими линиями***, проведёнными из контура криволинейной поверхности до свободной поверхности или её продолжения;

в) горизонтальной проекцией криволинейной поверхности на ***свободную поверхность жидкости*** или её продолжение.

Различают два вида тела давления.

1. Реальное, действительное или положительное тело давления.

Это случай, когда тело давления построено на ***смоченной*** части криволинейной поверхности, заполнено жидкостью, т. е. сила тяжести жидкости реально действует на криволинейную поверхность. Вертикальная составляющая силы давления R_y ***из центра тяжести*** объёма тела давления направлена ***вниз*** и также считается ***положительной***.

Примеры ***положительного*** тела давления и ***вертикальной составляющей*** для криволинейной поверхности ***AB*** представлены на рис. 3.1.



Рис. 3.1

2. Фиктивное, мнимое или отрицательное тело давления.

Это случай, когда жидкость находится вне криволинейной поверхности, тело давления построено на ***несмоченной*** части криволинейной поверхности. Жидкость в объёме тела давления отсутствует. Вертикальная составляющая R_y ***из центра тяжести*** объёма тела давления направлена ***вверх*** и считается ***отрицательной***.

Примеры ***отрицательного*** тела давления и ***вертикальной составляющей*** для криволинейной поверхности ***CD*** приведены на рис.3.2.



Рис. 3.2

Из определения понятия тела давления и примеров построения тела давления можно представить ***методику*** построения тела давления.

Чтобы определить объём тела давления и его вид (положительное или отрицательное), нужно из контура криволинейной поверхности, т. е. из всех точек криволинейной поверхности, провести вертикальные линии до

свободной поверхности жидкости или её продолжения. Если очерченный вертикальными линиями объём ***заполнен*** жидкостью, тело давления построено на ***смоченной*** части криволинейной поверхности, оно считается ***положительным***. Стрелками, направленными ***вниз***, показываем, что жидкость давит на криволинейную поверхность (см. рис. 3.1).

Таким образом, выделенный объём можно назвать ***эпюрой тела давления***. Определяем положение центра тяжести тела давления. Из центра тяжести объёма вертикальную составляющую R_y направляем ***вниз***.

В противном случае, если очерченный вертикальными линиями объём тела давления построен на ***несмоченной*** поверхности и ***не заполнен*** жидкостью, тело давления считается ***отрицательным***. Стрелками, направленными ***вверх***, показываем, что жидкость как бы вытеснена за счёт конфигурации криволинейной поверхности. Из центра тяжести отрицательного тела давления вертикальная составляющая R_y направлена также ***вверх*** (см. рис. 3.2).

Рассмотрим случай, когда при построении может получиться не одно, а два тела давления (рис. 3.3).

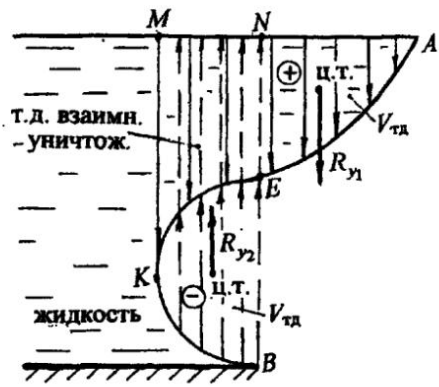


Рис. 3.3

Имеем криволинейную поверхность ***АКВ***, удерживающую некоторый напор жидкости. Криволинейную поверхность можно разделить на две части - ***АК*** и ***КВ***.

Для части ***АК*** строим тело давления по приведённой методике. Получаем ***положительное*** тело давления объёмом ***АКМ***, построенным на смоченной поверхности ***АК***.

Для части криволинейной поверхности ***KB*** тело давления объёмом ***KBNM***, построенное на ***несмоченной*** поверхности ***KB***, ***отрицательное***.

В объёме ***KMNE*** происходит наложение отрицательного тела давления на положительное, два тела давления ***взаимно уничтожаются*** (компенсируются, сокращаются).

После построений имеем два тела давления: ***положительное*** объёмом ***ANE***, сила R_{y_1} из центра тяжести тела давления направлена ***вниз***; ***отрицательное*** объёмом ***EKB***, сила R_{y_2} направлена ***вверх***.

В приведённых примерах "тела давления" эпюру ***положительного*** тела давления заштриховываем ***сплошными*** линиями, ***отрицательного*** – ***пунктирными***. Такую же штриховку будем показывать в приведённых примерах и задачах.

Предлагается рассмотреть примеры расчёта силы давления жидкости на криволинейные поверхности различной сложности.

3.2. Примеры решения задач по теме: "Расчёт силы давления жидкости на криволинейные поверхности"

Задача 3.2.1. Цилиндрический затвор диаметром D = 0,6 м перекрывает прямоугольное отверстие в вертикальной стенке, удерживающей напор воды. Высота отверстия равна диаметру затвора, длина отверстия L = 2,0 м. Уровень воды над верхней кромкой затвора h = 0,2 м. Затвор может поворачиваться относительно горизонтальной оси и, перемещаясь, открывать отверстие (рис. 3.4).

Определить величину и угол наклона к горизонту силы давления воды на цилиндрический затвор.

Решение. На рис. 3.4,а показан общий вид затвора. Решение представим в плоском чертеже для вертикального сечения затвора, при этом длина затвора L перпендикулярна плоскости чертежа (рис. 3.4,б). Для наглядности и лучшего понимания чертёж выполнен в ***масштабе***.

На примере решения этой задачи представлена ***методика*** расчёта силы давления жидкости на криволинейные поверхности.

1. Выбираем два направления x и y, по которым определяем составляющие силы давления жидкости. Сила полного давления R:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Для данной цилиндрической поверхности достаточно двух направлений, так как поверхность имеет ось симметрии.

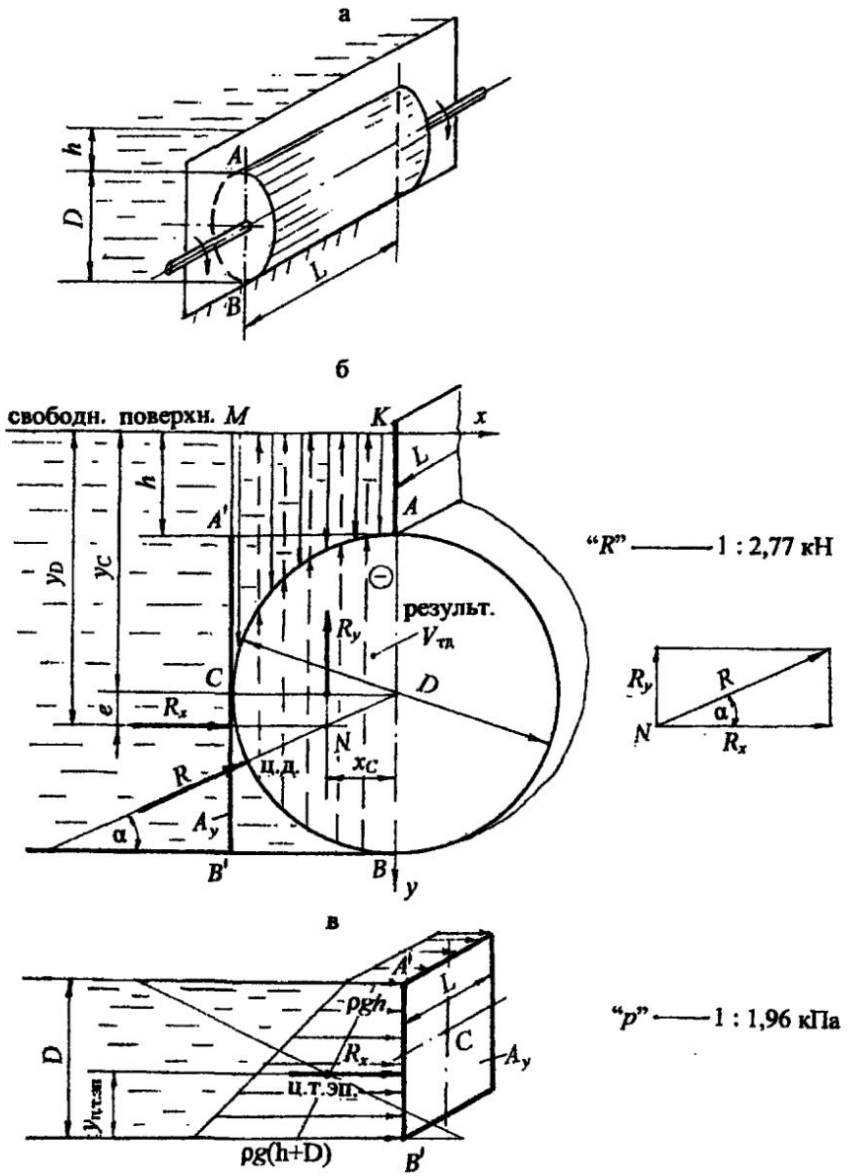


Рис. 3.4

Начало координат выбираем на свободной поверхности. Ось *y* направляем вертикально вниз, так как положительное значение глубины

отсчитывается от свободной поверхности вниз. Ось x направляем по свободной поверхности вправо по направлению действия жидкости (см. рис. 3.4, б).

2. Определяем горизонтальную составляющую R_x по формуле (3.3):

$$R_x = \rho g y_C A_y .$$

Криволинейную поверхность AB спроектируем ***внутрь*** жидкости на вертикальную плоскость. Получим вертикальную проекцию $A'B'$, представляющую прямоугольник высотой D и шириной (длиной) L (см. рис. 3.4, в). Рассчитаем силу давления воды на эту вертикальную проекцию.

Площадь вертикальной проекции $A_y = DL$.

Координата, или глубина погружения центра тяжести C этой проекции

$$y_C = h + D/2 = 0{,}5 \text{ м}.$$

Покажем на чертеже y_C. Рассчитаем горизонтальную составляющую:

$$R_x = \rho g (h + D/2) DL; \qquad (3.6)$$

$$R_x = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}0 = 5{,}88 \cdot 10^3 \text{ Н} = 5{,}88 \text{ кН}.$$

Определяем глубину погружения центра давления y_D для горизонтальной составляющей, т. е. глубину точки приложения силы R_x по формуле (3.4):

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A_y};$$

где I_C - центральный момент инерции относительно горизонтальной оси для вертикальной проекции криволинейной поверхности. Момент инерции для прямоугольника, согласно табл. 3 (см. приложение):

$$I_C = \frac{LD^3}{12}.$$

После подстановки данных получим:

$$y_D = y_C + \frac{LD^3}{12 y_C DL} = y_C + \frac{D^2}{12 y_C}; \text{ эксцентриситет } e = \frac{D^2}{12 y_C};$$

$$y_D = 0{,}5 + \frac{0{,}6^2}{12 \cdot 0{,}5} = 0{,}5 + 0{,}06 = 0{,}56 \text{ м}; \quad e = 0{,}06 \text{ м} = 6 \text{ см}.$$

Покажем на чертеже y_D, эксцентриситет e и положение силы R_x.

Горизонтальную составляющую R_x можно определить также графо-аналитическим методом, согласно формуле (2.11):

$$R_x = S_{эп} L.$$

Определим давление воды в точках A' и B':

$$p_{A'} = \rho g h; \qquad p_{A'} = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}96 \cdot 10^3 \text{ Па} = 1{,}96 \text{ кПа}.$$

$$p_{B'} = \rho g (h + D); \qquad p_{B'} = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8 = 7{,}84 \cdot 10^3 \text{ Па} = 7{,}84 \text{ кПа}.$$

Построим эпюру гидростатического давления (см. рис. 3.4, в). Эпюра представляет призму с основанием в виде трапеции и высотой L, тогда

$$R_x = S_{трап} L = \frac{\rho g h + \rho g (h + D)}{2} DL = \rho g (h + D/2) DL.$$

Получили формулу, соответствующую формуле (3.6).

Находим графически положение центра давления. Можно воспользоваться данными табл. 3 (см. приложение). Глубина погружения центра давления, согласно формуле (2.11), совпадает с положением центра тяжести эпюры в виде трапеции (см. рис. 3.4, в). Находим координату центра тяжести эпюры:

$$y_{ц.т.эп.} = \frac{D(2p_{A'} + p_{B'})}{3(p_{A'} + p_{B'})} = 0{,}24 \text{ м}.$$

Центр тяжести трапеции можно определить геометрическим построением (см. задачу 2.3.4).

На рис. 3.4, в покажем $y_{ц.т.эп.}$, получим $y_D = h + D - y_{ц.т.эп.} = 0{,}56$ м. Расчёты горизонтальной составляющей R_x и глубины погружения центра давления y_D аналитическим и графо-аналитическим методами совпали.

3. Определяем вертикальную составляющую R_y силы давления воды на цилиндрическую поверхность по формуле (3.5):

$$R_y = \rho g V_{т.д.}$$

Криволинейная поверхность имеет две части - ***AC*** и ***CB***.

Строим тело давления для части ***AC***. Из контура криволинейной части AC проводим вертикальные линии до ***свободной поверхности*** жидкости, получим ***реальное*** (положительное) тело давления в виде криволинейной призмы с основанием ***AKMC***, построенное на смоченной поверхности AC и заполненное водой. В эпюре тела давления стрелки направляем ***вниз***.

Для части криволинейной поверхности ***CB*** снова проводим вертикальные линии до ***свободной поверхности***, получим ***отрицательное*** тело давления в виде криволинейной призмы с основанием ***BCMK***, так как оно построено на несмоченной поверхности и не заполнено жидкостью. Стрелки в эпюре тела давления покажем пунктиром и направим ***вверх***.

Анализ построения двух тел давления показывает, что в объёме ***AKMC*** два тела давления взаимно уничтожаются (сокращаются, компенсируются).

Результирующее тело давления ***отрицательное*** в виде полуцилиндра объёмом:

$$V_{т.д.} = \frac{\pi D^2}{8} L.$$

Вертикальная составляющая R_y:

$$R_y = \rho g \frac{\pi D^2}{8} L; \quad R_y = 10^3 \cdot 9{,}8 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}6^2}{8} \cdot 2{,}0 = 2{,}77 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2{,}77 \text{ кН}.$$

Показываем линию действия и точку приложения R_y. Вертикальная составляющая приложена в ***центре тяжести*** тела давления и направлена ***вверх***. Центр тяжести полуцилиндра (см. приложение, табл. 3) находится на расстоянии $x_C = 4r/3\pi = 0{,}13$ м от оси цилиндра.

Показываем на чертеже (см. рис. 3.4, б) расстояние x_C, центр тяжести полуцилиндра и направление силы R_y.

4. Определяем величину равнодействующей давления воды на цилиндрический затвор:

$$R = \sqrt{5{,}88^2 + 2{,}77^2} = 6{,}5 \text{ кН}.$$

Чтобы найти линию действия, направление и точку приложения равнодействующей R, по линии действия продолжим R_x и R_y до взаимного пересечения, получим точку N. Геометрическое сложение сил проведём вне чертежа. Вынесем точку N и покажем сложение сил в масштабе.

Параллельно по линии действия силу R перенесём в точку N на основном чертеже и продолжим её до пересечения с криволинейной поверхностью. Равнодействующая R должна пройти через точку пересечения составляющих и центр криволинейной поверхности.

Точка пересечения равнодействующей с цилиндрической поверхностью является ***центром давления***.

Угол α наклона равнодействующей R найдём через tg α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{2{,}77}{5{,}88} = 0{,}47; \quad \alpha = 25°.$$

Ответ: равнодействующая давления воды R = 6,5 кН направлена радиально под углом $\alpha = 25°$.

В практике решения задач могут быть случаи определения силы давления на криволинейную поверхность, когда жидкость действует с двух сторон. Такое решение рассмотрим на примере задачи 3.2.2.

Задача 3.2.2. Определить силу давления нефти на цилиндрическую поверхность *AB*, а также угол наклона силы к горизонту, если слева уровень нефти $H_1 = D = 1{,}2$ м, справа $H_2 = D/2 = 0{,}6$ м. Длина цилиндрической поверхности L=4,0 м. Принять плотность нефти $\rho_н = 900$ кг/м^3 (рис. 3.5).

Решение. На рис. 3.5,а представлен общий вид цилиндрической поверхности длиной *L*, воспринимающей давление нефти с двух сторон.

В случае действия жидкости с двух сторон целесообразно определить составляющую $\boldsymbol{R_x}$, как геометрическую сумму горизонтальных сил слева R_{x_1} и справа R_{x_2}, и вертикальную составляющую $\boldsymbol{R_y}$ через объём результирующего тела давления, затем геометрически сложить $\boldsymbol{R_x}$ и $\boldsymbol{R_y}$ и получить результирующую силу давления $\boldsymbol{R}$ и её положение.

Рассчитать силу давления жидкости на криволинейную поверхность сначала слева, затем справа, геометрически сложить эти составляющие для определения равнодействующей и её положения более трудоёмко, как аналитически, так и геометрически.

1. Покажем два направления - $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ (см. рис. 3.5,б), по которым определим составляющие силы давления с последующим их геометрическим сложением:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

2. Определим величину и положение горизонтальной составляющей $\boldsymbol{R_x}$.

Расчёт проведём ***графо-аналитическим*** методом:

а) Определим силу давления нефти слева R_{x_1}.

Криволинейную поверхность ***AB*** спроектируем внутрь жидкости на вертикальную плоскость и получим вертикальную проекцию $A'B'$ в виде прямоугольника высотой H_1 и длиной (шириной) L (см. рис. 3.5,б).

Давление нефти в точках A' и B':

$$p_{A'} = 0; \quad p_{B'} = \rho_н g H_1. \quad p_{B'} = 900 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2 = 10{,}6 \cdot 10^3 \text{ Па} = 10{,}6 \text{ кПа}.$$

Строим эпюру давления. Откладываем по нормали к вертикальной проекции величину давления в характерных точках в удобном масштабе, соединяем полученные точки наклонной прямой. Эпюра давления представляет треугольную призму с основанием в виде треугольника и

высотой, равной L. Заштриховываем эпюру, стрелками показываем направление давления нефти слева направо (см. рис. 3.5,б)

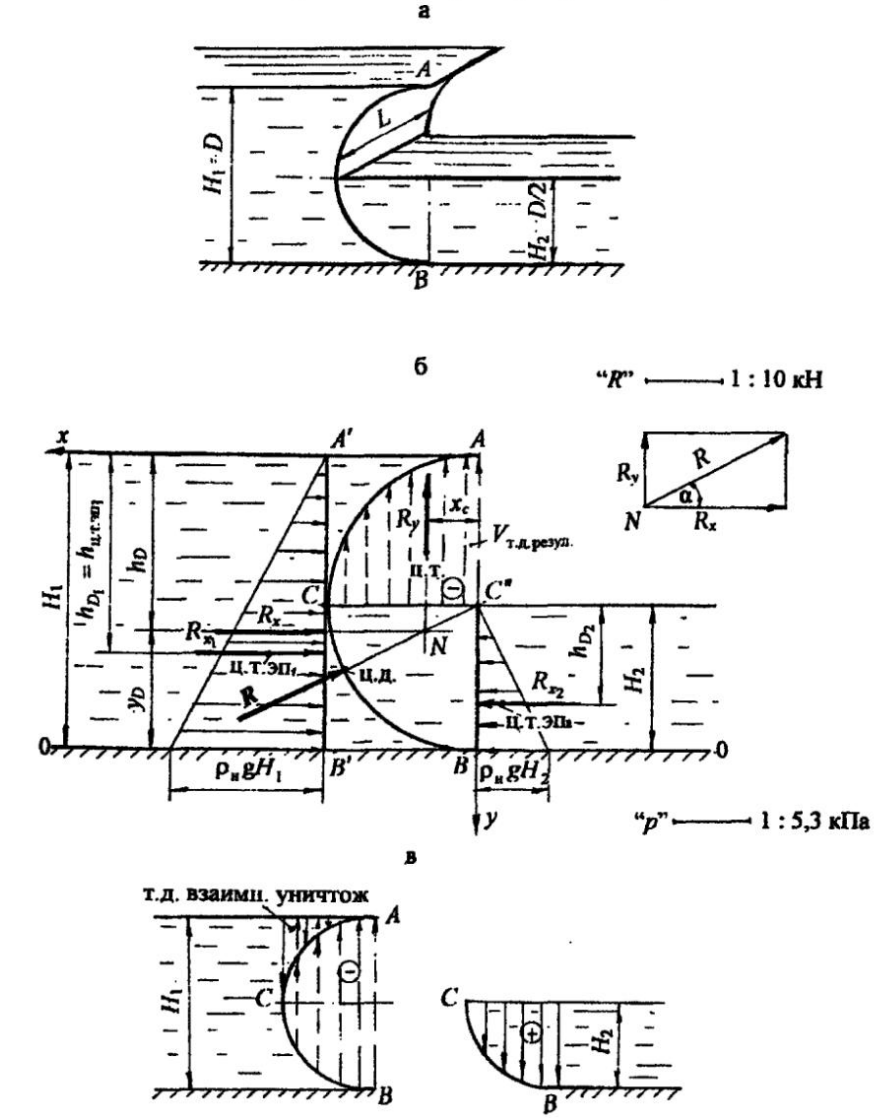


Рис. 3.5

Силу R_{x_1} рассчитаем по формуле (2.11):

$$R_{x_1} = S_{эп_1} L = \frac{\rho_н g H_1^2}{2} L; \qquad R_{x_1} = \frac{900 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2^2}{2} \cdot 4{,}0 = 25{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 25{,}4 \text{ кН}.$$

Покажем линию действия силы R_{x_1}. Сила проходит через центр тяжести эпюры, т. е. через центр тяжести треугольника (см. формулу (2.11)). Глубина погружения центра давления для силы R_{x_1}:

$$h_{D_1} = h_{ц.т.эп_1} = \frac{2}{3} H_1.$$

На чертеже (см. рис. 3.5,б) покажем h_{D_1} и линию действия силы R_{x_1}.

Сила направлена по нормали к вертикальной проекции $A'B'$ слева направо (из жидкости на вертикальную проекцию).

б) Определим силу давления нефти справа R_{x_2}.

Криволинейную поверхность CB спроектируем внутрь жидкости на вертикальную плоскость, получим вертикальную проекцию $C''B$ в виде прямоугольника высотой H_2 и длиной L.

Рассчитаем силу R_{x_2}. Давление в характерных точках:

$$p_{C''} = 0; \quad p_B = \rho_н g H_2. \quad p_B = 900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}6 = 5{,}3 \cdot 10^3 \text{ Па} = 5{,}3 \text{ кПа}.$$

По аналогии строим эпюру давления нефти справа. Эпюра давления в вертикальной плоскости также представляет равномерную нагрузку в виде треугольника. Стрелками покажем направление действия нефти на вертикальную проекцию справа налево. Рассчитаем силу R_{x_2}:

$$R_{x_2} = S_{эп_2} L = \frac{\rho_н g H_2^2}{2} L; \quad R_{x_2} = \frac{900 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}6^2}{2} \cdot 4{,}0 = 6{,}35 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6{,}35 \text{ кН}.$$

Покажем линию действия силы R_{x_2}. Сила проходит через центр тяжести второй эпюры на глубине $h_{D_2} = h_{ц.т.эп_2} = 2/3 H_2$ и направлена по нормали к вертикальной проекции $C''B$ справа налево (см. рис. 3.5, б).

в) Определим горизонтальную составляющую R_x путём геометрического сложения составляющих R_{x_1} и R_{x_2}:

$$\vec{R}_x = \vec{R}_{x_1} + \vec{R}_{x_2};$$

$$R_x = R_{x_1} - R_{x_2}; \quad R_x = 19{,}05 \text{ кН}.$$

Положение силы R_x определим, пользуясь теоремой Вариньона: момент от равнодействующей R_x равен сумме моментов составляющих сил R_{x_1} и R_{x_2} относительно той же оси, например 0-0, совмещённой с дном. Обозначим через y_D расстояние от оси 0-0, на котором приложена сила R_x:

$$R_x y_D = R_{x_1} \cdot 1/3H_1 - R_{x_2} \cdot 1/3H_2; \quad \text{отсюда} \quad y_D = 0{,}47 \text{ м}.$$

На расстоянии y_D от дна покажем линию действия и точку приложения горизонтальной силы R_x (см. рис. 3.5,б). Глубина погружения центра давления для горизонтальной составляющей $h_D = H_1 - y_D = 1{,}2 - 0{,}47 = 0{,}73$ м. Сила R_x направлена по нормали слева направо на вертикальную проекцию $A'B'$ криволинейной поверхности.

3. Определим ***величину, направление и точку приложения*** вертикальной составляющей R_y. Согласно формуле (3.5):

$$R_y = \rho g V_{т.д.}$$

Найдём положение результирующего тела давления. На рис. 3.5,в представлено построение тела давления для левой и правой части криволинейной поверхности согласно принятой методике (см. глава 3; 3.1).

Для левой части получаем ***отрицательное*** тело давления объёмом в виде полуцилиндра:

$$V_{т.д_1} = \frac{\pi H_1^2}{8} L.$$

Для правой части тело давления ***положительное*** объёмом в виде четверти цилиндра:

$$V_{т.д.2} = \frac{\pi H_2^2}{4} L.$$

При геометрическом сложении объёмов двух тел давления положительного и отрицательного, т. е. при наложении объёмов тела давления, получим ***результирующее тело давления отрицательное*** в виде четверти цилиндра (см. рис. 3.5,б). Вертикальная составляющая R_y:

$$R_y = \rho_н g V_{т.д.резул.} = \rho_н g \frac{\pi H_1^2}{16} L; \quad R_y = 9{,}97 \text{ кН}.$$

Из центра тяжести результирующего тела давления, т. е. из центра тяжести четверти цилиндра, вертикальная составляющая R_y ***направлена***

вверх. Центр тяжести четверти цилиндра так же, как центр тяжести полуцилиндра, находится на расстоянии $x_c = 4r/3\pi$ (см. приложение, табл. 3):

$$x_c = \frac{4H_2}{3\pi}; \quad x_c = \frac{4 \cdot 0{,}6}{3 \cdot 3{,}14} = 0{,}25 \text{ м}.$$

На рис. 3.5,б покажем x_c и положение вертикальной составляющей R_y.

4. Находим величину равнодействующей R:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R = \sqrt{19{,}05^2 + 9{,}97^2} = 21{,}5 \text{ кН}.$$

Чтобы найти положение и точку приложения равнодействующей сил давления нефти R, продолжим составляющие R_x и R_y до взаимного пересечения, получим точку N (см. рис. 3.5,б). Вынесем точку N вне чертежа и проведём геометрическое сложение сил.

По линии действия равнодействующую R параллельно перенесём в точку пересечения составляющих на основном чертеже и найдём точку пересечения силы R с криволинейной поверхностью. Эта точка является центром давления для результирующей сил давления нефти.

Равнодействующая R должна быть направлена радиально к криволинейной поверхности. Проверим, действительно сила R проходит через центр цилиндрической поверхности, построение верно.

Угол α наклона равнодействующей найдём через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{9{,}97}{19{,}05} = 0{,}523; \quad \alpha = 27°40'.$$

Ответ: сила давления нефти на цилиндрическую поверхность $R = 21{,}5$ кН, сила действует радиально под углом $\alpha = 27°40'$.

В задачах 3.2.1 и 3.2.2 представлены аналитический и графо-аналитический методы определения горизонтальной составляющей силы давления жидкости на криволинейную поверхность, расчёт вертикальной составляющей через объём результирующего тела давления. В этих задачах объём тела давления представлен простыми геометрическими фигурами, положение центра тяжести которых определяется по таблице.

Наряду с простыми геометрическими фигурами тела давления при решении задач могут быть случаи, когда тело давления представляет криволинейную призму с основанием, состоящим из нескольких геометрических фигур.

На примере решения задачи 3.2.3 рассмотрим определение положения центра тяжести тела давления, как сложной геометрической фигуры.

Задача 3.2.3. Определить силу давления воды на четверть цилиндрической поверхности AB открытого резервуара, угол наклона силы к горизонту и глубину погружения центра давления, если глубина заполнения резервуара H = 1,6 м, радиус цилиндрической поверхности r = 0,8 м, длина резервуара L = 5,0 м (рис. 3.6).

Решение. На рис. 3.6,а дан общий вид резервуара с цилиндрической поверхностью в изометрии. На рис. 3.6,б представлено среднее сечение резервуара нормальной плоскостью в соответствующем ***масштабе***.

Согласно принятой ***методике***, проводим следующие расчёты.

1. Выбираем направления x и y, по которым определяем составляющие силы давления с последующим их геометрическим сложением:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Начало координат выбираем на свободной поверхности. Ось x направляем вправо по направлению действия жидкости, ось y - вертикально вниз.

2. Определяем горизонтальную составляющую R_x по формуле (3.3):

$$R_x = \rho g y_C A_y.$$

Спроектируем цилиндрическую поверхность AB на вертикальную плоскость. Получаем в проекции прямоугольник высотой $AB' = r$ и шириной, равной длине резервуара L. Площадь вертикальной проекции четверти цилиндра $A_y = rL$.

Находим координату (глубину погружения) центра тяжести вертикальной проекции y_C, которая отсчитывается от ***свободной поверхности*** жидкости:

$$y_C = H - \frac{r}{2}.$$

Показываем y_C на чертеже (см. рис. 3.6,б).

Рассчитываем горизонтальную составляющую R_x:

$$R_x = \rho g (H - \frac{r}{2}) rL;$$

$$R_x = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 5{,}0 = 47{,}0 \cdot 10^3 \text{ Н} = 47{,}0 \text{ кН}.$$

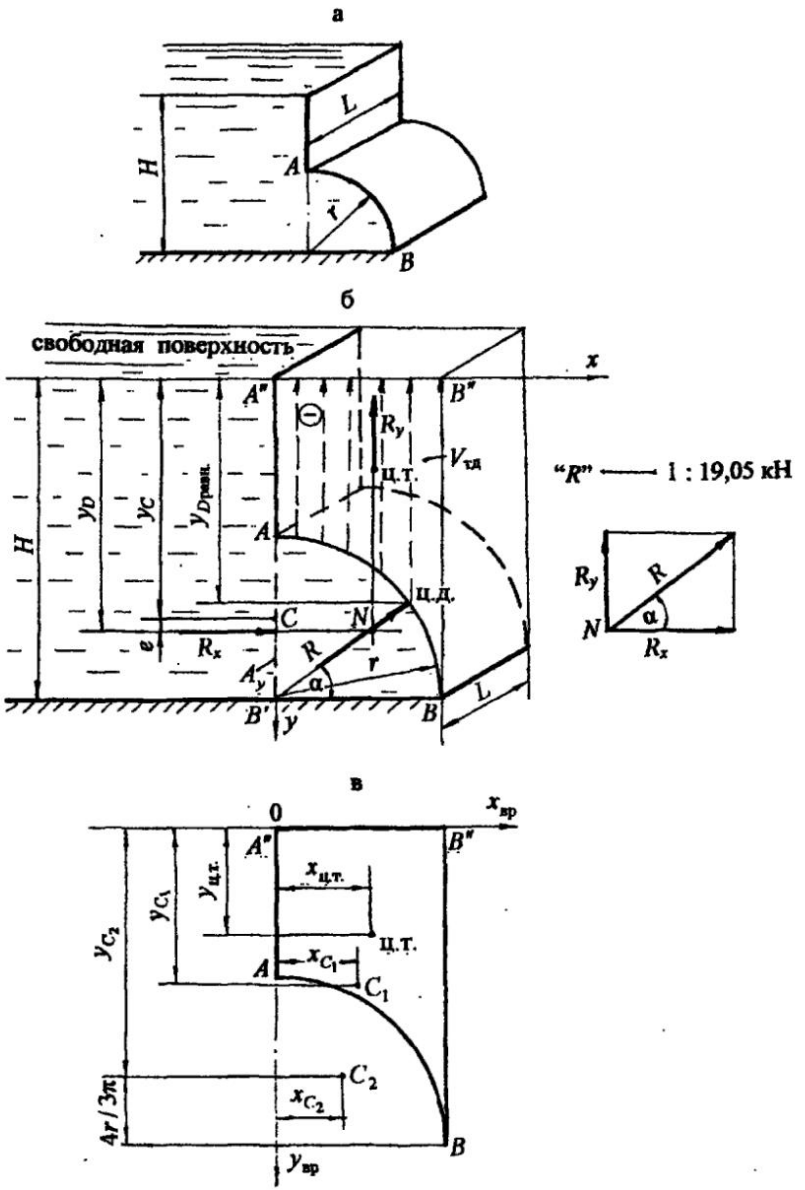

а
L
H
A
r
B
б
свободная поверхность
x
A''
B''
①
R_y
$V_{тд}$
ц.т.
y_D
y_C
$y_{Dравн.}$
H
A
C
N
ц.д.
e
R_x
R
r
α
A_y
B'
y
B
L
"R" —— 1 : 19,05 кН
R_y
R
N
α
R_x
в
0
$x_{вр}$
A''
B''
$y_{ц.т.}$
$x_{ц.т.}$
y_{C_1}
y_{C_2}
ц.т.
A
x_{C_1}
C_1
C_2
$4r/3\pi$
x_{C_2}
B
$y_{вр}$

Рис. 3.6

Показываем направление и точку приложения силы R_x. Сила приложена в ***центре давления*** по нормали к вертикальной проекции AB' на глубине y_D. По формуле (3.4)

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A_y},$$

где I_C – центральный момент инерции вертикальной проекции криволинейной поверхности относительно горизонтальной оси, т. е. момент инерции прямоугольника, согласно табл. 3 (см. приложение):

$$I_C = \frac{Lr^3}{12}.$$

Подставим значения всех параметров:

$$y_D = y_C + \frac{Lr^3}{12 y_C rL} = y_C + \frac{r^2}{12 y_C};$$

$$y_D = 1{,}2 + \frac{0{,}64}{12 \cdot 1{,}2} = 1{,}2 + 0{,}044 = 1{,}244 \text{ м}.$$

Эксцентриситет e, т. е. понижение центра давления относительно центра тяжести вертикальной проекции:

$$e = \frac{r^2}{12 y_C}; \quad e = 0{,}044 \text{ м} = 44 \text{ мм}.$$

На чертеже (см. рис. 3.6,б) показываем координату центра давления y_D, эксцентриситет e, направление и точку приложения силы R_x.

3. Определяем вертикальную составляющую R_y по формуле (3.5):

$$R_y = \rho g V_{т.д.}$$

Вертикальная составляющая равна силе тяжести жидкости в объёме тела давления. Чтобы найти объём тела давления, построим эпюру тела давления. Из контура цилиндрической поверхности проведём вертикальные линии до ***продолжения свободной поверхности***. Тело давления ограничено самой криволинейной поверхностью AB, вертикальными проектирующими плоскостями и горизонтальной проекцией криволинейной поверхности AB на продолжение горизонта свободной поверхности.

Очерченное тело давления построено на несмоченной части криволинейной поверхности AB, не заполнено жидкостью, поэтому оно считается ***отрицательным***. Стрелки в эпюре тела давления направлены вверх (сила R_y будет также направлена вверх). Тело давления представляет ***криволинейную призму*** с основанием $A\,A''B''B$ и высотой, равной L.

Площадь основания тела давления можно рассматривать как разность площадей двух фигур: прямоугольника $S_1 = S_{\text{прям.}B'A''B''B}$ и четверти круга $S_2 = S_{1/4\,\text{кр}}$. Тогда объём тела давления:

$$V_{\text{т.д.}} = (S_{\text{прям.}\,B'A''B''B} - S_{1/4\,\text{кр.}})L = (rH - \frac{\pi r^2}{4})L.$$

Вертикальная составляющая R_y

$$R_y = \rho g(rH - \frac{\pi r^2}{4})L;$$

$$R_y = 10^3 \cdot 9{,}8(0{,}8 \cdot 1{,}6 - \frac{3{,}14 \cdot 0{,}8^2}{4}) \cdot 5{,}0 = 38{,}1 \cdot 10^3\ \text{Н} = 38{,}1\ \text{кН}.$$

Переходим к определению направления и точки приложения вертикальной составляющей R_y. Сила R_y из ***центра тяжести тела давления*** будет направлена ***вверх***, так как тело давления ***отрицательное***.

Нужно найти положение ***центра тяжести*** тела давления, т. е. центра тяжести основания тела давления.

Положение центра тяжести составной фигуры определим, пользуясь понятием статического момента площади. Согласно формулам, изучаемым в курсе сопротивления материалов, в данной задаче координаты центра тяжести сложной фигуры рассчитаем по формулам:

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{S_1 x_{C_1} - S_2 x_{C_2}}{S_1 - S_2}; \quad y_{\text{ц.т.}} = \frac{S_1 y_{C_1} - S_2 y_{C_2}}{S_1 - S_2},$$

где S_1 – площадь прямоугольника $B'A''B''B$;

S_2 – площадь четверти круга;

x_1 и x_2; y_1 и y_2 – координаты центров тяжести прямоугольника и четверти круга относительно временных осей $x_{\text{вр.}}$; $y_{\text{вр.}}$

На рис. 3.6,в представлено основание тела давления $A\,A''B''B$. Временные оси $x_{\text{вр.}}$ и $y_{\text{вр.}}$ для удобства расчётов совпадают с направлением осей x и y на основном чертеже (см. рис. 3.6,б).

Для расчёта координат центра тяжести $x_{\text{ц.т.}}$ и $y_{\text{ц.т.}}$ фигуры $A\,A''B''B$ имеем:

$$S_1 = rH = 1{,}28\,\text{м}^2; \quad x_{C_1} = \frac{r}{2} = 0{,}4\,\text{м}; \quad y_{C_1} = \frac{H}{2} = 0{,}8\,\text{м};$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{4} = 0{,}50\,\text{м}^2; \quad x_{C_2} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}34\,\text{м}; \quad y_{C_2} = H - \frac{4r}{3\pi} = 1{,}26\,\text{м};$$

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{1{,}28 \cdot 0{,}4 - 0{,}50 \cdot 0{,}34}{1{,}28 - 0{,}50} = \frac{0{,}342}{0{,}78} = 0{,}44\,\text{м};$$

$$y_{\text{ц.т.}} = \frac{1{,}28 \cdot 0{,}8 - 0{,}50 \cdot 1{,}26}{1{,}28 - 0{,}50} = 0{,}51\,\text{м}.$$

Откладываем значения координат центра тяжести тела давления $x_{\text{ц.т.}}$ и $y_{\text{ц.т.}}$ на рис. 3.6,в, показываем положение центра тяжести тела давления. В соответствующем масштабе переносим положение центра тяжести тела давления на основной чертёж и показываем линию действия и точку приложения вертикальной составляющей R_y. Как было указано выше, эта сила приложена в центре тяжести тела давления и направлена вертикально вверх.

4. Определяем величину равнодействующей сил давления воды R на цилиндрическую поверхность AB по формуле (3.2):

$$R = \sqrt{47{,}0^2 + 38{,}1^2} = 60{,}5\,\text{кН}.$$

Находим положение силы R. Геометрически сложим составляющие силы R_x и R_y: продолжим силы по линии действия до взаимного пересечения, получим точку N, через которую пройдёт равнодействующая R.

Для удобства построения точку N вынесем за пределы чертежа и покажем сложение сил. Чтобы найти положение ***центра давления*** для равнодействующей R, силу R по линии действия параллельно перенесём в точку N на основной чертеж (см. рис. 3.6,б) и продолжим её до пересечения с криволинейной поверхностью AB. Итак, центр давления – это точка пересечения линии действия силы R с цилиндрической поверхностью AB.

Равнодействующая R должна быть направлена радиально и проходить через точку N пересечения составляющих R_x и R_y, так как сила давления всегда действует по нормали или радиально к поверхности. Проверим построение в масштабе. Построение верно.

Определим угол α наклона равнодействующей к горизонту через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = 0{,}81; \quad \alpha = 39°.$$

Глубину погружения центра давления для равнодействующей R рассчитаем по формуле:

$$y_{D\text{равн}} = H - r\sin 39^\circ; \quad y_{D\text{равн}} = 1{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}63 = 1{,}1\text{ м}.$$

Показываем глубину погружения центра давления для равнодействующей ($y_{D\text{равн}}$) на основном чертеже (см. рис. 3.6,б).

Ответ: сила давления воды на цилиндрическую поверхность R = 60,5 кН радиально направлена под углом $\alpha = 39^\circ$, приложена на глубине $y_{D\text{равн.}} = 1{,}1$ м.

При решении задач по определению силы давления жидкости на криволинейную поверхность могут быть случаи расчёта объёма тела давления в виде криволинейной призмы, основанием которой является криволинейный треугольник, сегмент, полусегмент и им подобные. На рис. 3.7 представлены некоторые геометрические фигуры и показано положение их центров тяжести.

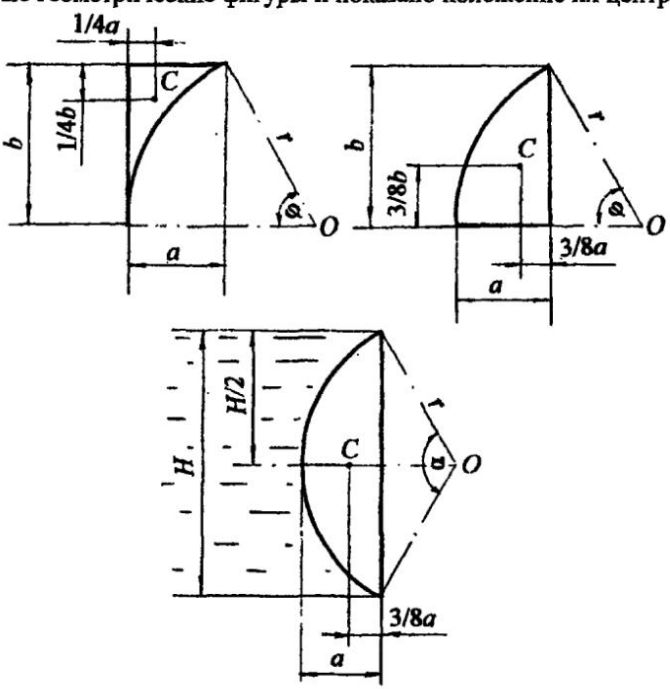


Рис. 3.7

Рассмотрим ещё один типовой случай определения силы давления жидкости на криволинейную поверхность в виде полусферы на примере решения задачи 3.2.4.

Задача 3.2.4. Определить силу давления бензина на полусферическую крышку закрытого резервуара. На поверхности бензина действует избыточное давление паров бензина $p_{ман.} = 0{,}03$ ат. Крышка перекрывает круглое донное отверстие радиусом $r = 0{,}3$ м. Глубина заполнения резервуара $H = 0{,}9$ м. Принять плотность бензина $\rho_{бенз.} = 750$ кг/м^3 (рис. 3.8).

Решение. На рис. 3.8,а представлен общий вид резервуара с бензином в вертикальном разрезе.

Прежде чем приступать к решению задачи, следует определиться с методикой учёта избыточного давления на поверхности при расчёте силы давления на полусферическую поверхность. Здесь могут быть выбраны два варианта.

Во-первых, рассчитывать отдельно составляющую силу от внешнего, манометрического давления, а затем суммировать её с силой давления жидкости и находить равнодействующую сил давления.

Во-вторых, манометрическое давление на поверхности жидкости можно перевести в давление столба бензина, условно заменив манометр пьезометром, найти пьезометрическую высоту и положение ***условной свободной поверхности.***

Такая методика расчёта рассмотрена в главе 2, в задачах 2.3.6; 2.3.7; 2.3.8. Эта методика расчёта позволит сразу определить равнодействующую сил давления жидкости и манометрического давления.

Выберем второй вариант решения. Рассчитаем пьезометрический напор по показанию манометра, пользуясь формулой (1.5):

$$h_{p\,бенз} = \frac{p_{ман.}}{\rho_{бенз} g}; \quad h_{p\,бенз} = \frac{0{,}03 \cdot 98 \cdot 10^3}{750 \cdot 9{,}8} = 0{,}4 \text{ м}.$$

На уровне свободной поверхности в резервуаре (см. рис. 3.8,б) пунктиром покажем пьезометр, высота столба жидкости в котором соответствует $h_{p\,бенз}$. По уровню жидкости в пьезометре покажем ***условную свободную поверхность***, от которой будем отсчитывать координаты центров тяжести фигур и центра давления.

Дальнейший расчёт силы давления бензина на полусферическую поверхность проводим по принятой ***методике***:

1. Выберем два направления - x и y (рис. 3.8,б), по которым определим составляющие силы давления с последующим их геометрическим сложением.

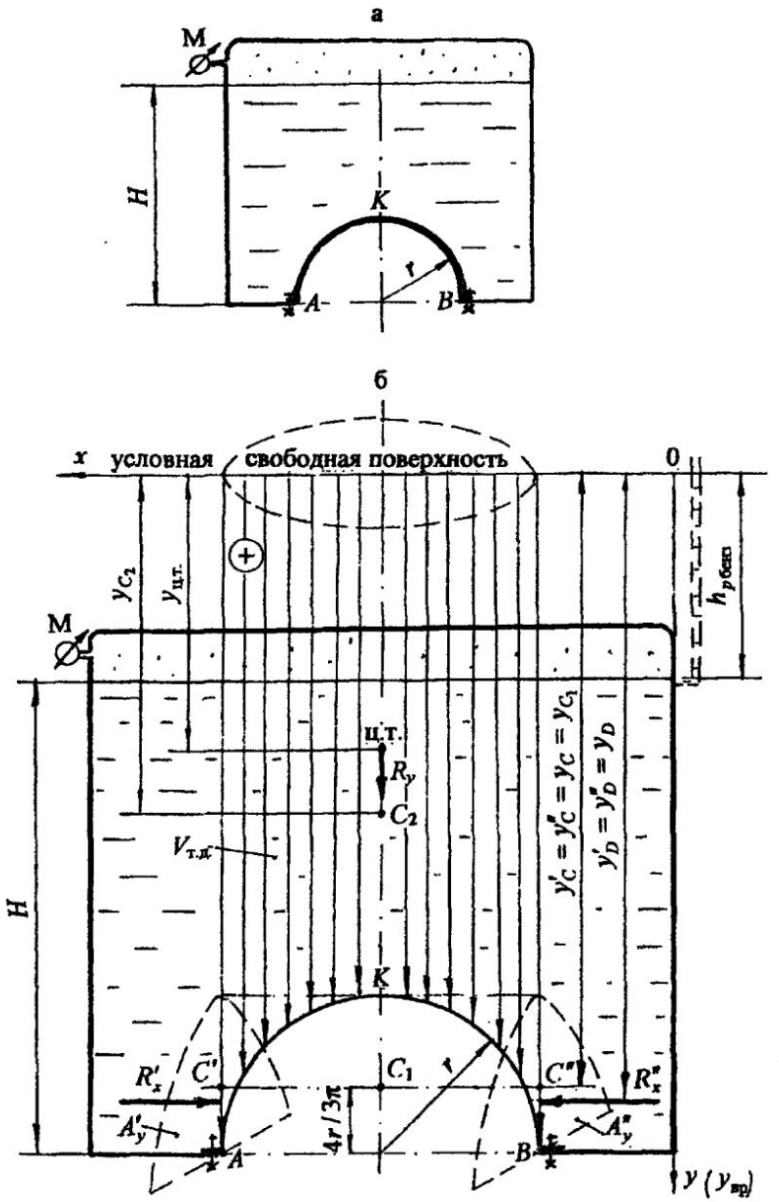

а
M
H
K
r
A
B
б
x
условная
свободная поверхность
0
y_{C_2}
$y_{ц.т.}$
$h_{р.без}$
M
ц.т.
R_y
C_2
$V_{т.д.}$
H
$y'_C = y''_C = y_C = y_{C_1}$
$y'_D = y''_D = y_D$
K
R'_x
C'
C_1
C''
R''_x
A'_y
$4r/3\pi$
A''_y
A
B
$y\ (y_{вр})$

Рис. 3.8

2. Определим ***горизонтальную*** составляющую R_x по формуле (3.3):

$$R_x = \rho_{\text{бенз}} g y_C A_y.$$

Полусферическая поверхность ***АКВ*** имеет две части: ***АК***, на которую бензин действует слева, и ***КВ*** с действием бензина справа.

Чтобы определить горизонтальную силу на левую часть полусферы, спроектируем часть ***АК внутрь*** жидкости на вертикальную плоскость. В проекции получим полукруг площадью $A'_y = \frac{\pi r^2}{2}$. Проекция показана пунктирными линиями.

Затем спроектируем правую часть полусферы ***внутрь*** жидкости и получим точно такую же проекцию в виде полукруга площадью $A''_y = \frac{\pi r^2}{2}$.

Находим координаты центров тяжести этих проекций:

$$y'_C = y''_C = y_C = H + h_{p\,\text{бенз.}} - \frac{4r}{3\pi}.$$

Покажем координаты центров тяжести проекций на чертеже (см. рис. 3.8,б).

Получим формулы для горизонтальных сил слева и справа:

$$R'_x = \rho_{\text{бенз}} g y'_C A'_y;$$

$$R''_x = \rho_{\text{бенз}} g y''_C A''_y.$$

Силы R'_x и R''_x равны по величине, но противоположно направлены. Поскольку равны координаты центров тяжести проекций, то равны и координаты центров давления слева и справа:

$$y'_D = y''_D = y_D.$$

На глубине y_D покажем силы R'_x и R''_x противоположно направленными. Таким образом, при геометрическом сложении сил R'_x и R''_x получим:

$$\vec{R}_x = \vec{R'_x} + \vec{R''_x}; \quad R_x = 0.$$

Горизонтальная составляющая силы давления жидкости на полусферическую поверхность равна нулю.

3. Определим вертикальную составляющую силы давления на полусферическую поверхность R_y по формуле (3.5):

$$R_y = \rho_{\text{бенз}} g V_{\text{т.д.}}.$$

Чтобы построить тело давления, из контура полусферы проведём вертикальные линии до ***условной свободной поверхности***. Получим эпюру тела давления. Тело давления построено на смоченной части полусферы, заполнено жидкостью, значит, оно действительное, или положительное. Стрелками, направленными вниз, покажем действие бензина на полусферическую крышку (сила R_y также будет направлена вниз).

Горизонтальная проекция полусферы на условную свободную поверхность представляет круг.

Таким образом, объём тела давления – это объём цилиндра высотой $(H + h_{p\,\text{бенз.}})$, за вычетом объёма полусферы:

$$V_{\text{т.д.}} = V_{\text{цил.}} - V_{\text{полусф.}};$$

$$V_{\text{т.д.}} = \pi r^2 (H + h_{p\,\text{бенз.}}) - \frac{4\pi r^3}{3 \cdot 2} = \pi r^2 (H + h_{p\,\text{бенз.}} - \frac{2}{3} r).$$

Вертикальная составляющая R_y:

$$R_y = \rho_{\text{бенз.}} g \pi r^2 (H + h_{p\,\text{бенз.}} - \frac{2}{3} r);$$

$$R_y = 750 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}09 \cdot 1{,}1 = 2284{,}8\ \text{Н} = 2{,}29\ \text{кН}.$$

Следует показать ***линию действия и точку приложения*** вертикальной силы R_y. Линия действия силы совпадает с геометрической осью полусферической поверхности и цилиндра. Необязательно находить точку приложения силы R_y, т. е. центр тяжести тела давления, в котором она приложена, так как силу по линии действия можно перемещать. Но по правилам методики расчёта определим положение центра тяжести тела давления. Нужно определить только координату центра тяжести тела давления - $y_{\text{ц.т.}}$ (см. задачу 3.2.3).

Временную ось $y_{\text{вр.}}$ совместим с осью y, тогда

$$y_{\text{ц.т.}} = \frac{S_2 y_{C_2} - S_1 y_{C_1}}{S_2 - S_1},$$

где $S_1 = \frac{\pi r^2}{2}$ - площадь полукруга (вертикальное сечение полусферы);

$S_2 = 2r(H + h_{p\,\text{бенз.}})$ - площадь прямоугольника;

$y_{C_1} = (H + h_{p\,\text{бенз.}} - \frac{4r}{3\pi})$ - координата центра тяжести C_1 полукруга;

$y_{C_2} = \frac{H + h_{p\,\text{бенз.}}}{2}$ - координата центра тяжести C_2 прямоугольника.

Для расчётов: $S_1 = 0{,}14\ \text{м}^2$; $S_2 = 0{,}78\ \text{м}^2$; $y_{C_1} = 1{,}17$ м; $y_{C_2} = 0{,}65$ м.

Получим $y_{\text{ц.т.}} = 0{,}54$ м. Покажем на чертеже $y_{\text{ц.т.}}$ и положение центра тяжести тела давления.

Из центра тяжести тела давления вертикальную силу R_y направим ***вниз***. Поскольку горизонтальная сила равна нулю, на полусферическую поверхность действует только вертикальная сила.

Ответ: на полусферическую крышку резервуара по оси полусферы действует сила $R = R_y = 2{,}29$ кН.

В задаче 3.2.4 представлен случай, когда на поверхности жидкости закрытого резервуара действует манометрическое давление. В практике расчётов силы давления на криволинейную поверхность может быть условие, когда на поверхности жидкости или на определённом уровне в закрытом резервуаре известно вакуумметрическое давление ($p_{\text{вак.}}$) В этом случае методика расчёта силы давления не меняется.

При определении горизонтальной составляющей можно воспользоваться принципом расчёта силы давления, изложенным в задаче 2.3.9.

При определении вертикальной силы следует помнить, что вертикальная составляющая от вакуумметрического давления отрицательная и направлена вверх.

По аналогии с манометрическим давлением можно найти вакуумметрический напор $h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g}$, который учитывается со знаком ***минус***, поэтому объём тела давления будет отрицательным, значит, и ***вертикальная составляющая силы от вакуумметрического давления отрицательная, направленная вверх.***

В представленных примерах решения задач рассмотрены различные случаи действия жидкости на криволинейные поверхности. Предлагается проверить свои знания и умение пользоваться методикой расчёта силы давления на криволинейные поверхности при решении задач для самостоятельной работы.

3.3. Задачи для самостоятельной работы по теме "Сила давления жидкости на криволинейные поверхности"

Задача 3.3.1

Определить величину и угол наклона силы давления бензина на полусферическую крышку закрытого резервуара (рис. 3.9), если радиус полусферы r = 0,2 м, показание пьезометра, выведенного на уровне нижней кромки крышки H = 0,8 м, плотность бензина $\rho_{бенз}$ = 800 кг/м^3.

Ответ: сила давления бензина R = 605,2 Н, угол наклона силы к горизонту α = 12°; глубина погружения центра давления $y_{D\,равн.}$ = 0,643 м.

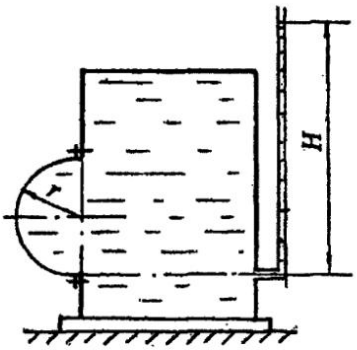


Рис. 3.9

Задача 3.3.2

Определить силу давления масла на цилиндрическую стенку резервуара AB (рис. 3.10), угол наклона силы и глубину погружения центра давления, если глубина заполнения резервуара H = 0,8 м; радиус цилиндрической части r = 0,6 м; секторный угол равен 90^0; длина образующей цилиндрической поверхности L = 1,2 м. Принять плотность масла $\rho_{масл}$=860 кг/м^3.

Ответ: сила давления масла R = 3,64 кН; угол наклона силы к горизонту α = 33°; глубина погружения центра давления $y_{D\,равн}$ = 0,47 м.

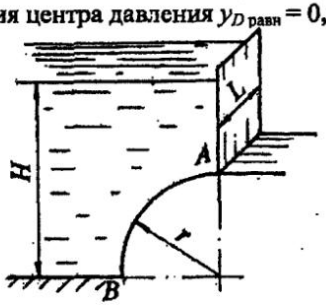


Рис. 3.10

Задача 3.3.3

Определить величину, угол наклона и глубину центра давления для равнодействующей давления воды на криволинейную стенку *AB* (рис. 3.11) длиной L = 10 м. Действующий напор H = 4,0 м. Криволинейная стенка представляет часть цилиндрической поверхности с секторным углом $\varphi = 60^0$.

Ответ: равнодействующая сила давления воды R = 1013 кН; угол наклона силы к горизонту $\alpha = 39°$; глубина центра давления $y_{D\,равн.}$ = 2,93 м.

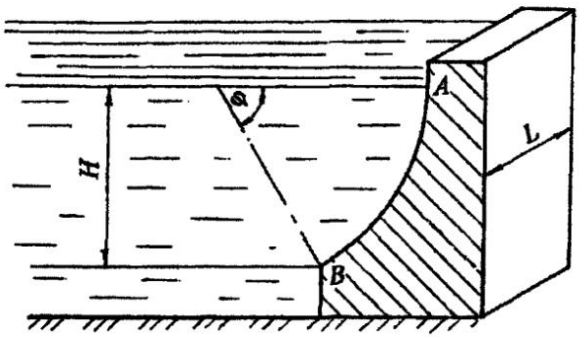


Рис. 3.11

Задача 3.3.4

Определить величину и угол наклона к горизонту равнодействующей давления воды на криволинейную стенку *AB* резервуара (рис. 3.12), если ширина резервуара B = 3,0 м, напоры воды соответственно H_1 = 2,0 м, H_2 = 1,0 м.

Ответ: равнодействующая давления воды R = 155,6 кН; угол наклона силы к горизонту $\alpha = 31°$.

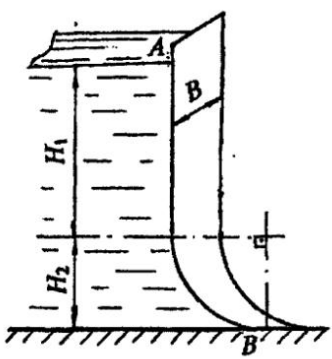


Рис. 3.12

Задача 3.3.5

Определить величину, угол наклона к горизонту и глубину центра давления для силы давления воды на секторный затвор *AB* (рис. 3.13), удерживающий напор H = 1,5 м, если ширина затвора B = 2,0 м, секторный угол затвора $\varphi = 60^0$.

Ответ: равнодействующая давления воды R = 28,5 кН; угол наклона силы к горизонту $\alpha = 39°$; глубина центра давления $y_{D\,равн.} = 1{,}1$ м.

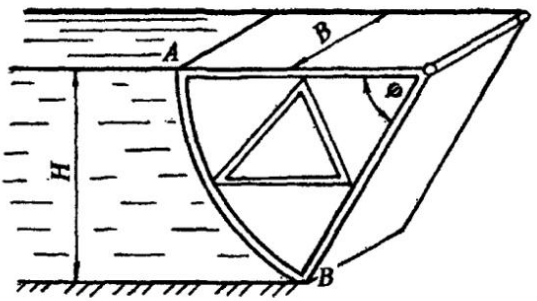


Рис. 3.13

Задача 3.3.6

Определить величину, угол наклона к горизонту и глубину центра давления для силы давления воды на криволинейную стенку *AB* (рис. 3.14) длиной L = 3,0 м, удерживающую напор H = 1,5 м. Криволинейная стенка представляет часть цилиндрической поверхности с секторным углом $\varphi = 60^0$.

Ответ: равнодействующая сила давления воды R = 35,0 кН; угол наклона силы к горизонту $\alpha = 18°$; глубина центра давления $y_{D\,равн.} = 0{,}95$ м.

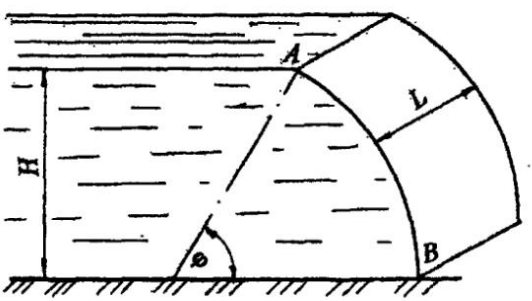


Рис. 3.14

Задача 3.3.7

Определить силу давления бензина на полусферическое дно цилиндрического резервуара (рис. 3.15) радиусом $r = 0{,}4$ м, если показание манометра, установленного на расстоянии $h = 0{,}8$ м от дна резервуара, $p_{ман} = 0{,}12$ ат. Принять плотность бензина $\rho_{бенз.} = 720$ кг/м^3.

Ответ: сила давления бензина $R = 7{,}81$ кН.

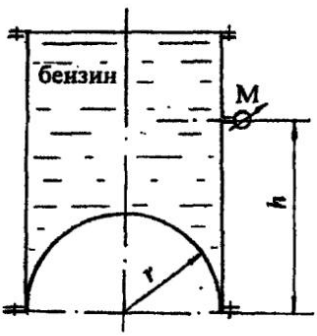


Рис. 3.15

Задача 3.3.8

Определить усилие F, которое нужно приложить к полусферической крышке резервуара с водой (рис. 3.16) для удержания её в закрытом положении, если радиус полусферы $r = 0{,}2$ м. Крышка поворачивается вокруг шарнира в точке A. Показание пьезометра, установленного на уровне шарнира, $h = 0{,}6$ м.

Ответ: усилие $F \geq 287$ Н.

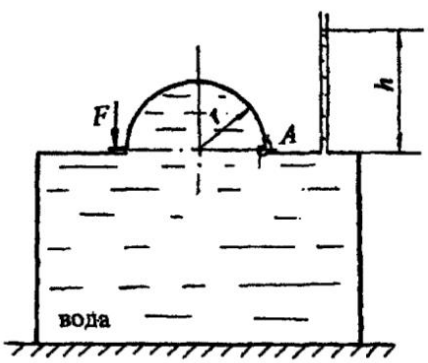


Рис. 3.16

Задача 3.3.9

Определить равнодействующую сил давления воды, угол наклона её к горизонту и глубину погружения центра давления для цилиндрической поверхности *AB* с секторным углом φ = 120°. Длина поверхности *L* = 3,0 м. Действующий напор воды слева *H* = 1,5 м, справа *h* = *H*/2 = 0,75 м (рис. 3.17). При решении представить чертёж в виде вертикального сечения криволинейной поверхности.

Ответ: равнодействующая сил давления воды *R* = 25,73 кН действует под углом α = 15° к горизонту, глубина погружения центра давления $y_{D\,равн.}$ = 0,98 м.

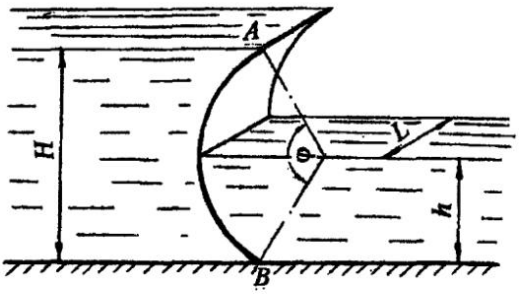


Рис. 3.17

Задача 3.3.10

Определить величину и угол наклона к горизонту равнодействующей сил давления воды на устройство в виде цилиндрического затвора (рис. 3.18), если диаметр цилиндра *D* = 0,9 м, действующий напор слева *H* = 1,2 м, справа *h* = *D*/2. Длина цилиндрического затвора *L* = 4,0 м.

Ответ: равнодействующая сил давления воды *R* = 29,24 кН действует под углом α = 39° к горизонту.

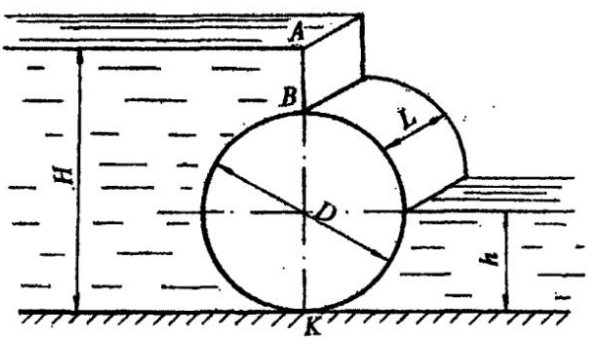


Рис. 3.18

Задача 3.3.11

В закрытом резервуаре, заполненном бензином, в боковой стенке сделано круглое отверстие, которое закрывается полусферической крышкой радиусом r = 0,6 м (рис. 3.19). Крышка укреплена с помощью шарнира в точке A. На расстоянии h = 1,2 м от шарнира на свободной поверхности бензина действует вакуумметрическое давление $p_{вак}$ = 0,05 ат. Определить усилие F для удержания крышки в закрытом положении. Принять плотность бензина $\rho_{бенз.}$ = 710 кг/м^3.

Ответ: усилие для удержания крышки $F \geq 4{,}25$ кН.

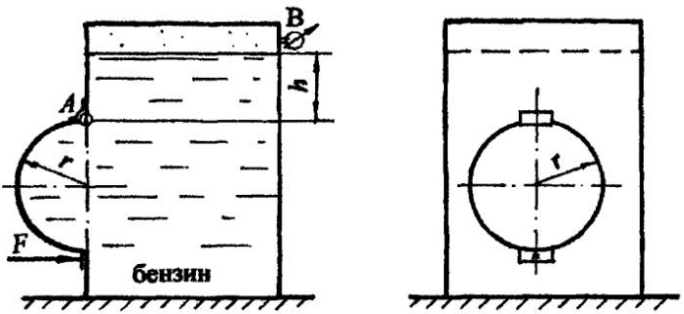


Рис. 3.19

Задача 3.3.12

Закрытый резервуар с полуцилиндрическим дном радиусом r = 0,6 м и длиной L = 1,5 м заполнен маслом плотностью $\rho_{масл.}$ = 900 кг/м^3 (рис. 3.20). Сила давления масла на дно резервуара R = 15,4 кН. Определить на какой высоте H от оси цилиндрической части установлен вакуумметр, показание которого $p_{вак.}$ = 0,063 ат.

Ответ: высота установки вакуумметра H = 1,2 м.

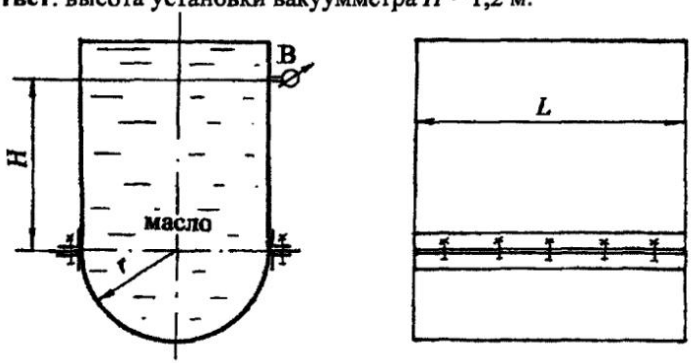


Рис. 3.20

Задача 3.3.13

Определить силу давления воды на верхнюю и нижнюю половины сферического резервуара радиусом $r = 0{,}3$ м, полностью заполненного водой, а также растягивающее усилие в болтах фланцевого соединения (6 болтов), если показание манометра, установленного под углом $\alpha = 45^\circ$ в нижней части резервуара $p_{ман.} = 0{,}1$ ат. (рис. 3.21).

Ответ: $R_{у\,верх} = 1{,}63$ кН; $R_{у\,нижн} = 2{,}74$ кН; $R_{болт} = 0{,}73$ кН.

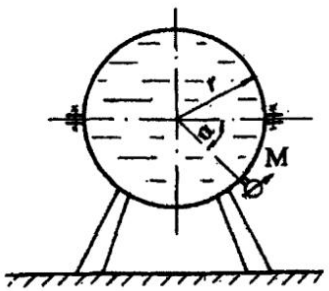


Рис. 3.21

Задача 3.3.14

Определить величину равнодействующей давления воды на полуцилиндрическую крышку AB закрытого резервуара и угол наклона силы к горизонту. Диаметр цилиндрической части $D = 600$ мм, длина образующей цилиндрической поверхности $L = 800$ мм, показание манометра, установленного на расстоянии $h = 100$ мм от дна резервуара, $p_{ман.} = 0,07$ ат (рис. 3.22). Рассчитать растягивающее и срезающее усилие, воспринимаемое болтами крышки.

Ответ: равнодействующая $R = 2{,}6$ кН, угол наклона силы к горизонту $\alpha = 25^\circ$; $R_{раст.} = 2{,}35$ кН; $R_{срез.} = 1{,}12$ кН.

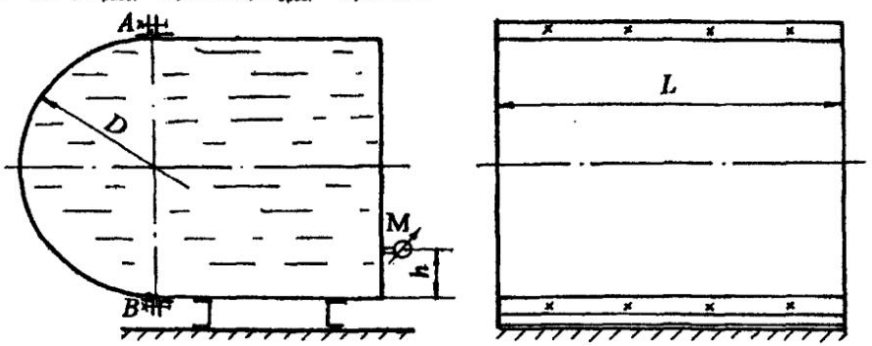


Рис. 3.22

Раздел второй

ГИДРОДИНАМИКА

Гидродинамика – раздел гидромеханики, в котором изучаются законы движения жидкости, взаимодействие жидкости с твёрдыми поверхностями и движущимися твёрдыми телами.

Раздел гидродинамики является основой для решения теоретических и инженерных задач по расчёту трубопроводных систем, открытых русел, истечения жидкости через отверстия и насадки.

Глава 4

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

4.1. Основные понятия о параметрах движения жидкости

К гидродинамическим характеристикам потока относятся: ***давление, скорость и ускорение***, т. е. изменение скорости во времени.

При установившемся движении жидкости распределение давления по сечению движущегося потока подчиняется гидростатическому закону, т. е. давление не является функцией времени.

Что касается скорости, то она изменяется во времени и в пространстве. Математически такую зависимость трудно записать, поэтому гидродинамические законы имеют достаточно общий характер с некоторыми допущениями.

Скорость в точке потока или скорость в сечении элементарной струйки (понятие струйки будет приведено ниже) обозначается буквой *u*. Средняя скорость потока обозначается – υ.

В зависимости от того, являются ли основные параметры движения функцией времени, различают два вида движения жидкости: ***неустановившееся и установившееся***.

Неустановившееся – это движение жидкости, при котором скорость является функцией времени. В качестве примера неустановившегося движения можно привести истечение жидкости при переменном напоре (опорожнение резервуара).

Установившееся – это движение жидкости, при котором все параметры движения в одной и той же точке пространства не меняются во времени, т. е. приращение скорости во времени (ускорение) равно нулю.

В зависимости от характера изменения скорости по длине пространства, заполненного жидкостью, установившееся движение может быть:

а) ***равномерным***, при котором скорость по длине струйки, потока остаётся постоянной (движение в трубах постоянного диаметра);

б) ***неравномерным***, если скорость по длине потока резко изменяется по величине или (и) по направлению (внезапное сужение или расширение потока, резкий поворот и другие);

в) ***плавно изменяющимся***, если изменение скорости происходит достаточно плавно (конические переходники сужающиеся и расширяющиеся). В этом случае с достаточной для практики точностью применимы законы равномерного движения.

В программу данного курса входит изучение законов ***установившегося*** движения и применение этих законов для решения инженерных задач.

4.2. Понятие идеальной жидкости и потока жидкости

В разделе "Общие сведения о жидкостях" рассмотрены физические свойства жидкостей. В разделе "Гидродинамика" при выводе законов движения необходимо учитывать плотность, удельный вес и все физические свойства жидкостей. Учесть влияние всех этих параметров на условия движения жидкости невозможно, поэтому для облегчения решения задач гидродинамики введено понятие ***идеальной жидкости***.

Идеальная жидкость – это ***условно*** принятая жидкость, не сжимаемая при изменении давления и не расширяющаяся при изменении температуры, обладающая абсолютной подвижностью, т. е. вязкость жидкости равна нулю; не сопротивляющаяся деформации разрыва.

Таким образом, законы и уравнения гидродинамики выводятся для идеальной жидкости, затем в них вносятся дополнительные члены, коэффициенты, поправки с учетом физических свойств и условий движения реальной, вязкой жидкости.

В гидродинамике ***поток жидкости*** рассматривается как совокупность элементарных струек (рис. 4.1,а).

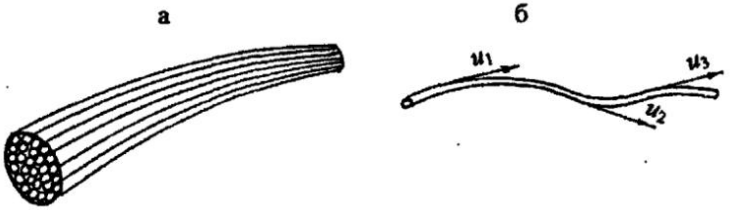


Рис. 4.1

Элементарная струйка – бесконечно малый замкнутый объём жидкости, поверхность которого образована линиями тока (рис. 4.1,б).

Линия тока – линия, в каждой точке которой в данное мгновение вектор скорости жидкости совпадает с касательной к этой линии. При

установившемся движении линия тока совпадает с траекторией движения материальной точки жидкости.

Для элементарной струйки приняты свойства, которые используются в теоретических выводах:

а) форма струйки не изменяется с течением времени;

б) поверхность струйки непроницаема со стороны окружающей жидкости, жидкость не входит в струйку и не выходит из неё;

в) в силу малости нормального сечения струйки скорость в пределах сечения считается постоянной.

Различают два вида потоков.

Напорные потоки – это потоки жидкости, ограниченные со всех сторон твёрдыми стенками. Примерами служат движение воды, масла, нефти в трубопроводах, воздуха в вентиляционных системах и им подобные.

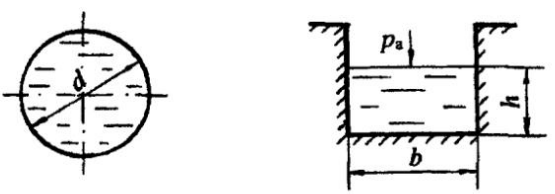
Безнапорные потоки – это потоки жидкости, ограниченные твёрдыми поверхностями не со всех сторон и имеющие по всей длине свободную поверхность. Примерами таких потоков являются движение жидкости в реках, каналах, лотках, желобах и других открытых руслах.

4.3. Гидравлические элементы потока

Живое сечение (ω) – сечение струйки или потока плоскостью, нормальной в каждой своей точке к проходящей через неё линии тока. Для равномерного и плавно изменяющегося движения живое сечение является плоским.

На рис. 4.2 представлено живое сечение для круглой трубы диаметром d, полностью заполненной жидкостью (рис. 4.2,а), и для открытого русла шириной b и глубиной наполнения h (рис. 4.2,б).

а б



$\omega = \pi d^2/4 = \pi r^2$ $\omega = bh$

Рис. 4.2

Смоченный периметр (χ) – длина контура живого сечения по твёрдым стенкам русла. На рис. 4.2,а для круглой трубы $\chi = \pi d = 2\pi r$ (длина окружности круглой трубы); для открытого потока (см. рис. 4.2,б) $\chi = 2h + b$.

Гидравлический радиус (R) – отношение площади живого сечения к смоченному периметру:

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \tag{4.1}$$

Для напорного потока в круглой трубе (см. рис. 4.2,а) гидравлический радиус

$$R = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}; \quad \text{откуда } d = 4R, \tag{4.2}$$

для открытого потока (см. рис. 4.2,б)

$$R = \frac{bh}{2h + b}.$$

Гидравлический радиус (R) является универсальной геометрической характеристикой потока, которая может быть использована в теоретических выводах для потоков любой формы с различной степенью заполнения жидкостью.

4.4. Расход жидкости. Средняя скорость потока. Уравнение неразрывности потока

Расходом называется количество жидкости, проходящее через живое сечение в единицу времени.

В зависимости от того, в чём выражают количество жидкости, различают:

- объёмный расход (Q);
- массовый расход (M);
- весовой расход (G).

Для вывода расчётной формулы объёмного расхода рассмотрим элементарную струйку в установившемся движении, выделим в ней живое сечение $d\omega$, которое за время dt переместится из положения 1 в положение 2, пройдя путь dl (рис. 4.3).

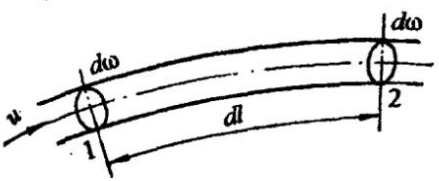


Рис. 4.3

Допустимо считать, что на расстоянии dl площадь живого сечения $d\omega$ остаётся постоянной и скорость u в живом сечении также постоянна согласно свойствам элементарной струйки.

При перемещении живого сечения из положения 1 в положение 2 за время dt жидкость заполнит отсек 1-2 объёмом $dV = d\omega \cdot dl$. Согласно определению объёмный расход для элементарной струйки

$$dQ = \frac{dV}{dt} = d\omega \frac{dl}{dt}.$$

При установившемся движении $\frac{dl}{dt} = u$, где u – скорость струйки в живом сечении, таким образом, расход для элементарной струйки:

$$dQ = u\, d\omega.$$

Переходя к целому потоку жидкости, следует учесть, что скорости струек в пределах живого сечения потока изменяются по величине и по направлению. Чтобы найти расход жидкости для целого потока, следует просуммировать расходы струек по всему живому сечению, т.е проинтегрировать зависимость dQ по площади живого сечения потока ω:

$$Q = \int_{\omega} u\, d\omega.$$

Для инженерных расчётов вводится понятие средней, условной скорости потока (υ).

Средняя скорость – это такая одинаковая для всех струек скорость, при которой расход жидкости равен суммарному расходу элементарных струек с действительными скоростями, тогда

$$\upsilon = \frac{\int_{\omega} u\, d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega},$$

отсюда $$Q = \upsilon\, \omega. \qquad (4.3)$$

Единица измерения объёмного расхода Q: м^3/с; л/с.

Массовый расход $M = \rho Q$, кг/с.

Весовой расход $G = \rho g Q$, Н/с.

Экспериментальное определение объёмного расхода (Q) проводится объёмным методом, а именно определяется время наполнения (t) определённого объёма жидкости (W) в мерной ёмкости, тогда

$$Q = \frac{W}{t}. \qquad (4.4)$$

Объём протекающей жидкости (W) можно также определить по водомеру, счётчику воды или любому прибору для измерения скорости и расхода (примеры таких приборов будут рассмотрены ниже).

Важным уравнением в гидродинамике является ***уравнение неразрывности потока*** (приводится без вывода).

В случае, если плотность жидкости - величина постоянная (ρ = const), что имеет место при движении капельных жидкостей, уравнение неразрывности имеет вид:

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}$$

или для двух сечений $\upsilon_1 \omega_1 = \upsilon_2 \omega_2$.

Как следствие можно записать $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$; (4.5)

для круглой трубы: $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$.

Для сплошного неразрывного потока расход жидкости постоянный, скорости в живых сечениях обратно пропорциональны площадям живых сечений.

4.5. Основное уравнение гидродинамики. Уравнение Даниила Бернулли

Уравнение Бернулли является основным уравнением гидромеханики, с помощью которого решаются теоретические вопросы и инженерные задачи. Принципы действия многих приборов, в том числе для измерения скорости и расхода жидкости, основаны на уравнении Бернулли.

В уравнении Бернулли установлена связь между основными параметрами движения: давлением, скоростью в живом сечении струйки или потока и геометрическим положением живого сечения струйки или потока жидкости.

В данном разделе рассматривается уравнение Бернулли для ***установившегося*** движения жидкости, находящейся в поле действия сил тяжести, т. е. действует только ускорение свободного падения g.

Уравнение Бернулли выводится в три этапа:

1) для элементарной струйки идеальной жидкости (см. понятие идеальной жидкости и элементарной струйки в разделе 4.2);
2) для элементарной струйки реальной, вязкой жидкости;
3) для целого потока реальной жидкости.

Каждое из последующих уравнений выводится на основе предыдущего. Вместе с тем каждое уравнение имеет своё назначение и круг решаемых задач.

Рассмотрим последовательно все уравнения Д. Бернулли.

4.5.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

Идеальная жидкость – это условная жидкость, в которой отсутствует такое физическое свойство, как вязкость. Идеальная жидкость обладает абсолютной текучестью и движется без возникновения сопротивлений, поэтому энергия струйки остаётся постоянной по ходу движения. Уравнение имеет вид:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \qquad (4.6)$$

Для двух и более сечений по направлению движения струйки уравнение принимает вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = ... = \text{const} \qquad (4.7)$$

Рассмотрим смысл всех слагаемых, входящих в уравнение (4.7).

4.5.2. Интерпретация уравнения Бернулли

Все члены уравнения имеют линейную размерность, поэтому могут характеризоваться с геометрической точки зрения как высоты или напоры, а с энергетической точки зрения как удельная энергия.

Геометрический смысл уравнения Бернулли:

$z = h_{геом}$ - геометрическая высота, или геометрический напор, отсчитывается от произвольной горизонтальной плоскости сравнения;

$\frac{p}{\rho g} = h_p$ – пьезометрический напор, или пьезометрическая высота (см. раздел 1.3). Пьезометрический напор соответствует показанию пьезометра в заданном сечении струйки;

$\frac{u^2}{2g} = h_{ск.}$ – скоростной напор в живом сечении струйки.

Уравнение (4.6) с геометрической точки зрения может быть записано:

$$h_{\text{геом.}} + h_p + h_{\text{ск.}} = H_{\text{полн.}} = \text{const}, \qquad (4.8)$$

где $H_{\text{полн.}}$ – ***полный напор*** в заданном сечении струйки.

Сумма геометрического и пьезометрического напоров называется ***статическим напором***, обозначается $H_{\text{ст.}}$:

$$h_{\text{геом.}} + h_p = H_{\text{ст.}} \quad \text{или} \quad z + \frac{p}{\rho g} = H_{\text{ст.}} \qquad (4.9)$$

Графическое представление уравнения Бернулли называется диаграммой уравнения.

Для построения диаграммы рассмотрим элементарную струйку идеальной жидкости в установившемся плавно изменяющемся движении, выделим в ней два живых сечения **1-1** и **2-2** с площадями $d\omega_1$ и $d\omega_2$, со скоростями u_1 и u_2 и давлениями в этих сечениях p_1 и p_2.

Представим графически уравнение (4.7).

Выбираем произвольно ориентированную ***горизонтальную плоскость сравнения*** **0-0** (рис. 4.4). Отсчёты геометрических высот сечений z_1 и z_2 от плоскости сравнения по вертикали вверх считаются положительными.

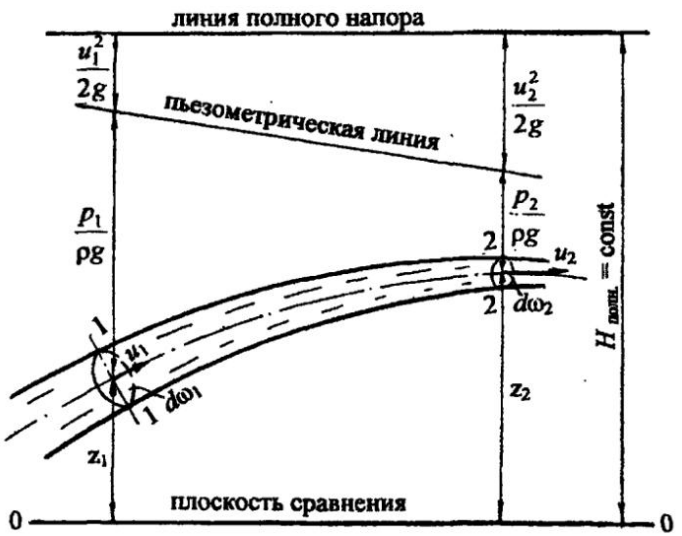


Рис. 4.4

Показываем z_1 и z_2 для выделенных сечений. В каждом сечении по вертикали прибавляем пьезометрические напоры $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$, затем скоростные напоры $\frac{u_1^2}{2g}$ и $\frac{u_2^2}{2g}$.

При построении диаграммы следует учесть, что для изображённой струйки площадь второго живого сечения $d\omega_2$ меньше площади первого живого сечения $d\omega_1$, значит, согласно уравнению неразрывности (см. формулу 4.5), скорость и скоростной напор во втором сечении больше, чем в первом: $\frac{u_2^2}{2g} > \frac{u_1^2}{2g}$.

Сумма трёх напоров для элементарной струйки идеальной жидкости величина постоянная, равная полному напору H. Показываем на диаграмме $H_{\text{полн.}} = \text{const}$.

Линия, соответствующая полному напору, называется линией полного напора. Для идеальной жидкости линии полного напора располагаются на одной горизонтальной плоскости.

Линия, соответствующая пьезометрическим напорам, называется пьезометрической линией.

Очертание пьезометрической линии соответствует форме элементарной струйки. Для струйки цилиндрической или плавно изменяющейся формы пьезометрическая линия является наклонной прямой. Анализ диаграммы показывает, что при сужении струйки скоростной напор возрастает, а статический напор падает.

Энергетический смысл уравнения Бернулли

Все слагаемые уравнения представляют ***удельную энергию***, т. е. отнесённую к единице веса:

$z = e_{\text{полож.}}$ – удельная потенциальная энергия положения;

$\frac{p}{\rho g} = e_{\text{давл.}}$ - удельная потенциальная энергия давления;

$\frac{u^2}{2g} = e_{\text{кин.}}$ – удельная кинетическая энергия.

С энергетической точки зрения уравнение имеет вид:

$$e_{\text{полож.}} + e_{\text{давл.}} + e_{\text{кин.}} = E = \text{const}, \qquad (4.10)$$

где E – полная удельная энергия струйки.

Для идеальной жидкости полная удельная энергия струйки остаётся постоянной для всех сечений по длине движущейся струйки. Таким образом, уравнение Бернулли согласуется с ***законом сохранения энергии.***

Закон сохранения энергии можно проследить на диаграмме (см. рис.4.4): во втором сечении удельная кинетическая энергия $(\frac{u_2^2}{2g})$ увеличивается, значит, удельная потенциальная энергия $(z_2 + \frac{p_2}{\rho g})$ уменьшается.

4.5.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной, вязкой жидкости

Реальная жидкость считается несжимаемой, обладающей важным физическим свойством - вязкостью (см. раздел "Общие сведения о жидкостях"). Вязкость противодействует относительному перемещению слоёв жидкости, в связи с чем возникают силы трения. На преодоление сил трения затрачивается энергия (напор) движущейся жидкости. Это значит, что полный напор (H) или полная удельная энергия (E) струйки не остаются постоянными по длине движущейся струйки, часть напора (энергии) затрачивается на преодоление сил трения.

В уравнение Бернулли вводится дополнительный член h'_w, называемый потерями напора. Таким образом, если H_1 – полный напор в первом сечении струйки, то ко второму сечению останется полный напор H_2, а часть напора $h'_{w_{1-2}}$ израсходуется на преодоление гидравлических сопротивлений между первым и вторым сечениями:

$$H_1 = H_2 + h'_{w_{1-2}}. \tag{4.11}$$

Уравнение Бернулли ***для элементарной струйки реальной, вязкой жидкости*** принимает вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_{w_{1-2}}. \tag{4.12}$$

Геометрический и энергетический смысл каждого слагаемого уравнения остаётся таким же, как для идеальной жидкости.

Представим диаграмму уравнения для элементарной струйки реальной жидкости на рис. 4.5.

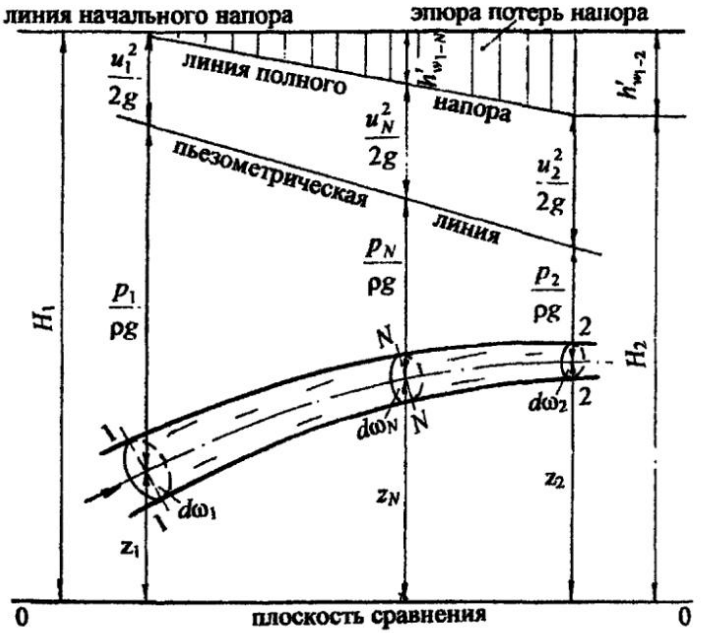


Рис. 4.5

Чтобы проследить подобие построения диаграммы, примем элементарную струйку примерно той же формы, что для идеальной жидкости (см. рис. 4.4). Выделим два живых сечения **1-1** и **2-2** с площадями $d\omega_1$ и $d\omega_2$, покажем три напора (геометрический, пьезометрический, скоростной) в первом сечении и полный напор в первом сечении – H_1. Для второго сечения аналогично отложим три напора так, чтобы полный напор во втором сечении H_2 был меньше полного напора в первом сечении на величину $h'_{w_{1-2}}$.

Величина $h'_{w_{1-2}}$ - это потери напора между сечениями 1-1 и 2-2. Обозначим на диаграмме ***линию полного напора***, ***пьезометрическую линию***, а также ***линию начального напора*** (см. рис. 4.5).

Если выбрать любое сечение $N-N$ по длине движущейся струйки, то для него можно показать потери напора $h'_{w_{1-N}}$ в виде вертикальной линии между линией начального напора и линией полного напора.

Таким образом, вертикальные штриховые линии между линией начального напора и линией полного напора будут соответствовать потерям напора по длине реальной струйки, а заштрихованная часть называется ***эпюрой потерь напора***.

4.5.4. Уравнение Бернулли для целого потока реальной, вязкой жидкости

Переходя к целому потоку, учитываем струйную модель потока. Это значит, чтобы записать уравнение для целого потока, нужно просуммировать энергии струек, составляющих поток, по всему живому сечению потока.

Подробный теоретический вывод уравнения следует изучить по учебнику или курсу лекций. Рассмотрим более упрощённо и кратко теоретические положения по уравнению Бернулли для потока реальной жидкости.

Два слагаемых уравнения $z + \frac{p}{\rho g}$ соответствуют статическому напору $H_{ст.}$ согласно формуле (4.9). В гидродинамике принято считать: ***распределение статического напора по живому сечению подчиняется гидростатическому закону***:

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} \qquad (4.13)$$

Покажем этот закон графически на рис. 4.6. В заданном живом сечении потока (ω) выделим произвольно элементарные струйки **1, 2, 3**, давления в которых p_1, p_2, p_3 соответственно. Проведём плоскость сравнения **0-0** и покажем геометрические высоты (z_1, z_2, z_3) живых сечений струек.

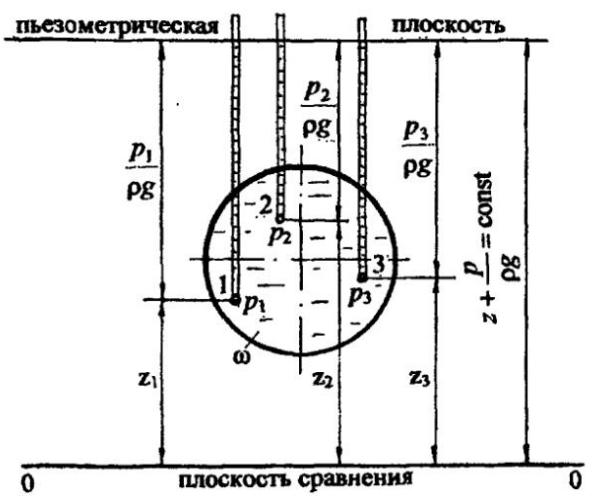


Рис. 4.6

На уровне выбранных струек покажем пьезометры и соответственно пьезометрические напоры $(\frac{p_1}{\rho g}, \frac{p_2}{\rho g}, \frac{p_3}{\rho g})$. Уровни жидкости во всех пьезометрах будут на одном горизонте, а сумма $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$. Такая постоянная величина статического напора будет только в данном живом сечении, в другом сечении она будет также постоянной, но другой величины.

Следующая задача – просуммировать кинетические энергии струек, составляющих поток, по живому сечению потока. Скорости струек (u) в пределах живого сечения потока переменны, поэтому следует учесть неравномерность распределения скорости по живому сечению.

Для практических расчётов вводят ***среднюю, или условную,*** скорость потока (v) (см. раздел 4.4), одинаковую для всех струек. Теоретически рассчитывают ***условную кинетическую энергию*** ($E^{\text{кин.}}_{\text{усл.}}$) через среднюю скорость потока v.

Затем теоретически определяют ***действительную кинетическую энергию*** ($E^{\text{кин.}}_{\text{дейст.}}$) через действительные скорости (u) элементарных струек, составляющих поток.

Неравномерность распределения скорости по живому сечению учитывают коэффициентом корреляции кинетической энергии, или ***коэффициентом неравномерности распределения скорости*** – α:

$$\alpha = \frac{E^{\text{кин.}}_{\text{дейст.}}}{E^{\text{кин.}}_{\text{усл.}}}. \qquad (4.14)$$

Коэффициент α называется также ***коэффициент Кориолиса.*** Значение коэффициента α зависит от режима движения жидкости. Режимы движения жидкости будут рассмотрены ниже. Пока следует учесть, что для ламинарного режима $\alpha = 2{,}0$; для турбулентного режима $\alpha = 1{,}0 \div 1{,}15$ (для практических расчётов при турбулентном режиме воды принимают $\alpha = 1{,}0$).

С учётом введённого коэффициента α скоростной напор ($h_{\text{ск.}}$) или удельная кинетическая энергия потока ($e_{\text{кин.}}$) представляется как $\frac{\alpha v^2}{2g}$.

Дополнительный член уравнения Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости h'_w учитывает потери напора в элементарной струйке.

Для целого потока вводится осреднённая величина потерь напора h_w. Аналогично средней скорости считается, что суммарные потери напора элементарных струек с действительными величинами условно равны полным потерям напора для потока h_w.

С учётом выше изложенных положений уравнение Бернулли ***для целого потока реальной жидкости*** принимает вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}. \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.15) является ***основным уравнением гидродинамики***, которым пользуются для решения теоретических и инженерных задач.

Диаграмма уравнения для целого потока реальной жидкости аналогична диаграмме для элементарной струйки реальной жидкости (см. рис. 4.5). На диаграмме следует обозначить живые сечения ω_1 и ω_2, а скоростные напоры соответственно - $\frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g}$ и $\frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g}$.

Рассмотрим практическое применение уравнения Бернулли.

4.5.5. Экспериментальное определение статического и полного напоров. Расчёт скорости в точке потока

Рассмотрим наклонную трубу диаметром ***d***, выделим живое сечение ω, в котором следует определить статический и полный напор по оси трубы (рис. 4.7).



Рис. 4.7

Проведём произвольно плоскость сравнения **0-0** и отложим геометрический напор сечения (z) до оси живого сечения ω. Покажем пьезометр в живом сечении и отметим пьезометрический напор ($\frac{p}{\rho g}$) по уровню жидкости в пьезометре.

Таким образом, ***по показанию пьезометра определяем статический напор***:

$$H_{\text{ст.}} = z + \frac{p}{\rho g}.$$

Для определения полного напора по оси потока пользуются трубкой Пито. Это трубка очень малого диаметра с загнутым под углом 90° и гладко обработанным концом. Трубка Пито устанавливается по оси трубы или в любой другой точке потока так, чтобы скорость u была направлена на входное отверстие трубки. Если бы не было движения жидкости ($u = 0$), уровни жидкости в пьезометре и трубке Пито были бы на одном горизонте. При действии скорости u на входе в трубку Пито уровень жидкости в трубке поднимется выше уровня в пьезометре на величину, соответствующую скоростному напору, - $\frac{u^2}{2g}$.

Таким образом, ***трубкой Пито определяется полный напор*** в заданной точке потока, в частности по оси потока.

Трубка Пито в сочетании с пьезометром является прибором для измерения скорости.

Действительно, разность показаний трубки Пито и пьезометра соответствует скоростному напору:

$$\frac{u^2}{2g} = H_{\text{полн.}} - H_{\text{ст.}},$$

отсюда скорость в точке потока: $u = \sqrt{2g(H_{\text{полн.}} - H_{\text{ст.}})}$.

Для практических расчётов скорости пользуются формулой

$$u = \varphi\sqrt{2g(H_{\text{полн.}} - H_{\text{ст.}})}, \qquad (4.16)$$

где φ – поправочный коэффициент, который определяется путём тарирования трубки Пито.

Для определения скорости воздушных и газовых потоков пользуются пневмометрической трубкой Пито-Прандтля. В такой трубке совмещены пьезометр и трубка Пито. В корпусе трубки через прорезь в горизонтальной части снимается статический напор, а через открытый носик трубки определяется полный напор. Трубка подключается к *U*–образному манометру, микроманометру, дифференциальному манометру или подобным приборам для измерения разности давлений (напоров). По показанию прибора рассчитывается скоростной напор. С конструкцией трубки Пито–Прандтля следует ознакомиться в учебной литературе.

4.5.6. Диаграмма уравнения Бернулли для потока жидкости в трубе переменного сечения

Рассмотрим экспериментальное построение диаграммы уравнения Бернулли для потока жидкости в трубе переменного сечения диаметрами d_1 , d_2 , d_3 (рис. 4.8). Пусть $d_2 < d_1 < d_3$. Для построения диаграммы воспользуемся принятой методикой (см. разделы 4.5.2; 4.5.3).

По направлению движения жидкости выделим три живых сечения **1-1**; **2-2**; **3-3**; выберем плоскость сравнения **0-0** и отложим геометрические высоты (напоры) выбранных сечений: z_1, z_2, z_3.

В сечениях покажем пьезометрические трубки. Как было отмечено выше (см. раздел 4.5.2), при сужении трубы пьезометрический напор падает, а скоростной напор возрастает, и, наоборот, при расширении трубы пьезометрический напор повышается, а скоростной напор уменьшается.

Отметим уровни жидкости в пьезометрах ($\frac{p_1}{\rho g}, \frac{p_2}{\rho g}, \frac{p_3}{\rho g}$). К геометрическим напорам прибавим пьезометрические напоры. Проведём ***пьезометрическую линию*** по уровням жидкости в пьезометрах (см. рис. 4.8).

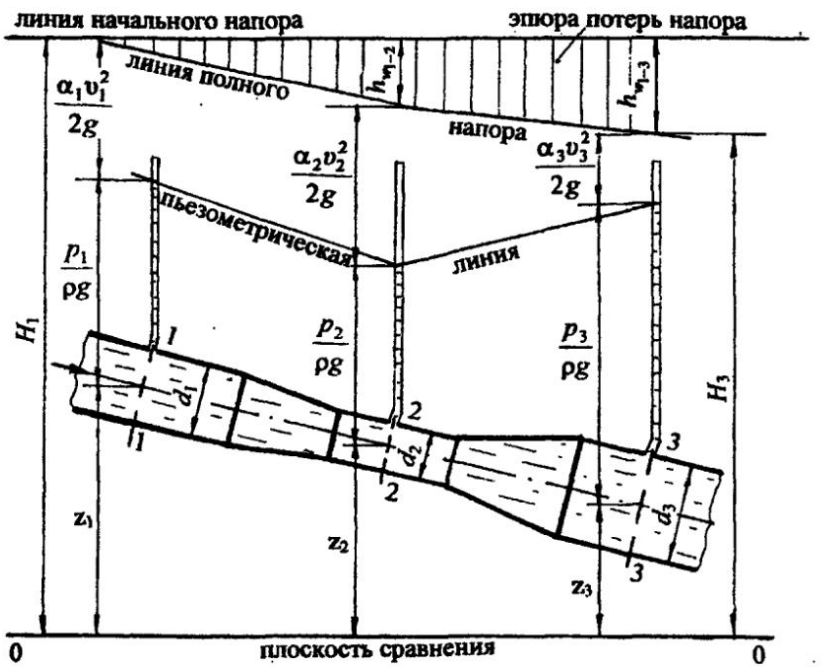


Рис. 4.8

Анализ построения пьезометрической линии показывает, что ***пьезометрическая линия*** очерчивается ломаной линией, которая ***может повышаться*** или ***понижаться*** в зависимости от геометрических размеров трубы.

К сумме геометрического и пьезометрического напоров прибавим скоростные напоры в сечениях: $\frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} > \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} > \frac{\alpha_3 \upsilon_3^2}{2g}$.

В каждом сечении получаем полные напоры, причём следует учесть, что $H_1 > H_2 > H_3$, соединяем ломаной линией их значения. Это ***линия полного напора***, показываем её на диаграмме (см. рис. 4.8).

Линия полного напора по ходу движения жидкости ***понижается***. Понижение линии полного напора соответствует величине потерь напора мужду сечениями по ходу движения жидкости.

Вертикальными линиями заштриховываем эпюру потерь напора.

Методика построения пьезометрической линии, линии полного напора и эпюры потерь напора будет применена при расчёте трубопроводных систем.

Следует запомнить, что на участках трубы с ***постоянным диаметром*** линия полного напора проходит ***параллельно*** пьезометрической линии на расстоянии, равном скоростному напору.

4.5.7. Методика составления уравнения Бернулли для решения теоретических и инженерных задач

С помощью уравнения Бернулли решаются многие теоретические и практические задачи. Применение уравнения Бернулли предусмотрено для реальной, вязкой жидкости при установившемся движении для тех сечений, где движение не должно быть резко изменяющимся.

На использовании уравнения Бернулли основано создание приборов для измерения скорости и расхода потока жидкости.

При составлении уравнения Бернулли следует пользоваться следующей ***методикой***.

1. ***Выбираются два сечения***, в которых известно наибольшее количество параметров, входящих в уравнение, или их нужно определить. Такими сечениями служат свободная поверхность жидкости или места установки измерительных приборов (манометров, вакуумметров, пьезометров и им подобных). Сечения проводятся горизонтально по свободной поверхности (для практических расчётов скорость на свободной поверхности принимается равной нулю, $\upsilon = 0$) или нормально к направлению движения жидкости, т. е. по живому сечению.

2. ***Сечения нумеруются по направлению движения жидкости.*** Это обусловлено тем, что потери напора в гидравлических сопротивлениях увеличиваются по направлению движения жидкости, и дополнительный член уравнения h_w, учитывающий эти потери, должен быть со знаком плюс.

3. В уравнении Бернулли рекомендуется учитывать ***абсолютное давление в выбранных сечениях.*** Это позволит избежать ошибок при определении давления в сечениях.

4. ***Выбирается плоскость сравнения*** **0-0.** Как правило, она совмещается с одним из сечений или проводится через его ось, тогда геометрическая высота этого сечения равна нулю **($z = 0$).** Следует помнить, что плоскость сравнения всегда горизонтальная. Отсчёты геометрической высоты сечения z от плоскости сравнения вверх считаются положительными, вниз – отрицательными.

5. ***Уравнение Бернулли записывается в общем виде.*** Под уравнением представляются значения параметров. Производится подстановка всех величин в уравнение в буквенном выражении. Уравнение решается относительно неизвестного параметра.

Ниже рассмотрим применение уравнения Бернулли для приборов, служащих для измерения скорости и расхода потока жидкости. В этих приборах можно пренебречь потерями напора.

4.5.8. Приборы для измерения скорости и расхода, основанные на уравнении Бернулли

Расходомер Вентури - это труба с плавным переходом от большего диаметра к меньшему, небольшой цилиндрической вставки меньшего диаметра и плавного перехода от меньшего диаметра к большему. В широкой и узкой части расходомера подключены приборы для измерения давления, например пьезометры, по показаниям которых рассчитывается скорость и расход неразрывного потока. Как правило, соотношение диаметров принимается равным: $d_2 : d_1 = 1/2; 1/3$ и тому подобным.

Схема расходомера представлена на рис. 4.9. Для определения скорости и расхода жидкости воспользуемся уравнением Бернулли. Пусть представленный прибор является водомером. Согласно принятой ***методике*** (см. раздел 4.5.7), выполним все пункты составления уравнения.

1. Выберем два живых сечения в местах установки пьезометров. Сечения проведём нормально к направлению движения потока воды.

2. Сечения 1-1 и 2-2 пронумеруем по направлению движения воды.

3. В выбранных сечениях покажем пьезометрические напоры:

$\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$, обозначим разность показаний пьезометров через h.

4. Проведём произвольно горизонтальную плоскость сравнения 0-0 и покажем геометрические высоты выбранных сечений z_1 и z_2 (рис. 4.9).

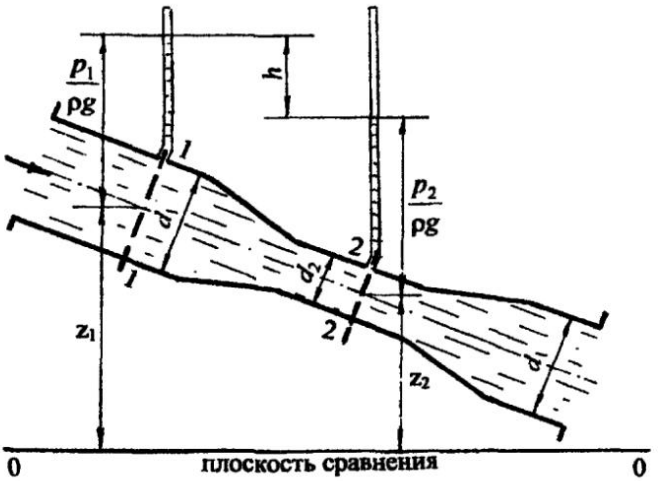


Рис. 4.9

5. Запишем уравнение Бернулли в общем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}.$$

Пренебрегаем потерями напора в водомере ($h_{w_{1-2}} = 0$), считая, что переходы от одного диаметра к другому сделаны плавно и хорошо механически обработаны, как этого требуют приборы.

Принимаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ для движения воды в круглой трубе при турбулентном движении.

Группируя соответственно члены уравнения со статическим и скоростным напорами, получим:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Из рис. 4.9 следует:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = h,$$

значит,
$$h = \frac{\upsilon_2^2}{2g} - \frac{\upsilon_1^2}{2g}.$$

В этом уравнении два неизвестных υ_1 и υ_2, но из условия неразрывности потока (см. формулу (4.5)) следует, что $\upsilon_1\omega_1 = \upsilon_2\omega_2$.

Определяем отсюда $\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}$, далее $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Для лучшего понимания дальнейшего решения, принимаем $d_2 : d_1 = 1/2$, тогда $\upsilon_2 = 4\upsilon_1$.

Разность показаний пьезометров h

$$h = \frac{16\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2}{2g} = \frac{15\upsilon_1^2}{2g},$$

отсюда
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh}{15}}.$$

Расход воды
$$Q = \upsilon_1\omega_1 = \omega_1\sqrt{\frac{2gh}{15}} = K_{\text{приб.}}\omega_1\sqrt{h},$$

где
$$K_{\text{приб.}} = \sqrt{\frac{2g}{15}}.$$

Значение поправочного коэффициента прибора ($K_{\text{приб.}}$) зависит от соотношения диаметров расходомера Вентури в широкой и узкой частях прибора. Как правило, в расчётную формулу расхода (Q) вводится также тарировочный коэффициент φ, который учитывает потери напора в расходомере и определяется опытным путём.

Формула расхода принимает вид: $Q = \varphi K_{\text{приб.}}\omega_1\sqrt{h}$. (4.17)

Анализируя формулу (4.17), видим, что расход жидкости является функцией разности показаний пьезометров (h) или показания другого прибора для измерения разности напоров. Для удобства практических расчётов можно построить графическую зависимость $Q = f(h)$ или $\upsilon_1 = f(h)$; $\upsilon_2 = f(h)$. Это будет квадратичная зависимость, графически в виде параболы.

Расходомер Вентури используется не только для капельных жидкостей, но и для газообразных. В этом случае в широкой и узкой частях расходомера выводятся штуцера, к которым подсоединяется жидкостный прибор для измерения разности давлений, например *U*–образный манометр или микроманометр с наклонной трубкой. Конструкция и принцип действия таких приборов подробно изложены в учебниках и учебных пособиях.

Входной коллектор. Входной коллектор используется для определения скорости и расхода во всасывающих воздушных, газовых, вентиляционных, пневмотранспортных и других системах.

Входной коллектор устанавливается на входе в систему и представляет трубу с плавным входом, выполненным по какому-либо криволинейному закону, например по параболе (рис. 4.10), так, чтобы исключить потери напора на входе в коллектор.

На расстоянии 3-5 диаметров трубы от входа выводится штуцер, к которому подключается жидкостный прибор для измерения давления (*U*-образный манометр, микроманометр). Рабочей жидкостью в приборе может быть вода, спирт или другая капельная жидкость. По показанию прибора (*h*) рассчитывается средняя скорость потока газообразной жидкости в трубе и её расход.

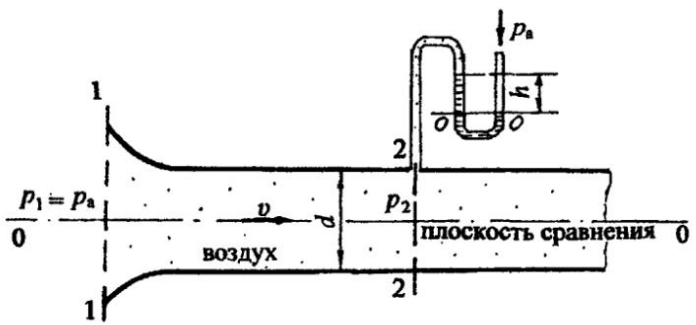


Рис. 4.10

Покажем расчёт скорости и расхода газообразной жидкости во всасывающей системе, пользуясь уравнением Бернулли.

1. ***Выберем два сечения*** по кромке входного сечения коллектора, где скорость ещё практически отсутствует, и в месте установки измерительного прибора. Сечения проведём нормально к направлению движения жидкости, например воздуха (см. рис. 4.10).

2. ***Пронумеруем сечения*** **1-1** ***и*** **2-2** ***по напрвлению движения воздуха.***

3. Учтём ***абсолютное давление в выбранных сечениях.*** Абсолютное давление в первом сечении $p_1 = p_a$. Абсолютное давление во втором сечении будет меньше атмосферного, так как всасывание идёт за счёт создания вакуума. Пользуясь уравнениями гидростатики (см. разделы 1.3; 1.5), составим условие равенства давления относительно плоскости уровня $O - O$ в U-образном манометре, получим абсолютное давление во втором сечении $p_2 = p_a - \rho_{жидк.} gh$.

4. ***Плоскость сравнения 0 – 0 совместим с осью коллектора***, тогда геометрические высоты сечений $z_1 = 0$; $z_2 = 0$ (см. рис. 4.10).

5. Запишем уравнение Бернулли в общем виде, под уравнением представим значения всех параметров и сделаем подстановку данных. При подстановке слагаемых уравнения принимаем $\alpha_2 = 1{,}0$ (круглая труба), потерями напора на входе в коллектор и на участке в трубе между сечениями 1-1 и 2-2 пренебрегаем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}.$$

$z_1 = 0$; $\quad z_2 = 0$;
$p_1 = p_a$; $\quad p_2 = p_a - \rho_{жидк.} gh$;
$v_1 = 0$; $\quad \alpha_2 = 1{,}0$; $\quad v_2 = v$; $\quad h_{w_{1-2}} = 0$.

Принимаем движущуюся жидкость – воздух плотностью $\rho_{возд.}$
После подстановки слагаемых в уравнение Бернулли:

$$\frac{p_a}{\rho_{возд.} g} = \frac{p_a}{\rho_{возд.} g} - \frac{\rho_{жидк.} gh}{\rho_{возд.} g} + \frac{v^2}{2g}.$$

После соответствующих сокращений и преобразований получим расчётную формулу для скорости движения воздуха в трубе:

$$v = \sqrt{\frac{2g\rho_{жидк.} h}{\rho_{возд.}}} = K_{колл.} \sqrt{h},$$

где $K_{колл.} = \sqrt{\frac{2g\rho_{жидк.}}{\rho_{возд.}}}$ - коэффициент прибора (коллектора), зависящий от вида транспортируемой жидкости (воздух, газ) и плотности жидкости в измерительном приборе давления.

Как правило, приборы для измерения скорости и расхода тарируются, т. е. проверяются расчёты по поверенным, стандартным приборам и вводится поправочный тарировочный коэффициент φ, тогда

$$\upsilon = \varphi K_{колл.} \sqrt{h}, \text{ соответственно } Q = \varphi K_{колл.} \cdot \omega \sqrt{h}, \qquad (4.18)$$

где $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$ - площадь живого сечения трубы.

Формула расхода для коллектора (4.18) аналогична формуле расхода для расходомера Вентури (4.17).

По аналогии с расходомером Вентури для входного коллектора можно построить графическую зависимость $\upsilon = f(h)$ и $Q = f(h)$, которой практически удобно пользоваться для определения скорости и расхода без проведения расчётов.

4.6. Режимы движения жидкости

Английский физик Осборн Рейнольдс на основе многочисленных опытов и обработки данных других учёных в 1883 году представил теоретические положения о двух режимах движения жидкости - ламинарном и турбулентном.

Ламинарный режим – это спокойное, прямолинейное, параллельно струйное, послойное движение жидкости.

Турбулентный режим - это неупорядоченное движение струек, с поперечными пульсациями скорости, колебаниями, завихрениями струек, а при больших скоростях с полным перемешиванием жидкости.

Классические опыты Рейнольдса и теоретические положения по изучению режимов движения жидкости подробно изложены во всех учебниках и учебных пособиях, поэтому рассмотрим основные расчётные формулы, необходимые для практических расчётов.

На опытной установке Рейнольдса экспериментально изучено, что при малых скоростях движения жидкости можно наблюдать ламинарный режим.

При дальнейшем увеличении скорости наблюдается разрушение параллельной струйности, колебания, разрыв струек, а при ещё большем увеличении скорости - завихрения струек и перемешивание потока, т. е. устанавливается турбулентный режим.

Скорость, соответствующая переходу одного режима в другой называется ***критической***, обозначается $\upsilon_{кр.}$ Как правило, учитывают два значения критической скорости: ***верхнюю*** $\upsilon_{кр}$ (переход от ламинарного режима к турбулентному) и ***нижнюю*** $\upsilon_{кр.}$ (переход от турбулентного режима к ламинарному). Область движения, соответствующая переходу от одного режима к другому, считается ***неустойчивым*** движением или ***переходной областью***.

Согласно теории Рейнольдса, критическая скорость ($\upsilon_{кр.}$) зависит от диаметра трубы (d) кинематического коэффициента вязкости жидкости (ν) и параметра $Re_{кр}$, называемого критическим числом Рейнольдса, или ***критерием Рейнольдса***:

$$\upsilon_{кр.} = Re_{кр} \frac{\nu}{d}. \qquad (4.19)$$

Критерий Рейнольдса (Re) – величина безразмерная.

Экспериментальные исследования показали, что для труб круглого сечения $Re_{кр}$ может меняться от 1000 до 2300. Общепринятым для практических расчётов считается $Re_{кр.}$=2300.

Если скорость движения жидкости будет меньше критической ($\upsilon<\upsilon_{кр.}$), то режим движения будет ламинарным и $Re<Re_{кр.}$, и, наоборот, при $\upsilon>\upsilon_{кр.}$ число Рейнольдса должно быть больше критического - $Re>Re_{кр.}$

Таким образом, критерий Рейнольдса является гидродинамической характеристикой потока, по которому устанавливается режим движения.

В соответствии с формулой (4.19), расчётная формула Re для круглой трубы:

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu}, \qquad (4.20)$$

для потоков другого профиля $$Re = \frac{\upsilon l}{\nu}, \qquad (4.21)$$

где l – характерный геометрический размер, который может быть выражен через гидравлический радиус (R) (см. формулу 4.1), например, для круглой трубы $l = 4R$ (см. формулу 4.2).

Следует запомнить правило:

Если для потока жидкости $Re \le Re_{кр.}$ = 2300 – режим движения жидкости ламинарный.

Если для потока жидкости $Re > Re_{кр.}$ = 2300 – режим движения жидкости турбулентный.

Ламинарный режим движения характерен для вязких жидкостей таких, как масла, нефть, а также при движении воды в трубках малого диаметра (капиллярах) и через поры грунта.

В турбулентном режиме движется вода в водопроводных трубах, желобах, каналах, реках.

Глава 5

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

5.1. Потери напора в гидравлических сопротивлениях

Дополнительный член уравнения Бернулли h_w (см. формулу (4.15)) соответствует потерям напора в гидравлических сопротивлениях, которые складываются из суммарных потерь напора в местных сопротивлениях (Σh_r) и потерь напора по длине (h_l):

$$h_w = \Sigma h_r + h_l . \qquad (5.1)$$

В гидродинамике принято считать, что потери напора в любом гидравлическом сопротивлении пропорциональны скоростному напору $\frac{\upsilon^2}{2g}$.

Местными сопротивлениями называются различного рода устройства, при прохождении через которые происходит деформация потока, изменение направления движения жидкости или величины скорости, или того и другого.

К местным сопротивлениям относятся краны, задвижки, отводы (колена), внезапное сужение, внезапное расширение, вход в трубу и прочие.

Знак суммы (Σ) в местных сопротивлениях показывает, что на одном трубопроводе может быть установлено несколько местных сопротивлений, потери напора в которых суммируются.

Теоретически потери напора в местном сопротивлении рассчитываются по формуле

$$h_r = \zeta \frac{\upsilon^2}{2g}, \qquad (5.2)$$

где ζ – ***коэффициент местного сопротивления***, значения которого, как правило, устанавливается экспериментально, для некоторых видов местных сопротивлений коэффициент ζ рассчитан теоретически. На величину коэффициента ζ влияют геометрические размеры, конфигурация местного сопротивления и режим течения жидкости.

Значения коэффициентов местных сопротивлений ζ приводятся в справочниках и таблицах, в данном учебном пособии в табл. 4 (см. приложение).

Потери напора по длине – это потери напора, возникающие при движении жидкости вдоль стенок трубопровода, зависящие от диаметра (d), длины трубы (l), скоростного напора и состояния внутренней поверхности

трубы. Потери напора по длине называются также ***линейными потерями*** и рассчитываются по формуле

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}, \qquad (5.3)$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления, или ***коэффициент Дарси***

Значение коэффициента λ или выбор расчётной зависимости этого коэффициента ***зависит от режима движения жидкости и шероховатости трубы*** (или другого русла).

В гидродинамике введено ***понятие единичных***, или ***удельных***, потерь напора по длине, называемых ***гидравлическим уклоном.*** Гидравлический уклон $I = h_l/l$ и рассчитывается по формуле

$$I = \lambda \frac{1}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}. \qquad (5.4)$$

Расчётные зависимости гидравлического уклона (I) для различных режимов движения выводятся теоретически или эмпирически, затем можно перейти к потерям напора по длине (h_l). Многими учёными проведены исследования движения жидкости при турбулентном режиме, как наиболее сложном, и даны эмпирические зависимости для коэффициента гидравлического сопротивления (λ), который входит в расчётные формулы (5.3) и (5.4).

Иногда при расчётах потери напора в местных сопротивлениях заменяют потерями напора в прямолинейном участке трубы ***эквивалентной длины.***

Эквивалентная длина ($l_э$) – это такая длина прямолинейного участка трубы, потери напора в котором равны (эквивалентны) потерям напора в местном сопротивлении при том же расходе жидкости:

$$\lambda \frac{l_э}{d} \frac{\upsilon^2}{2g} = \zeta \frac{\upsilon^2}{2g}, \qquad (5.5)$$

значит,

$$l_э = \frac{\zeta d}{\lambda}. \qquad (5.6)$$

Рассмотрим, от каких факторов и параметров зависят потери напора по длине при ламинарном и турбулентном режимах движениях жидкости.

5.2. Потери напора по длине при ламинарном режиме движения жидкости

Исследования Рейнольдса и других учёных показали, что при ламинарном режиме потери напора пропорциональны скорости в первой степени и зависят только от числа Рейнольдса (***Re***).

Аналитически выведена формула для гидравлического уклона (вывод этой зависимости приведён во всех учебниках и учебных пособиях) при ламинарном режиме:

$$I = \frac{64}{Re}\frac{1}{d}\frac{\upsilon^2}{2g}. \qquad (5.7)$$

Сравнив формулу (5.7) с формулой (5.4), заключаем, что при ламинарном режиме коэффициент гидравлического сопротивления (λ):

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \text{ т.е. } \lambda = f(Re). \qquad (5.8)$$

Потери напора по длине при ламинарном режиме соответственно рассчитываются по формуле

$$h_l = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{\upsilon^2}{2g}. \qquad (5.9)$$

Формула (5.9) носит имя автора доктора медицины ***Пуазейля***, который исследовал движение жидкости, в частности крови, в капиллярных трубках, вывел эту формулу эмпирически, в гидродинамике формула доказана аналитически.

5.3. Потери напора по длине при турбулентном режиме

Турбулентное течение жидкости является наиболее распространённым в технике, но представляет в то же время одно из сложных гидравлических процессов. Многочисленные исследования учёных показали, что создать строгую теорию турбулентного режима не представляется возможным, поэтому для теоретических и инженерных расчётов пользуются экспериментальными данными, графическими зависимостями и эмпирическими формулами.

Как отмечено выше, при числах Рейнольдса $Re<Re_{кр}$ имеет место ***ламинарный режим*** движения. С возрастанием скорости потока и чисел Рейнольдса снижается устойчивость ламинарного режима, начинаются

колебательные движения струек, появляются пульсации скорости, т. е. кроме продольных составляющих скорости возникают поперечные составляющие, при дальнейшем увеличении скорости образуются завихрения, неупорядоченное движение, перемешивание потока, т. е. режим движения становится турбулентным.

Разрушение ламинарного течения начинается с оси потока, постепенно образуется турбулентное ядро потока, а у стенки трубы остаётся ***пограничный (пристеночный) слой***, который состоит из ***ламинарного (вязкого) подслоя и переходного слоя.***

Ламинарный подслой расположен непосредственно у стенки трубы, скорость в нём меняется от **0** у стенки (частицы жидкости просто прилипают к стенке и не двигаются) до некоторой величины. Изменение скорости в пределах вязкого слоя близко к линейному закону.

Толщина ламинарного подслоя (**δ**) имеет малую величину (от долей миллиметра до 1-2 мм) и рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}. \qquad (5.10)$$

Из формулы (5.10) следует, что с увеличением числа Рейнольдса (***Re***) толщина вязкого подслоя уменьшается.

5.3.1. Понятие о гидравлически гладких и шероховатых трубах

Рассмотрим, как влияет ***шероховатость*** труб на потери напора по длине при турбулентном режиме.

На внутренней поверхности трубы имеются неровности, выступы, которые называются ***шероховатостью***.

Различают:

а) ***абсолютную шероховатость***, которая соответствует высоте выступов, неровностей, обозначается **Δ**, измеряется в мм;

б) ***относительную шероховатость***: $\frac{\Delta}{d}$ или $\frac{\Delta}{r}$;

в) ***относительную гладкость*** – величина, обратная относительной шероховатости: $\frac{d}{\Delta}$ или $\frac{r}{\Delta}$.

Форма и высота выступов и неровностей вдоль стенки трубы неодинаковы, поэтому измерить и учесть абсолютную шероховатость практически невозможно. С целью упрощения гидравлических расчётов введено понятие ***эквивалентной*** шероховатости ($\Delta_э$), при которой потери напора в трубе равны (эквивалентны) потерям напора с фактической неоднородной шероховатостью.

В данном учебном пособии, как и во многих учебниках, в расчётных формулах эквивалентная шероховатость $\Delta_э$ упрощённо может записываться, как абсолютная шероховатость Δ.

Значение эквивалентной шероховатости $\Delta_э$ для некоторых видов труб приведено в табл. 6 (см. приложение).

Согласно данным большинства учёных и авторов учебников, при турбулентном режиме можно выделить ***три зоны (области) сопротивления***.

1. ***Движение вдоль гладких стенок***. Это случай, когда толщина вязкого слоя больше абсолютной шероховатости ($\delta > \Delta_э$). Турбулентное ядро скользит по ламинарному подслою. Выступы, неровности перекрыты вязким слоем, шероховатость не влияет на потери напора. Такие трубы называются ***"гидравлически гладкими"***. Потери напора по длине пропорциональны скорости $v^{1,75}$. Коэффициент гидравлического сопротивления (λ) не зависит от шероховатости и является функцией только числа Рейнольдса (***Re***).

Для этой зоны сопротивления пользуются ***эмпирической формулой Блазиуса***:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}, \qquad (5.11)$$

т. е. $\lambda = f(Re)$

2. ***Зона доквадратичного сопротивления***. Это область сопротивления, в которой потери напора зависят как от числа Рейнольдса (***Re***), так и от шероховатости. Потери напора по длине пропорциональны скорости $v^{1,75\text{-}2,0}$, т. е. степенной коэффициент скорости до 2,0, отсюда и название – "зона доквадратичного сопротивления".

В этой области происходит переход от ***гидравлически гладкого*** к вполне ***шероховатому трению***.

А. Д. Альтшуль обобщил экспериментальные данные, графические зависимости и теоретические положения ряда учёных и для зоны доквадратичного сопротивления предложил эмпирическую формулу

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25}, \qquad (5.12)$$

т. е. $\lambda = f\left(Re; \frac{\Delta_э}{d}\right)$.

3. ***Зона квадратичного сопротивления***. Это движение, при котором толщина вязкого слоя меньше абсолютной шероховатости ($\delta < \Delta_э$). Вязкий слой при больших числах Рейнольдса (***Re***) практически разрушен, турбулентное ядро касается неровностей, возникают дополнительные завихрения и связанные с ними потери напора. Потери напора по длине

пропорциональны скорости v^2, отсюда и название – "зона квадратичного сопротивления".

Коэффициент гидравлического сопротивления (λ) является функцией шероховатости. Другое название этой области сопротивления – ***"движение вдоль шероховатых стенок"***, а трубы называются ***"гидравлически шероховатыми"***.

Для этой области в соответствии с гидравлическими особенностями явлений турбулизации применимы эмпирические формулы многих учёных. Для практических расчётов рекомендуется пользоваться формулами:

формула **Никурадзе**: $$\lambda = \frac{1}{\left(1{,}74 + 2\lg\frac{r}{\Delta}\right)^2}, \qquad (5.13)$$

т. е. $\lambda = f\left(\frac{r}{\Delta}\right)$;

формула **Шифринсона**: $$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{d}\right)^{0.25}, \qquad (5.14)$$

т. е. $\lambda = f\left(\frac{\Delta_э}{d}\right)$.

Для турбулентного режима формула А. Д. Альтшуля (5.12) признана наиболее обобщённой и удобной для практических расчётов, так как вычисления по ней сводятся к элементарным алгебраическим действиям и дают надёжные результаты.

Согласно теории Альтшуля, **при** $2300 < Re < 20\frac{d}{\Delta_э}$ второе слагаемое в формуле (5.12) значительно меньше первого, на потери напора влияет только число Рейнольдса (***Re***), и формула практически совпадает с формулой Блазиуса (5.11):

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re}\right)^{0{,}25} = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}; \quad \lambda = f(Re). \qquad (5.15)$$

Как правило, эта зона сопротивления соответствует числам Рейнольдса до $Re = 2\cdot10^4$.

При числах Рейнольдса $20\frac{d}{\Delta_э} < Re < 500\frac{d}{\Delta_э}$ на потери напора оказывают влияние как число ***Re***, так и относительная шероховатость $\frac{\Delta_э}{d}$, имеет место зона доквадратичного сопротивления.

Коэффициент гидравлического сопротивления λ следует рассчитывать по формуле (5.12)

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25}.$$

Границы изменения чисел Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4$.

При числах Рейнольдса $Re > 500\,\frac{d}{\Delta_э}$ имеет место зона квадратичного сопротивления, или движение вдоль шероховатых стенок. В формуле (5.12) первое слагаемое значительно меньше второго, им можно пренебречь. Потери напора по длине зависят только от относительной шероховатости $\frac{\Delta_э}{d}$, и формула (5.12) переходит в формулу Шифринсона (5.14):

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25}.$$

Согласно графической зависимости А. Д. Альтшуля, для этой области сопротивления значения чисел Рейнольдса находятся в пределах $Re = 5 \cdot 10^4 - 10^6$.

Из выше изложенного следует, что понятие ***"гидравлически гладкие"*** и ***"гидравлически шероховатые"*** трубы относительное. Так, одна и та же труба с определённой шероховатостью может считаться гидравлически гладкой или шероховатой в зависимости от скорости движения (или числа ***Re***), тогда для коэффициента гидравлического сопротивления λ выбирается соответствующая расчётная формула.

В представленной методике выбора расчётной зависимости коэффициента λ следует учитывать, что в трубах с большой шероховатостью при движении воды даже при малых числах Рейнольдса (Re<2300) ламинарный режим движения невозможен.

5.3.2. Потери напора по длине в трубах с описательной шероховатостью

В гидравлических расчётах трубопроводов и других русел часто приходится встречаться с такой внутренней поверхностью трубы (бетонные, асбестовые, загрязнённые, водосточные трубы и им подобные) или иного русла (канала, лотка, жёлоба), для которых невозможно определить абсолютную шероховатость. В этом случае предложено коэффициент гидравлического сопротивления λ рассчитывать по формуле

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}, \qquad (5.16)$$

где C – коэффициент Шези.

Коэффициент Шези (C) зависит от многих факторов, в том числе от геометрических размеров и состояния внутренней поверхности трубы или другого русла. В практике расчётов коэффициент C можно принимать по таблицам или рассчитывать по специальным формулам. Наиболее простой формулой для определения коэффициента Шези является ***формула Маннинга***:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \tag{5.17}$$

где n или $1/n$ – коэффициенты шероховатости стенок трубы или русла по описанию, приводятся в таблицах. В данном учебном пособии значения коэффициентов n и $1/n$ приведены в табл. 7 (см. приложение);
R – гидравлический радиус, м. Согласно формуле (4.2), для круглой трубы гидравлический радиус $R = d/4$.

5.3.3. Потери напора по длине, выраженные через обобщённые параметры

В практике расчётов гидравлических систем, в частности трубопроводных систем, часто приходится рассчитывать потери напора по длине не через скорость (υ), а через расход (Q), который известен или его нужно определить.

Преобразуем формулу (5.3) потерь по длине:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g},$$

а) выразим скорость через расход: $\upsilon^2 = \frac{Q^2}{\omega^2}$;

б) введём гидравлический радиус: $d = 4R$;

в) коэффициент гидравлического сопротивления (λ) запишем по формуле (5.16): $\lambda = \frac{8g}{C^2}$.

Получаем: $$h_l = \frac{8g}{C^2} \frac{l}{4R} \frac{Q^2}{\omega^2 2g} = \frac{Q^2}{C^2 \omega^2 R} l. \tag{5.18}$$

В формуле (5.18) обозначим $C^2\omega^2 R = K^2$,

Схема выбора теоретической формулы для расчёта коэффициента гидравлического сопротивления λ

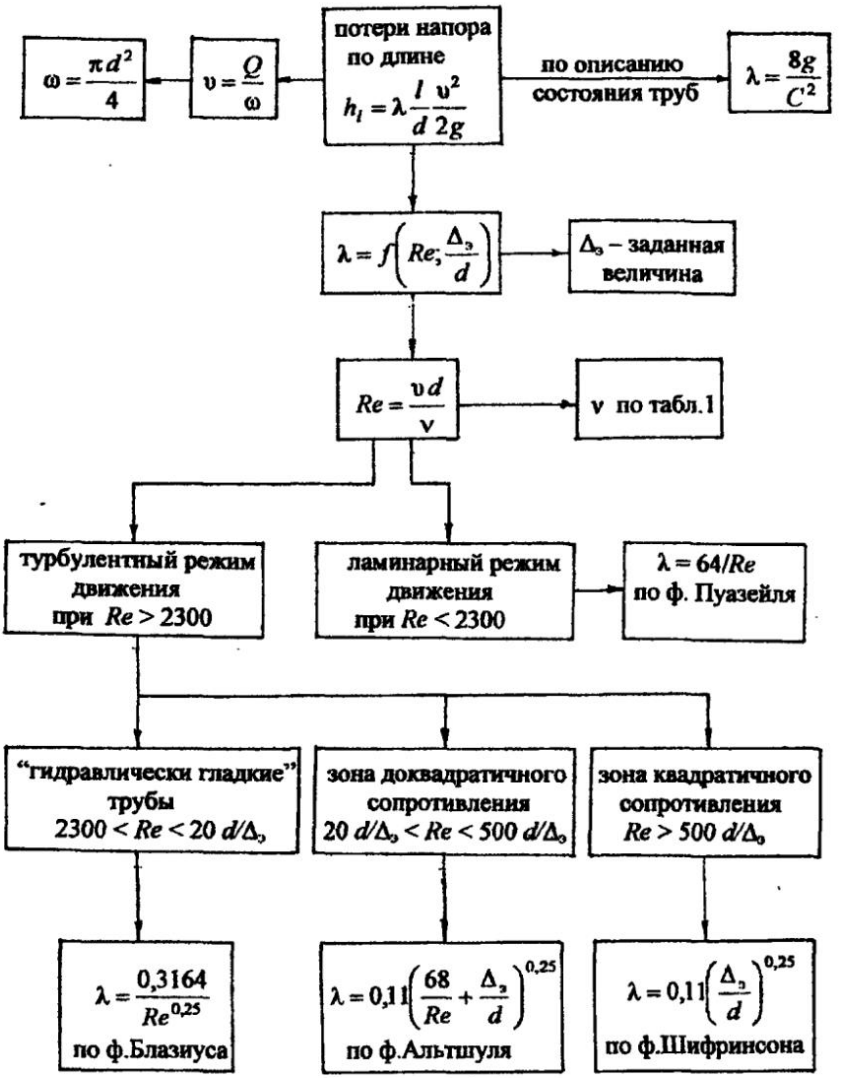


Рис. 5.1

где $K = C\omega\sqrt{R}$ называется модулем расхода, или расходной характеристикой, единица измерения $м^3/с$.

Формула (5.18) принимает вид:

$$h_l = \frac{Q^2}{K^2} l. \qquad (5.19)$$

Для удобства практических расчётов величина $1/K^2$ обозначается через A:

$$A = \frac{1}{K^2}, \qquad (5.20)$$

где A – удельное сопротивление (сопротивление единицы длины), единица измерения $с^2/м^6$.

Таким образом, потери напора по длине рассчитываются по формуле

$$h_l = AQ^2 l. \qquad (5.21)$$

В приведённых формулах параметры K и A называются ***обобщёнными параметрами***, значения которых приводятся в таблицах (см. приложение, табл. 8) ***для нормальных водопроводных*** труб, другое название – ***водопроводные трубы в нормальных условиях***.

В табл. 9 (см. приложение) приведены значения удельного сопротивления A для расчёта трубопроводов при квадратичном законе сопротивления в соответствии с ***абсолютной шероховатостью*** (Δ) труб.

Обобщив все теоретические положения по расчёту потерь напора по длине (h_l), предлагаем схему для выбора теоретической расчётной формулы коэффициента гидравлического сопротивления λ (рис. 5.1).

Раздел третий

ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Задача прикладной гидромеханики – применение основных законов гидростатики и гидродинамики для практических и инженерных расчётов.

Глава 6

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

По методике расчёта трубопроводные системы делятся на две группы простые и сложные.

Простые системы состоят, как правило, из одной трубы, возможно соединение нескольких труб сравнительно небольшой длины (примерно до 100 м), в которых учитываются все виды гидравлических сопротивлений, но, главное, с ***постоянным расходом***.

Сложные системы состоят из труб разной длины и разных диаметров, соединённых по определённой гидравлической схеме, причём ***расход жидкости*** на каждом участке ***различный*** в соответствии с расходами потребителей. Эти системы, как правило, большой длины. Главными гидравлическими сопротивлениями являются потери по длине. Потери напора в местных сопротивлениях принимаются равными (5 ÷ 10) % от потерь напора по длине, т. е. $\Sigma h_r = (0{,}05 \div 0{,}1)\, h_l$.

6.1. Расчёт простых трубопроводных систем

При расчёте простых трубопроводов в зависимости от поставленной задачи, известных и определяемых параметров выделяют ***три типа расчётов***.

1. Определение ***напора*** (H) ***или давления*** (p) при известных: расходе жидкости (Q), геометрических размерах трубопровода (длине l, диаметре d), местных сопротивлениях на трубопроводе.

2. Определение ***расхода*** (Q), или пропускной способности трубопровода, при известных: действующем напоре (H) или давлении (p) в системе; геомстрических размерах и установленных местных сопротивлениях.

3. Определение ***геометрических размеров*** трубопроводов (l; d), ***характеристик местных сопротивлений*** при известном расходе (Q), действующем напоре (H) или давлении (p). Наиболее трудоёмкой считается

задача по определению диаметра (d) трубопровода, так как такой расчёт проводится методом подбора и пересчёта нескольких вариантов.

Рассмотрим расчёт простого трубопровода. Здесь возможны ***два случая: истечение жидкости в атмосферу и истечение под уровень.***

Расчёты простых трубопроводных систем основаны на использовании основного уравнения гидродинамики - уравнения Бернулли.

6.1.1. Расчёт простой трубопроводной системы с истечением жидкости в атмосферу

На рис. 6.1 представлена схема простого водопровода с водонапорной башней, создающей постоянный напор H. Известны длина трубопровода l, диаметр d, местные сопротивления в виде входа в трубу, вентиля и двух колен (отводов).

Давление на поверхности воды в баке атмосферное (p_a), выход воды в конце трубы также в атмосферу (p_a).

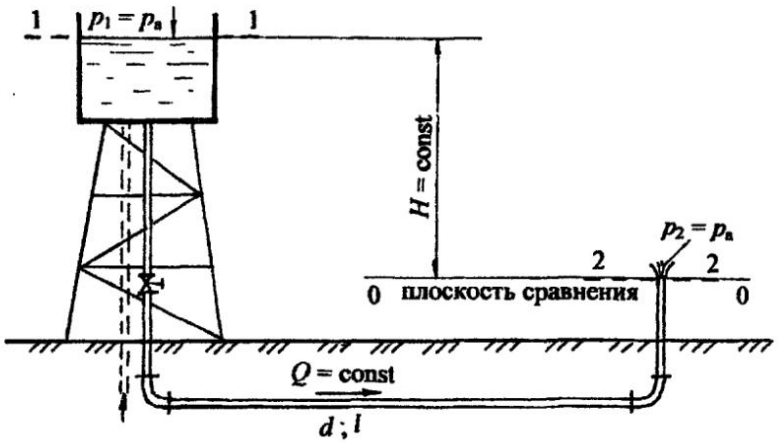


Рис. 6.1

В представленной схеме действующий напор H считается постоянным, уровень жидкости в напорном баке поддерживается на постоянном горизонте за счёт подачи воды (или другой жидкости) в бак, например, из скважины или от насосной установки, так, чтобы автоматически регулировался приток в бак, равным расходу жидкости в системе. Постоянная подача жидкости показана по трубопроводу, обозначенному пунктирной линией.

В дальнейших схемах трубопроводных систем приток жидкости в систему не обозначается, но всегда подразумевается ***установившееся движение***, т. е. скорость движения жидкости в трубе не изменяется во времени.

Расчёт простой системы проведём путём применения уравнения Бернулли.

В разделе 4.5.7 представлена методика составления уравнения Бернулли, которая была использована при изучении приборов для измерения скорости и расхода жидкости (см. раздел 4.5.8). При составлении уравнения Бернулли для этих приборов не учитывались потери напора в гидравлических сопротивлениях. В приведённых расчётах трубопроводных систем будут учтены все виды гидравлических сопротивлений.

Итак, при расчёте простой системы с истечением в атмосферу воспользуемся уравнением Бернулли (4.15). Согласно методике составления уравнения, выполним следующие пункты.

1. Выбираем два сечения: ***одно*** сечение проводим ***по свободной поверхности в напорном баке*** (башне), где скорость допустимо считать равной нулю (уровень жидкости постоянный, движения нет), ***другое – на выходе жидкости из трубы***, где существует определённая скорость движения.

2. Сечения 1-1 и 2-2 ***нумеруем по направлению движения жидкости.***

3. В выбранных сечениях учитываем ***абсолютное давление***, т. е. давление, рассчитанное с учётом атмосферного: $p_1 = p_a$; $p_2 = p_a$.

4. ***Плоскость сравнения 0 – 0 совместим с сечением 2 – 2***, тогда $z_1 = H$; $z_2 = 0$. Если бы плоскость сравнения совместили с сечением 1 – 1, тогда $z_1 = 0$; $z_2 = -H$. Помним, что отсчёты от плоскости сравнения вверх считаются положительными, вниз – отрицательными.

5. Записываем уравнение Бернулли (4.15) в общем виде и расписываем значение всех параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

$z_1 = H$; $z_2 = 0$;
$p_1 = p_a$; $p_2 = p_a$;
$\upsilon_1 = 0$; $\upsilon_2 = \upsilon$; $\alpha_2 = 1{,}0$;

для коэффициента α_2 предполагаем турбулентный режим в круглой трубе.

Получим: $$H + \frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\upsilon^2}{2g} + h_w.$$

В этом уравнении у потерь напора в гидравлических сопротивлениях (h_w) индекс 1-2 опускаем, поскольку вся расчётная схема системы входит между выбранными сечениями.

После сокращений получим:

$$H = \frac{\upsilon^2}{2g} + h_w. \qquad (6.1)$$

Вывод: при истечении жидкости в атмосферу действующий напор затрачивается на создание скоростного напора и преодоление гидравлических сопротивлений.

Представим в уравнении (6.1) гидравлические сопротивления согласно формуле (5.1)

$$h_w = \Sigma h_r + h_l..$$

С учётом формул (5.2) и (5.3):

$$\Sigma h_r = \Sigma\zeta \frac{\upsilon^2}{2g} \quad \text{и} \quad h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

Получим $$H = \frac{\upsilon^2}{2g} + \Sigma\zeta \frac{\upsilon^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}$$

или $$H = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(1 + \Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}\right). \qquad (6.2)$$

Таким образом, по формуле (6.2) рассчитывается ***действующий напор простой системы при истечении жидкости в атмосферу.***

Из формулы (6.2) можно получить расчётную формулу для расхода.

Скорость движения жидкости в трубе

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{1 + \Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH}. \qquad (6.3)$$

Расход $Q = \upsilon\omega$;

где ω – площадь живого сечения: $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$;

$$Q = \omega \sqrt{\frac{1}{1 + \Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH} . \qquad (6.4)$$

В формуле (6.4) величина $\sqrt{\frac{1}{1 + \Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}}}$ постоянная для заданной системы, влияет на величину расхода и называется ***"коэффициент расхода "***, обозначается $\mu_{сист.}$:

$$Q = \mu_{сист.} \omega \sqrt{2gH} . \qquad (6.5)$$

Формула (6.5) является обобщённой формулой ***для расхода жидкости в простых системах***, а значение коэффициента μ рассчитывается для каждой системы.

6.1.2. Расчёт простой трубопроводной системы при истечении жидкости под уровень

Истечением под уровень считается случай, когда жидкость поступает в резервуар, заполненный жидкостью, т. е. под уровень жидкости. Схема трубопровода с истечением под уровень может быть получена из предыдущей схемы (см. рис. 6.1), но выход жидкости покажем в другой открытый резервуар (рис. 6.2).

Для расчёта простой системы с истечением под уровень воспользуемся также уравнением Бернулли (4.15):

1. Выберем ***два сечения*** по свободным поверхностям жидкости в резервуарах, где скорости жидкости равны нулю.

2. Сечения **1-1** и **2-2** ***пронумеруем по направлению движения жидкости.***

3. Учтём ***абсолютные давления*** в выбранных сечениях: $p_1 = p_a$; $p_2 = p_a$.

4. ***Плоскость сравнения*** **0-0** совместим с сечением **2-2**, тогда $z_1 = H$; $z_2 = 0$.

5. ***Запишем уравнение Бернулли*** в общем виде и покажем подстановку параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$z_1 = H$; $z_2 = 0$;
$p_1 = p_a$; $p_2 = p_a$;
$v_1 = 0$; $v_2 = 0$.

После подстановки параметров и сокращений получим:

$$H = h_w. \tag{6.6}$$

Вывод: в простой трубопроводной системе при истечении жидкости под уровень действующий напор затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений.

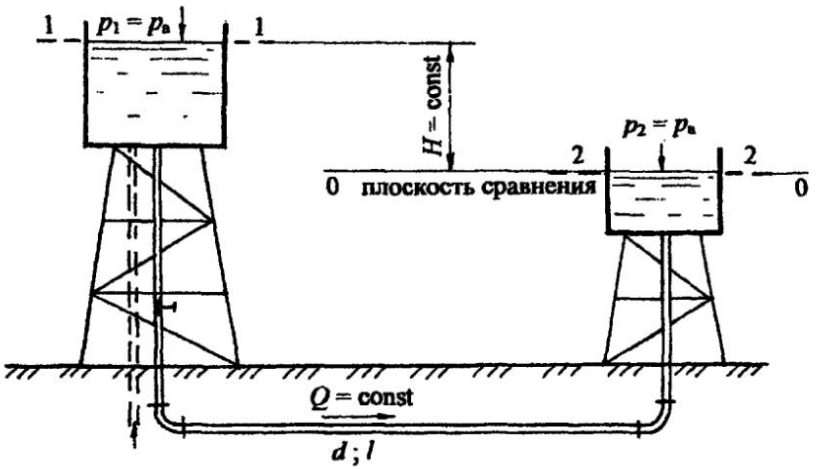


Рис. 6.2

С учётом формул (5.1); (5.2) и (5.3) формула (6.6) принимает вид:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\Sigma\zeta + \lambda\frac{l}{d}\right). \tag{6.7}$$

Гидравлический расчёт двух рассмотренных систем аналогичен, а формулы (6.2) и (6.7) тождественны. Различие в формулах состоит в том, что при истечении в атмосферу единица в скобках учитывает единичную кинетическую энергию на выходе (или скоростной напор $v^2/2g$).

При истечении под уровень единица в скобках входит в сумму коэффициентов местных сопротивлений, а именно $\zeta_{вых.} = 1{,}0$.

По аналогии с предыдущим выводом получим формулу для расхода:

$$Q = \omega \sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH} . \qquad (6.8)$$

Обозначим:

$$\sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}}} = \mu_{сист.\ под\ ур.},$$

тогда

$$Q = \mu_{сист.\ под\ ур.} \omega \sqrt{2gH} . \qquad (6.9)$$

Формула (6.9) подтверждает обобщённость применения формулы (6.5).

На рис. 6.1 и 6.2 представлены схемы простых систем в самом общем виде. В технике имеют место различные схемы трубопроводных систем в виде водопроводов, нефтепроводов, газопроводов и им подобные. Движение жидкости происходит не только за счёт напорного бака (башни), разности напоров в резервуарах, но и за счёт давления, создаваемого насосом.

6.1.3. Методика расчёта простых трубопроводных систем

Расчёт простых систем ***первого типа*** по определению ***напора*** (***H***) или ***давления*** (***p***) включает следующие этапы.

1. Составляется уравнение Бернулли для характерных сечений.
2. Производится подстановка всех параметров ***в буквенном выражении для определения неизвестного напора или давления.***
3. Определяется ***скорость движения*** жидкости в трубе при известном расходе.
4. Рассчитываются потери напора в ***местных сопротивлениях*** (Σh_r).
5. Определяются потери напора ***по длине*** (h_l) по схеме, представленной на рис. 5.1.
6. Производится ***численный расчёт*** напора или давления.

Простые системы ***второго типа*** по определению ***расхода*** (***Q***) рассчитываются в следующей последовательности:

1. Составляется уравнение Бернулли для выбранных сечений.
2. Производится подстановка входящих параметров и уравнение решается ***в буквенном выражении относительно скорости движения жидкости.***

3. ***В расчётную формулу скорости*** входит коэффициент гидравлического сопротивления (λ), формула для которого выбирается в соответствии со значением числа Рейнольдса (***Re***). Но в формулу (4.20) для (***Re***) также входит неизвестная скорость, поэтому при заданной шероховатости трубы ($\Delta_э$) при движении воды предполагается турбулентный режим, зона квадратичного сопротивления, для которой λ не зависит от числа Рейнольдса ***Re***. Коэффициент λ рассчитывается по формуле Шифринсона (5.14), а затем определяется скорость движения жидкости.

4. ***Проверяется режим движения жидкости и зона сопротивления*** (см. схему на рис. 5.1). Если подтверждается квадратичная зона сопротивления, рассчитывается расход жидкости (***Q***).

Если режим движения и зона сопротивления не подтвердится, проводится повторный расчёт коэффициента λ в соответствии с числом ***Re*** по схеме (рис. 5.1).

5. После окончательного уточнения режима движения и области сопротивления определяется коэффициент λ ***и рассчитывается расход Q.***

Как правило, при движении воды в шероховатых трубах имеет место турбулентный режим, зона квадратичного сопротивления.

Расчёт простых систем ***третьего типа*** по определению ***длины*** или значений ***коэффициентов местных сопротивлений*** различных устройств (кранов, задвижек, диафрагм и им подобных) не представляет трудности.

Составляется уравнение Бернулли для характерных сечений, затем оно преобразуется в буквенное выражение для расчёта предельной длины трубопровода или для определения коэффициента местного сопротивления какого-либо устройства. В буквенное выражение подставляется значение заданных или рассчитанных параметров.

Трудной представляется задача по ***определению диаметра трубопровода*** (***d***) при заданных расходе, напоре и длине (***Q***; ***H*** и ***l***).

Наиболее просто такую задачу решить графически. Расчёт проводим путём нескольких приближённых решений.

Как и ранее, предполагаем квадратичную область сопротивления, рассчитывая коэффициент λ по формуле (5.14) при заданной шероховатости – $\Delta_э$, задаём ряд значений диаметра (d_1; d_2; ……d_n).

Пользуясь формулой для расхода в буквенном выражении, например формулой (6.4):

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{1}{1+\Sigma\zeta+\lambda\frac{l}{d}}}\sqrt{2gH},$$

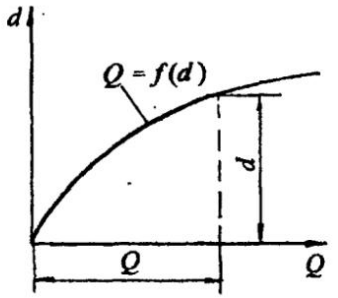


Рис. 6.3

просчитываем несколько вариантов значений расхода (Q_1; Q_2;.....Q_n) для принятых диаметров и строим графическую зависимость $Q = f(d)$. Эта зависимость квадратичная и в общем виде представлена на рис. 6.3.

По графику для заданного значения расхода Q определяется диаметр трубопровода d.

Для ориентировочного определения наивыгоднейшего диаметра трубопровода (d) при заданном расходе (Q) можно пользоваться также формулой В. Г. Лобачёва:

$$d = (0{,}8 - 1{,}2)\, Q^{0{,}42}.$$

На практике для расчёта диаметра трубопровода пользуются ***оптимальными*** значениями скоростей: при движении в водопроводных системах скорость v = (0,8 – 1,2) м/с, реже до 1,5 м/с; для шахтных водоотливных трубопроводов v = (2,0 – 2,5) м/с.

Следует отметить, что для технико-экономических расчётов по определению оптимальных значений диаметров трубопроводов следует пользоваться специальной литературой и таблицами.

Ниже представлены примеры расчётов различного вида простых систем. Расчёты включают определение основных параметров движения, построения пьезометрической линии и графическое определение потерь напора в системе.

6.2. Примеры решения задач по теме: "Расчёт простых трубопроводных систем"

Задача 6.2.1 С помощью насоса по трубе диаметром d = 50 мм и длиной l = 70 м нефть подаётся в закрытый резервуар на высоту H = 15 м. Считать H = const.

Определить показание мановакуумметра ($p_{мв}$), установленного на поверхности нефти в закрытом резервуаре, если показание манометра после насоса $p_{ман}$ = 1,3 ат. Расход нефти Q = 1,2 л/с, плотность нефти $\rho_н$ = 900 кг/м^3, относительная вязкость по Энглеру $^\circ E$ = 4,0. В системе установлен пробковый кран с углом закрытия α = 40° и два колена с коэффициентом сопротивления $\zeta_{кол.}$ = 0,8 (рис. 6.4).

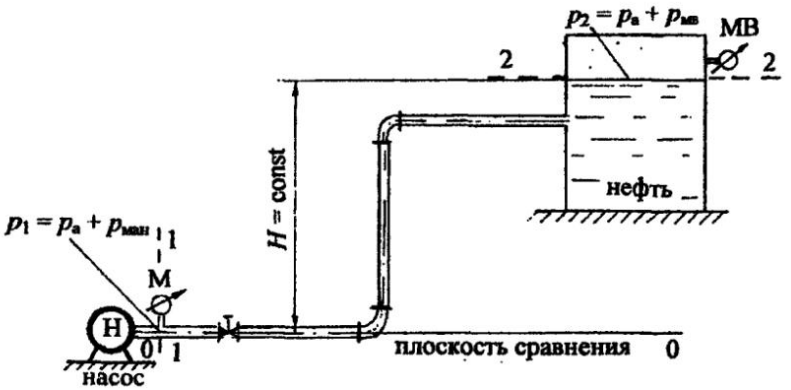


Рис. 6.4

Решение. Представленная трубопроводная система относится ***к первому типу*** простых систем.

Следует вспомнить из главы 1 (задача 1.5.3), что ***мановакуумметр*** – это прибор, который может измерять, как манометрическое (избыточное) давление, так и вакуум. При решении задачи давление на поверхности нефти будем обозначать $p_{мв}$. Если при решении задачи значение давления получится положительным, значит, мановакуумметр работает, как манометр; отрицательное значение давления означает, что мановакуумметр работает, как вакуумметр.

Для определения показания мановакуумметра воспользуемся уравнением Бернулли. Согласно методике составления уравнения (см. раздел 4.5.7):

1. Выбираем ***два сечения***: ***одно*** - в месте установки манометра, это сечение проводим нормально к направлению движения жидкости, где скорость равна скорости движения нефти в трубе – υ; ***другое*** – по свободной поверхности в резервуаре, где давление определяется по мановакуумметру, а скорость равна нулю.

2. Сечения **1-1** и **2-2** нумеруем по направлению движения жидкости, чтобы в уравнении потери напора в гидравлических сопротивлениях учитывались со знаком "+".

3. В выбранных сечениях принимаем абсолютное давление, т. е. с учётом атмосферного: $p_1 = p_а + p_{ман}$; $p_2 = p_а + p_{мв}$.

4. Плоскость сравнения **0-0** проводим через ось первого сечения: $z_1 = 0$; $z_2 = H$.

5. Записываем уравнение Бернулли (4.15) в общем виде и производим подстановку всех параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$z_1 = 0$; $z_2 = H$;
$p_1 = p_а + p_{ман}$; $p_2 = p_а + p_{мв}$;
$\upsilon_{1\ сеч.} = \upsilon$; $\alpha_1 = 2{,}0$; $\upsilon_{2\ сеч.} = 0$.

Движущаяся жидкость – нефть относится к вязким жидкостям, поэтому предполагаем ламинарный режим (коэффициент $\alpha_1 = 2{,}0$). В процессе решения задачи режим движения нефти будет проверен.

Подставляем все параметры в уравнение Бернулли:

$$\frac{p_а}{\rho_н g} + \frac{p_{ман}}{\rho_н g} + \frac{2\upsilon^2}{2g} = H + \frac{p_а}{\rho_н g} + \frac{p_{мв}}{\rho_н g} + h_w.$$

После сокращений и преобразования уравнения Бернулли получим:

$$\frac{p_{мв}}{\rho_н g} = \frac{p_{ман}}{\rho_н g} + \frac{2\upsilon^2}{2g} - H - h_w. \qquad (6.10)$$

Рассчитаем все слагаемые в уравнении (6.10):

$$\frac{p_{ман}}{\rho_н g} = \frac{1{,}3 \cdot 98 \cdot 10^3}{900 \cdot 9{,}8} = 14{,}44\ м.$$

Скорость движения нефти в трубе (υ) рассчитываем через расход (Q):

$$\upsilon = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2};$$

расход Q и диаметр d переводим: $Q = 1{,}2$ л/с $= 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^3/с; $d = 0{,}05$ м;

$$\upsilon = \frac{4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}05^2} = 0{,}61 \text{ м/с};$$

скоростной напор $\frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{0{,}61^2}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}019$ м (достаточно малая величина).

Рассчитаем потери напора в гидравлических сопротивлениях по формуле (5.1)

$$h_w = \Sigma h_r + h_l;$$

потери напора в местных сопротивлениях по формуле (5.2)

$$\Sigma h_r = \Sigma\zeta \frac{\upsilon^2}{2g},$$

где $\Sigma\zeta$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений. Учитываем потери напора в двух коленах и в пробковом кране:

$$\Sigma\zeta = 2\,\zeta_{\text{кол.}} + \zeta_{\text{кр.}} + \zeta_{\text{вых.}};$$

по табл. 4 (см. приложение): $\zeta_{\text{кр.}} = 17{,}3$ при угле закрытия $\alpha = 40°$, $\zeta_{\text{вых.}} = 1{,}0$, тогда:

$$\Sigma\zeta = 2 \cdot 0{,}8 + 17{,}3 + 1{,}0 = 19{,}9;$$

получим $\Sigma h_r = 19{,}9 \cdot 0{,}019 = 0{,}38$ м.

Потери напора по длине определяем согласно формуле (5.3):

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

Для выбора расчётной формулы коэффициента гидравлического сопротивления λ (см. схему, рис. 5.1) определим режим движения жидкости по критерию Рейнольдса (см. формулу 4.20):

$$Re = \frac{\upsilon d}{\nu}.$$

В формулу (4.20) входит коэффициент кинематической вязкости ν. Для расчёта этого коэффициента воспользуемся значением относительной вязкости в градусах Энглера ($^{\circ}E$) (см. физические свойства жидкости). По формуле Уббелоде:

$$\nu = \left(0{,}0731^{\circ}E - \frac{0{,}0631}{^{\circ}E}\right)\cdot 10^{-4};$$

$$\nu = \left(0{,}0731 \cdot 4{,}0 - \frac{0{,}0631}{4{,}0}\right)\cdot 10^{-4}, \text{м}^2/\text{с};\ \ \nu = 0{,}277\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2/\text{с}.$$

Получим: $$Re = \frac{0{,}61\cdot 0{,}05}{0{,}277\cdot 10^{-4}} = 1101 < Re_{\text{кр}} = 2300.$$

Так как число ***Re*** меньше критического значения, заключаем, что имеет место ***ламинарный режим движения нефти***. Принятое значение коэффициента $\alpha_1 = 2{,}0$ верно.

Для ламинарного режима коэффициент гидравлического сопротивления λ рассчитывается по формуле (5.8)

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Рассчитаем потери напора по длине:

$$h_l = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{\upsilon^2}{2g};\ \ h_l = \frac{64}{1101}\cdot\frac{70}{0{,}05}\cdot 0{,}019 = 1{,}54\,\text{м}.$$

Потери напора в гидравлических сопротивлениях:

$$h_w = 0{,}38 + 1{,}54 = 1{,}92\ \text{м}.$$

Подставим значение всех слагаемых в преобразованное уравнение Бернулли (6.10):

$$\frac{p_{мв}}{\rho_н g} = 14{,}44 + 0{,}019 \cdot 2 - 15{,}0 - 1{,}92 = -2{,}44 \text{м}.$$

Получили отрицательное значение, значит, мановакуумметр работает как вакуумметр. Величина вакуума

$p_{мв} = p_{вак.} = 2{,}44 \cdot \rho_н g = 2{,}44 \cdot 900 \cdot 9{,}8 = 21521$ Па или $p_{вак.} = 0{,}22$ ат.

Ответ. Показание мановакуумметра соответствует вакуумметрическому давлению: $p_{мв} = p_{вак.} = 0{,}22$ ат.

Задача 6.2.2. Вода из закрытого резервуара A поступает в открытый резервуар B при пропускной способности системы Q = 15 л/с по трубам: d_1 = 75 мм; l_1 = 8 м и l_2 = 12 м; d_2 =100 мм и l_3 = 15 м. Напоры воды в резервуарах постоянны относительно оси трубы: H_1 = 1,5 м; H_2 = 3,5 м (рис. 6.5).

Определить показание манометра ($p_{ман}$) на поверхности воды в закрытом резервуаре, а также соответствующий манометрический напор ($H_{ман}$).

Принять абсолютную шероховатость труб: $\Delta_1 = 0{,}5$ мм; $\Delta_2 = 0{,}2$ мм. Учесть местные сопротивления в системе: на входе в первую трубу; в пробковом кране при угле закрытия $\alpha = 30°$; при внезапном расширении и на выходе из второй трубы.

Движение воды в системе считать установившемся, т.е. Q = const. Построить линию полного напора (напорную линию), пьезомстрическую линию, показать эпюру потерь напора.

Решение. Представленная схема (см. рис. 6.5) относится к простым трубопроводным системам ***первого типа с истечением под уровень***.

Для определения избыточного (манометрического) давления ($p_{ман}$) на поверхности воды в резервуаре A воспользуемся уравнением Бернулли (см. методику в разделе 4.5.7):

1. Выберем ***два сечения*** по свободным поверхностям в резервуарах, где скорость допустимо считать равной нулю.

2. Сечения **1-1** и **2-2** пронумеруем по направлению движения воды.

3. В выбранных сечениях учтём абсолютное давление: $p_1 = p_а + p_{ман.}$; $p_2 = p_а$.

4. Плоскость сравнения совместим с осью трубы, тогда $z_1 = H_1$; $z_2 = H_2$.

5. Запишем уравнение Бернулли (4.15) в общем виде и решим его:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w1-2};$$

$z_1 = H_1;$ $\quad z_2 = H_2;$

$p_1 = p_a + p_{ман};$ $\quad p_2 = p_a;$

$\upsilon_{1\,сеч.} = 0;$ $\quad \upsilon_{2\,сеч.} = 0;$

после подстановки параметров и сокращений получим:

$$H_1 + \frac{p_{ман}}{\rho g} = H_2 + h_w, \text{ отсюда } \frac{p_{ман}}{\rho g} = H_2 - H_1 + h_w. \qquad (6.11)$$

В формуле (6.11) следует определить величину потерь напора в гидравлических сопротивлениях (h_w). Ввиду того, что по условию задачи необходимо ***представить графически*** распределение напора по длине системы, запишем потери напора по порядку по направлению движения воды:

$$h_w = h_{вх} + h_{l_1} + h_{кр.} + h_{l_2} + h_{в.р.} + h_{l_3} + h_{вых.} \qquad (6.12)$$

Все потери напора в гидравлических сопротивлениях пропорциональны скоростному напору, поэтому потери напора в трубе диаметром d_1 определим с учётом скоростного напора $\frac{\upsilon_1^2}{2g}$, а в трубе диаметром d_2 - $\frac{\upsilon_2^2}{2g}$.

Скорости υ_1 и υ_2 рассчитаем через расход Q по формулам:

$$\upsilon_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} \text{ и } \upsilon_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2};$$

при подстановке данных учитываем: $Q = 15$ л/с $= 15 \cdot 10^{-3}$ м^3/с;
$d_1 = 75$ мм $= 0{,}075$ м; $d_2 = 100$ мм $= 0{,}1$ м.

После вычислений получим скорости: $\upsilon_1 = 3{,}4$ м/с; $\upsilon_2 = 1{,}9$ м/с;

соответственно скоростные напоры: $\frac{\upsilon_1^2}{2g} = 0{,}6$ м; $\frac{\upsilon_2^2}{2g} = 0{,}2$ м.

Рассчитаем потери напора ***в местных сопротивлениях.***

Потери напора ***на входе в трубу*** диаметром d_1:

$h_{вх} = \zeta_{вх} \frac{\upsilon_1^2}{2g}$, принимая $\zeta_{вх} = 0{,}5$ по табл. 4 (см. приложение),

получим $h_{вх} = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$ м.

Потери напора ***в пробковом кране***:

$h_{кр.} = \zeta_{кр.} \dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$, принимая $\zeta_{кр.} = 5{,}47$ при $\alpha = 30^\circ$ по табл. 4 (см. приложение),

получим $h_{кр.} = 5{,}37 \cdot 0{,}6 = 3{,}3$ м.

Потери напора ***при внезапном расширении***:

$h_{в.р.} = \zeta_{в.р.} \dfrac{\upsilon_2^2}{2g}$, где $\zeta_{в.р.} = \left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 = 0{,}6$ согласно табл. 4 (см. приложение),

тогда $h_{в.р.} = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$ м.

Потери напора ***на выходе из трубы*** в резервуар *B*:

$h_{вых} = \zeta_{вых} \dfrac{\upsilon_2^2}{2g}$, принимая $\zeta_{вых} = 1{,}0$ по табл. 4 (см. приложение),

получим $h_{вых} = 0{,}2$ м.

Переходим к определению ***потерь напора по длине*** по формуле (5.3):

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

Для труб с диаметрами d_1 и d_2 следует рассчитать коэффициенты гидравлического сопротивления λ_1 и λ_2.

Выбор расчётной зависимости коэффициента λ зависит ***от режима движения жидкости и шероховатости труб*** (см. схему на рис. 5.1).

Рассчитаем числа Рейнольдса для каждой трубы по формуле (4.20):

$$Re_1 = \frac{\upsilon_1 d_1}{\nu}; \quad Re_2 = \frac{\upsilon_2 d_2}{\nu},$$

значение коэффициента кинематической вязкости воды (ν) принимаем по табл.1 (см. приложение), для воды $\nu = 1{,}008 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Получим $Re_1 = 255000$; $Re_2 = 190000$, следовательно, режим движения воды турбулентный, так как Re_1 и Re_2 больше $Re_{кр.} = 2300$.

Рассчитаем граничные значения для чисел *Re*, чтобы установить область сопротивления для обеих труб при турбулентном режиме:

$$20\frac{d_1}{\Delta_1} = 20\frac{75}{0{,}5} = 3000; \qquad 20\frac{d_2}{\Delta_2} = 20\frac{100}{0{,}2} = 10000;$$

$$500\frac{d_1}{\Delta_1}=500\frac{75}{0,5}=75000;\qquad 500\frac{d_2}{\Delta_2}=500\frac{100}{0,2}=250000.$$

Для ***первой трубы*** $Re_1 = 255000 > 500\frac{d_1}{\Lambda_1}$, значит имеет место зона ***квадратичного сопротивления***, коэффициент λ рассчитывается по формуле Шифринсона (5.14):

$$\lambda_1=0,11\left(\frac{\Delta_1}{d_1}\right)^{0,25};\ \lambda_1=0,11\left(\frac{0,5}{75}\right)^{0,25}=0,032.$$

Потери напора по длине на первом и втором участках согласно формуле (5.3):

$$h_{l_1}=0,032\frac{8,0}{0,075}0,6=2,0\text{м};\quad h_{l_2}=0,032\frac{12,0}{0,075}0,6=3,0\text{м}.$$

Для ***второй трубы*** $20\frac{d_2}{\Delta_2} < Re = 190000 < 500\frac{d_2}{\Delta_2}$, имеет место зона ***доквадратичного сопротивления***, коэффициент λ рассчитываем по формуле Альтшуля (5.12) (см. схему рис. 5.1):

$$\lambda_2=0,11\left(\frac{68}{Re_2}+\frac{\Delta_2}{d_2}\right)^{0,25};\ \lambda_2=0,024.$$

Потери напора по длине на третьем участке:

$$h_{l_3}=\lambda_2\frac{l_3}{d_2}\frac{\upsilon_2^2}{2g};\quad h_{l_3}=0,024\frac{15,0}{0,1}0,2=0,7\text{м}.$$

Подставим значение всех потерь напора в формулу (6.12):

$$h_w=0,3+2,0+3,3+3,0+0,12+0,7+0,2=9,62\text{ м}.$$

После подстановки слагаемых в формулу (6.11) получим:

$$\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}=3,5-1,5+9,62=11,62\text{м},$$

значит соответствующий манометрический напор $H_{\text{ман}} = 11,62$ м.

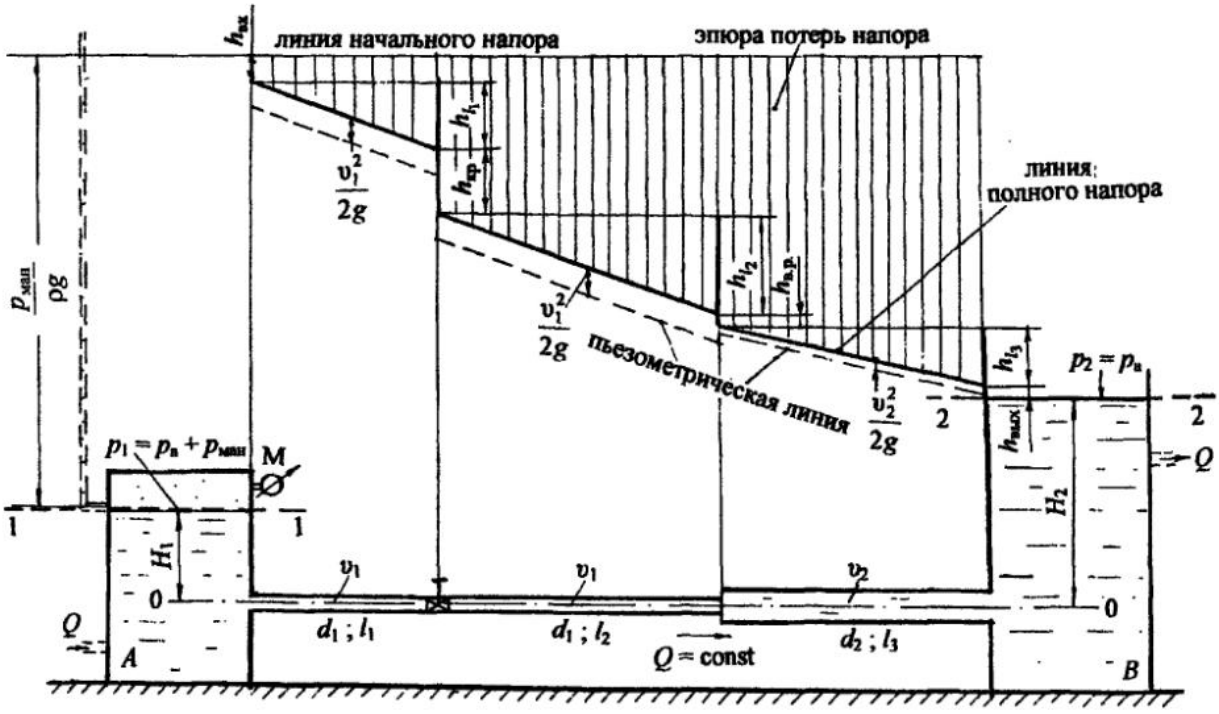

линия начального напора
эпюра потерь напора
линия полного напора
пьезометрическая линия
$h_{вх}$
h_{l_1}
$h_{кр}$
h_{l_2}
$h_{в.р}$
h_{l_3}
$h_{вых}$
$\frac{v_1^2}{2g}$
$\frac{v_2^2}{2g}$
$\frac{p_{ман}}{\rho g}$
$p_1 = p_a + p_{ман}$
$p_2 = p_a$
M
1
2
H_1
H_2
0
v_1
v_2
$d_1 ; l_1$
$d_1 ; l_2$
$d_2 ; l_3$
$Q = \text{const}$
Q
A
B

Рис. 6.5

Представим манометрическое давление ($p_{ман.}$) в кПа:

$$p_{ман.} = 11{,}62 \cdot \rho g = 11{,}62 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 113{,}9 \cdot 10^3 \text{ Па} = 113{,}9 \text{ кПа}.$$

Манометрическое давление в атмосферах $p_{ман.} = 1{,}16$ ат.

Переходим к построению линии полного напора.

От уровня жидкости в резервуаре A пунктиром покажем пьезометр, показание которого соответствует величине $p_{ман}/(\rho g)$ (см. главу 2, задачи 2.3.6; 2.3.8). По уровню жидкости в пьезометре проведём ***горизонтальную линию начального напора.*** До линии начального напора проводим ***вертикальные линии*** по характерным сечениям трубопровода: входа в трубу; крана; внезапного расширения; выхода из трубы (рис. 6.5).

Откладываем по порядку, начиная от линии начального напора, по вертикали потери напора:

- на входе в виде скачка $h_{вх} = 0{,}3$ м;
- по длине первого участка в виде наклонной прямой $h_{l_1} = 2{,}0$ м;
- в кране в виде скачка $h_{кр.} = 3{,}3$ м;
- по длине второго участка в виде наклонной прямой $h_{l_2} = 3{,}0$ м;
- при внезапном расширении в виде скачка $h_{в.р.} = 0{,}12$ м;
- по длине третьего участка $h_{l_3} = 0{,}7$ м;
- на выходе в резервуар B также в виде скачка $h_{вых} = 0{,}2$ м.

Линия полного напора должна закончиться на свободной поверхности в резервуаре B (на рис. 6.5 масштаб не выдержан).

Пьезометрическую линию проводим ниже линии полного напора на величину $\frac{\upsilon_1^2}{2g} = 0{,}6$ м для трубы диаметром d_1 и на величину $\frac{\upsilon_2^2}{2g} = 0{,}2$ м для трубы диаметром d_2. Пьезометрическая линия показана пунктиром.

Следует обратить внимание, что при внезапном расширении полный напор падает, а пьезометрический напор повышается.

Строим эпюру потерь напора. Показываем ***вертикальные штриховые линии*** от линии начального напора до линии полного напора. Каждая вертикальная штриховая линия соответствует потерям напора от начала трубопровода до выбранного сечения. Графическое представление распределения напоров закончено.

Ответ: показание манометра $p_{ман.} = 1{,}16$ ат, манометрический напор, соответствующий показанию манометра $H_{ман} = \frac{p_{ман}}{\rho g} = 11{,}6$ м.

На примерах задач 6.2.1 и 6.2.2 рассмотрен расчёт простых трубопроводных систем первого типа: в задаче 6.2.1 определялось давление, а в задаче 6.2.2 – действующий напор и построение пьезометрической линии.

Ниже предлагается расчёт простой трубопроводной системы ***второго типа*** с определением пропускной способности (расхода жидкости) системы с истечением в атмосферу.

Задача 6.2.3. С помощью насоса вода поднимается на высоту $H = 15$ м с истечением в атмосферу. Определить пропускную способность (расход) системы, если показание манометра, установленного после насоса, $p_{ман} = 1{,}6$ ат; длина трубы $l = 80$ м; диаметр трубы $d = 100$ мм с абсолютной шероховатостью $\Delta = 0{,}5$ мм. На трубопроводе установлены: задвижка Лудло со степенью закрытия $a/d = 3/4$ и три колена.

Принять плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, кинематический коэффициент вязкости $\nu = 1{,}008 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Движение воды считать установившимся, т. е. $Q = \text{const}$ (рис. 6.6).

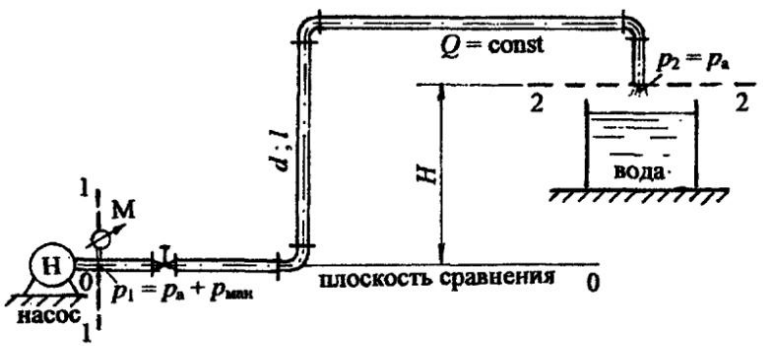


Рис. 6.6

Решение. Для определения расхода (Q) воспользуемся уравнением Бернулли (4.15) по принятой методике (см. раздел 4.5.7):

1. ***Выбираем два сечения***, где известны давления, т. е. в месте установки манометра и на выходе воды в атмосферу. В этих сечениях скорости одинаковы ($v = \text{const}$), так как не изменяется диаметр трубопровода и пропускная способность. Сечения проводим нормально к направлению движения жидкости, т. е. трубу рассекаем нормальной плоскостью.

2. ***Сечения нумеруем по направлению движения жидкости***: **1-1** - в месте установки манометра, **2-2** - на выходе воды в атмосферу.

3. В выбранных сечениях ***учитываем абсолютное давление***, т. е. давление, рассчитанное с учётом атмосферного: $p_1 = p_a + p_{ман}$; $p_2 = p_a$.

4. ***Плоскость сравнения*** **0-0** проводим через ось первого сечения, тогда $z_1 = 0$; $z_2 = H$.

5. Записываем уравнение Бернулли (4.15) в общем виде и делаем подстановку параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2};$$

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = H;$$
$$p_1 = p_a + p_{ман}; \qquad p_2 = p_a;$$
$$v_1 = v_2 = v = \text{const}.$$

После преобразований и сокращений получим:

$$\frac{p_{ман}}{\rho g} = H + h_w. \tag{6.13}$$

Прочитаем преобразованное уравнение Бернулли: напор, создаваемый насосом, идёт на подъём воды на высоту H и преодоление гидравлических сопротивлений h_w.

Согласно формулам (5.1), (5.2) и (5.3), представляем гидравлические сопротивления:

$$h_w = \Sigma h_r + h_l;$$

$$\Sigma h_r = \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \quad \text{и} \quad h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Из формулы (6.13) запишем потери напора в гидравлических сопротивлениях:

$$h_w = \frac{p_{ман}}{\rho g} - H$$

или

$$\frac{v^2}{2g}\left(\Sigma\zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) = \frac{p_{ман}}{\rho g} - H,$$

отсюда скорость движения воды в трубе:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda\frac{l}{d}}}\sqrt{2g\left(\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} - H\right)}. \qquad (6.14)$$

Рассчитав скорость по формуле (6.14), определим расход: $Q = v\omega$.

Для расчёта скорости в формуле (6.14) нужно определить сумму коэффициентов местных сопротивлений для задвижки и трёх колен ($\Sigma\zeta$) и коэффициент гидравлического сопротивления (λ).

Сумма коэффициентов местных сопротивлений:

$$\Sigma\zeta = \zeta_{\text{задв.}} + 3\zeta_{\text{кол.}}.$$

По табл. 4, 5 (см. приложение): $\zeta_{\text{задв.}} = 17{,}0$; $\zeta_{\text{кол.}} = 0{,}39$ при диаметре $d = 100$ мм, получим $\Sigma\zeta = \mathbf{18{,}17}$.

Для выбора расчётной формулы коэффициента гидравлического сопротивления λ кроме абсолютной шероховатости трубы (Δ) необходимо определить режим движения жидкости по критерию Рейнольдса (***Re***) (см. формулу (4.20)).

В формулу (4.20) также входит неизвестная скорость (v), поэтому при заданной шероховатости (Δ) предполагаем турбулентный режим, зону квадратичного сопротивления, для которой λ не зависит от *Re*, и рассчитываем коэффициент λ по формуле Шифринсона (5.14), затем определяем скорость движения воды.

После расчёта скорости нужно проверить режим движения. Если подтвердится квадратичная зона сопротивления, рассчитаем расход. Если режим движения и зона сопротивления не подтвердится, проводим повторный расчёт коэффициента λ в соответствии с числом *Re*.

Итак, ***предполагаем*** для трубы диаметром $d = 100$ мм с шероховатостью $\Delta = 0{,}5$ мм ***турбулентный режим, зону квадратичного сопротивления***. Коэффициент λ рассчитаем по формуле (5.14):

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}; \quad \lambda = 0{,}11\left(\frac{0{,}5}{100}\right)^{0{,}25} = 0{,}029.$$

Подставляем все данные в формулу (6.14).

Для удобства расчётов:

$$\frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} = \frac{1{,}6 \cdot 98 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}8} = 16\,\text{м}.$$

Рассчитаем скорость движения воды по формуле (6.14):

$$v = \frac{1}{\sqrt{18{,}17 + 0{,}029\frac{80}{0{,}1}}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 0{,}69 \text{ м/с}.$$

Рассчитаем критерий ***Re*** по формуле (4.20):

$$Re = \frac{vd}{\nu}; \quad Re = \frac{0{,}69 \cdot 0{,}1}{1{,}008 \cdot 10^{-6}} = 68452.$$

Сравнивая число Рейнольдса (*Re*) для потока воды с критическим ($Re_{кр.}$), заключаем, что $Re = 68452 > Re_{кр.} = 2300$, значит, режим движения турбулентный.

По схеме (см. рис. 5.1) определим граничные значения чисел *Re* для установления зоны сопротивления при турбулентном режиме:

$$20\frac{d}{\Delta} = 20\frac{100}{0{,}5} = 4000;$$

$$500\frac{d}{\Delta} = 500\frac{100}{0{,}5} = 100000.$$

Значение числа Рейнольдса (*Re*) входит в интервал:

$$20\frac{d}{\Delta} < Re = 68452 < 500\frac{d}{\Delta},$$

значит, ***квадратичная зона сопротивления не подтвердилась***, имеет место турбулентный режим, ***зона доквадратичного сопротивления***, для которой коэффициент λ рассчитываем по формуле А. Д. Альтшуля (5.12):

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25};$$

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{68452} + \frac{0{,}5}{100}\right)^{0{,}25} = 0{,}031.$$

Снова рассчитаем скорость (v) при значении λ =0,031:

$$v = \frac{1}{\sqrt{18{,}17 + 0{,}031\frac{80}{0{,}1}}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 0{,}676 \text{ м/с};$$

далее $$Re = \frac{0{,}676 \cdot 0{,}1}{1{,}008 \cdot 10^{-6}} = 67044;$$

теперь $$20\frac{d}{\Delta} < Re = 67044 < 500\frac{d}{\Delta}.$$

Доквадратичная зона сопротивления подтвердилась.
Рассчитаем расход

$$Q = v\,\omega = \frac{\pi d^2}{4} v;$$

$$Q = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} 0{,}676 = 5{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 5{,}3 \text{ л/с}.$$

Ответ: пропускная способность системы Q = 5,3 л/с.

Особыми случаями простого трубопровода являются ***расчёт высоты установки насоса и расчёт сифона.***

В задаче 6.2.4 приводится ***расчёт высоты установки центробежного насоса*** (рис. 6.7). Центробежный насос имеет всасывающий трубопровод, по которому насос засасывает жидкость из водохранилища, бассейна, зумпфа и им подобных ёмкостей, и нагнетательный трубопровод, по которому жидкость под действием избыточного давления, создаваемого насосом, транспортируется по трубопроводу и поднимается на определённую высоту. Примеры расчёта нагнетательных систем приведены в задачах 6.2.1 и 6.2.3.

Движение жидкости во всасывающем трубопроводе происходит под действием вакуума. Наибольшая величина вакуума имеет место непосредственно у входа в насос перед рабочим колесом.

Задача 6.2.4. Определить высоту установки центробежного насоса ($H_{нас.}$), который отсасывает воду из зумпфа больших размеров, если диаметр всасывающего трубопровода $d = 100$ мм, длина $l = 25$ м; вакуумметрическое давление на входе в насос $p_{вак.} = 0{,}6$ ат. Труба водопроводная несколько загрязнённая имеет водозаборную сетку с обратным клапаном и одно колено с углом поворота $\alpha = 90°$. Насос должен обеспечить постоянную подачу воды $Q = 9{,}0$ л/с (см. рис. 6.7).

Решение. За высоту установки центробежного насоса ($H_{нас.}$) принимается удаление вала центробежного насоса от свободной поверхности воды в зумпфе.

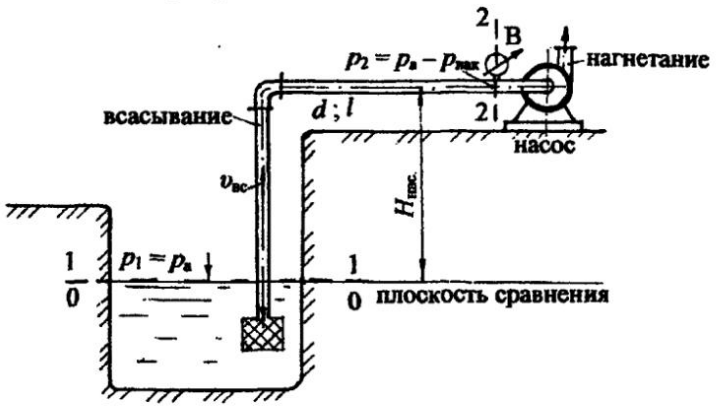


Рис. 6.7

Для определения $H_{нас.}$ воспользуемся уравнением Бернулли (4.15).

1. Выберем ***два сечения***: ***одно*** по свободной поверхности в зумпфе, ***другое*** – на входе в насос, где установлен вакуумметр, причём нормально к направлению движения потока воды.

2. Сечения ***пронумеруем по направлению движения жидкости***: **1-1** – по свободной поверхности воды в зумпфе, **2-2** – в месте установки вакуумметра.

3. В выбранных сечениях ***учтём абсолютное давление***: $p_1 = p_a$; $p_2 = p_a - p_{вак.}$

4. ***Плоскость сравнения*** **0-0** совместим с сечением 1-1, тогда $z_1 = 0$; $z_2 = H_{нас.}$

5. Запишем уравнение Бернулли (4.15) и произведём преобразования:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$z_1 = 0;$ $z_2 = H_{\text{нас.}};$

$p_1 = p_{\text{а}};$ $p_2 = p_{\text{в}} - p_{\text{вак.}};$

$\upsilon_1 = 0;$ $\upsilon_2 = \upsilon_{\text{вс.}};$ $\alpha_2 = 1{,}0$ (турбулентный режим в круглой трубе).

После подстановки параметров и сокращений:

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = H_{\text{нас.}} + \frac{\upsilon_{\text{вс.}}^2}{2g} + h_w. \qquad (6.15)$$

Прочитаем преобразованное уравнение Бернулли: вакуумметрический напор на входе в насос должен быть таким, чтобы обеспечить подъём воды на высоту $H_{\text{нас.}}$, создать скоростной напор $\frac{\upsilon_{\text{вс.}}^2}{2g}$ и преодолеть гидравлические сопротивления h_w.

Из формулы (6.15) представим высоту установки центробежного насоса:

$$H_{\text{нас.}} = \frac{p_{\text{вак.}}}{\rho g} - \frac{\upsilon_{\text{вс.}}^2}{2g} - h_w. \qquad (6.16)$$

Определим потери напора в гидравлических сопротивлениях (h_w), пользуясь формулами (5.1), (5.2) и (5.3):

$$h_w = \Sigma h_r + h_l;$$

$$\Sigma h_r = \Sigma\zeta \frac{\upsilon^2}{2g} \quad \text{и} \quad h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

Рассчитаем скорость всасывания и скоростной напор через расход (Q):

$$Q = \upsilon_{\text{вс.}} \omega = \frac{\pi d^2}{4} \upsilon_{\text{вс.}}, \text{ отсюда } \upsilon_{\text{вс.}} = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

получим $$\upsilon_{\text{вс.}} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}1^2} = 1{,}15 \text{ м/с};$$

скоростной напор: $\frac{v_{вс.}^2}{2g} = \frac{1{,}15^2}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}067$ м (достаточно малая величина).

Потери напора в местных сопротивлениях Σh_r:

$$\Sigma h_r = \Sigma\zeta \frac{v_{вс.}^2}{2g},$$

где $$\Sigma\zeta = \zeta_{сетк.} + \zeta_{кол.},$$

по табл. 4 и табл. 5 (см. приложение) находим:

$$\zeta_{сетк.} = 10{,}0;\ \zeta_{кол.} = 0{,}39 \text{ (для } d = 100 \text{ мм)}; \text{ значит } \Sigma\zeta = 10{,}37,$$

тогда $$\Sigma h_r = 10{,}37 \cdot 0{,}067 = 0{,}7 \text{ м}.$$

Чтобы рассчитать потери напора по длине (h_l), необходимо выбрать расчётную формулу коэффициента гидравлического сопротивления (λ). Проанализируем схему выбора расчётной формулы λ (см. рис. 5.1). По условию задачи дано ***описание состояния внутренней поверхности трубы: водопроводная труба несколько загрязнённая***, значит, коэффициент λ определяем по формуле (5.16):

$$\lambda = \frac{8g}{C^2},$$

где коэффициент Шези (C) рассчитываем по формуле Маннинга (5.17):

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6},$$

по табл. 7 (см. приложение) для несколько загрязнённых труб принимаем $n = 0{,}013$ или $1/n = 76{,}9$.

Гидравлический радиус (R) для круглой трубы, согласно формуле (4.2): $R = d/4 = 0{,}025$ м.

Получим $C = 76{,}9 \cdot 0{,}025^{1/6} = 41{,}53$.

Рассчитаем значение коэффициента гидравлического сопротивления λ по формуле (5.16):

$$\lambda = \frac{8 \cdot 9{,}8}{41{,}53^2} = 0{,}045.$$

Потери напора по длине по формуле (5.3):

$$h_l = 0{,}045\frac{25}{0{,}1}0{,}067 = 0{,}75\,\text{м}.$$

Все потери напора в гидравлических сопротивлениях по формуле (5.1):

$$h_w = 0{,}7 + 0{,}75 = 1{,}45\ \text{м}.$$

Рассчитаем вакуумметрический напор, входящий в формулы (6.15) и (6.16):

$$H_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = \frac{0{,}6 \cdot 98 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}8} = 6\,\text{м}.$$

Подставим все данные в формулу (6.16):

$$H_{\text{нас.}} = 6{,}0 - 0{,}067 - 1{,}45 = 4{,}5\ \text{м}.$$

Анализ проведённого решения показывает, что высота установки центробежного насоса зависит от величины вакуума на входе в насос. Обычно вакуум перед рабочим колесом насоса должен быть в пределах $H_{\text{вак.}} \le 4{,}0 \div 7{,}0$ м вод.ст.

Пример расчёта насосной установки с построением напорной характеристики водоотливного трубопровода хорошо представлен в учебнике " Гидравлика и гидропривод ". Авторы: В. Г. Гейер, В. С. Дулин и др. М.: Недра, 1981.

Ответ: высота установки насоса $H_{\text{нас.}} = 4{,}5$ м.

Рассмотрим расчёт сифона. Сифоном называется короткий трубопровод, расположенный выше горизонта жидкости в питающем резервуаре, способный перемещать жидкость в другой резервуар, уровень жидкости в котором ниже уровня в питающем резервуаре (см. рис. 6.8), т. е. должна быть ***постоянная разность уровней в резервуарах***.

Принцип действия сифона основан на создании вакуума в верхней точке сифона, для этого сифонную трубу каким-либо способом заполняют жидкостью до верхней точки, например, устанавливают подпитывающий трубопровод. На входе в сифонную трубу, как правило, устанавливают сетку с обратным клапаном, который закрывается при заполнении трубы жидкостью, а при работе сифона обратный клапан поднимается (открывается).

Расчёт сифона включает определение двух параметров - пропускной способности (расхода) и высоты сифона.

В задаче 6.2.5 представлен расчёт сифона с истечением жидкости под уровень.

Задача 6.2.5. Рассчитать максимальную пропускную способность и высоту сифона, откачивающего воду из верхнего зумпфа в нижний, при неизменной разности уровней воды в зумпфах H = 2,0 м. Труба водопроводная нормальная диаметром d = 150 мм длиной l_1 = 10 м (до верхней точки сифона) и l_2 = 20 м. На входе в трубу установлена водозаборная сетка с обратным клапаном. Система имеет вентиль с коэффициентом сопротивления $\zeta_{вент.}$ = 7,0, одно колено с углом поворота α = 90° и два поворота трубы с углами α_1 = 30° и α_2 = 60°. Величина предельного вакуума в верхней точке сифона $p_{вак.}$ = 0,55 ат (рис. 6.8).

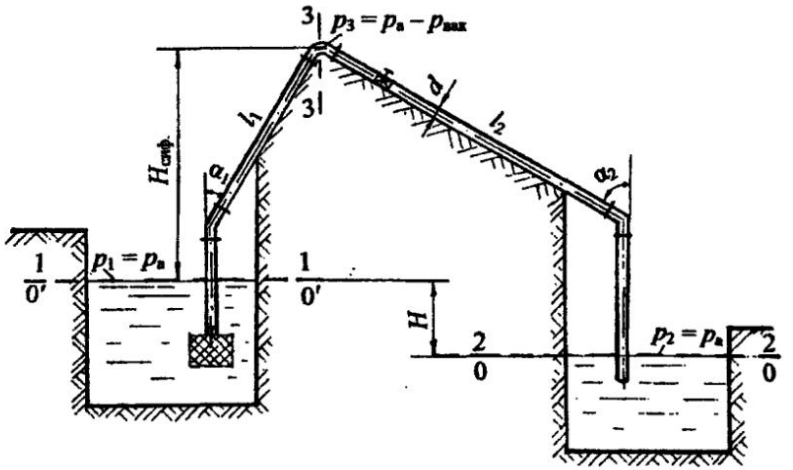


Рис. 6.8

Решение. Как и в предыдущих задачах, при расчёте сифона пользуемся уравнением Бернулли, методика составления которого уже отработана.

1. ***Определим пропускную способность сифона (Q).***

Следует провести расчёт простой трубопроводной системы с истечением под уровень (см. раздел 6.1.2).

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, проведённых по свободным поверхностям воды в зумпфах, где скорости можно считать равными нулю ($v_{1\ сеч.} = v_{2\ сеч.} = 0$), а абсолютное давление - равным

атмосферному ($p_1 = p_a$; $p_2 = p_a$), так как резервуары открыты. Плоскость сравнения совместим с сечением 2-2, тогда $z_1 = H$; $z_2 = 0$.

Запишем уравнение Бернулли (4.15) и сделаем подстановку параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$$z_1 = H; \qquad z_2 = 0;$$
$$p_1 = p_a; \qquad p_2 = p_a;$$
$$\upsilon_{1\ сеч.} = 0; \qquad \upsilon_{2\ сеч.} = 0.$$

После подстановки данных и сокращений получим:

$$H = h_{w\ сиф.} \tag{6.17}$$

Прочитаем формулу (6.17): разность уровней жидкости H (напор) в резервуарах должна быть такой, чтобы преодолеть гидравлические сопротивления в трубопроводе – $h_{w\ сиф}$.

Представим потери напора в гидравлических сопротивлениях с учётом формул (5.1), (5.2) и 5.3):

$$h_{w\ сиф.} = \Sigma h_r + h_l = \Sigma\zeta \frac{\upsilon^2}{2g} + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d} \frac{\upsilon^2}{2g}$$

или

$$h_{w\ сиф.} = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\Sigma\zeta + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d}\right).$$

Формулу (6.17) представим в следующем виде:

$$H = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\Sigma\zeta + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d}\right). \tag{6.18}$$

Формула (6.18) аналогична формуле (6.7). Найдём скорость движения воды в трубе (υ):

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d}}}\sqrt{2gH},$$

расход $Q = \omega v$:

$$Q = \omega \sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d}}} \sqrt{2gH}\,. \qquad (6.19)$$

Формула (6.19) аналогична формуле (6.8).

Обозначим:

$$\sqrt{\frac{1}{\Sigma\zeta + \lambda \frac{l_1 + l_2}{d}}} = \mu_{\text{сиф}}, \qquad (6.20)$$

где $\mu_{\text{сиф.}}$ – ***коэффициент расхода сифона***. Рассчитаем этот коэффициент.

Сумма коэффициентов местных сопротивлений:

$$\Sigma\zeta = \zeta_{\text{сетк.}} + \zeta_{\text{кол}_1} + \zeta_{\text{кол}_2} + \zeta_{\text{кол}_3} + \zeta_{\text{вент.}} + \zeta_{\text{вых.}}$$

Пользуясь табл. 4 и табл. 5 (см. приложение), рассчитаем $\Sigma\zeta$:

$$\Sigma\zeta = 10{,}0 + 0{,}2 + 0{,}37 + 0{,}55 + 7{,}0 + 1{,}0 = 19{,}12.$$

Коэффициент гидравлического сопротивления (коэффициент Дарси) для нормальных водопроводных труб принимаем $\lambda = 0{,}0286$ для $d = 150$ мм по табл. 8 (см. приложение).

Получим значение коэффициента расхода сифона:

$$\mu_{\text{сиф.}} = \sqrt{\frac{1}{19{,}12 + 0{,}0286 \frac{30}{0{,}15}}} = 0{,}2\,.$$

Подставляя все параметры в формулу (6.19), учитываем, что площадь живого сечения трубы $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$, значит:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \mu_{\text{сиф.}} \sqrt{2gH}\,. \qquad (6.21)$$

После подстановки численных значений:

$$Q = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^2}{4} \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}0} = 0{,}022\ \text{м}^3/\text{с} = 22\ \text{л}/\text{с}.$$

2. ***Определим высоту сифона.*** За высоту сифона ($H_{\text{сиф.}}$) принимается превышение верхней точки сифона над уровнем жидкости в питающем резервуаре (см. рис. 6.8).

Для расчёта высоты сифона воспользуемся уравнением Бернулли (4.15) для сечений **1-1** по свободной поверхности в питающем резервуаре и **3-3** - в верхней точке сифона. Сечение 3-3 проводим нормально к направлению движения потока воды, где скорость равна υ, а абсолютное давление $p_3 = p_a - p_{\text{вак}}$. Плоскость сравнения $0'-0'$ совместим с сечением 1-1, тогда $z_1 = 0$; $z_3 = H_{\text{сиф.}}$

Рассуждения по составлению уравнения Бернулли для определения высоты сифона свидетельствуют о том, что расчёт высоты сифона аналогичен расчёту высоты установки центробежного насоса (см. задачу 6.2.4).

Итак, уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 3-3:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 \upsilon_3^2}{2g} + h_{w_{1-3}};$$

$z_1 = 0$; $z_3 = H_{\text{сиф.}}$;
$p_1 = p_a$; $p_3 = p_a - p_{\text{вак.}}$;
$\upsilon_1 = 0$; $\upsilon_3 = \upsilon$; $\alpha_3 = 1{,}0$ (для круглой водопроводной трубы).

Потери напора в гидравлических сопротивлениях учитываются между сечениями 1-1 и 3-3:

$$h_{w_{1-3}} = \Sigma h_{\eta_{1-3}} + h_{l_{1-3}} = \Sigma\zeta_{1-3}\frac{\upsilon^2}{2g} + \lambda\frac{l_1}{d}\frac{\upsilon^2}{2g}.$$

После подстановки данных в уравнение Бернулли получим:

$$H_{\text{сиф.}} = \frac{p_{\text{вак.}}}{\rho g} - \frac{\upsilon^2}{2g}\left(1 + \Sigma\zeta_{1-3} + \lambda\frac{l_1}{d}\right). \qquad (6.22)$$

Скорость движения воды в трубе рассчитаем, зная величину расхода:

$$\upsilon = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2}; \qquad \upsilon = \frac{4 \cdot 0{,}022}{3{,}14 \cdot 0{,}15^2} = 1{,}25\ \text{м/с}.$$

Сумму коэффициентов местных сопротивлений учтём между сечениями 1-1 и 3-3:

$$\Sigma\zeta_{1-3} = \zeta_{\text{сетк.}} + \zeta_{\text{кол}_1} + \zeta_{\text{кол}_2}; \qquad \Sigma\zeta_{1-3} = 10{,}57.$$

Вакуумметрический напор $H_{\text{вак.}} = \dfrac{p_{\text{вак.}}}{\rho g} = \dfrac{0{,}55 \cdot 98 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}8} = 5{,}5\,\text{м}.$

Вакуумметрический напор можно также записать путём перевода ат. в м вод. ст. (см. табл. 2, приложение): 1 ат = 10 м вод. ст., значит, $p_{\text{вак.}} = 0{,}55$ ат = 5,5 м вод. ст., т.е. $H_{\text{вак.}} = 5{,}5$ м.

Значение коэффициента Дарси (λ) возьмём из предыдущего расчёта: $\lambda = 0{,}0286$.

После подстановки численных значений параметров в формулу (6.22) получим ***высоту сифона***:

$$H_{\text{сиф.}} = 5{,}5 - \frac{1{,}25^2}{2 \cdot 9{,}8}\left(1 + 10{,}57 + 0{,}0286\frac{10}{0{,}15}\right) = 4{,}4\,\text{м}.$$

Из формулы (6.22) следует, что максимальная высота сифона определяется максимальным вакуумметрическим напором в верхней точке сифона. Считается, что допустимый вакуум без образования разрыва турбулентности струи $H_{\text{вак.доп.}} = (6 \div 7)$ м. Значит, предельная высота сифона $H_{\text{сиф.max}} = (5 \div 6)$ м.

Ответ: пропускная способность сифона Q = 22 л/с; высота сифона $H_{\text{сиф.}} = 4{,}4$ м.

Итак, в разделах 6.1 и 6.2 рассмотрены теория и примеры расчёта простых трубопроводных систем. Методика расчёта таких систем основана на уравнении Бернулли. Важно уметь применить эту методику для расчёта трубопроводных систем различных типов.

В разделе 6.3 предлагаются задачи для самостоятельной работы, которые позволят студентам проверить знания и умение использовать вышеизложенную теорию и методику расчёта простых систем. К задачам даны ответы, однако они могут несколько отличаться от полученных Вами, в зависимости от того, какими таблицами, из каких учебников и учебных пособий Вы пользуетесь.

6.3. Задачи для самостоятельной работы по теме "Расчёт простых трубопроводных систем"

Задача 6.3.1

При закрытом кране на трубопроводе диаметром d = 50 мм и длиной l = 10 м показание манометра перед краном $p_{ман}$ = 0,18 ат.

Определить показание манометра при открытом кране, если слив воды происходит в мерную ёмкость. За время t = 30 с наполняется объём W = 70,5 л. Труба водопроводная с абсолютной шероховатостью Δ = 1,0 мм. Учесть потери напора на входе в трубу с острыми кромками. Принять коэффициент вязкости воды $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2/с (рис. 6.9).

Ответ: при открытом кране показание манометра $p_{ман.(откр.)}$ = 0,116 ат.

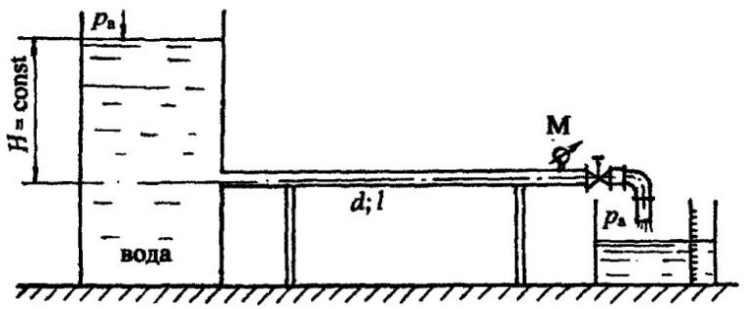


Рис. 6.9

Задача 6.3.2

Из напорного бака с постоянным напором H = 3,0 м вода подаётся в зумпф по двум трубам d_1 = 100 мм длиной l_1 = 5,0 м и d_2 = 50 мм длиной l_2 = 8,0 м. Определить расход воды в трубопроводе и скорости движения воды в каждой трубе. На трубе диаметром d_1 установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha = 40°$. Учесть потери напора на входе в трубу с острыми кромками, а также при внезапном сужении ($\zeta_{в.с}$ = 0,38). Трубы водопроводные нормальные (рис. 6.10).

Ответ: расход Q = 5,1 л/с.

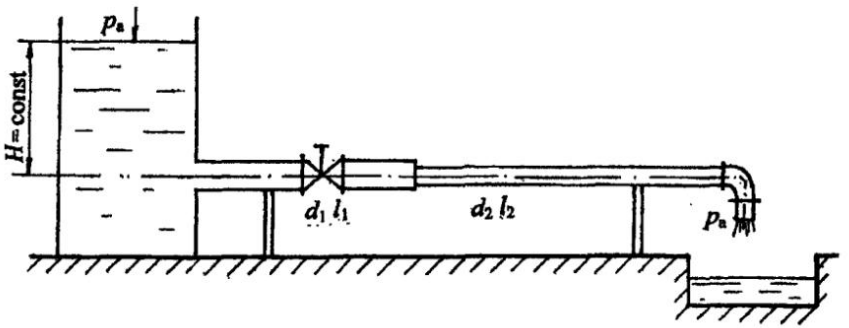


Рис. 6.10

Задача 6.3.3

Из резервуара A в резервуар B вода подаётся по трубопроводу диаметром d = 50 мм, состоящему из трёх участков длиной l_1 = 5,0 м; l_2 = 4,0 м; l_3 = 6,0 м. Расход воды в системе Q = 2,5 л/с. На входе в трубу установлена решётка без обратного клапана, на первом участке стоит вентиль с коэффициентом сопротивления $\zeta_{вент}$ = 5,0 (рис. 6.11).

Напор воды в резервуаре A H_1 = 1,5 м, в резервуаре B - H_2 = 2,5 м. Определить показание манометра ($p_{ман_2}$) на поверхности воды в резервуаре B, если показание манометра на поверхности воды в резервуаре A $p_{ман_1}$ = 0,45 ат. Принять абсолютную шероховатость трубы Δ = 0,5 мм; кинематический коэффициент вязкости воды $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Построить напорную и пьезометрическую линии.

Ответ: показание второго манометра $p_{ман_2}$ = 0,15 ат.

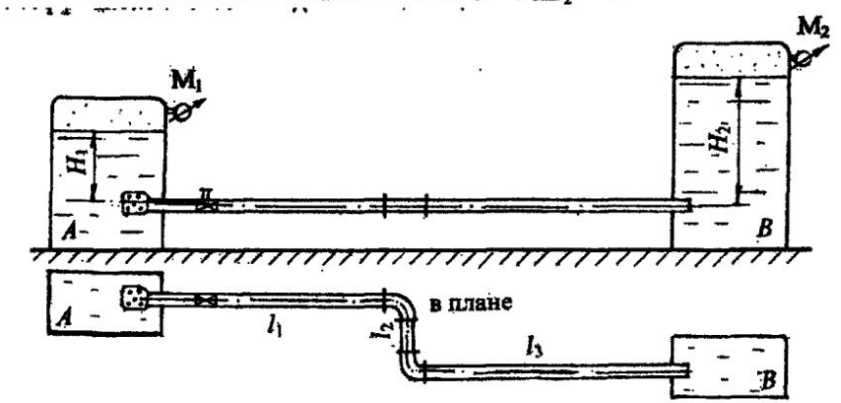


Рис. 6.11

Задача 6.3.4

Определить расход воды из дозаторного резервуара A в резервуар B при постоянном напоре $H = 2{,}5$ м по трубам $d_1 = 50$ мм; $l_1 = 5{,}0$ м и $d_2 = 100$ мм; $l_2 = 8{,}0$ м. Трубы водопроводные нормальные. На трубе $d_2 = 100$ мм установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha = 40°$.

Учесть потери напора на входе и выходе трубопроводной системы, а также при внезапном расширении трубопровода. Построить напорную и пьезометрическую линии, показать эпюру потерь напора (рис. 6.12).

Ответ: расход воды $Q = 5{,}5$ л/с.

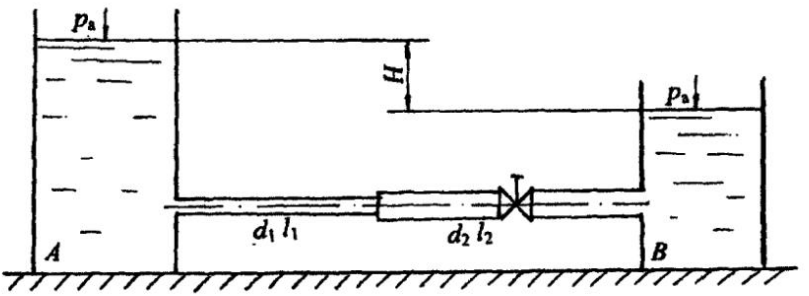


Рис. 6.12

Задача 6.3.5

С помощью насоса вода подаётся в напорный бак на высоту $H = 6{,}0$ м, диаметр трубы $d = 100$ мм, длина $l = 80$ м. Показание манометра в начале трубопровода $p_{ман1} = 1{,}5$ ат, в конце $p_{ман2} = 0{,}75$ ат. Определить, при каком коэффициенте сопротивления пробкового крана будет обеспечен расход $Q = 6{,}0$ л/с. Принять абсолютную шероховатость трубы $\Delta = 0{,}5$ мм, коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2/с (рис. 6.13).

Ответ: коэффициент сопротивления пробкового крана $\zeta_{кр.} = 25{,}6$.

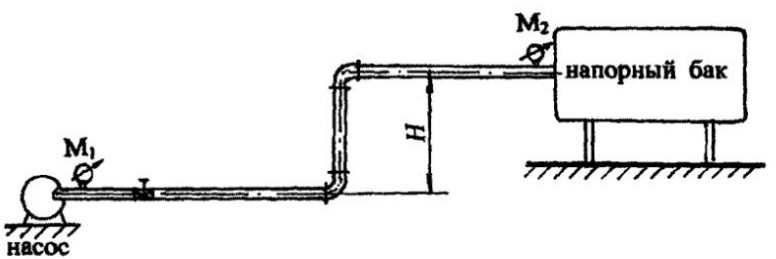


Рис. 6.13

Задача 6.3.6

Бензин из бензохранилища с помощью насоса подаётся в бензобак на высоту $H = 3{,}0$ м. На поверхности бензина в бензобаке поддерживается вакуум $p_{вак} = 0{,}16$ ат. Определить, каким должно быть манометрическое давление ($p_{ман}$ в ат) на выходе из насоса при подаче $Q = 2{,}4$ л/с, если транспортирование бензина происходит по новой стальной трубе с абсолютной шероховатостью $\Delta = 0{,}05$ мм, диаметром $d = 50$ мм, длиной $l = 30$ м, на трубе установлена задвижка Лудло со степенью закрытия $a/d = 5/8$, учесть потери напора в двух коленах и на выходе из трубы в бензобак. Принять плотность бензина $\rho_{бенз.} = 720$ кг/м^3; коэффициент кинематической вязкости бензина $\nu_{бенз.} = 0{,}65 \cdot 10^{-6}$ м^2/с (рис. 6.14).

Ответ: манометрическое давление $p_{ман} = 0{,}3$ ат.

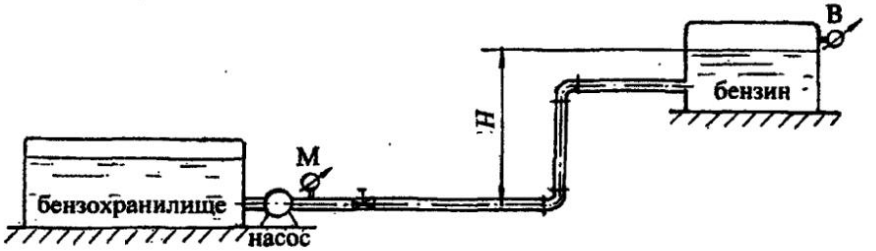


Рис. 6.14

Задача 6.3.7

В пневмотранспортной системе регулирование скорости и расхода воздуха осуществляется с помощью задвижки и контролируется по U-образному спиртовому мановакуумметру, установленному на входном участке коллектора. Определить, каким должно быть показание мановакуумметра ($h_{сп}$) на трубе диаметром $d = 100$ мм при расходе воздуха $Q = 180$ л/с. Принять коэффициент сопротивления на входе в коллектор $\zeta_{вх} = 0{,}2$; плотность воздуха $\rho_{возд} = 1{,}22$ кг/м^3; плотность спирта $\rho_{сп} = 880$ кг/м^3 (рис. 6.15).

Ответ: показание U–образного мановакуумметра $h_{сп.} = 45$ мм.

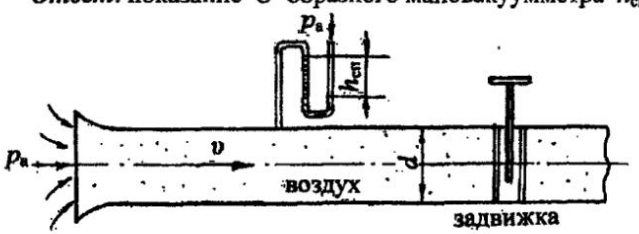


Рис. 6.15

Задача 6.3.8

В плотине сделан водоспуск в виде железобетонной трубы с весьма хорошей бетонировкой диаметром $d = 800$ мм и длиной $l = 5{,}0$ м. Напор над водоспуском при истечении в атмосферу $H = 4{,}0$ м. Определить пропускную способность трубы (Q, м^3/с), если она имеет водозаборную сетку без обратного клапана.

Как изменится пропускная способность трубы, если за водосливом напор поднимется до $h = 2{,}5$ м (рис. 6.16).

Ответ: в первом случае $Q_1 = 1{,}44$ м^3/с; во втором – $Q_2 = 1{,}02$ м^3/с.

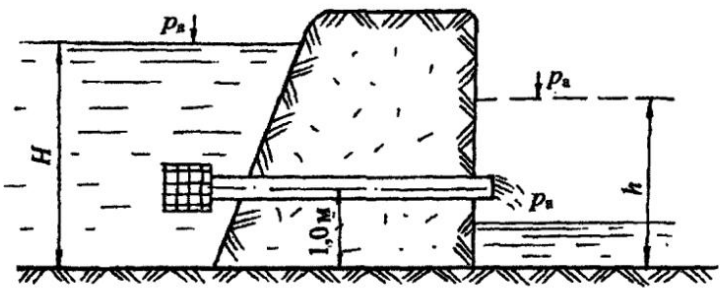


Рис. 6.16

Задача 6.3.9

Определить показание U-образного спиртового маномстра, установленного на трубе Вентури в вентиляционном трубопроводе при значении диаметров $d_1 = 100$ мм и $d_2 = 50$ мм, если расход воздуха $Q = 78{,}5$ л/с. Принять плотность воздуха $\rho_{возд.} = 1{,}23$ кг/м^3; плотность спирта $\rho_{сп} = 820$ кг/м^3. Коэффициент сопротивления трубы Вентури принять равным $\zeta_{вент.} = 0{,}2$ (рис. 6.17).

Ответ: показание U–образного манометра $h_{сп.} = 140$ мм.

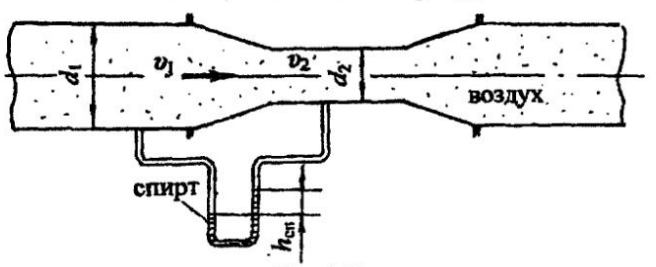


Рис. 6.17

Задача 6.3.10

Для измерения расхода воды в трубопроводе диаметром $d_1 = 100$ мм установлен расходомер Вентури с диаметром цилиндрической части $d_2 = 50$ мм. К широкой и узкой части расходомера подсоединены пьезометры в виде U–образной трубки, расстояние между которыми равно z.

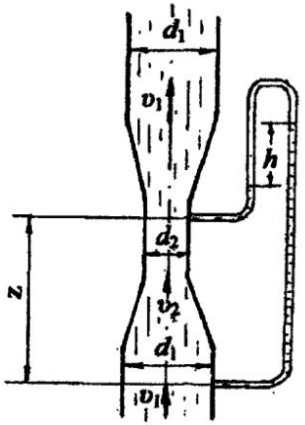


Рис. 6.18

Пренебрегая потерями напора в расходомере, определить скорости в широкой и узкой части трубы Вентури, а также расход воды в трубопроводе, если разность показаний пьезометров $h = 40$ см. При расчёте давлением столба воздуха в пьезометре пренебречь. Коэффициент Кориолиса принять равным единице ($\alpha = 1{,}0$) (рис. 6.18).

Ответ: скорость $v_1 = 0{,}72$ м/с; $v_2 = 2{,}9$ м/ с; расход воды в трубопроводе $Q = 5{,}7$ л/с.

Задача 6.3.11

Для определения коэффициента кинематической вязкости (ν) масла "Турбинное 30" производится прокачка его через трубку диаметром $d = 12{,}5$ мм. На расстоянии $l = 1{,}5$ м подключён U-образный ртутный манометр, показание которого $h_{рт.} = 50$ мм. Расход масла $Q = 0{,}1$ л/с, плотность масла $\rho_{масл.} = 900$ кг/м^3, плотность ртути $\rho_{рт.} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Предположить режим движения масла ламинарным. По окончании расчёта проверить режим движения (рис. 6.19).

Ответ: коэффициент кинематической вязкости масла $\nu = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

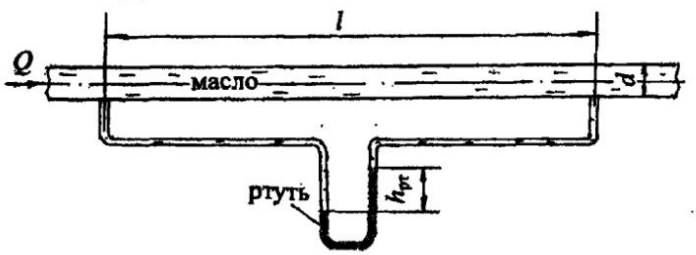


Рис. 6.19

Задача 6.3.12

Определить, на какой высоте (h) следует установить шестерёнчатый насос системы смазки, подающий масло "Турбинное 22" при расходе Q = 0,6 л/с по стальной трубе диаметром d = 35 мм и длиной l = 2,0 м. Показание вакуумметра на входе в насос $p_{вак}$ = 0,15 ат.

В системе установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha = 40°$. Учесть потери напора в двух коленах при $\zeta_{кол.}$ = 0,86 и на входе в трубу из бензобака $\zeta_{вх}$ = 0,5. Принять плотность масла $\rho_{масл.}$ = 900 кг/м^3, коэффициент кинематической вязкости масла $\nu_{масл.} = 22 \cdot 10^{-6}$ м^2/с (рис. 6.20).

Ответ: высота установки насоса h = 1,18 м.

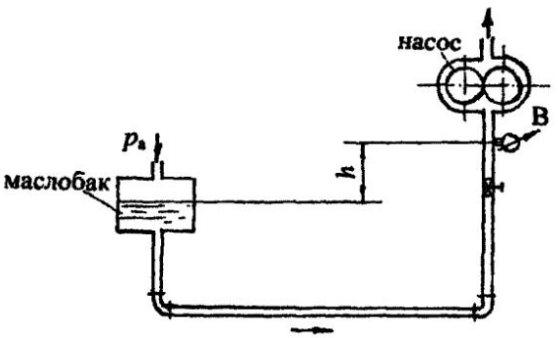


Рис. 6.20

Задача 6.3.13

Сифонный водосброс диаметром d = 200 мм и длиной l = 10 м сбрасывает воду из водохранилища в водоём, уровень которого на H = 2,5 м ниже уровня воды в водохранилище.

Определить пропускную способность сифона (Q, л/с), если труба водопроводная загрязнённая имеет водозаборную сетку с обратным клапаном, два колена: одно с углом закругления $\alpha_1 = 90°$ и отношением r/R = 0,5; второе без закругления с углом $\alpha_2 = 60°$; вентиль с коэффициентом сопротивления $\zeta_{вент.}$ = 5,0 и выход из трубы в резервуар больших размеров. Рассчитать, каким должен быть вакуум ($p_{вак}$, в ат.) в конце горизонтального участка сифона, если длина трубы до этого сечения l_1 = 4,0 м, высота сифона $h_{сиф.}$ = 1,5 м (рис. 6.21).

Ответ: пропускная способность сифона Q = 51,8 л/с, вакуум в конце горизонтального участка $p_{вак.}$ = 0,37 ат.

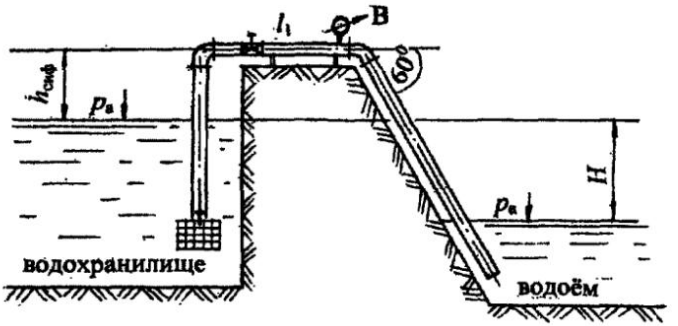


Рис. 6.21

Задача 6.3.14

Определить предельную длину трубопровода диаметром $d = 100$ мм с абсолютной шероховатостью $\Delta = 0{,}1$ мм, с помощью которого бензин плотностью $\rho_{бенз.} = 720$ кг/м^3 и коэффициентом кинематической вязкости $\nu_{бенз.} = 0{,}65 \cdot 10^{-6}$ м^2/с может быть поднят на высоту $H = 15{,}5$ м при пропускной способности $Q = 8{,}0$ л/с, если показание манометра после насоса $p_{ман} = 1{,}2$ ат. Истечение бензина происходит под уровень. Учесть потери напора в пробковом кране при угле закрытия $\alpha = 30°$, трёх коленах и на выходе из трубы в резервуар больших размеров (рис. 6.22).

Ответ: предельная длина трубопровода $l = 70$ м.

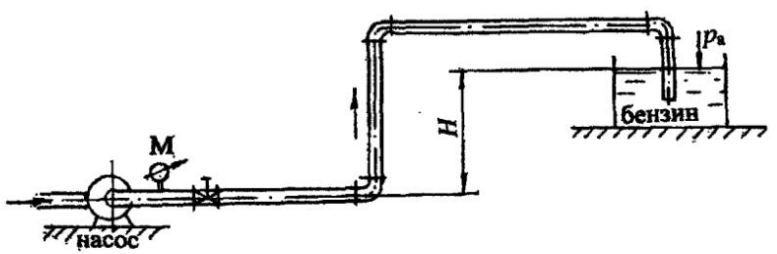


Рис. 6.22

Задача 6.3.15

Из водоёма с помощью центробежного насоса вода подаётся на горное предприятие. Определить высоту расположения оси центробежного насоса над уровнем воды в водоёме ($h_{нас}$), если расход воды $Q = 30$ л/с, диаметр трубы $d = 200$ мм, длина $l = 25$ м, вакуумметрическое давление на входе в насос $p_{вак} = 0{,}5$ ат. На входе в трубу установлена сетка с обратным клапаном. Учесть потери напора в трёх коленах при угле $\alpha = 90°$ и в задвижке Лудло со степенью закрытия $a/d = 5/8$. Считать трубу водопроводной загрязнённой (рис. 6.23).

Ответ: высота установки насоса $h_{нас.} = 3{,}9$ м.

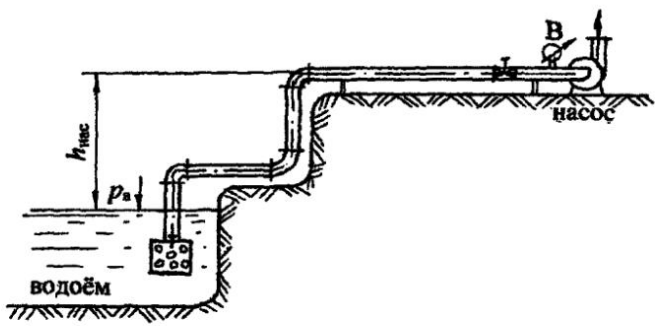


Рис. 6.23

Задача 6.3.16

Поршень диаметром $D = 200$ мм движется равномерно вверх в цилиндре, засасывая воду из открытого водоёма с постоянным уровнем по трубопроводу диаметром $d = 50$ мм и длиной $l = 12$ м. Труба водопроводная нормальная имеет два колена, вход в трубу с острыми кромками и выход воды под уровень. Когда поршень находится выше уровня воды в водоёме на высоте $h = 2$ м, необходимая сила для его перемещения $F = 2{,}4$ кН.

Определить скорость подъёма поршня ($v_п$) и найти, до какой высоты h_{max} его можно поднимать с такой скоростью без опасности отрыва от него жидкости, если давление насыщенных паров $p_{н.п.} = 4{,}25$ кПа. Давление насыщенных паров учитывать как абсолютное давление под поршнем. Массой поршня, трением его о стенки и потерями напора в цилиндре можно пренебречь (рис. 6.24).

Ответ: скорость движения поршня $v_п = 0{,}19$ м/с; максимальная высота подъёма поршня $h_{max} = 3{,}72$ м.

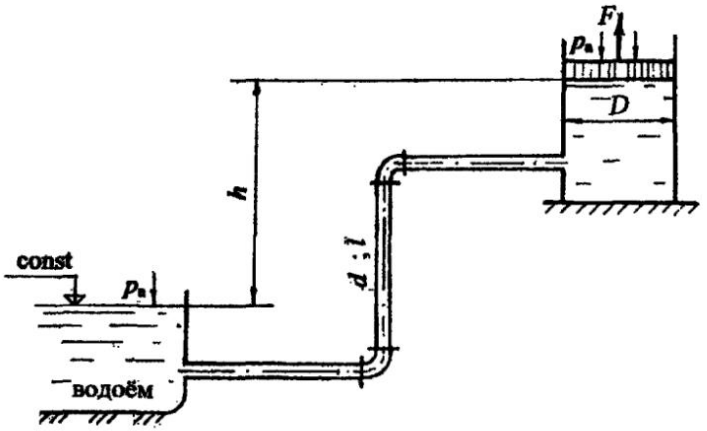


Рис. 6.24

Задача 6.3.17

На водопроводной трубе диаметром $d_1 = 50$ мм установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha_{кр.} = 20°$, разность показаний пьезометров, соответствующая потерям напора в кране, $h_{кр.} = 45$ см.

Определить разность показаний пьезометров (h) при внезапном расширении трубы до диаметра $d_2 = 100$ мм. Потерями напора по длине между краном и внезапным расширением можно пренебречь (рис. 6.25).

Ответ: разность показаний пьезометров $h = 11$ см.

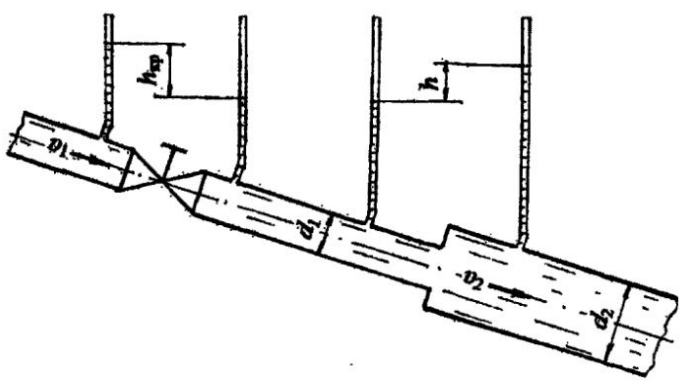


Рис. 6.25

6.4. Расчёт сложных трубопроводных систем

Сложные трубопроводы имеют разветвлённые участки, состоящие из нескольких труб, по которым распределяется жидкость в соответствии с расходами потребителей.

В зависимости от ***гидравлической схемы соединения трубопроводов*** различают:

1. Системы ***с последовательным соединением труб*** с одним конечным потребителем или с потребителями по ходу движения жидкости и также с одним конечным потребителем.

2. Системы ***с параллельным соединением труб***, или ***кольцевые***, также с одним или несколькими потребителями.

3. ***Распределительные сети***, или ***тупиковые системы***. Это системы с несколькими конечными потребителями.

4. Системы ***комбинированного типа***, включающие участки трубопроводных систем первых трёх видов.

5. Системы с ***непрерывной раздачей*** жидкости, их также называют системами ***с путевым расходом***.

Как и при расчёте простых трубопроводных систем (см. раздел 6.1), для сложных систем можно выделить три основных типа расчётов:

- определение ***действующего напора*** (***H***); ***давления*** (***p***) в системе; ***разности напоров*** в питающем резервуаре и у потребителя при известном расходе (***Q***), длинах и диаметрах трубопроводов отдельных участков;
- определение ***расходов*** жидкости на отдельных участках и в целом в системе при известных геометрических размерах трубопроводов и напоре (или давлении);
- определение ***геометрических размеров*** труб по заданным для них расходе и перепадах напора (давления).

Встречаются также расчёты, включающие указанные три типа в определённой комбинации для решения инженерных задач.

При расчёте сложных трубопроводных систем по аналогии с простыми системами следует пользоваться уравнением Бернулли. Так, при истечении жидкости у потребителя в атмосферу (см. рис. 6.26) получаем формулу (6.1)

$$H = \frac{v^2}{2g} + h_w.$$

Как правило, в сложных системах скоростным напором ($v^2/2g$) как малой величиной можно пренебречь. Действительно, эксплуатационная скорость в водопроводных системах $v_{экс.} = (1 \div 1{,}5)$ м/с, реже до 2,0 м/с, значит, скоростной напор $v^2/2g \leq 0{,}12$ м (очень малая величина по сравнению с действующим напором).

Таким образом, ***полный напор*** в любом расчётном сечении сложной системы практически ***равен гидростатическому напору***, который выражается путём построения ***пьезометрической линии.***

В сложных трубопроводных системах потери напора в местных сопротивлениях составляют (5÷ 10) % от потерь напора по длине:

$$\Sigma h_r = (0{,}05 \div 0{,}1)\, h_l .$$

Тогда, согласно формуле (5.1):

$$h_w = \Sigma h_r + h_l = (1{,}05 \div 1{,}1)\, h_l .$$

Формула (6.1) для действующего напора принимает вид:

$$H = (1{,}05 \div 1{,}1) h_{l_{сист.}}, \qquad (6.23)$$

где (1,05 ÷ 1,1) – поправочный коэффициент на местные сопротивления;

$h_{l_{сист.}}$ - потери напора по длине в сложной системе, они представляются в соответствии с гидравлической схемой системы.

Потери напора по длине (h_l) на любом участке для сложных систем рассчитываются через расход (Q) (см. раздел 5.3.3) по формулам (5.19) или (5.21):

$$h_l = \frac{Q^2}{K^2} l \quad \text{или} \quad h_l = AQ^2 l ,$$

где K, K^2, A – обобщённые параметры, которые принимаются по табл. 9 (см. приложение) в зависимости от диаметра трубопровода.

При решении задач по расчёту сложных трубопроводных систем рекомендуется пользоваться следующей ***методикой***:

1. Рассматривается распределение расхода в системе. На каждом участке обозначается расход (Q_i) с индексом, соответствующим индексу диаметра трубопровода.
2. Представляются потери напора в системе, согласно схеме соединения труб.
3. По условию поставленной задачи определяются действующий напор, давление, разность напоров в питателе и у потребителя и подобные условия.
4. Дополнительно могут рассчитываться диаметр трубы при заданном расходе, свободный (остаточный) напор у потребителя, геодезическая отметка водонапорной башни или потребителя и тому подобное.

Рассмотрим особенности расчёта сложных трубопроводных систем с различными гидравлическими схемами.

Ниже приведены гидравлические схемы сложных систем от более простых к усложнённым и даны примеры решения задач по расчёту систем.

6.4.1. Системы с последовательным соединением труб

Вначале рассмотрим простой случай сложной системы, состоящей из напорной башни с напором H и трёх последовательно соединённых труб разного диаметра и разной длины с истечением жидкости в атмосферу (число участков может быть любым) (рис. 6.26).

Как отмечалось выше в разделе 6.4, расчёт такой системы можно провести, пользуясь уравнением Бернулли для двух сечений: по свободной поверхности жидкости в напорной башне и на выходе жидкости в атмосферу (см. раздел 6.1.1). Путём рассуждений, приведённых в разделе 6.4, получим формулу (6.23) для действующего напора.

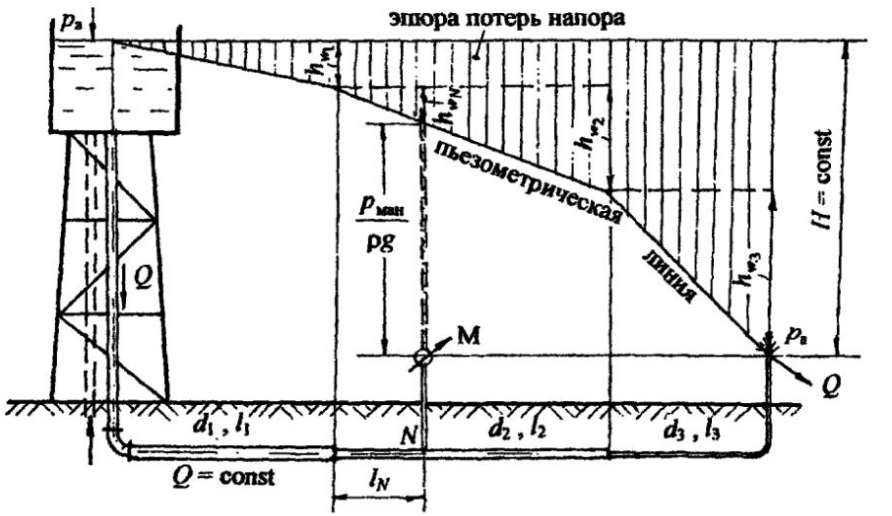


Рис. 6.26

Особенности расчёта системы

Пусть трубопроводная система не имеет путевых потребителей. Пользуемся принятой методикой расчёта сложных систем (см. раздел 6.4).

1. ***Распределение расхода.*** Ввиду отсутствия потребителей по ходу движения жидкости, расход остаётся величиной постоянной, т. е. какое количество воды поступает из напорной ёмкости, такое же количество истекает в атмосферу у потребителя, следовательно, $Q = \text{const}$.

2. ***Потери напора по длине*** при последовательном соединении труб рассчитываются, как сумма потерь напора на отдельных участках:

$$h_{l_{сист.}} = h_{l_1} + h_{l_2} + h_{l_3}.$$

3. ***Действующий напор*** определяется по формуле (6.23)

$$H = (1{,}05 \div 1{,}1)h_{l_{сист.}} = (1{,}05 \div 1{,}1)(h_{l_1} + h_{l_2} + h_{l_3}) \qquad (6.24)$$

или с учётом формулы (5.21): $h_l = AQ^2l$ при постоянном расходе:

$$H = (1{,}05 \div 1{,}1)Q^2(A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3), \qquad (6.25)$$

где A_1, A_2, A_3 - удельное сопротивление трубопровода, принимается по табл. 9 (см. приложение) в соответствии с диаметрами d_1, d_2, d_3;

l_1, l_2, l_3 – длины участков трубопроводов.

4. ***Строится пьезометрическая линия*** на основном чертеже (рис. 6.26) аналогично построению пьезометрической и напорной линии для простой системы (см. рис. 6.5). При построении пьезометрической линии нужно учитывать не только потери напора по длине, но и потери в местных сопротивлениях, поэтому на каждом участке покажем $h_{w_i} = (1{,}05 \div 1{,}1)A_iQ_i^2l_i$.

Проектируем начало трубопровода на свободную поверхность в башне, из конца каждого участка трубопровода проводим вертикальные линии. Откладываем потери напора на первом участке (h_{w_1}), изменение потерь напора подчиняется линейному закону, так как длина трубы входит в формулу потерь напора (5.21) в первой степени. К потерям напора на первом участке прибавляем потери напора на втором (h_{w_2}) и потери на третьем (h_{w_3}) участках. В сумме потери напора равны действующему напору, т. е. весь действующий напор (H) идет только на преодоление сопротивлений в системе, затратой напора на создание скорости при истечении в атмосферу пренебрегаем (см. раздел 6.4).

Вертикальными штриховыми линиями показываем эпюру потерь напора.

5. Пусть ***дополнительно*** требуется определить показание манометра ($p_{ман.}$), установленного на расстоянии l_N от начала второй трубы.

Покажем ***геометрическое*** определение потерь напора до точки *N*. Из точки *N* проводим вертикальную линию. На ***эпюре потерь напора*** находим потери напора до точки *N* (h_{w_N}). В месте установки манометра можно показать пьезометр (пунктирная линия). Показание пьезометра соответствует $\frac{p_{ман.}}{\rho g}$. Такая методика перевода манометрического давления в пьезометрический напор была рассмотрена в задачах 2.3.6; 2.3.8; 6.2.2.

Рассмотрим ***аналитический расчёт*** манометрического давления в точке *N*:

$$\frac{p_{ман.}}{\rho g} = H - (1{,}05 \div 1{,}1)(h_{l_1} + h_{l_N}), \qquad (6.26)$$

далее

$$\frac{p_{ман.}}{\rho g} = H - (1{,}05 \div 1{,}1)Q^2(A_1 l_1 + A_2 l_N), \qquad (6.27)$$

из формулы (6.27) определяется показание манометра в точке N.

6.4.2. Системы с параллельным соединением труб

Это системы, в которых магистральный трубопровод в некоторой точке разветвляется на несколько труб разных длин и разных диаметров, затем трубы вновь объединяются в магистральный трубопровод того же или другого диаметра. Эти системы называются также ***кольцевыми***, т. е. закольцовано несколько труб. Преимущество таких систем состоит в том, что обеспечивается надёжность и бесперебойность работы системы (например, одна из ветвей может быть резервной), а также включение труб меньшего диаметра при той же пропускной способности системы.

Рассмотрим кольцевую систему, представленную в плане. Известно манометрическое давление в начале магистрального участка, длины и диаметры всех участков (рис. 6.27).

Параллельно проложенные трубы разветвляются в точке ***A*** и соединяются в точке ***B***, лежат на одном горизонте. Для наглядности параллельное соединение труб показано в изометрии. Пусть отсутствуют путевые потребители, а у конечного потребителя ***C*** должен быть остаточный (или свободный) напор $h_{ост C}$.

Следуя принятой методике расчёта сложных систем (см. раздел 6.4), рассмотрим ***особенности расчёта систем с параллельным соединением труб***.

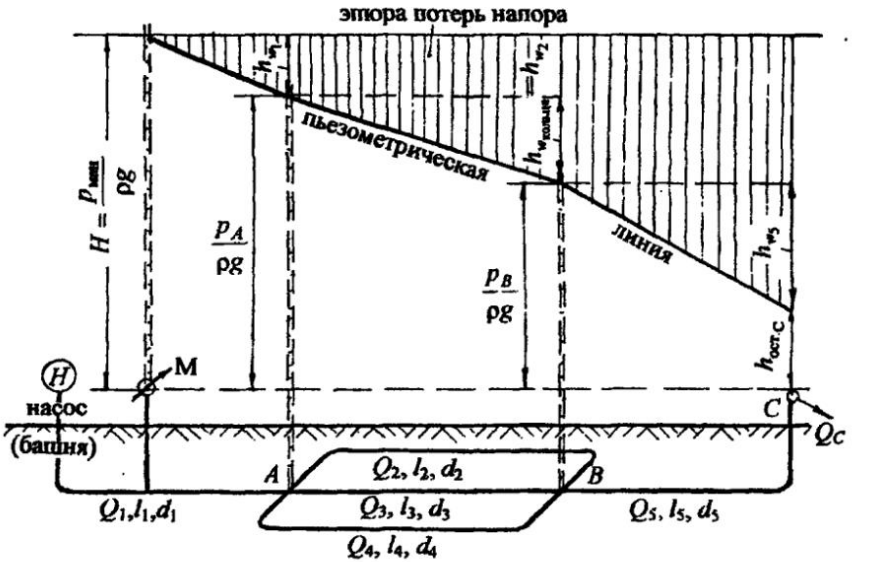


Рис. 6.27

1. ***Распределение расхода.*** На каждом участке введём обозначение расхода с индексом, соответствующим диаметру: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5. При отсутствии потребителей по длине системы и наличии только одного конечного потребителя с расходом Q_C ***расход на магистральном участке равен сумме расходов в параллельных ветвях трубопроводов***:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4. \qquad (6.28)$$

На пятом магистральном участке $Q_5 = Q_1$, а также $Q_5 = Q_C$.

2. ***Потери напора в системе.*** При параллельном соединении труб давление, а следовательно, и ***пьезометрический напор*** в точках разветвления ***A*** и ***B*** ***одинаковы для любого из параллельных участков.***

На рис. 6.27 пунктирными линиями показаны пьезометры в точках ***A*** и ***B***, а также пьезометрические напоры $\frac{p_A}{\rho g}$ и $\frac{p_B}{\rho g}$.

В главе 5 отмечалось, что потери напора в гидравлических сопротивлениях определяются, как разность показаний пьезометров в начале и в конце участков сопротивлений, следовательно, ***потери напора в кольце равны потерям напора по любому из параллельных участков***:

$$\frac{p_A}{\rho g} - \frac{p_B}{\rho g} = h_{w_{\text{кольца}}},$$

$$h_{w_{\text{кольца}}} = h_{w_2} = h_{w_3} = h_{w_4}. \qquad (6.29)$$

Из равенства потерь напора в параллельных участках трубопроводов можно найти распределение расходов по ветвям в кольце. Приравняем потери по длине, т. е. в формуле (6.29) не учитываем поправочный коэффициент на местные сопротивления:

$$h_{l_2} = h_{l_3} = h_{l_4}, \qquad (6.30)$$

или с учётом формулы (5.21): $A_2 Q_2^2 l_2 = A_3 Q_3^2 l_3 = A_4 Q_4^2 l_4$. (6.31)

Имеем ***два уравнения*** (6.28) и (6.31) ***с тремя неизвестными***. Решим их.

В формуле (6.31) выразим Q_3 через Q_2, затем Q_4 через Q_2, подставим значения Q_3 и Q_4 в формулу (6.28), получим уравнение с одним неизвестным Q_2 (при условии, что Q_1 задано). Определим Q_2, затем Q_3 и Q_4.

Итак, приравняем: $A_2 Q_2^2 l_2 = A_3 Q_3^2 l_3$,

выразим Q_3 через Q_2: $Q_3 = Q_2 \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_3 l_3}}$; (6.32)

приравняем: $A_2 Q_2^2 l_2 = A_4 Q_4^2 l_4$,

выразим Q_4 через Q_2: $Q_4 = Q_2 \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_4 l_4}}$. (6.33)

Подставим значения Q_3 и Q_4 в формулу (6.28):

$$Q_1 = Q_2 \left(1 + \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_3 l_3}} + \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_4 l_4}}\right), \qquad (6.34)$$

получим Q_2, выраженное через Q_1:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{\left(1 + \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_3 l_3}} + \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_4 l_4}}\right)}, \qquad (6.35)$$

затем по формулам (6.32) и (6.33) определим Q_3 и Q_4.

При расчётах формула (6.35) математически становится очень простой, так как $\sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_3 l_3}}$ и $\sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_4 l_4}}$ представляют собой простые числа: длины участков заданы, значения коэффициентов A в соответствии с диаметром трубы принимаются по табл. 9 (см. приложение).

Таким образом, рассмотрены два самых важных момента при расчёте кольцевых систем: ***расход на магистральном участке равен сумме расходов в параллельных ветвях; потери напора в параллельных участках равны.***

3. ***Действующий напор*** для представленной кольцевой системы (см. рис. 6.27) с учётом формулы (6.23):

$$H = (1{,}05 \div 1{,}1)h_{l_{\text{сист.}}} + h_{\text{ост.С}} = (1{,}05 \div 1{,}1)(h_{l_1} + h_{l_{\text{кольца}}} + h_{l_5}) + h_{\text{ост.С}}. \qquad (6.36)$$

Прочитаем формулу (6.36): действующий напор должен быть таким, чтобы преодолеть сопротивление в системе и обеспечить остаточный напор у потребителя C.

Учтём потери напора в кольце, например, по второму участку кольца, введём в формулу (6.36) расходы:

$$H = (1{,}05 \div 1{,}1)\left(A_1 Q_1^2 l_1 + A_2 Q_2^2 l_2 + A_5 Q_5^2 l_5\right) + h_{\text{ост.С}}. \qquad (6.37)$$

Следует помнить, что $H = \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}$.

4. На схеме установки (см. рис. 6.27) ***строим пьезометрическую линию и эпюру потерь напора*** по аналогии с системой последовательно соединённых труб (см. рис. 6.26).

6.4.3. Распределительные сети, или тупиковые системы

Это сложные системы, состоящие из разветвлённой сети трубопроводов, имеющие несколько конечных потребителей. Как правило, известно, какими расходами следует обеспечить потребителей, а также какой должен быть остаточный (свободный) напор у потребителя или на какую отметку следует поднять воду у потребителя. При известном расходе ставится также задача подобрать диаметры трубопроводов.

Тупиковые системы принято представлять в плане. Рассмотрим принцип расчёта тупиковой водопроводной системы на примере системы, представленной на рис. 6.28. Система имеет четыре конечных потребителя (***A,B,C,D***) и один потребитель в точке ***N*** по пути движения воды. Остаточные напоры (или высота подъёма) воды у конечных потребителей различные ($h_{ост.A}, h_{ост.B}, h_{ост.C}, h_{ост.D}$).

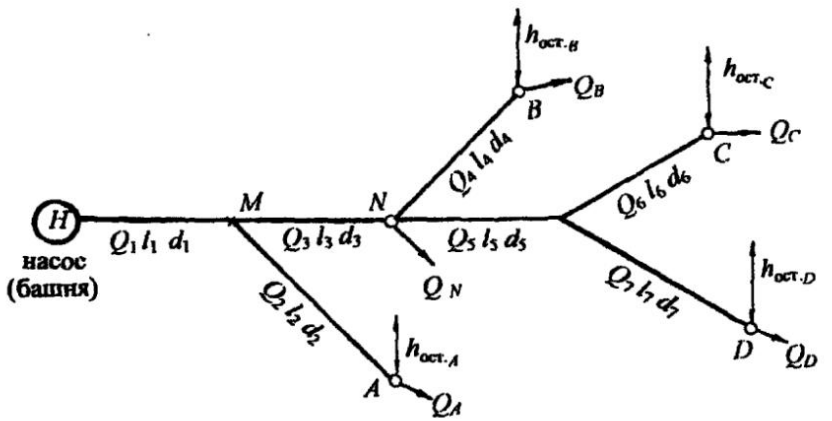


Рис. 6.28

Согласно принятой ***методике*** расчёта сложных систем (см. раздел 6.4), покажем ***особенности расчёта тупиковых систем***.

1. ***Распределение расхода***. Расход на каждом участке представим через расходы потребителей. Помним, что на магистральном участке расход равен сумме расходов потребителей. Первый участок является магистральным для всех потребителей:

$$Q_1 = Q_A + Q_N + Q_B + Q_C + Q_D, \text{ а также } Q_1 = Q_2 + Q_3.$$

На третьем участке:

$$Q_3 = Q_N + Q_B + Q_C + Q_D; \text{ а также } Q_3 = Q_N + Q_4 + Q_5.$$

На пятом участке:

$$Q_5 = Q_C + Q_D \text{ ; а также } Q_5 = Q_6 + Q_7 .$$

На отдельных участках, ведущих к потребителю, расход равен расходу потребителя:

$$Q_2 = Q_A;\ \ Q_4 = Q_B;\ \ Q_6 = Q_C;\ \ Q_7 = Q_D.$$

2. ***Потери напора по длине любого из направлений*** рассчитываются из условия последовательного соединения труб, т. е. суммируются. Для рассматриваемой схемы (см. рис. 6.28) потери напора до потребителя ***A***:

$$h_{l_A} = h_{l_{1-2}} = h_{l_1} + h_{l_2},$$

до потребителя ***B***: $$h_B = h_{l_{1-3-4}} = h_{l_1} + h_{l_3} + h_{l_4},$$

до потребителей ***C*** и ***D*** соответственно:

$$h_{l_C} = h_{l_{1-3-5-6}} = h_{l_1} + h_{l_3} + h_{l_5} + h_{l_6};$$

$$h_{l_D} = h_{l_{1-3-5-7}} = h_{l_1} + h_{l_3} + h_{l_5} + h_{l_7}.$$

Потери напора с учётом местных сопротивлений по любому направлению

$$h_{w_{\text{напр}}} = (1{,}05 \div 1{,}1) h_{l_{\text{напр}}}. \qquad (6.38)$$

Поправочный коэффициент на местные сопротивления (1,05÷1,1) принимается согласно поставленному условию в задаче.

3. Потребный ***действующий напор*** (***H***), или ***высота водонапорной башни***, определяется по ***максимальной величине*** суммы потерь напора и остаточного напора по ***одному*** из направлений. В частности, для представленной схемы (см. рис. 6.28) действующий напор:

$$H = \left(h_{w_{\text{напр.}}} + h_{\text{ост.}}\right)_{\max}, \qquad (6.39)$$

где $\left.\begin{matrix} h_{w_A} + h_{\text{ост.}_A} \\ h_{w_B} + h_{\text{ост.}_B} \\ h_{w_C} + h_{\text{ост.}_C} \\ h_{w_D} + h_{\text{ост.}_D} \end{matrix}\right\}$ сравниваем, из них выбираем максимальную величину:

т. е. $\left(h_{w_{\text{напр.}}} + h_{\text{ост.}}\right)_{\max}$.

4. Дополнительным условием в задаче может быть расчёт ***диаметра трубопровода*** по заданному расходу потребителя, при этом рекомендуется эксплуатационная скорость в пределах $\upsilon_{экс.} = (1{,}0 \div 1{,}5)$ м/с.

Диаметр трубопровода на любом участке рассчитывается через расход:

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \upsilon_{экс.}}}. \qquad (6.40)$$

По окончании расчёта, как правило, строится пьезометрическая линия.

6.4.4. Системы с путевым расходом жидкости

Эти системы включают трубопровод, в котором жидкость раздаётся в ряде пунктов по его длине. При большом количестве таких пунктов с достаточной точностью можно считать, что расход жидкости распределяется равномерно по длине l с интенсивностью $q = Q_{пут.}/l$. Такие трубопроводы называются также трубопроводами с равномерной раздачей жидкости.

Наиболее характерным является случай, когда в трубопроводе кроме равномерного путевого расхода $Q_{пут.} = ql$ имеется транзитный расход $Q_{тр.}$, проходящий по трубе и забираемый в конце трубопровода (рис. 6.29). При этом общий расход жидкости, поступающий в трубопровод:

$$Q = Q_{тр.} + Q_{пут.} = Q_{тр.} + ql.$$

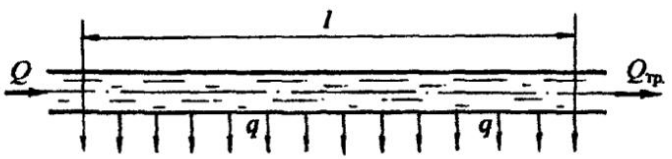


Рис. 6.29

Основным вопросом для систем с путевым расходом является определение величины потерянного напора. Общие потери по длине трубопровода с учётом путевого и транзитного расходов можно определить по формуле

$$h_l = Al\left(Q_{тр.}^2 + Q_{тр.}Q_{пут.} + \frac{Q_{пут.}^2}{3}\right), \qquad (6.41)$$

где A – удельное сопротивление для заданного диаметра трубы, принимается по табл. 9 (см. приложение).

Основные теоретические положения по расчёту сложных систем рассмотрены. Ниже предлагаются примеры решения задач с построением пьезометрических (напорных) линий.

6.5. Примеры решения задач по теме: "Расчёт сложных трубопроводных систем"

Задача 6.5.1. Сложная система с водонапорной башней включает кольцевое соединение труб и доставляет воду двум потребителям (рис. 6.30).

Определить отметку уровня воды в водонапорной башне, питающей два потребителя: ***A*** с расходом $Q_A = 18$ л/с и ***C*** с расходом $Q_C = 32$ л/с.
Система включаст магистральный трубопровод $d_1 = 250$ мм; $l_1 = 600$ м; два параллельно проложенных трубопровода: $d_2 = 150$ мм; $l_2 = 550$ м; $d_3 = 100$ мм; $l_3 = 400$ м и трубопровод $d_4 = 200$ мм; $l_4 = 720$ м, подающий воду потребителю ***C***. Остаточный напор у потребителя ***C*** должен быть не менее 10 м ($h_{ост.C} \geq 10$ м).

Трубы водопроводные нормальные. Местные потери напора принять равными 10 % от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию.

Решение. Руководствуемся ***методикой*** расчёта сложных систем с параллельным соединением труб (см. раздел 6.4.2).

1. ***Распределение расхода*** (пропускной способности). На каждом участке вводим обозначение расхода с индексом, соответствующим индексу диаметра трубы (см. рис. 6.30).

Расход на первом участке равен сумме расходов потребителей:

$$Q_1 = Q_A + Q_C; \quad Q_1 = 50 \text{ л/с} = 0{,}05 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Сумма расходов в параллельных трубопроводах равна расходу потребителя ***C***:

$$Q_2 + Q_3 = Q_C; \quad Q_2 + Q_3 = 32 \text{ л/с} = 0{,}032 \text{ м}^3/\text{с}. \qquad (6.42)$$

Пропускная способность четвёртого участка равна расходу потребителя ***C***: $Q_4 = 0{,}032$ м^3/с.

2. ***Приравняем потери напора по длине в параллельных трубопроводах кольца***, чтобы найти распределение расхода в параллельных участках (см. раздел 6.4.2):

$$h_{l_2} = h_{l_3}, \text{ с учётом формулы (5.21): } A_2 Q_2^2 l_2 = A_3 Q_3^2 l_3.$$

Выразим Q_3 через Q_2: $Q_3 = Q_2\sqrt{\dfrac{A_2 l_2}{A_3 l_3}}$.

Согласно данным табл. 9 (см. приложение), для $d_2 = 150$ мм удельное сопротивление $A_2 = 31{,}18$ с^2/м^6; для $d_3 = 100$ мм значение $A_3 = 265$ с^2/м^6, тогда

$$Q_3 = Q_2\sqrt{\frac{31{,}18 \cdot 550}{265 \cdot 400}} = 0{,}4Q_2.$$

Подставим Q_3, выраженное через Q_2, в формулу (6.42):

$Q_2 + 0{,}4\,Q_2 = 0{,}032$ м^3/с, отсюда $Q_2 = 0{,}023$ м^3/с; значит $Q_3 = 0{,}009$ м^3/с.

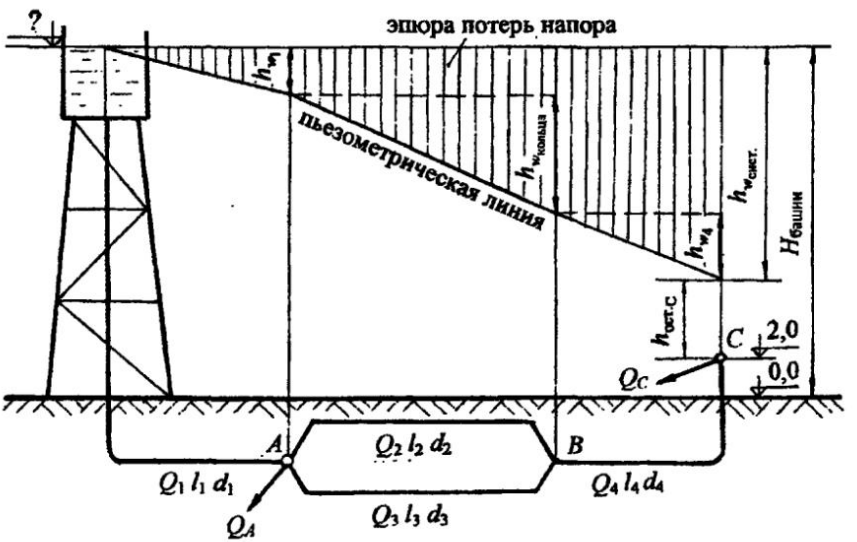


Рис. 6.30

3. Геодезическая высота, или отметка уровня воды в водонапорной башне относительно нулевой отметки (см. рис. 6.30):

$$H_{башни} = 2{,}0 + h_{ост.С} + h_{w_{сист.}}$$

Рассчитаем потери напора в системе:

$$h_{w_{\text{сист.}}} = 1{,}1\left(h_{l_1} + h_{l_{\text{кольца}}} + h_{l_4}\right),$$

где 1,1 – поправочный коэффициент на местные сопротивления, так как по условию задачи потери напора в местных сопротивлениях составляют 10 % от потерь по длине,

$h_{l_{\text{кольца}}}$ - потери напора по длине в кольце, их учтём по одной из ветвей, например, по второй: $h_{l_{\text{кольца}}} = h_{l_2}$.

Потери напора в системе с учётом формулы (5.21):

$$h_{w_{\text{сист.}}} = 1{,}1\left(A_1 Q_1^2 l_1 + A_2 Q_2^2 l_2 + A_4 Q_4^2 l_4\right).$$

Рассчитаем потери напора в системе, принимая A_1 = 2,11 с^2/м^6; A_4 = 6,78 с^2/м^6 по табл. 9 (см. приложение):

$$h_{w_{\text{сист.}}} = 1{,}1(2{,}11 \cdot 0{,}05^2 \cdot 600 + 31{,}18 \cdot 0{,}023^2 \cdot 550 + 6{,}78 \cdot 0{,}032^2 \cdot 720) =$$
$$= 3{,}5 + 10{,}0 + 5{,}5 = 19{,}0 \text{ м}.$$

Для построения пьезометрической линии имеем потери напора на каждом участке:

$$h_{w_1} = 3{,}5 \text{ м}; \quad h_{w_{\text{кольца}}} = h_{w_2} = h_{w_3} = 10{,}0 \text{ м}; \quad h_{w_4} = 5{,}5 \text{ м}.$$

На рис. 6.30 откладываем в масштабе потери напора на каждом участке и строим пьезометрическую (напорную) линию, как показано в разделе 6.4.2.

Находим отметку уровня воды в водонапорной башне:

$$H_{\text{башни}} = 2{,}0 + 19{,}0 + 10{,}0 = 31{,}0 \text{ м}.$$

Ответ: отметка уровня воды в водонапорной башне равна 31,0 м.

Задача 6.5.2. Тупиковая водопроводная система имеет пять участков труб, длины и диаметры которых указаны на рис. 6.31. В системе четыре потребителя с расходами: Q_A = 10 л/с; Q_B = 18 л/с; Q_C = 12 л/с; Q_D = 8 л/с; на пятом участке равномерная раздача воды с путевым расходом $Q_{\text{пут.}}$ = 15 л/с.

Определить высоту водонапорной башни (H), рассчитать диаметры труб на первом и третьем участках системы при условии, что эксплуатационная скорость $v_{\text{экс.}} \leq$ 1,4 м/с.

Принять $l_1 = 500$ м; $l_3 = 450$ м; $d_2 = 150$ мм; $l_2 = 550$ м; $d_4 = 125$ мм; $l_4 = 600$ м; $d_5 = 150$ мм; $l_5 = 700$ м. Потери напора в местных сопротивлениях составляют 5 % от потерь по длине.

Построить пьезометрическую линию.

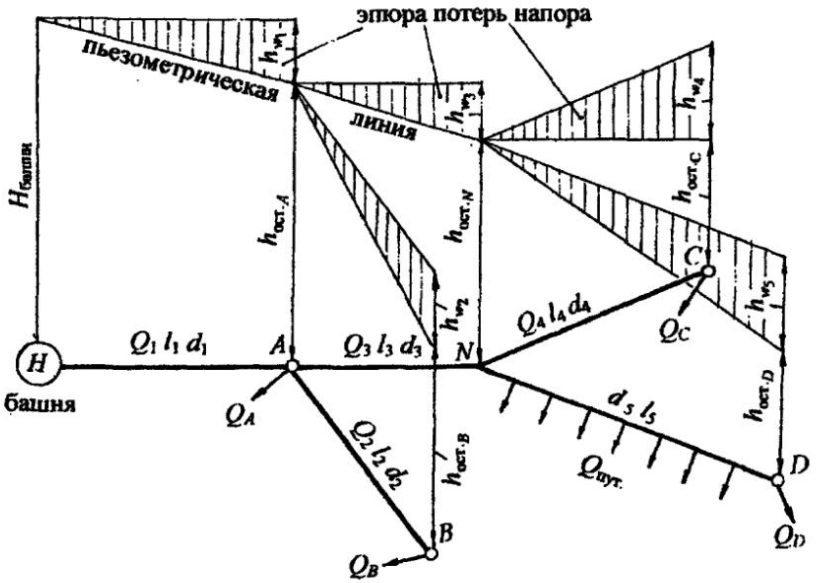


Рис. 6.31

Решение. Воспользуемся ***методикой*** расчёта тупиковых систем и систем с путевым расходом (см. разделы 6.4.3 и 6.4.4).

1. ***Обозначим на схеме*** (рис. 6.31) ***расходы*** на каждом участке с соответствующими индексами и найдём их значение, при этом переводим л/с в м^3/с.

Первый участок является магистральным для всех потребителей:

$$Q_1 = Q_A + Q_B + Q_C + Q_D + Q_{пут.} = 0{,}063 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Третий участок магистральный для потребителей ***C*** и ***D*** и путевого расхода:

$$Q_3 = Q_C + Q_D + Q_{пут.} = 0{,}035 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Для второго и четвёртого участков:

$$Q_2 = Q_B = 0{,}018 \text{ м}^3/\text{с}; \quad Q_4 = Q_C = 0{,}012 \text{ м}^3/\text{с}.$$

2. Рассчитаем ***диаметры труб*** на первом и третьем участках, пользуясь формулой (6.40):

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \upsilon_{\text{экс.}}}}.$$

Получим:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}063}{3{,}14 \cdot 1{,}4}} = 0{,}239 \text{ м, принимаем } d_1 = 250 \text{ мм};$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}035}{3{,}14 \cdot 1{,}4}} = 0{,}178 \text{м, принимаем } d_3 = 200 \text{ мм}.$$

3. Определим ***потери напора на участках 1-4*** с учётом местных сопротивлений по формуле:

$$h_w = 1{,}05\, h_l = 1{,}05\, AQ^2 l.$$

Для всех диаметров труб выбираем значения коэффициентов удельного сопротивления по табл. 9 (см. приложение): $A_1 = 2{,}11$ с^2/м^6; $A_2 = 31{,}18$ с^2/м^6; $A_3 = 6{,}78$ с^2/м^6; $A_4 = 81{,}6$ с^2/м^6; $A_5 = 31{,}18$ с^2/м^6.

Получим $h_{w_1} = 1{,}05 \cdot 2{,}11 \cdot 0{,}063^2 \cdot 500 = 4{,}4$ м,

по аналогии: $h_{w_2} = 5{,}8$ м; $h_{w_3} = 3{,}9$ м; $h_{w_4} = 7{,}4$ м.

Потери напора на пятом участке с учётом путевого расхода ($Q_{\text{пут.}}$) и транзитного расхода в виде расхода потребителя ***D*** (Q_D), согласно формуле (6.41):

$$h_{w_5} = 1{,}05 A_5 l_5 \left(Q_D^2 + Q_D Q_{\text{пут.}} + \frac{Q_{\text{пут.}}^2}{3} \right),$$

после подстановки численных значений: $h_{w_5} = 5{,}9$ м.

Рассчитаем потери напора по трём направлениям к потребителям ***B***; ***C*** и ***D***, принимая последовательное соединение труб:

$$h_{w_B} = h_{w_{1-2}} = h_{w_1} + h_{w_2} = 10{,}2\text{ м};$$

$$h_{w_C} = h_{w_{1-3-4}} = h_{w_1} + h_{w_3} + h_{w_4} = 15{,}7\text{ м};$$

$$h_{w_D} = h_{w_{1-3-5}} = h_{w_1} + h_{w_3} + h_{w_5} = 14{,}2\text{ м}.$$

4. По формуле (6.39) определим ***высоту водонапорной башни***:

$$H = \left(h_{w_{\text{напр.}}} + h_{\text{ост.}}\right)_{\max},$$

в данной задаче остаточный напор у всех конечных потребителей принимаем равным 10 м, поэтому сравниваем потери напора по всем направлениям и выбираем максимальные, такими являются потери напора до потребителя ***C***:

$$h_{w_C} = h_{w_{\max}} = 15{,}7\text{ м}.$$

Таким образом, высота водонапорной башни

$$H = h_{w_C} + h_{\text{ост.}C} = 15{,}7 + 10{,}0 = 25{,}7\text{ м}.$$

5. Строим ***пьезометрическую линию***. Для первого и третьего участков пьезометрическую линию построим в вертикальной плоскости, для других участков пьезометрическую линию представим в изометрии путём параллельного переноса направления трубопровода (см. рис. 6.31).

Построение можно несколько упростить. Чтобы на чертеже не было наложения эпюр потерь напора, можно от остаточного напора в точках ***A*** и ***N*** откладывать потери напора на участках втором, четвёртом и пятом, как представлено на рис. 6.31.

Из построения пьезометрической линии следует, что остаточные напоры у всех потребителей, кроме потребителя ***C***, больше 10,0 м.

Вертикальной штриховкой показана ***эпюра потерь напора***.

В примерах решения задач 6.5.1 и 6.5.2 расчёты сложных систем проведены без составления уравнения Бернулли, т.к. эти расчёты аналогичны расчётам простых систем (см. раздел 6.2). На примере решения задачи 6.5.3 представим расчёт сложной системы путём составления уравнения Бернулли.

Задача 6.5.3. Из водонапорной башни A, на поверхности воды в которой действует избыточное давление ($p_{ман}$), по трём последовательно соединённым трубам подаётся вода трём потребителям с расходами: Q_B = 15 л/с; Q_C = 8 л/с; Q_D = 12 л/с. Диаметры и длины участков системы принять: d_1 = 200 мм, l_1 = 700 м; d_2 = 150 мм, l_2 = 600 м; d_3 = 125 мм, l_3 = 500 м. Остаточный (свободный) напор у потребителя D должен быть не менее 10 м ($h_{ост\,D} \geq 10$ м). Действующий напор водонапорной башни H = 15 м считать постоянным (рис. 6.32).

Определить, каким должно быть показание манометра ($p_{ман}$) на поверхности воды в башне для обеспечения водой потребителей при условии, что местные сопротивления составляют 10% от потерь по длине. Трубы водопроводные нормальные. Построить пьезометрическую линию.

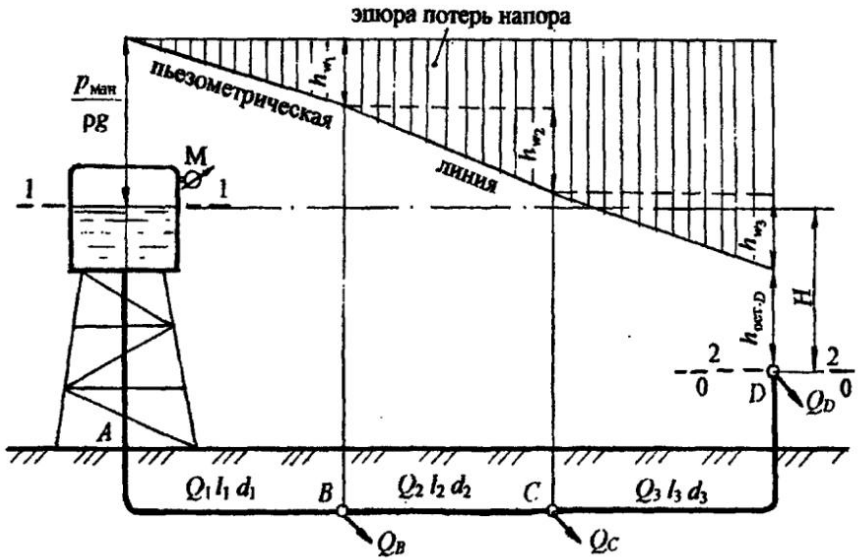


Рис. 6.32

Решение. Для расчёта системы (см. рис. 6.32) воспользуемся уравнением Бернулли по принятой методике (см. раздел 4.5.7).

1. ***Выбираем два сечения*** по свободной поверхности воды в башне, где скорость воды можно считать равной нулю, и у потребителя D.

2. ***Сечения нумеруем по направлению движения воды***: **1-1** по свободной поверхности воды, где установлен манометр, **2-2** по трубопроводу у потребителя D.

3. В выбранных сечениях ***учитываем абсолютное давление***:

$$p_1 = p_a + p_{ман};\ \ p_2 = p_a + \rho g h_{ост_D}.$$

4. ***Плоскость сравнения*** **0-0** ***совместим с сечением*** **2-2**, тогда $z_1 = H$; $z_2 = 0$.

5. Записываем уравнение Бернулли в общем виде и производим подстановку параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}};$$

$z_1 = H;$ $\quad z_2 = 0;$

$p_1 = p_a + p_{ман};$ $\quad p_2 = p_a + \rho g h_{ост_D};$

$\upsilon_1 = 0;$ $\quad \upsilon_2 = \upsilon;\ \alpha_2 = 1{,}0;\ h_{w_{1-2}} = h_{w_{сист}}.$

После подстановки параметров получаем:

$$H + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{p_{ман}}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\rho g h_{ост_D}}{\rho g} + \frac{\upsilon^2}{2g} + h_{w_{сист}}.$$

Как указано в разделе 6.4, скоростным напором ($\frac{\upsilon^2}{2g}$), как малой величиной, можно пренебречь, поэтому после соответствующих сокращений уравнение Бернулли принимает вид:

$$H + \frac{p_{ман}}{\rho g} = h_{ост_D} + h_{w_{сист}}. \qquad (6.43)$$

Прочитаем уравнение (6.43): за счёт избыточного напора ($\frac{p_{ман}}{\rho g}$) на поверхности воды в башне и действующего напора (H) происходит преодоление всех сопротивлений в системе ($h_{w_{сист}}$) и обеспечение остаточного напора у потребителя D ($h_{ост_D}$).

Чтобы рассчитать показание манометра ($p_{ман}$) в формуле (6.43), следует определить потери напора в системе ($h_{w_{сист}}$).

Воспользуемся методикой расчёта сложных систем (см. раздел 6.4).

1. Распределение расхода. На каждом участке вводим обозначение расхода с индексом, соответствующим индексу диаметра трубы: Q_1; Q_2; Q_3.

Рассчитаем расход на каждом участке через расходы потребителей:

$Q_1 = Q_B + Q_C + Q_D;$ $\quad Q_1 = 35$ л/с $= 0{,}035$ м^3/с;

$Q_2 = Q_C + Q_D;$ $\quad Q_2 = 20$ л/с $= 0{,}020$ м^3/с;

$Q_3 = Q_D;$ $\quad Q_3 = 12$ л/с $= 0{,}012$ м^3/с.

2. Определим потери напора в системе - $h_{w_{сист}}$. При последовательном соединении труб потери напора на всех участках суммируются (см. раздел 6.4.1). С учётом поправочного коэффициента на местные сопротивления получим:

$$h_{w_{сист}} = 1{,}1(\, h_{l_1} + h_{l_2} + h_{l_3}),$$

затем с учётом формулы (5.21):

$$h_{w_{сист}} = 1{,}1(A_1 Q_1^2 l_1 + A_2 Q_2^2 l_2 + A_3 Q_3^2 l_3). \qquad (6.44)$$

Рассчитаем потери напора в системе, принимая A_1 = 6,78 с^2/м^6; A_2 = 31,18 с^2/м^6; A_3 = 81,60 с^2/м^6 (см. приложение табл. 8).

Для построения пьезометрической (напорной) линии нужно знать потери напора на каждом участке трубопровода, поэтому формулу (6.44) представим в виде трёх слагаемых:

$$h_{w_1} = 1{,}1A_1 Q_1^2 l_1; \quad h_{w_1} = 1{,}1 \cdot 6{,}78 \cdot 0{,}035^2 \cdot 700 = 6{,}4\,\text{м};$$
$$h_{w_2} = 1{,}1A_2 Q_2^2 l_2; \quad h_{w_2} = 1{,}1 \cdot 31{,}18 \cdot 0{,}020^2 \cdot 600 = 8{,}2\,\text{м};$$
$$h_{w_3} = 1{,}1A_3 Q_3^2 l_3; \quad h_{w_3} = 1{,}1 \cdot 81{,}60 \cdot 0{,}012^2 \cdot 500 = 6{,}5\,\text{м}.$$
$$h_{w_{сист.}} = 6{,}4 + 8{,}2 + 6{,}5 = 21{,}1\,\text{м}.$$

Обратимся к формуле (6.43) для определения показания манометра ($p_{ман}$) на поверхности воды в водонапорной башне:

$$\frac{p_{ман}}{\rho g} = h_{w_{сист}} + h_{ост_D} - H;$$

$$\frac{p_{ман}}{\rho g} = 21{,}1 + 10 - 15 = 16{,}1\,\text{м},$$

отсюда $p_{ман} = 16{,}1\rho g = 16{,}1 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 157 \cdot 10^3$ Па = 157 кПа.

Показание манометра можно представить в атмосферах, помня, что 1ат = 10 м вод. ст., получим: $\frac{p_{ман}}{\rho g} = 16{,}1\,\text{м}$ соответствует манометрическому давлению $p_{ман}$ = 1,61 ат.

Ответ: показание манометра $p_{ман}$ = 157 кПа или $p_{ман}$ = 1,61 ат.

Ниже в разделе 6.6 предлагаются задачи для самостоятельной работы, чтобы проверить знания по расчёту сложных трубопроводных систем.

6.6. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Расчёт сложных трубопроводных систем "

Задача 6.6.1

Водонапорная башня ***A*** с отметкой 22,0 м питает два потребителя - ***B*** и ***C*** - через систему двух последовательно соединённых труб. Пьезометрический напор в конце первого участка h_p = 15,0 м. Определить расход воды на первом участке (Q_1) и расход потребителя ***C*** (Q_C), а также отметку потребителя ***C***. Принять расход потребителя ***B*** Q_B = 10 л/с. Диаметры и длины участков водопроводной системы соответственно: d_1 = 150 мм, l_1 = 600 м; d_2 = 125 мм, l_2 = 500 м. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери напора принять равными 5 % от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию (рис. 6.33).

Ответ: Q_1 = 19 л/с; Q_C = 9 л/с; отметка потребителя ***C*** равна 11,5 м.

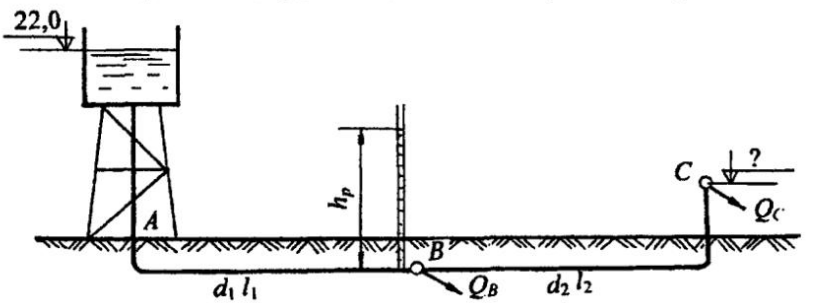


Рис. 6.33

Задача 6.6.2

Из водонапорной башни ***A*** обеспечиваются водой три потребителя в точках ***B***, ***C*** и ***D***. Пропускная способность первого участка Q_1 = 30 л/с; расходы потребителей: Q_B = 12 л/с; Q_C = 10 л/с. Определить расход потребителя ***D*** (Q_D, л/с), а также отметку свободной поверхности воды в водонапорной башне, если остаточный напор у потребителя ***D*** ($h_{ост.D}$) должен быть не менее 10 м. Принять диаметры и длины участков труб: d_1 = 200 мм, l_1 = 600 м; d_2 = 150 мм, l_2 = 500 м; d_3 = 125 мм, l_3 = 400 м. Трубы водопроводные нормальные, местные сопротивления составляют 10 % от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию (рис. 6.34).

Ответ: Q_D = 8 л/с; отметка свободной поверхности воды в башне 24 м.

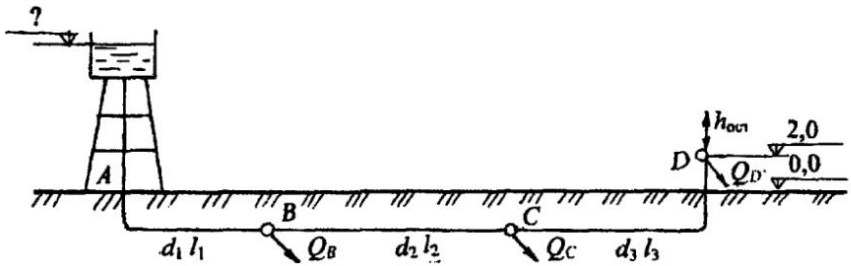


Рис. 6.34

Задача 6.6.3

Из водонапорного бака A с избыточным давлением на поверхности $p_{ман} = 19{,}6$ кПа по трём последовательно соединённым трубам вода подаётся потребителям B, C и D с одинаковыми расходами: $Q_B = Q_C = Q_D = Q$. У потребителя D - выход воды в атмосферу. Определить расход воды на каждом участке трубы, диаметры и длины участков соответственно: $d_1 = 200$ мм, $l_1 = 600$ м; $d_2 = 150$ мм, $l_2 = 500$ м; $d_3 = 125$ мм, $l_3 = 400$ м. Действующий напор $H = 15$ м считать постоянным. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери принять равными 10 % от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию (рис. 6.35).

Ответ: $Q_1 = 32{,}4$ л/с; $Q_2 = 21{,}6$ л/с; $Q_3 = 10{,}8$ л/с.

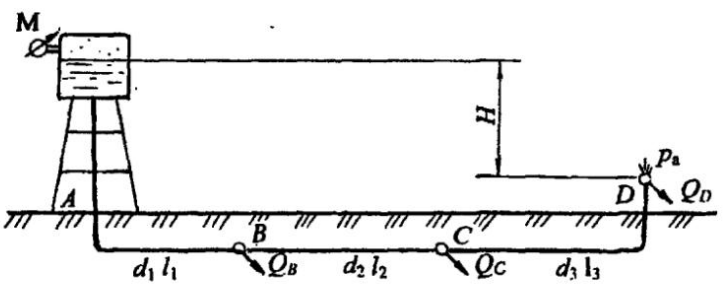


Рис. 6.35

Задача 6.6.4

От насосной установки по трубопроводной системе с параллельным соединением труб вода подаётся двум потребителям - ***A*** и ***B*** - с расходами $Q_A = 10$ л/с; $Q_B = 12$ л/с. Длины и диаметры участков системы: $d_1 = 100$ мм, $l_1 = 500$ м; $d_2 = 125$ мм, $l_2 = 700$ м; $d_3 = 125$ мм, $l_3 = 600$ м. Высота подъёма воды у потребителя ***B*** - $H_B = 8$ м. Определить распределение расходов в параллельных участках труб, а также показание манометра, установленного после насоса ($p_{ман}$). Местные сопротивления принять равными 5 % от потерь по длине. Считать, что трубы водопроводные нормальные уложены на одном горизонте (рис. 6.36).

Ответ: $q_1 = 0{,}009$ м^3/с; $q_2 = 0{,}013$ м^3/с; $p_{ман} = 2{,}55$ ат.

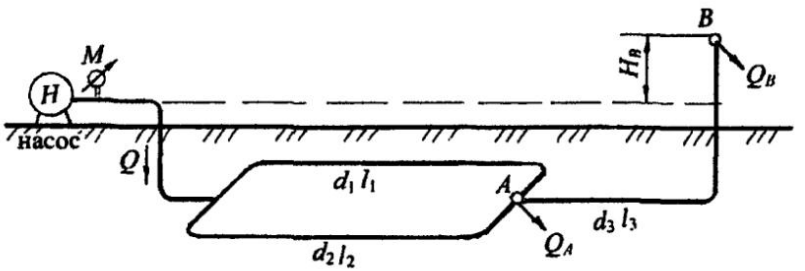


Рис. 6.36

Задача 6.6.5

Тупиковая система, представленная в плане, предназначена для снабжения водой четырёх потребителей - ***A***, ***B***, ***C*** и ***D***. Расходы потребителей: $Q_A = 16$ л/с; $Q_B = 14$ л/с; $Q_C = 12$ л/с; $Q_D = 8$ л/с.

Рассчитать диаметры труб на каждом участке при условии, что средняя скорость в трубах не должна превышать $v_{ср.} = 1{,}2$ м/с. Определить высоту водонапорной башни H, если остаточный напор ($h_{ост}$) у потребителей должен быть не менее 10 м. Длины участков сети: $l_1 = 700$ м; $l_2 = 400$ м; $l_3 = 600$м; $l_4 = 350$м. Трубы водопроводные нормальные. Потери напора в местных сопротивлениях принять равными 10 % от потерь по длине. Построить в аксонометрии пьезометрическую линию (рис. 6.37).

Ответ: высота водонапорной башни $H_{башни} = 28{,}7$ м.

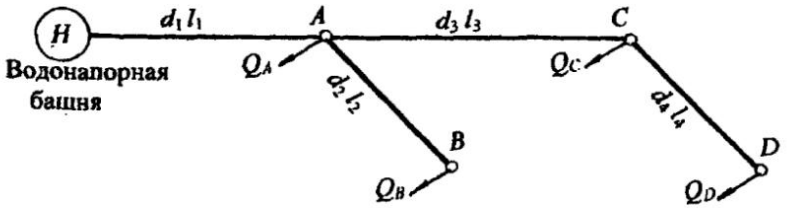


Рис. 6.37

Задача 6.6.6

Два цеха обогатительной фабрики ***B*** и ***C*** с расходами $Q_B = 20$ л/с и $Q_C = 15$ л/с питаются от насосной установки. Отметки, на которые надо поднять воду у потребителей: $h_B = 12{,}0$ м; $h_C = 10{,}0$ м; диаметры и длины трубопроводов: $d_2 = 150$ мм, $l_2 = 500$ м; $d_3 = 125$ мм, $l_3 = 400$ м. Определить расход воды на магистральном участке (Q_1), рассчитать диаметр трубы первого участка (d_1) при условии, что эксплуатационная скорость не должна превышать $v_{экс.} = 1{,}2$ м/с, длина первого участка $l_1 = 600$ м. Рассчитать показание манометра ($p_{ман.}$), установленного после насоса. Трубы водопроводные нормальные. Потери напора в местных сопротивлениях принять равными 10 % от потерь по длине (рис. 6.38).

Ответ: $Q_1 = 35$ л/с; $d_1 = 200$ мм; $p_{ман.} = 2{,}44$ ат.

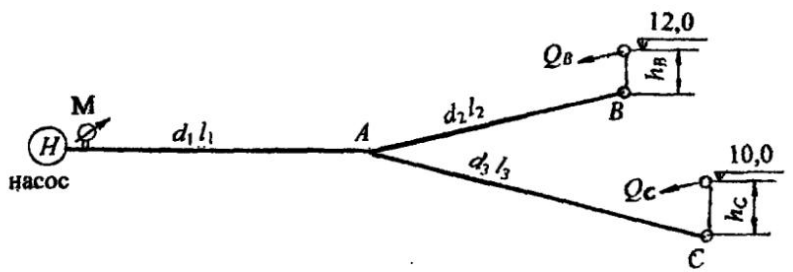


Рис. 6.38

Задача 6.6.7

Система водоснабжения, представленная в плане, имеет три потребителя - ***A***, ***B*** и ***C***. Определить расходы воды у потребителей (Q_A, Q_B, Q_C в л/с), если свободные (или остаточные) напоры у потребителей: $h_A = 20$ м; $h_B = 14$ м; $h_C = 15$ м. Показание манометра, установленного после насоса, $p_{ман} = 2{,}7$ ат. Потребители расположены на одном горизонте. Диаметры и длины участков сети: $d_1 = 200$ мм, $l_1 = 600$ м; $d_2 = 150$ мм, $l_2 = 500$ м; $d_3 = 125$ мм, $l_3 = 400$ м. Трубы водопроводные нормальные. Потери напора в местных сопротивлениях принять равными 10 % от потерь по длине. Построить в аксонометрии пьезометрическую линию (рис. 6.39).

Ответ: расходы потребителей: $Q_A = 9{,}0$ л/с; $Q_B = 19{,}0$ л/с; $Q_C = 12$ л/с.

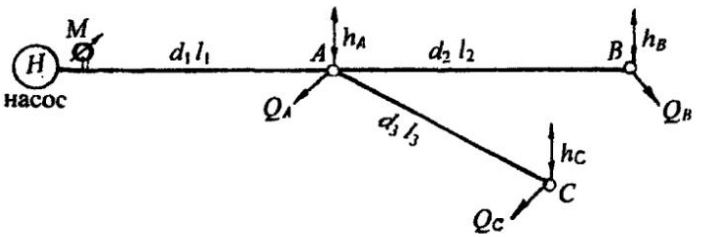


Рис. 6.39

Задача 6.6.8

Определить, каким должно быть давление на поверхности воды в закрытом резервуаре ($p_{ман_1}$), из которого по системе труб с кольцевым соединением вода поступает в другой закрытый резервуар с давлением на поверхности $p_{ман_2} = 0{,}2$ ат. Общий расход воды в системе $Q = 45{,}0$ л/с.

Длины и диаметры водопроводной сети: $d_1 = 250$ мм, $l_1 = 500$ м; $d_2 = 150$ мм, $l_2 = 300$ м; $d_3 = 100$ мм, $l_3 = 250$ м; $d_4 = 200$ мм, $l_4 = 400$ м. Разность уровней воды в резервуарах $H = 4$ м. Трубы водопроводные нормальные. Местные сопротивления принять равными 10 % от потерь по длине.

Построить пьезометрическую линию (рис. 6.40).

Ответ: показание манометра в питающем резервуаре $p_{ман1} = 1{,}76$ ат.

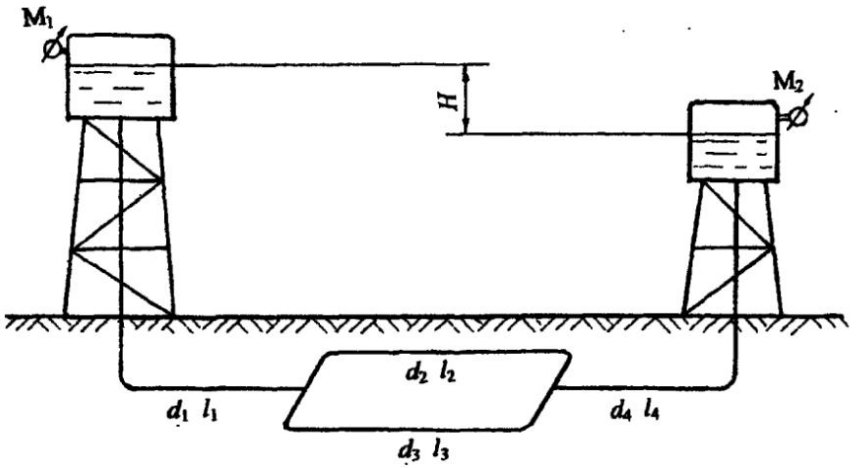


Рис. 6.40

Задача 6.6.9

От насосной установки по двум трубам d_1 = 250 мм, l_1 = 600 м и d_2 = 200 мм, l_2 = 400 м вода подаётся двум потребителям ***A*** и ***B*** с расходами Q_A = 30 л/с; Q_B = 10 л/с. На втором участке предусмотрена равномерная раздача воды с путевым расходом $Q_{пут.}$ = 20 л/с (рис. 6.41).

Определить остаточные напоры у потребителей ***A*** и ***B***, если показание манометра, установленного после насоса, $p_{ман}$ = 2,0 ат.

Трубы водопроводные нормальные. Местные сопротивления принять равными 10 % от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию.

Ответ: $h_{ост.A}$ = 15,0 м; $h_{ост.B}$ = 13,7 м.

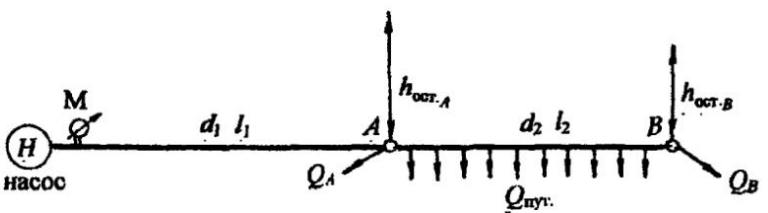


Рис. 6.41

Задача 6.6.10

Из двух напорных резервуаров - ***A*** и ***C*** - вода подаётся потребителю ***B*** с расходом Q_B = 10 л/с. Определить расходы воды из резервуаров Q_A и Q_C, построить пьезометрическую линию, если длины и диаметры участков сети: d_1 = 100 мм, l_1 = 400 м; d_2 = 125 мм, l_2 = 250 м. Отметка резервуара ***A*** равна 17,8 м, резервуара ***C*** – 12,0 м. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери принять равными 5 % от потерь по длине (рис. 6. 42).

Ответ: расходы из резервуаров: Q_A = 7,31 л/с; Q_C = 2,69 л/с.

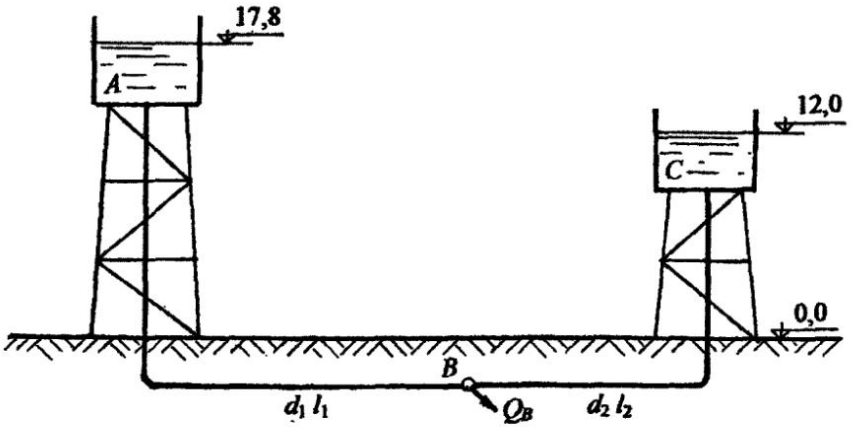


Рис. 6.42

Задача 6.6.11

Насос, дающий подачу Q = 20 л/с, перекачивает воду в резервуар по трём параллельным трубам под уровень H = 3,0 м. Определить показание манометра ($p_{ман}$), установленного на линии нагнетания, а также расходы воды в каждой трубе. Принять диаметры и длины параллельных участков сети : d_1 = 150 мм, l_1 = 450 м; d_2 = 100 мм, l_2 = 400 м; d_3 = 125 мм, l_3 = 450 м. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери составляют 10 % от потерь по длине (рис. 6.43).

Оценить, как изменится показание манометра, если один или два из параллельных трубопроводов будут отключены.

Ответ: Q_1 = 10 л/с; Q_2 = 3,7 л/с; Q_3 = 6,3 л/с; $p_{ман}$ = 0,46 ат.

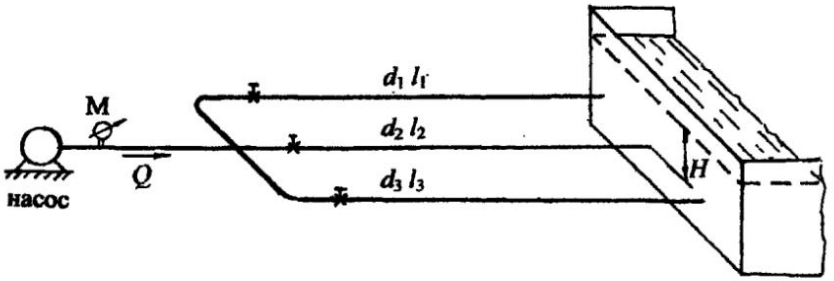


Рис. 6.43

Задача 6.6.12

Из напорного бака *A* вода подаётся двум потребителям - ***B*** и ***C*** (рис. 6.44) на отметку 3,0 м при необходимых расходах Q_B = 10 л/с; Q_C = 25 л/с по трубам: d_1 = 200 мм, l_1 = 500 м; d_2 = 200 мм, l_2 = 650 м. На первом трубопроводе предусмотрена непрерывная раздача воды в виде путевого расхода $Q_{пут.}$ = 20 л/с.

Определить отметку уровня воды в напорном баке ***A***. Трубы водопроводные нормальные, потери напора в местных сопротивлениях принять равными 10 % от потерь напора по длине.

Ответ: отметка уровня воды в напорном баке равна 6,0 м.

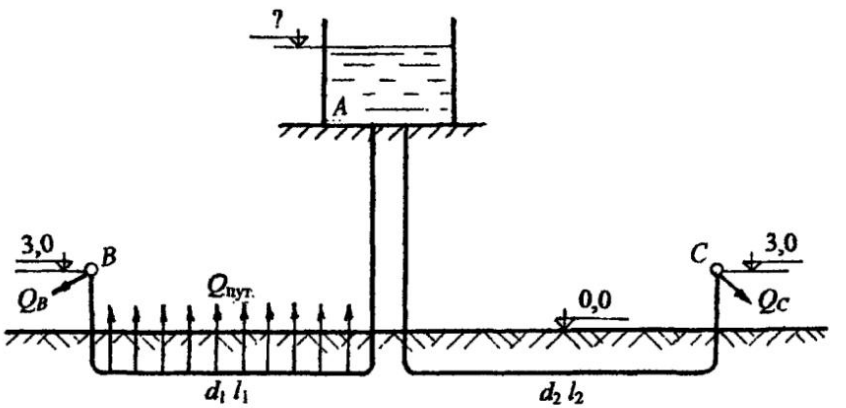


Рис. 6.44

Глава 7

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

В инженерной практике часто встречаются случаи истечения жидкости через отверстия и насадки, представляющие собой короткие патрубки различной конфигурации. Путём расчёта истечения жидкости из отверстий и насадков решаются такие технические задачи, как измерение количества проходящей жидкости, создание сильной дальнобойной и компактной струи, распространение свободной струи, конструирование сопл и форсунок и др.

Истечение может происходить при ***постоянном*** или ***переменном напоре***. В первом случае движение жидкости считается установившимся.

Истечение жидкости может происходить в атмосферу и называется ***свободным*** истечением, а также в другой резервуар, заполненный жидкостью. Такое истечение называется ***истечением под уровень*** или ***истечением через затопленное отверстие***.

Классификация отверстий

1. Малое отверстие в тонкой стенке (незатопленное и затопленное).
2. Малое отверстие в толстой стенке. Аналогом является короткий патрубок длиной $l = (3 \div 5)d_{отв.}$ ($d_{отв.}$ – диаметр отверстия), присоединённый к малому отверстию.
3. Большое отверстие в тонкой стенке.

Малым считается отверстие, если разность напоров над верхней и нижней кромками отверстия не превышает 10 % вертикального размера отверстия. ***Действующий напор принимается по оси отверстия***.

В противном случае, если разность напоров над верхней и нижней кромками отверстия превышает 10 %, отверстие считается ***большим***. При расчёте такого отверстия учитываются напоры над верхней и нижней кромками отверстия.

Тонкой считается стенка, если толщина её (δ) не превышает трёх линейных размеров отверстия. Например, для круглого отверстия $\delta \leq 3\ d_{отв.}$; для квадратного отверстия $\delta \leq 3a$ (a – сторона квадрата).

Толстой считается стенка, толщина которой $\delta = (3 \div 5)d_{отв.}$. Если толстую стенку убрать, оставить только ограничение, например, в виде патрубка, то такой патрубок называется ***гидравлическим насадком***.

Итак, ***гидравлический насадок*** – это короткий патрубок длиной $l = (3 \div 5)d$, присоединённый к малому отверстию в тонкой стенке.

Если длина патрубка $l > 5d$, то такое движение жидкости следует рассматривать как движение в короткой трубе.

Рассмотрим ***теоретические основы*** расчета истечения жидкости через отверстия и насадки.

7.1. Истечение жидкости из малого незатопленного и затопленного отверстий в тонкой стенке

Под расчётом отверстия понимается определение пропускной способности отверстия, или расхода (Q).

Рассмотрим малое отверстие в тонкой стенке закрытого резервуара, на поверхности жидкости в котором действует абсолютное давление p_0, в общем случае не равное атмосферному (рис. 7.1, а). Площадь живого сечения отверстия ω, действующий напор по оси отверстия H, уровень воды в резервуаре постоянный.

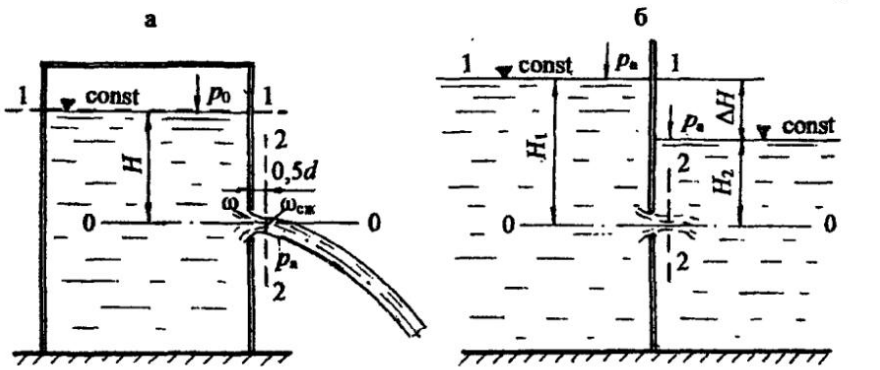


Рис. 7.1

При истечении жидкости через малое отверстие на расстоянии 0,5d происходит ***сжатие*** (инверсия) струи. Это явление объясняется инерцией частиц жидкости, параболической траекторией струек в потоке, которые пересекаются, уменьшая при этом сечение. В сжатом сечении (площадь $\omega_{сж.}$) движение жидкости можно считать установившимся и применить для него уравнение Бернулли.

Для определения расхода жидкости через малое незатопленное отверстие, т. е. свободное истечение в атмосферу, используем уравнение Бернулли, согласно принятой методике (см. раздел 4.5.7).

1. ***Выберем два сечения***: по свободной поверхности жидкости в резервуаре, проведём его горизонтально, здесь скорость $v = 0$, и на выходе струи в атмосферу по сжатому сечению, это сечение проведём нормально к направлению движения струи.

2. Сечения **1-1** и **2-2** ***пронумеруем по направлению движения жидкости.***

3. В выбранных сечениях учтём ***абсолютное давление***. Подчеркнём, что давление в сжатом сечении равно атмосферному (выход жидкости в атмосферу): $p_1 = p_0$; $p_2 = p_a$.

4. Плоскость сравнения **0-0** проведём через ось отверстия, тогда $z_1 = H$; $z_2 = 0$.

5. Запишем уравнение Бернулли (см. формулу (4.15)) в общем виде и сделаем подстановку параметров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w_{1\ 2}};$$

$z_1 = H$; $z_2 = 0$;
$p_1 = p_0$; $p_2 = p_a$;
$v_1 = 0$; $v_2 = v_{сж.}$; $\alpha_2 = \alpha_{отв.}$,

где $\alpha_{отв.}$ – коэффициент неравномерности распределения скорости в отверстии.

Потери напора по длине между сечениями 1-1 и 2-2 (расстояние $0{,}5d$) отсутствуют, значит, потери напора в гидравлических сопротивлениях (h_w) учтём, как потери напора в самом отверстии, как местном сопротивлении:

$$h_w = h_{отв.} = \zeta_{отв.} \frac{v_{сж.}^2}{2g},$$

где $\zeta_{отв.}$ – коэффициент сопротивления отверстия.

После подстановки параметров получим:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha_{отв.} v_{сж.}^2}{2g} + \zeta_{отв.} \frac{v_{сж.}^2}{2g},$$

откуда скорость в сжатом сечении:

$$v_{сж.} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_{отв.} + \zeta_{отв.}}} \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_a}{\rho g}\right)}. \qquad (7.1)$$

В формуле (7.1) обозначим приведённый напор ($H_{прив.}$):

$$H_{прив.} = H + \frac{p_0 - p_a}{\rho g}.$$

Если резервуар будет открытым, в сечении 1-1 давление $p_1 = p_a$, то приведённый напор $H_{прив.} = H$.

Формулу (7.1) представим в виде:

$$\upsilon_{сж.} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_{отв.} + \zeta_{отв.}}}\sqrt{2gH_{прив.}}\,. \qquad (7.2)$$

Введём коэффициент скорости (φ):

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha_{отв.} + \zeta_{отв.}}}\,. \qquad (7.3)$$

Формула (7.2) принимает вид:

$$\upsilon_{сж.} = \varphi\sqrt{2gH_{прив.}}\,. \qquad (7.4)$$

При расчёте расхода Q (или пропускной способности) из отверстия нужно скорость в сжатом сечении умножить на площадь сжатого сечения:

$$Q = \upsilon_{сж.}\,\omega_{сж.}\,.$$

Уменьшение площади сжатого сечения учитывается ***коэффициентом сжатия*** – ε:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{сж.}}{\omega}. \qquad (7.5)$$

Расчётная формула для расхода с учётом формул (7.4) и (7.5):

$$Q = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gH_{прив.}}\,. \qquad (7.6)$$

Произведение коэффициентов εφ обозначим через $\mu_{отв.}$, который называется коэффициентом расхода отверстия:

$$\mu_{отв.} = \varepsilon\varphi.$$

Окончательно расход жидкости через малое незатопленное отверстие рассчитывается по формуле

$$Q = \mu_{отв.}\,\omega\sqrt{2gH_{прив.}}\,. \qquad (7.7)$$

Рассмотрим малое ***затопленное*** отверстие в тонкой стенке, или истечение из малого отверстия ***под уровень*** (рис. 7.1, б).

Расчёт аналогичен расчёту малого отверстия в тонкой стенке с истечением в атмосферу. Также составляется уравнение Бернулли для сечений **1-1** и **2-2**, скорости в которых соответственно: $v_1 = 0$; $v_2 = v_{сж.}$; давления в выбранных сечениях: $p_1 = p_a$; $p_2 = p_a + \rho g H_2$; плоскость сравнения совмещается с осью отверстия: $z_1 = H_1$; $z_2 = 0$.

После преобразования уравнения Бернулли (предлагается сделать самостоятельно)

$$v_{сж.} = \varphi\sqrt{2g(H_1 - H_2)}. \qquad (7.8)$$

Можно обозначить $H_1 - H_2 = \Delta H$, таким образом, ΔH – действующий напор для затопленного отверстия. Расход жидкости через затопленное отверстие:

$$Q = \mu_{отв.}\omega\sqrt{2g\Delta H}. \qquad (7.9)$$

Формулы (7.7); (7.9), а ранее при расчёте простых трубопроводных систем формула (6.5) имеют общий вид. Таким образом, для всех видов истечений из отверстий и насадков формула расхода может быть представлена обобщённой формулой:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH}, \qquad (7.10)$$

где H – действующий (или приведённый) напор.

7.2. Истечение жидкости через большое боковое отверстие при постоянном напоре

Представим себе большое боковое отверстие прямоугольной формы, ширина которого b, напор над верхней кромкой отверстия H_1, над нижней H_2. Пусть напоры над верхней и нижней кромками отверстия отличаются более, чем на 10 %, тогда в формуле расхода учитываем оба напора:

$$Q = \frac{2}{3}\mu_{отв.} b\sqrt{2g}\left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2}\right). \qquad (7.11)$$

Теоретический вывод формулы (7.11) следует изучить по учебникам и другим учебным пособиям.

7.3. Истечение жидкости из насадков при постоянном напоре

По форме патрубка различают следующие ***типы насадков***:
а) внешний цилиндрический насадок (рис. 7.2, а);
б) внутренний цилиндрический насадок (рис. 7.2, б);
в) конический сходящийся насадок (рис. 7.2, в);
г) конический расходящийся насадок (рис. 7.2, г);
д) коноидальный насадок (рис. 7.2, д).

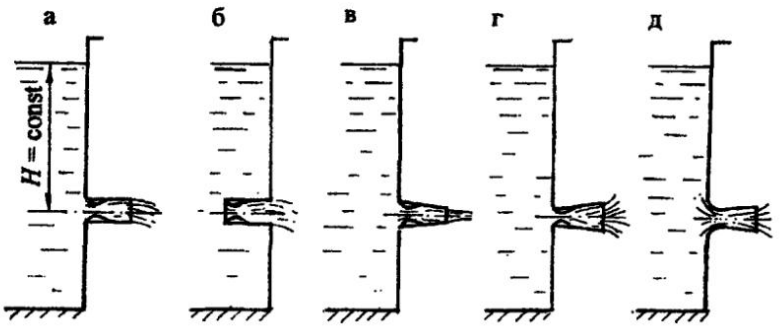


Рис. 7.2

Во всех типах насадков, кроме коноидального, ***внутри насадка***, как правило, на расстоянии $0{,}5d$ ***образуется сжатие струи***. В области сжатия возникает вакуум, затем струя расширяется, заполняет весь насадок и выходит полным сечением.

Наличие вакуума внутри насадка доказывается с помощью уравнения Бернулли, такие расчёты приведены в учебниках и курсах лекций.

Вакуум внутри ***внешнего цилиндрического*** насадка способствует дополнительному подсосу жидкости и увеличению пропускной способности насадка. Так, в цилиндрическом внешнем насадке $H_{вак.} = 0{,}75\ H$, значит, согласно формуле (7.7):

$$Q = \mu_{отв.}\omega\sqrt{2g(H + H_{вак.})} = \mu_{отв.}\omega\sqrt{2g \cdot 1{,}75H}\,.$$

Зная, что $\sqrt{1{,}75} = 1{,}32$, обозначим $1{,}32\mu_{отв.} = \mu_{нас.}$. Следовательно, пропускная способность внешнего цилиндрического насадка увеличится на 32%, действительно, $\mu_{отв.} = 0{,}62$; $\mu_{нас.} = 1{,}32 \cdot 0{,}62 = 0{,}82$.

Таким образом, ***назначение насадков – увеличение пропускной способности.***

Внутренний цилиндрический насадок используется, когда нужно увеличить пропускную способность, но по техническим условиям нельзя вывести внешний насадок.

Конический сходящийся насадок даёт возможность получить компактную струю с большой скоростью, используется в гидромониторах, брандспойтах и им подобных устройствах. Коэффициент расхода насадка зависит от угла конусности. Оптимальное значение угла конусности 13°24′.

Конический расходящийся насадок даёт увеличение пропускной способности на 40÷45 %, малые скорости на выходе. Эти насадки применяются в эжекторных установках, оросительных системах и др.

Оптимальный угол конусности 5°÷7°. При увеличении угла конусности происходит срыв вакуума внутри насадка, струя отходит от стенок насадка, насадок не выполняет своего назначения, истечение происходит, как через малое отверстие.

Коноидальный насадок выполнен по форме струи, вытекающей из малого отверстия, имеет малое сопротивление при движении жидкости, обеспечивает повышение пропускной способности на 40÷50 %. Такие насадки применяются в соплах гидравлических турбин, аэродинамических установках.

При теоретических обоснованиях истечения жидкости из отверстий и насадков были введены коэффициенты: α, ζ, φ, ε, μ. Значения этих коэффициентов зависят от многих факторов: формы отверстия, степени механической обработки кромок отверстия, полноты и совершенства сжатия струи, а также от числа Рейнольдса (*Re*). Эти коэффициенты определены экспериментально или рассчитаны аналитически. Значения коэффициентов приведены в справочниках и учебниках. В данном учебном пособии значения коэффициентов φ, ε и μ приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Значения коэффициентов скорости (φ), сжатия (ε) и расхода (μ) для отверстий и насадков

Вид отверстия, насадка	φ	ε	μ
Малое отверстие	0,97	0,64	0,62
Внешний цилиндрический насадок	0,82	1,0	0,82
Внутренний цилиндрический насадок	0,71	1,0	0,71
Конический сходящийся насадок	0,96	0,98	0,94
Конический расходящийся насадок	0,45	1,0	0,45
Коноидальный насадок	0,97	1,0	0,97

7.4. Пример решения задачи по теме: "Истечение жидкости из отверстий и насадков"

Задача 7.4.1. На водонапорной станции установлен трёхкамерный отстойник. В стенках отстойника сделаны отверстия с площадями живых сечений: $\omega_1 = 3$ дм^2; $\omega_2 = 2$ дм^2; к третьему отверстию присоединён внешний цилиндрический насадок площадью сечения $\omega_3 = 1{,}2$ дм^2. Уровни воды в камерах постоянны. Общий напор $H = 3{,}0$ м.

Определить распределение напоров h_1, h_2, h_3 и расход воды (Q), вытекающей из отстойника. Считать стенки отстойника тонкими (рис. 7.3).

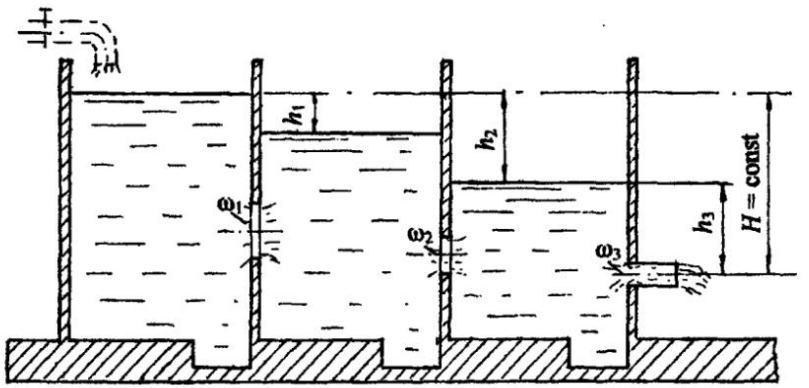


Рис. 7.3

Решение. Из рис. 7.3 следует:

$$H = h_2 + h_3 . \qquad (7.12)$$

Согласно уравнению неразрывности потока, расходы воды через отверстия и насадок одинаковы:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \text{const} .$$

Расходы воды через каждое отверстие можно вычислить по формуле (7.10), а именно:

$$Q_1 = \mu_{\text{отв.1}} \omega_1 \sqrt{2gh_1} ;$$

$$Q_2 = \mu_{\text{отв.2}} \omega_2 \sqrt{2g(h_2 - h_1)} ;$$

$$Q_3 = \mu_{\text{нас.}} \omega_3 \sqrt{2gh_3} .$$

Приравняем расходы и, произведя простые преобразования (сократим на величину $\sqrt{2g}$), получим:

$$\mu_{отв.1}\omega_1\sqrt{h_1} = \mu_{отв.2}\omega_2\sqrt{h_2 - h_1} = \mu_{нас.}\omega_3\sqrt{h_3}\,. \qquad (7.13)$$

Подставим численные значения площадей живых сечений (ω) и коэффициентов расхода (μ) из табл. 7.1:

$$0{,}62 \cdot 3{,}0\sqrt{h_1} = 0{,}62 \cdot 2{,}0\sqrt{h_2 - h_1} = 0{,}82 \cdot 1{,}2\sqrt{h_3}\,.$$

Приравняем попарно равенства, чтобы найти зависимости между напорами h_1, h_2, h_3, а затем решить их совместно с уравнением (7.12):

$$9h_1 = 4(h_2 - h_1), \quad \text{отсюда} \quad h_2 = 3{,}25\ h_1;$$

$$3{,}46\ h_1 = 0{,}97\ h_3, \text{ отсюда} \quad h_3 = 3{,}57\ h_1.$$

Подставим значения h_2 и h_3, выраженные через h_1, в уравнение (7.12):

$3{,}25\ h_1 + 3{,}57h_1 = 3{,}0$ м, отсюда $h_1 = 0{,}44$ м, значит, $h_2 = 1{,}43$ м; $h_3 = 1{,}57$ м.

Расход воды можно рассчитать через любое отверстие; рассчитаем через первое:

$$Q = Q_1 = 0{,}62 \cdot 0{,}03 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}44} = 0{,}0546\ м^3/с = 54{,}6\ л/с.$$

Ответ: напоры воды в отстойнике: $h_1 = 0{,}44$ м; $h_2 = 1{,}43$ м; $h_3 = 1{,}57$ м; расход воды из отстойника $Q = 54{,}6$ л/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленное учебное пособие составлено на основании многолетнего преподавания курса гидромеханики (гидравлики). Опыт методической работы показал, что успешное овладение знаниями по этому курсу возможно только на основе решения задач. Решение задач развивает самостоятельное инженерное мышление.

На сегодняшний день имеется немало сборников задач и учебных пособий по гидравлике, тем не менее в этих изданиях недостаточно освещена методика решения задач по различным разделам и темам. Для студентов очень важно усвоить именно методику решения задач, чтобы перейти от решения простых к более сложным задачам.

При разработке учебного пособия ставилась цель – добиться наиболее последовательного и широкого применения методики решения задач. Во многих задачах использованы графические методы решения, дающие возможность просто и наглядно проанализировать ход решения задачи и конечный результат решения.

В учебном пособии даны только основы теории по нескольким разделам гидромеханики, поэтому, само собой разумеется, студент должен обращаться к учебникам по этому курсу.

Кроме таблиц, приведённых в приложении, можно пользоваться аналогичными таблицами других учебников и учебных пособий, в этом случае ответы в задачах могут незначительно отличаться.

Автор надеется, что учебное пособие представит интерес и принесёт пользу в изучении курса гидромеханики. Возможно, книга будет использована преподавателями вузов для проведения практических занятий.

Хотелось бы получить отзывы на книгу, замечания, пожелания.

Автор С. И. Часс

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Альтшуль А. Д., Животовский Л. С., Иванов Л. П. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат, 1987. 497 с.

Андреевская А. В., Кременецкий Н. Н., Панова М. В. Задачник по гидравлике. М.: Энергия, 1970. 567 с.

Гейер В. Г., Дулин В .С.,Заря А. Н. Гидравлика и гидропривод. 4-е изд. М.: Недра, 1991. 331 с.

Гидравлика и гидропривод: Учеб. пособие / Н. С. Гудилин, Е. М. Кривенко, В. С. Маховиков, И. Л. Пастоев; Под ред. И. Л. Постоева. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГУ, 2001. 520 с.

Примеры расчётов по гидравлике: Учеб. пособие/ Под ред. А. Д. Альтшуля. М.: Стройиздат, 1976. 256 с.

Сборник задач по машиностроительной гидравлике: Учеб. пособие/Под ред. И. И. Куколевского и Л. Г. Подвиза. 4-е изд. М.: Машиностроение, 1981. 464 с.

Чугаев Р. Р. Гидравлика (техническая механика жидкости). Л.: Энергоиздат, 1982. 552 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Плотность, коэффициент кинематической вязкости, условная вязкость некоторых жидкостей

Жидкость	Плотность ρ, кг/м^3	Кинематический коэффициент вязкости ν, 10^{-6} м^2/с	Условная вязкость $^{\circ}E$ (ВУ)
Вода пресная	998	1,008	1,0
Этиловый спирт	790	1,52	1,04
Ртуть	13546	0,16	-
Воздух	1,22	14,9	-
Бензин при $t = 15^{\circ}C$	740-780	0,83-0,93	-
Керосин	820	2,5	1,13
Нефть	810-930	25,0-27,0	3,7-4,0
Масло турбинное	900	20,0-48,0	3,0-6,7
Масло трансформаторное	884	28,0-30,0	4,05-4,30

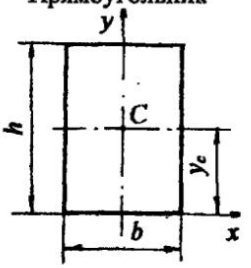
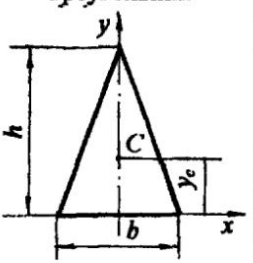
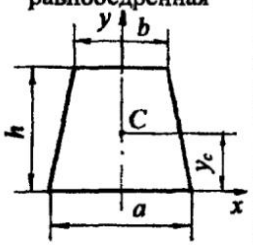
Таблица 2

Соотношение между единицами давления

Единица	Па (Н/м^2)	кгс/см^2 (ат)	кгс/м^2	мм вод. ст.	м вод. ст.	мм рт. ст.	бар
1 Па (Н/м^2)	1	$10{,}2\cdot10^{-6}$	0,102	0,102	$102\cdot10^{-6}$	$750\cdot10^{-5}$	10^{-5}
1 кгс/см^2 (ат)	$9{,}81\cdot10^{4}$	1	10^{4}	10^{4}	10	735,6	0,981
1 кгс/м^2	9,81	10^{4}	1	1	10^{-3}	$73{,}56\cdot10^{-3}$	$98{,}1\cdot10^{-6}$
1 мм вод. ст.	9,81	10^{-4}	1	1	10^{-3}	$73{,}56\cdot10^{-3}$	$98{,}1\cdot10^{-6}$
1 м вод. ст.	$9{,}81\cdot10^{3}$	0,1	10^{3}	10^{3}	1	73,56	$98{,}1\cdot10^{-3}$
1 мм рт. ст.	133,3	$1{,}36\cdot10^{-3}$	13,6	13,6	$13{,}6\cdot10^{-3}$	1	$1{,}33\cdot10^{-3}$
1 бар	10^{5}	1,02	$10{,}2\cdot10^{3}$	$10{,}2\cdot10^{3}$	10,2	750	1

Таблица 3

Координаты центров тяжести, площади и моменты инерции плоских фигур относительно горизонтальной центральной оси

Плоская фигура	Координата центра тяжести y_c	Площадь фигуры A	Момент инерции I_c
Прямоугольник 	$\frac{h}{2}$	bh	$\frac{bh^3}{12}$
Треугольник 	$\frac{1}{3}h$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
Трапеция равнобедренная 	$\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$	$\frac{h(a+b)}{2}$	$\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$

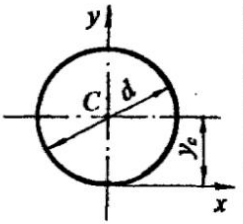
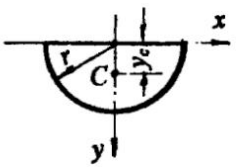
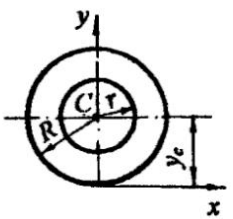
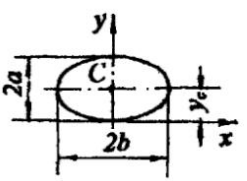
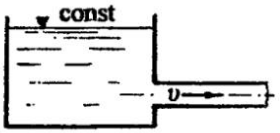
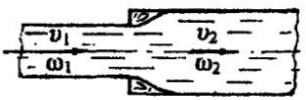
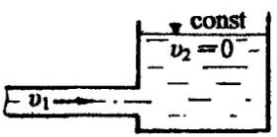
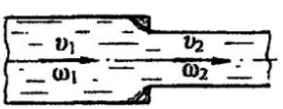
Круг 	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$
Полукруг 	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} \cdot r^4$
Кольцо 	R	$\pi (R^2 - r^2)$	$\frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$
Эллипс 	a	πab	$\frac{\pi a^3 b}{4}$

Таблица 4

Местные сопротивления

<table>
<tr><th>Тип, схема местного сопротивления</th><th>Коэффициент местного сопротивления ζ</th></tr>
<tr><td>Вход в трубу
$h_{вх} = \zeta_{вх} \frac{v^2}{2g}$
  </td><td>При острых кромках $\zeta_{вх} = 0{,}5$;
при закруглённых кромках и плавном входе $\zeta_{вх} = 0{,}2$;
при весьма плавном входе $\zeta_{вх} = 0{,}05$</td></tr>
<tr><td>Внезапное расширение
$h_{в.р.} = \zeta_{в.р.} \frac{v_2^2}{2g}$
  </td><td>$\zeta_{в.р.} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$</td></tr>
<tr><td>Выход из трубы в резервуар больших размеров, выход под уровень
$h_{вых} = \zeta_{вых} \frac{v_1^2}{2g}$
  </td><td>$\zeta_{вых} = 1{,}0$</td></tr>
<tr><td>Внезапное сужение
$h_{в.с.} = \zeta_{в.с.} \frac{v_2^2}{2g}$
  </td><td>$\zeta_{в.с.} = f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$
<table><tr><td>$\frac{\omega_2}{\omega_1}$</td><td>0,01</td><td>0,10</td><td>0,20</td><td>0,40</td><td>0,60</td><td>0,80</td></tr><tr><td>$\zeta_{в.с.}$</td><td>0,50</td><td>0,45</td><td>0,40</td><td>0,30</td><td>0,20</td><td>0,10</td></tr></table></td></tr>
</table>

Местные сопротивления

Поворот трубы (колено)

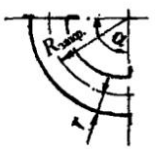
а) колено без закругления



Угол α°	30	40	50	60	70	80	90
$\zeta_{закр.}$	0,20	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90	1,10

б) колено с закруглением при α = 90°

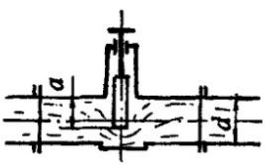
$$h_{закр.} = \zeta_{закр.} \frac{\upsilon^2}{2g}$$



$r/R_{закр}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\zeta_{закр}$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294
$r/R_{закр}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_{закр}$	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

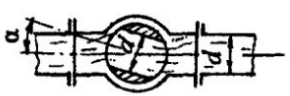
При углах α ≠ 90° значение $\zeta_{закр.}$ нужно умножить на α/90°

Задвижка Лудло



a/d	Полное открытие	1/4	3/8	
$\zeta_{задв.}$	0,12	0,28	0,81	
a/d	1/2	5/8	3/4	7/8
$\zeta_{задв.}$	2,06	5,25	17,0	978

Пробковый кран, $Re \geq 10^4$

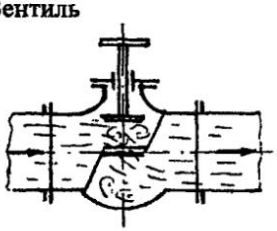


α°	5	10	20	30
$\zeta_{кр.}$	0,05	0,29	1,56	5,47
α°	40	50	60	
$\zeta_{кр.}$	17,3	52,6	206	

Окончание таблицы 4

Местные сопротивления

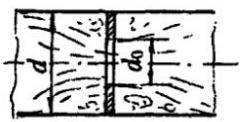
Вентиль



Полностью открытый, $Re \geq 10^4$

d, мм	40	80	100	150	200	250	300
$\zeta_{вент.}$	4,9	4,0	4,1	4,4	4,7	5,1	5,4

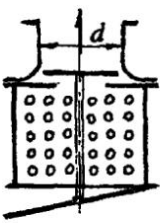
Диафрагма в трубе



$Re > 10^4$

$\frac{d_0^2}{d^2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\zeta_{диаф.}$	224	60,2	19,2	9,8	4,4	2,4	1,22

Всасывающий клапан с сеткой, $Re > 10^4$



d, мм	40	70	100	200	300	500
$\zeta_{сетк.}$	12	8,5	7,0	4,7	3,7	2,5

Для ориентировочных расчётов:
при наличии обратного клапана $\zeta_{сетк.} = 10{,}0$;
при отсутствии обратного клапана $\zeta_{сетк} = 5 \div 6$

Таблица 5

Коэффициенты сопротивления колен водопроводных труб при $\alpha = 90°$

d, мм	50	100	150	200	250	300
$\zeta_{кол.}$	0,76	0,39	0,37	0,37	0,40	0,45
d, мм	350	400	450	500	600	700
$\zeta_{кол.}$	0,45	0,42	0,42	0,46	0,47	0,48

Таблица 6

Значения эквивалентной абсолютной шероховатости $\Delta_э$ в трубах

Материал и вид трубы	Состояние трубы	$\Delta_э$, мм
Тянутые из стекла и цветных металлов	Новые, технически гладкие	0,001
Бесшовные стальные	Новые и чистые, тщательно уложенные	0,014
	После нескольких лет эксплуатации	0,2
Стальные сварные	Новые и чистые	0,06
	С незначительной коррозией после очистки	0,15
	Умеренно заржавевшие	0,5
	Старые заржавевшие	1
	Сильно заржавевшие или с большими отложениями	3
Чугунные	Новые асфальтированные	0,12
	Новые без покрытия	0,3
	Бывшие в употреблении	1
	Очень старые	3
Бетонные	Новые из предварительно напряженного бетона	0,03
	Новые центробежные	0,2
	Бывшие в употреблении	0,3 +0,8
	Из необработанного бетона	1-3

Таблица 7

Значения коэффициентов шероховатости n и $1/n$
(для формул Павловского, Агроскина, Маннинга)

Категория	Характеристика поверхности	n	$1/n$
I	Исключительно гладкие поверхности, покрытые эмалью	0,09	111
II	Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные. Штукатурка из чистого цемента	0,010	100
III	Лучшая цементная штукатурка. Чистые новые гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные	0,011	90,9
IV	Неостроганные доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях; весьма чистые водопроводные трубы; весьма хорошая бетонировка	0,012	83,3
V	Тесовая кладка, хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях. Несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013	76,9
VI	Загрязненные трубы (водопроводные и водосточные); средняя кирпичная кладка, бетонировка каналов в средних условиях	0,014	71,4
VII	Средняя кирпичная кладка, облицовка из тесаного камня в средних условиях. Значительно загрязненные водостоки. Брезент по деревянным рейкам	0,015	66,7
VIII	Хорошая бутовая кладка, старая кирпичная кладка, сравнительно грубая бетонировка. Гладкая, весьма хорошо разработанная скала	0,017	58,8

Таблица 8

Значения величин C, λ, K и $1/K^2 = A$ для нормальных водопроводных труб, подсчитанные по формуле акад. Н. Н. Павловского при n 0,012

d, мм	C	λ	K, м³/с	A, с²/м⁶
50	44,79	0,0391	0,00987	10340,0
75	47,45	0,349	0,0287	1214,0
100	49,48	0,0321	0,0614	265,0
125	51,07	0,0301	0,111	81,60
150	52,42	0,0286	0,179	31,18
200	54,62	0,0263	0,384	6,78
250	56,40	0,0247	0,692	2,11
300	57,90	0,0234	1,121	0,794
350	59,18	0,0224	1,684	0,354
400	60,31	0,0216	2,397	0,174
450	61,28	0,0209	4,259	0,0932
500	62,28	0,0202	4,324	0,0532
600	63,91	0,0192	6,999	0,0204
700	65,32	0,0184	10,517	0,00904
800	66,58	0,0177	14,965	0,00495
900	67,70	0,0170	20,430	0,00239
1000	68,72	0,0166	26,485	0,00137

Таблица 9

Значение коэффициента удельного сопротивления A (с²/м⁶) для расчёта трубопроводов (при квадратичном законе сопротивления) в зависимости от абсолютной шероховатости Δ

Диаметр d, мм	Δ = 0,2 мм	Δ = 0,5 мм	Δ =1,0 мм
50	7570	10 000	12 900
75	886	1 160	1 460
100	194	252	313
125	62,6	80,0	95,2
150	23,1	29,3	36,2
200	5,08	6,45	7,81
250	1,58	1,98	2,40
300	0,607	0,709	0,917
400	0,135	0,167	0,201
500	0.0422	0.0518	0,062

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ..... 3
ВВЕДЕНИЕ..... 4
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖИДКОСТЯХ..... 4
Раздел первый. ГИДРОСТАТИКА..... 6
Глава 1. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ..... 6
1. Понятие гидростатического давления..... 6
1.1. Свойства гидростатического давления..... 6
1.2. Основное уравнение гидростатики. Абсолютное манометрическое, вакуумметрическое давление..... 6
1.3. Плоскость уровня. Понятие пьезометрической высоты. Эпюры гидростатического давления..... 7
1.4. Единицы измерения давления..... 9
1.5. Примеры решения задач по теме: "Гидростатическое давление в жидкости"..... 10
1.6. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Гидростатическое давление в жидкости"..... 15
Глава 2. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ..... 22
2.1. Аналитический метод определения силы давления жидкости.... 22
2.2. Графо-аналитический метод расчёта силы давления и центра давления на прямоугольные поверхности..... 23
2.3. Примеры решения задач по теме: "Расчёт силы давления жидкости на плоские поверхности"..... 25
2.4. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Сила давления жидкости на плоские поверхности"..... 49
Глава 3. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ..... 57
3.1. Основные понятия и теоретические положения..... 57
3.2. Примеры решения задач по теме: "Расчёт силы давления жидкости на криволинейные поверхности"..... 61
3.3. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Сила давления жидкости на криволинейные поверхности"..... 82
Раздел второй. ГИДРОДИНАМИКА..... 89
Глава 4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ..... 89
4.1. Основные понятия о параметрах движения жидкости..... 89
4.2. Понятие идеальной жидкости и потока жидкости..... 90
4.3. Гидравлические элементы потока..... 91
4.4. Расход жидкости. Средняя скорость потока. Уравнение неразрывности потока..... 92

4.5. Основное уравнение гидродинамики. Уравнение Даниила Бернулли..... 94
4.5.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости..... 95
4.5.2. Интерпретация уравнения Бернулли..... 95
4.5.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной, вязкой жидкости..... 98
4.5.4. Уравнение Бернулли для целого потока реальной, вязкой жидкости..... 100
4.5.5. Экспериментальное определение статического и полного напоров. Расчёт скорости в точке потока..... 102
4.5.6. Диаграмма уравнения Бернулли для потока жидкости в трубе переменного сечения..... 104
4.5.7. Методика составления уравнения Бернулли для решения теоретических и инженерных задач..... 105
4.5.8. Приборы для измерения скорости и расхода, основанные на уравнении Бернулли..... 106
4.6. Режимы движения жидкости..... 111
Глава 5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ..... 113
5.1. Потери напора в гидравлических сопротивлениях..... 113
5.2. Потери напора по длине при ламинарном режиме движения жидкости..... 115
5.3. Потери напора по длине при турбулентном режиме..... 115
5.3.1. Понятие о гидравлически гладких и шероховатых трубах... 116
5.3.2. Потери напора по длине в трубах с описательной шероховатостью..... 119
5.3.3. Потери напора по длине, выраженные через обобщённые параметры..... 120
Раздел третий. ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА..... 123
Глава 6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ..... 123
6.1. Расчёт простых трубопроводных систем..... 123
6.1.1. Расчёт простой трубопроводной системы с истечением жидкости в атмосферу..... 124
6.1.2. Расчёт простой трубопроводной системы с истечением под уровень..... 127
6.1.3. Методика расчёта простых трубопроводных систем..... 129
6.2. Примеры решения задач по теме: "Расчёт простых трубопроводных систем"..... 132
6.3. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Расчёт простых трубопроводных систем"..... 156
6.4. Расчёт сложных трубопроводных систем..... 166

6.4.1. Системы с последовательным соединением труб..... 168
6.4.2. Системы с параллельным соединением труб..... 170
6.4.3. Распределительные сети, или тупиковые системы..... 173
6.4.4. Системы с путевым расходом жидкости..... 176
6.5. Примеры решения задач по теме: "Расчёт сложных трубопроводных систем"..... 177
6.6. Задачи для самостоятельной работы по теме: "Расчёт сложных трубопроводных систем"..... 186
Глава 7. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ. 194
7.1. Истечение жидкости из малого незатопленного и затопленного отверстий в тонкой стенке..... 195
7.2. Истечение жидкости через большое боковое отверстие при постоянном напоре..... 198
7.3. Истечение жидкости из насадков при постоянном напоре..... 199
7.4. Пример решения задачи по теме: "Истечение жидкости из отверстий и насадков"..... 201
ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 203
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... 204
ПРИЛОЖЕНИЕ..... 205

Учебное издание

Часс Светлана Ивановна

ГИДРОМЕХАНИКА
в примерах и задачах

Учебное пособие

Редактор изд-ва Л. В. Устьянцева

Компьютерная вёрстка автора

Подписано в печать 10.11.06 г. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 13,625. Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 400 экз. Заказ 50

Изд-во УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Отпечатано с оригинал-макета в ООО "ИРА УТК"
620219, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 42



Министерство образования Российской Федерации

Уральская государственная горно-геологическая академия

Т. П. Бебенина, С. И. Часс, Н. В. Савинова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ

Екатеринбург

2004

Министерство образования Российской Федерации
Уральская государственная горно-геологическая академия

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горномеханического факультета

"__3_" ноября_____2003г.

Председатель комиссии, проф.

_____Н.Б. Ситников

Т. П. Бебенина, С. И. Часс, Н. В. Савинова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ

Издание УГГГА Екатеринбург, 2004

Лабораторный практикум по гидродинамике./Т.П. Бебенина, С.И. Часс, Н.В. Савинова; Уральская госуд. горно-геол. академия. Каф. технической механики. - Екатеринбург: Изд. УГГГА, 2004. - 69с.

Методическое пособие составлено в соответствии с программами курса «Гидромеханика» и «Гидравлика».

Лабораторный практикум по гидродинамике содержит теоретические основы гидравлического экспериментирования, методы и технику выполнения лабораторных работ, материалы для обработки экспериментальных данных и оценки точности эксперимента. Практикум включает основные лабораторные работы по разделу «Гидродинамика» и предназначен в качестве учебного пособия для студентов всех специальностей, изучающих гидравлические дисциплины.

Методическая разработка рассмотрена на заседании кафедры технической механики 04.07.2003 года (протокол № 45) и рекомендована для издания.

Р е ц е н з е н т – Л.И. Пастухова, канд. техн. наук, доцент кафедры гидравлики УГТУ (УПИ).

© Уральская государственная горно-геологическая академия, 2004

Содержание

1. ***Лабораторная работа №1***. Экспериментальное изучение уравнения Д.Бернулли. 4

2. ***Лабораторная работа №2.*** Изучение режимов движения жидкости 20

3. ***Лабораторная работа №3.*** Определение потерь напора по длине и коэффициента гидравлического трения. 28

4. ***Лабораторная работа №4***. Определение местных потерь напора и коэффициентов местных сопротивлений. 41

5. ***Лабораторная работа №5***. Истечение жидкости через отверстие и насадки. 51

6. ***Лабораторная работа №6***. Определение эквивалентной шероховатости. 63

Список использованной литературы. 69

Лабораторная работа № 1

Экспериментальное изучение уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли – одно из основных уравнений прикладной гидродинамики. С его помощью решается широкий круг инженерных задач. Принцип действия многих приборов для измерения скорости и расхода потока жидкости основан на использовании уравнения Бернулли.

В гидравлике уравнение Бернулли используется трёх видов:

- для элементарной струйки идеальной жидкости,
- для элементарной струйки вязкой жидкости,
- для потока реальной (вязкой) жидкости.

Вывод каждого последующего уравнения базируется на предыдущем. В то же время каждое уравнение имеет самостоятельное значение и свой круг задач, решаемых с его помощью.

1.1.Теоретические положения

Уравнение Бернулли - уравнение движения жидкости, устанавливающее связь между давлением, скоростью и положением сечения потока или, иначе, между удельной кинетической и удельной потенциальной энергией:

- для элементарной струйки идеальной жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}; \qquad (1.1)$$

- для элементарной струйки вязкой жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_{w_{1-2}}; \qquad (1.2)$$

- для потока реальной (вязкой) жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}. \qquad (1.3)$$

Индексы **1** и **2** соответствуют номерам сечений потока, расположенных по ходу движения жидкости.

В уравнениях приняты обозначения:

z – расстояние по вертикали от плоскости сравнения до центра живого сечения, м;

p – абсолютное давление в центре сечения, Па;

ρ - плотность жидкости, кг/м^3;

g - ускорение свободного падения, м/с^2;

u - действительная скорость в ***сечении струйки*** или в ***точке сечения*** потока, м/с;

v - средняя скорость в сечении потока, м/с;

α - коэффициент Кориолиса;

$\mathbf{h'_w}$, $\mathbf{h_w}$ – потери энергии (напора) при движении единицы веса жидкости между двумя сечениями струйки и потока.

1.1.1. Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли

Все слагаемые уравнения Бернулли выражают энергетические характеристики жидкости, а именно ***удельные*** (т.е. соответствующие ***единице веса*** жидкости) энергии:

z – ***удельная потенциальная энергия положения***;

$\frac{p}{\rho g}$ - ***удельная потенциальная энергия давления;***

$\frac{u^2}{2g}, \frac{\alpha v^2}{2g}$ - ***удельная кинетическая энергия*** движущейся жидкости;

$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ - ***удельная механическая (полная) энергия***.

Для ***идеальной*** жидкости удельная механическая энергия остается постоянной во всех сечениях одной и той же элементарной струйки, взятых по ее длине, т.е. уравнение Бернулли (1.1) выражает ***закон сохранения энергии.***

Движение ***вязкой*** жидкости вызывает обязательное появление касательных напряжений в соответствии с законом вязкого трения. Работа касательных напряжений приводит к переходу части механической энергии в тепло, которое рассеивается по всему объему жидкости и теряется безвозвратно. Поэтому в уравнение Бернулли (1.2) вводится дополнительный член $\mathbf{h'_{w1\text{-}2}}$, учитывающий затраты энергии при движении между двумя сечениями струйки.

Поток жидкости конечных размеров теоретически представляется в виде совокупности бесчисленного множества элементарных струек. И, переходя от струйки к целому потоку жидкости, энергию струек, входящих в сечение потока, складывают. При этом удельная потенциальная энергия для потока жидкости с ***установившимся равномерным*** движением выражается так же, как и для струйки, вследствие справедливости для данного вида движения гидростатического закона распределения давления: для всех точек одного и того же сечения $\mathbf{z + p/(\rho g) = const}$.

При определении кинетической энергии в сечении потока необходимо учитывать закон распределения скорости по живому сечению, который весьма сложен и зависит от режима течения. Поэтому для практических расчетов при решении ***одномерных*** задач вводят понятие средней скорости, по которой и определяют удельную кинетическую энергию в сечении потока. ***Средняя скорость*** – это скорость, постоянная во всех точках сечения, при которой расход остается таким же, как при действительном распределении скоростей в точках сечения:

$$\mathbf{v = Q/\omega}, \qquad (1.4)$$

где $\mathbf{Q}$ – расход жидкости;

$\boldsymbol{\omega}$ – площадь живого сечения потока.

При определении кинетической энергии по средней скорости появляется ошибка, которую устраняют введением коэффициента $\boldsymbol{\alpha}$, называемым коэффициентом Кориолиса (коэффициентом корреляции кинетической энергии) и учитывающим неравномерность распределений действительной скорости. Тогда удельная кинетическая энергия для потока имеет вид: $\alpha v^2/2g$

Уравнение Бернулли для ***потока*** вязкой жидкости – это уравнение ***баланса удельной энергии*** при движении жидкости между двумя сечениями, записанное на основе закона сохранения энергии, где затраты удельной механической энергии, вызванные вязким трением, учтены слагаемым $\mathbf{h_{w_{1\text{-}2}}}$.

1.1.2. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли

Все слагаемые, входящие в уравнение Бернулли, имеют размерность длины и характеризуют следующие высоты (или напоры):

- $\mathbf{z}$ - ***геометрическая высота (геометрический напор)*** - высота положения центра сечения, которая отсчитывается по вертикали от выбранной горизонтальной ***плоскости сравнения***;
- $\dfrac{\mathbf{p}}{\rho \mathbf{g}}$ - ***пьезометрическая высота (пьезометрический напор)***, определяется с помощью пьезометра, установленного в рассматриваемом сечении потока;
- $\dfrac{\alpha v^2}{2g} = \mathbf{H_{ск}}$ - ***скоростной напор*** (или высота скоростного напора).

Сумма геометрического и пьезометрического напоров называется ***гидростатическим напором***:

$$\mathbf{z + \frac{p}{\rho g} = H_{ст}}. \qquad (1.5)$$

Гидростатический и скоростной напоры в сумме составляют ***полный напор:***

$$H = H_{ст} + H_{ск} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \qquad (1.6)$$

Геометрическая интерпретация слагаемых уравнения обусловлена их экспериментальным определением, которое поясняется рис. 1.1. Отсчитывая для сечения геометрический **z** и пьезометрический **p/(ρg)** напоры по одной шкале с нулем, расположенным на плоскости сравнения 0-0, по уровню воды в пьезометре сразу получаем величину ***статического напора*** $H_{ст}$.

Полный напор **H** в ***точке*** сечения, например, в его центре, может быть определен ***трубкой Пито***. Это стеклянная трубка, один конец (носик) которой загнут под углом 90° и установлен навстречу потоку (см. рис. 1.1). По уравнению Бернулли можно получить, что труб-



Рис.1.1. Экспериментальное определение статического, полного и скоростного напоров

ка Пито определяет величину полного напора **H**, а разность показаний трубки Пито и пьезометра соответствует величине скоростного напора в данной точке сечения

$$\frac{u^2}{2g} = H_{ск}. \qquad (1.7)$$

На этом основано определение действительной скорости **u** в ***точке*** потока, в которой располагается носик трубки Пито:

$$u = \sqrt{2gH_{ск}}. \qquad (1.8)$$

1.1.3.Диаграмма уравнения Бернулли, ее построение и анализ

При движении потока жидкости в трубе переменного сечения с изменением диаметра имеют место:

- перераспределения видов механической энергии (напоров);
- затраты энергии на преодоление гидравлических сопротивлений.

Это отражается с помощью диаграммы.

Графическое изображение напоров в сечениях, взятых по длине потока и связанных уравнением Бернулли, называют ***диаграммой уравнения.***

Построение диаграммы для трех сечений трубопровода рассмотрено на рис. 1.2.

На трубопроводе намечены сечения 1-1, 2-2, 3-3 с различными диаметрами d_1, d_2, d_3. В сечениях установлены пьезометры, по которым в каждом сечении определяется статический напор. На схеме трубопровода в принятом масштабе для каждого сечения от выбранной горизонтальной плоскости сравнения 0-0 откладывается величина статического напора $H_{ст}$, в которую входят геометрический **z** и пьезометрический **p/(ρg)** напоры.

Линия, соединяющая значения статических напоров в сечениях по длине потока, называется ***пьезометрической линией***. Эта линия наглядно показывает изменения давления в сечениях, вызванные измене-

ниями их размеров. При переходе от большего сечения 1-1 к меньшему 2-2 давление падает, к большему 3-3 - вновь возрастает, т.е., пьезометрическая линия для трубопровода переменного сечения по ходу движения жидкости может как опускаться, так и подниматься. Затем в каждом сечении рассчитывается средняя скорость **v** и скоростной напор $\alpha v^2/(2g)$. По условию неразрывности потока скоростной напор в сечении 2-2 больше скоростного напора в сечении 1-1, т.е. часть потенциальной энергии жидкости преобразуется в кинетическую. Это подтверждено на диаграмме (см. рис. 1.2) падением пьезометрической линии. И, наоборот, при переходе к большему сечению 3-3 скоростной напор уменьшается, давление возрастает. Пьезометрическая линия поднимается.

Складывая статический напор $\mathbf{H_{ст}}$ с рассчитанным скоростным напором $\alpha v^2/(2g)$, в каждом сечении определяют полный напор **H**.



Рис.1.2. Диаграмма уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости

Линия, соединяющая на диаграмме значения полных напоров в сечениях по длине потока, называется ***линией полного напора или линией полной удельной энергии.*** Полный напор в сечениях потока непрерывно уменьшается на величину ***потерь напора*** (напора, затраченного на преодоление гидравлических сопротивлений), поэтому ***линия полного напора*** обязательно ***понижается*** по ходу движения жидкости.

Проведя горизонтальную линию на уровне полного напора в ***первом*** сечении (линию начального напора), получают на диаграмме область, называемую ***эпюрой потерь напора***, заштрихованную вертикальными штриховыми линиями. Их высота соответствует разностям полного напора в сечении 1-1 и в любом последующем сечении, и показывает потери напора в гидравлических сопротивлениях от начала движения до рассматриваемого сечения.

1.2. Выполнение лабораторной работы

1.2.1. Цель лабораторной работы

Основная цель - научиться определять параметры, входящие в уравнение Бернулли:

- на напорном трубопроводе переменного сечения проследить по приборам переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно (при изменении размера сечений) в соответствии с уравнением Бернулли;
- по опытным данным построить диаграмму уравнения Бернулли, а именно, пьезометрическую линию, линию полного напора и эпюру потерь напора;
- проанализировать построенную диаграмму;
- для указанных сечений определить скоростной напор с помощью трубки Пито и пьезометра, рассчитать максимальную скорость в сечении и сравнить ее со средней скоростью потока в данном сечении.

1.2.2. Описание лабораторной установки

Опытная установка (рис. 1.3, **б**) состоит из напорного бака, наклонно расположенной трубы переменного сечения и мерной емкости. В напорный бак для поддержания постоянного напора во время проведения опыта может подаваться вода с помощью подпиточной трубы из системы водоснабжения или с помощью насоса из зумпфа. Труба переменного сечения снабжена регулирующим вентилем и пробковым краном для обеспечения установившегося движения при проведении опыта.

Рабочий участок трубы расположен на стенде и выполнен из оргстекла. На стенде обозначена ***плоскость сравнения***, принятая за «0» шкалы, и выполнена градуировка по вертикали (цена деления – 1 см).

По длине рабочего участка трубы для выполнения лабораторной работы выбраны 19 характерных сечений, отражающих все изменения ее конфигурации и отвечающих целям работы. В каждом таком сечении выведены штуцеры для присоединения к пьезометрическим трубкам и для установки трубок Пито (в сечениях 1, 2, 4, 7, 11, 15, 19).

На участке трубы от 13 до 19 сечения имеются штуцеры для отбора жидкости по пути следования. Это – путевой расход $\mathbf{Q_{пут}}$. Для определения его величины предназначена мерная емкость – бак, который имеет градуировку с ценой деления 5000 см^3.На трубе за рабочим участком установлен расходомер – механический счетчик количества протекающей жидкости. Он предназначен для измерения объема транзитного расхода $\mathbf{Q_{тр}}$, т.е., расхода, который присутствует в трубе от начала до конца.

Кроме упомянутых приборов в работе используются секундомеры для определения времени заполнения фиксированного объема воды в мерном баке и при работе с расходомером.

Экспериментальные данные во время выполнения работы заносятся в бланк с таблицей и со схемой установки (см. рис. 1.3). Бланк по ходу обработки эксперимента заполняется расчетными данными и затем на нем с использованием схемы трубопровода строится диаграмма уравнения Бернулли.

1.2.3. Порядок выполнения работы

1. На установке с помощью подпиточной трубы, регулирующего вентиля и пробкового крана обеспечивается установившееся движение жидкости (вместо подпиточной трубы может быть использован насос).

2. Затем в ***каждом*** сечении снимаются ***показания пьезометров*** и заносятся в первую строку бланка отчета.

3. В сечениях, где установлены трубки Пито, определяется ***разность показаний трубки Пито и пьезометра***, что соответствует величине скоростного напора в точке установки трубки Пито, т.е. по оси потока. Данные заносятся в 7-ю строку бланка.

4. На установке работает бригада из нескольких человек. ***Одновременно*** со снятием показаний пьезометров проводится определение ***времени заполнения указанного объема воды*** в мерном баке и ***времени прохождения установленного объема*** по водомеру.

1.2.4. Обработка результатов эксперимента

1. Расход определяется объёмным методом:

$$\mathbf{Q_{пут} = W_{пут} / t_{пут}};\qquad \mathbf{Q_{тр} = W_{тр} / t_{тр}};\qquad (1.9)$$

$$\mathbf{Q = Q_{пут} + Q_{тр}},\qquad (1.10)$$

где $\mathbf{W_{пут}}$; $\mathbf{W_{тр}}$ – объём путевого расхода и объём транзитного расхода, см^3;

$\mathbf{t_{пут}}$; $\mathbf{t_{тр}}$ – соответствующее время, с.

По приведенным формулам определяется величина расхода в сечениях с **1** по **13**.

Определение расхода в последующих сечениях зависит от количества штуцеров, открытых во время опыта. Рассмотрим несколько примеров.

а) ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Объем транзитного расхода $W_{тр}$= см^3; время прохождения транзитного расхода $t_{тр}$= с; транзитный расход $Q_{тр}$= см^3/с

Объем путевого расхода $W_{пут}$= см^3; время заполнения объема путевого расхода $t_{пут}$= с; путевой расход $Q_{пут}$= см^3/с

Общий расход воды $Q = Q_{тр} + Q_{пут}$= см^3/с, Q_{19}= см^3/с, Q_{18}= см^3/с, Q_{17}= см^3/с

№№ пп	Наименование параметров	Номера сечений																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1.	Статический напор (удельная потенциальная энергия) $z + p/\rho g$, см																			
2.	Площадь живого сечения ω, см^2																			
3.	Средняя скорость в сечении v, рассчитанная через расход $v = Q/\omega$, см/с																			
4.	Скоростной напор в сечении (удельная кинетическая энергия) $\alpha v^2/2g$, см; при α=1,1																			
5.	Полный напор в сечении (полная удельная энергия) $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$, см																			
6.	Потери напора h_w, см (рассчитываются относительно сечения 1)																			
7.	Скоростной напор по оси потока $u^2/2g$, см																			
8.	Скорость по оси потока u, см/с																			

б)

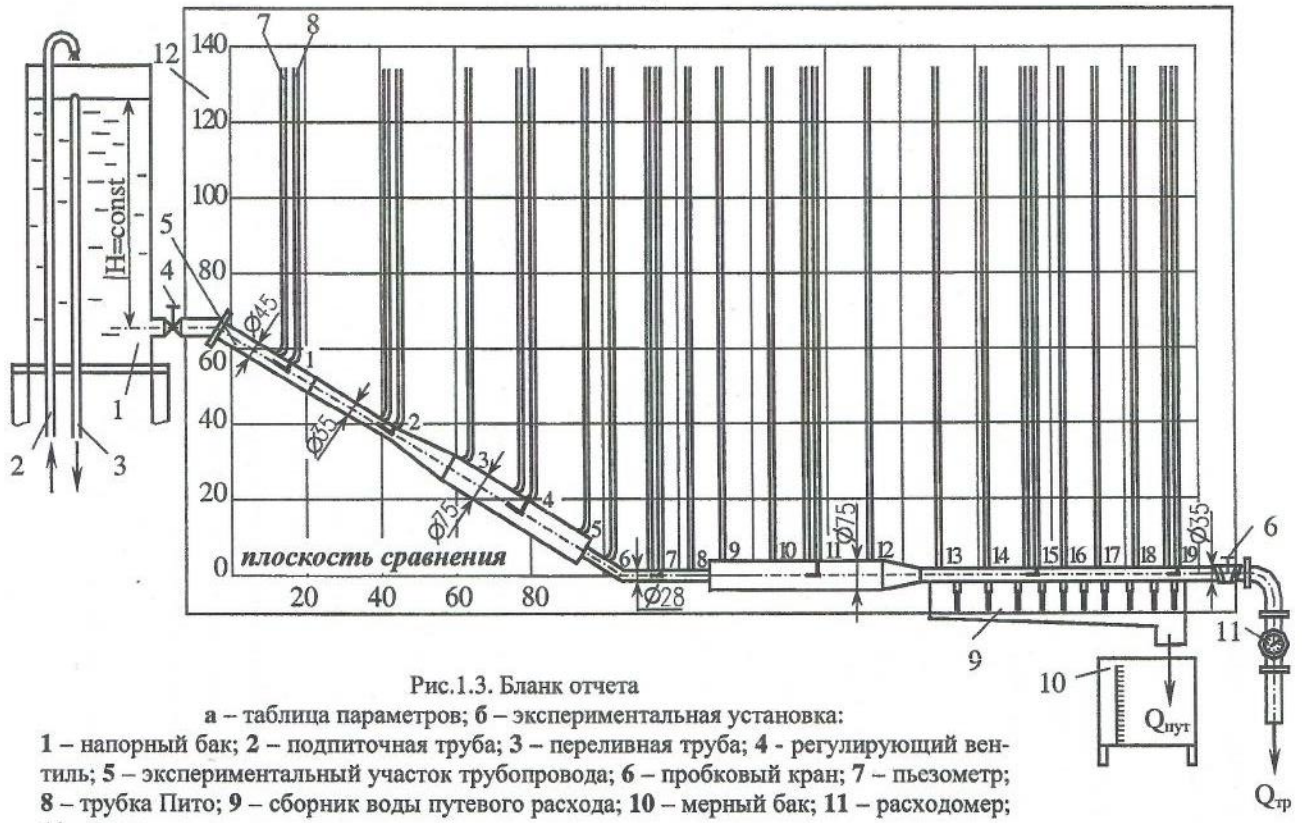


Рис.1.3. Бланк отчета

а – таблица параметров; **б** – экспериментальная установка:

1 – напорный бак; **2** – подпиточная труба; **3** – переливная труба; **4** - регулирующий вентиль; **5** – экспериментальный участок трубопровода; **6** – пробковый кран; **7** – пьезометр; **8** – трубка Пито; **9** – сборник воды путевого расхода; **10** – мерный бак; **11** – расходомер; **12** - стенд

Открыто 3 последних отверстия.

Расход **Q** для сечений с1-го по17-ое определяется по формуле (1.10), для 18-го сечения - $Q_{18} = Q - Q_{пут}/3$; для 19-го - $Q_{19} = Q_{тр}$.

Открыто 4 последних отверстия.

Расход **Q** для сечений с1-го по17-ое определяется по формуле (1.10), для 18-го сечения - $Q_{18} = Q - 2Q_{пут}/4$; для 19-го - $Q_{19} = Q_{тр}$.

Открыто 5 последних отверстий.

Расход **Q** для сечений с1-го по16-ое определяется по формуле (1.10), для 17-го сечения - $Q_{17} = Q - Q_{пут}/5$; для 18-го - $Q_{18} = Q - 3Q_{пут}/5$; для 19-го - $Q_{19} = Q_{тр}$.

При увеличении количества открытых отверстий определение расхода выполняется аналогично. Если работа выполняется без путевого расхода, то $Q = Q_{тр}$.

2. Определяются площади живых сечений:

$$\omega = \pi d^2 / 4 \qquad (1.11)$$

3. Определяется средняя скорость во всех сечениях:

$$v = Q / \omega$$

4. Определяется скоростной напор по средней скорости:

$$H_{ск} = \alpha v^2 / (2g)$$

(при расчете принять: коэффициент Кориолиса $\alpha = 1{,}1$; ускорение свободного падения $g = 981$ см/с^2).

5. Определяется полный напор во всех сечениях:

$$H = H_{ст} + H_{ск} = z + p/(\rho g) + \alpha v^2/(2g)$$

6. Определяются потери напора в гидравлических сопротивлениях от начала движения жидкости, за которое принимается сечение 1, до каждого последующего сечения

$$h_{w1\text{-}i} = H_1 - H_i, \qquad (1.12)$$

где **i** – номер сечения, **i** =1, 2, 3, …,19.

7. По полученному с помощью трубок Пито и пьезометра скоростному напору, определяется максимальная скорость в сечении:

$$u_{max} = \sqrt{2gH_{ск}}.$$

8. Строится диаграмма уравнения. Для этого на схеме установки в масштабе откладываются в каждом сечении значения статического напора $H_{ст} = z + p/(\rho g)$, которые соединяются отрезками ломаной линии. Это – ***пьезометрическая линия***. Затем выше, также для каждого сечения, откладываются значения полного напора $H = z + p/(\rho g) + \alpha v^2/(2g)$ и тоже соединяются прямыми отрезками. Это – ***линия полного напора***. После построения линии полного напора нужно построить эпюру потерь напора. Для этого через точку, соответствующую полному напору в сечении **1**, проводят горизонтальную линию. Это - линия ***начального напора***. Участок между линиями начального напора и полного напора заштриховывается вертикальной штриховкой. Это – ***эпюра потерь напора***. Каждая штриховая линия соответствует потерям напора между первым и любым последующим сечением.

9. Оценить точность определения полного напора для одного из сечений, указанного преподпвателем:

$$\delta H = \frac{\Delta H}{H} = \left| \frac{\Delta(z + \frac{p}{\rho g})}{(z + \frac{p}{\rho g})} \right| + \left| \frac{2\Delta W}{W} \right| + \left| \frac{2\Delta t}{t} \right| \qquad (1.13)$$

где $\Delta(z + \frac{p}{\rho g})$ - абсолютная ошибка показания пьезометра, равная 0,5 цены деления прибора; ΔW - абсолютная ошибка определения объема, равная 0,2 цены деления шкалы мерного бака; Δt - абсолютная ошибка определения времени, принимается равной 0.5 цены деления секундомера.

1.2.5. Вопросы для самопроверки и составления выводов по работе

1. Какой закон выражает уравнение Бернулли?

2. Какой напор называется статическим? Как экспериментально определяется в работе статический напор в сечениях по длине трубы?

3. Какая линия называется пьезометрической?

4. Проанализируйте изменения пьезометрической линии: на каких участках происходит ее понижение или повышение, чем оно обусловлено; наблюдаются ли скачки пьезометрической линии, на каких участках и чем вызваны?

5. Как изменяется пьезометрическая линия на участке постоянного сечения с путевым расходом?

6. Каков геометрический смысл каждого слагаемого в уравнении Бернулли?

7. Каков энергетический смысл каждого члена уравнения Бернулли и всего уравнения в целом?

8. Какая скорость входит в уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, как она определяется?

9. Как определяется расход в лабораторной работе?

10. Как определяется полный напор в сечении?

11. Какие линии, кроме пьезометрической, строятся на диаграмме уравнения Бернулли?

12. Проанализируйте характер линии полного напора по длине трубы: имеется ли подъем линии? резкие падения, чем вызваны?

13. Как определяются потери напора в сечениях, как строится эпюра потерь напора?

14. Каким прибором можно определить скорость в данной точке сечения потока?

15. Сопоставьте значения средней скорости в сечении со скоростью по оси потока в том же сечении? Какая из них больше и почему?

16. Что такое геометрический, пьезометрический и гидравлический уклон? Какой уклон может быть только положительным?

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и содержит:

- краткие теоретические положения, обязательно включающие используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их единицами измерения;
- бланк с заполненной таблицей и построенной диаграммой, на которой должны быть подписаны основные линии и для одного из сечений показаны все напоры;
- выводы по работе, в которых даются подробные ответы на следующие вопросы: 4, 5, 12, 15.

Лабораторная работа № 2

Изучение режимов движения жидкости

2.1. Теоретические положения

Современные представления о двух режимах движения жидкости сформировались в результате работ английского физика Осборна Рейнольдса, опубликованных в 1883-1885 годах и обобщивших экспериментальные исследования многих ученых. Было замечено, что затраты энергии на преодоление гидравлических сопротивлений при движении потока существенно зависят от характера движения жидкости. Было доказано наличие двух режимов движения – ламинарного и турбулентного.

Ламинарным называется упорядоченное течение жидкости, при котором жидкость в потоке перемещается как бы слоями, струйками, параллельными направлению течения, не перемешивающимися друг с другом. Ламинарный режим наблюдается при движении жидкостей с малыми скоростями или при движении очень вязких жидкостей.

Турбулентный режим – форма течения жидкости, при которой частицы совершают неустановившееся движение по сложным траекториям, слойность движения жидкости нарушается, появляется пульсация скорости, вызывающая более или менее интенсивное перемешивание жидких частиц в потоке.

Переход от ламинарного течения к турбулентному может начинаться со случайных возмущений параметров потока. Но пока скорости малы, возмущения затухают за счет действия сил вязкого трения. С увеличением скорости и ростом сил инерции возмущения приводят к потере устойчивости ламинарного режима и переходу его в турбулентный.

Гидродинамическая характеристика, определяющая режим движения жидкости, называется ***числом Рейнольдса*** **Re**. Расчетная зависимость числа Рейнольдса:

- для потоков любого профиля

$$\mathbf{Re} = \frac{\mathbf{v}l}{\nu}; \qquad (2.1)$$

- для трубопроводов круглого сечения:

$$\mathbf{Re} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{d}}{\nu}; \qquad (2.2)$$

где **v** – средняя скорость потока, м/с;

l – линейная характеристика потока, м;

d – диаметр трубы, м;

ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, $м^2/с$.

Скорость течения жидкости, при которой происходит переход от одного режима движения к другому, называется ***критической*** ($v_{кр}$). Число Рейнольдса, соответствующее критической скорости, так же называют критическим:

$$\mathbf{Re}_{кр} = \mathbf{v}_{кр}\mathbf{d}/\nu.$$

В технических расчётах для течения в круглых трубах принято значение критического числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр} = 2300$.

Ламинарный режим движения будет устойчивым для круглых труб при числах Рейнольдса $\mathbf{Re} < 2300$.

При $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{кр}$ режим движения будет турбулентным.

Практически переход от ламинарного движения к турбулентному происходит в некотором диапазоне чисел Рейнольдса от нижнего критического $\mathbf{Re}_{кр}^{н} = 2300$ до верхнего критического $\mathbf{Re}_{кр}^{в} = 4000$. Область неустойчивого движения при расчетах относят к турбулентному течению, хотя визуально режим кажется близким к ламинарному.

2.2. Выполнение лабораторной работы

2.2.1. Цель работы

Изучить опытным путём с помощью подкрашивания струек воды наличие двух режимов движения. Рассчитать значения чисел Рейнольдса во всех опытах.

Сравнить визуальные наблюдения режимов движения с теоретическими расчётами.

2.2.2. Описание лабораторной установки

Установка Рейнольдса является классической для изучения режимов движения вязкой жидкости. На рис. 2.1. представлена схема установки, аналогичная установке Рейнольдса. Установка состоит из напорного бака **1** с постоянным уровнем жидкости. Из бака выведена стеклянная труба **2**, имеющая плавный скругленный вход для обеспечения минимальных потерь напора при формировании потока в трубе. Диаметр трубы - **d** = 30 мм, длина - l = 2,5 м. Регулирующий кран **3** служит для изменения скорости движения воды по трубе. Промежуточный резервуар **4** предназначен для смягчения гидравлического удара при открытии и закрытии крана. Объём воды в опыте измеряется мерным бачком **5**. Температура жидкости в питающем резервуаре регистрируется термометром **6**.

Для визуального наблюдения за распределением струек жидкости в потоке к трубе подводится красящая жидкость по двум капиллярным трубочкам из сосуда **7** с красителем. Поступление краски регулируется зажимом **8**.

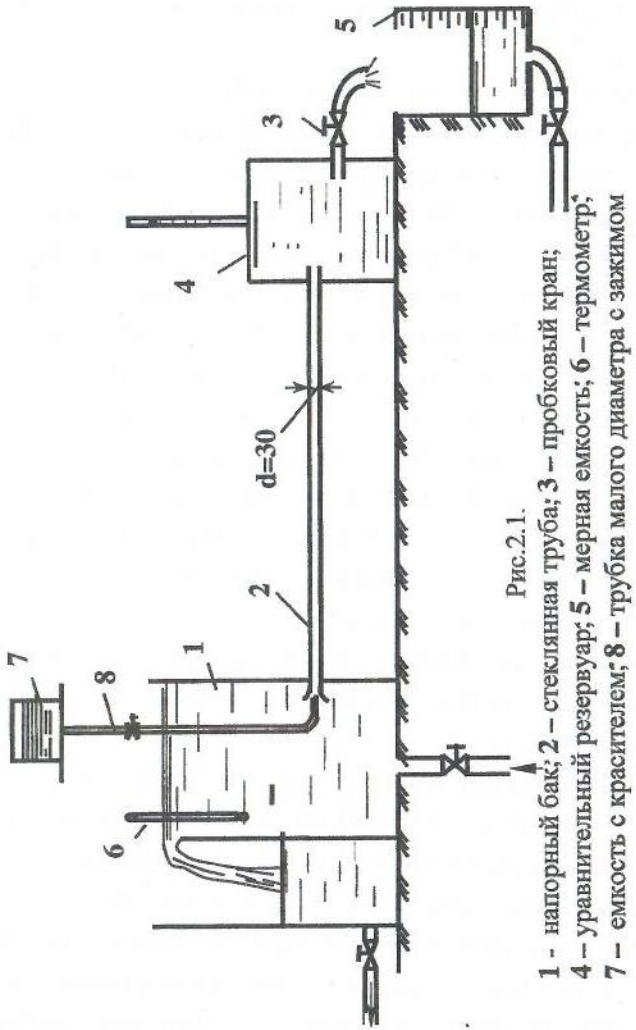


Рис.2.1.
1 - напорный бак; **2 –** стеклянная труба; **3 –** пробковый кран;
4 – уравнительный резервуар; **5 –** мерная емкость; **6 –** термометр;
7 – емкость с красителем; **8 –** трубка малого диаметра с зажимом

2.2.3. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с установкой и с назначением каждого её элемента и устройства.

2. Записать показания термометра в табл. 2.1.

3. Опыт начинается с малых скоростей. Пробковому крану дается небольшое открытие. Одновременно ослабляется зажим у сосуда с красителем. Добиваются, чтобы скорость поступления красителя по двум капиллярным трубочкам была равна скорости движения воды в стеклянной трубе. Визуально наблюдают поведение окрашенных струек в потоке. При малых скоростях наблюдается параллельно-струйное, прямолинейное, послойное движение воды. В процессе опыта по секундомеру определяется время наполнения 1 литра воды в мерной ёмкости.

4. Пробковому крану дается большее открытие, опыт повторяется. Снова визуально наблюдается поведение окрашенных струек и фиксируется время наполнения принятого объёма воды в мерной ёмкости. Картина опыта снова зарисовывается, если она изменилась.

5. При постепенном открытии крана желательно уловить визуально момент перехода от ламинарного режима к турбулентному, т.е. режиму неустойчивого движения. Окрашенные струйки начинают колебаться, двигаться волнообразно. Скорость движения в этом опыте следует зафиксировать как критическую.

6. В последующих опытах крану дается наибольшее открытие, при котором наблюдаются сильные пульсации, завихрение струек, и наступает момент, когда краска полностью размывается. Это свидетельствует о турбулентном режиме движения. Картину опыта нужно зарисовать.

7. В последнем опыте следует пронаблюдать переход от турбулентного режима к ламинарному, для чего постепенно прикрывать кран.

8. Все опытные данные занести в табл. 2.1, сделать необходимые расчёты и зарисовки траекторий струек в каждом опыте. Для каждого опыта подсчитать значение числа Рейнольдса и сделать заключение о режиме движения.

Таблица 2.1.

Определение режимов движения воды

Наименование параметров	Номер опыта				
	1	2	3	4	5
1. Диаметр трубы **d**,см					
2. Площадь сечения **ω**, $см^2$					
3. Температура воды **T**, °C					
4. Кинематический коэффициент вязкости воды **ν**, $см^2/с$					
5. Объём воды в мерном бак **W**, $см^3$					
6. Время заполнения объёма **t**,с					
7. Расход воды **Q**, $см^3/с$					
8. Средняя скорость воды **v**,см/с					
9. Число Рейнольдса **Re**					
10. Режим движения (визуально)					
11. Режим движения (теоретически)					

2.2.4. Обработка результатов лабораторной работы

Для каждого опыта вычислить

1. площадь живого сечения $\omega = \pi d^2 / 4$,
2. величину расхода воды $Q = W / t$,
3. среднюю скорость воды $v = Q / \omega$,
4. число Рейнольдса $Re = vd / \nu$.

Кинематический коэффициент вязкости ν определяется по таблице 2.2 в соответствии с температурой воды.

5. по рассчитанным числам **Re** теоретически определяется режим движения при сравнении его с $Re_{кр} = 2300$.

Все расчетные данные заносятся в таблицу 2.1.

Таблица 2.2.

Кинематический коэффициент вязкости воды ν при различной температуре T

T,° C	ν, см²/с	T,°C	ν, см²/с	T,°C	ν, см²/с	T,°C	ν, см²/с
1	0,0173	8	0,0139	15	0,0115	22	0,0099
2	0,0168	9	0,0135	16	0,0112	23	0,0096
3	0,0162	10	0,0131	17	0,0109	24	0,0092
4	0,0157	11	0,0128	18	0,0106	25	0,0090
5	0,0152	12	0,0125	19	0,0104	26	0,0088
6	0,0148	13	0,0121	20	0,0101	27	0,0086
7	0,0144	14	0,0118	21	0,0100	28	0,0084

По заданию преподавателя для одного из опытов оценивается величина инструментальной погрешности при определении экспериментальных параметров:

- средней скорости **v**

$$\delta v = v\left(\frac{\delta W}{W} + \frac{\delta t}{t} + 2\frac{\delta d}{d}\right),$$

- числа **Re**

$$\delta Re = Re\left(\frac{\delta v}{v} + \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta \nu}{\nu}\right)$$

при $\delta W/W = 1{,}5\%$; $\delta t = 0{,}1$ с; $\delta d = 0{,}5$ мм; $\delta\nu/\nu = 1\%$.

2.2.5. Вопросы для самопроверки и составления выводов по работе

1. Из каких элементов состоит установка Рейнольдса? Их назначение?
2. Для чего измеряется температура воды?
3. Дать определение ламинарного режима, турбулентного течения.

4. Каково назначение сосуда с красителем? Как краситель подается в поток?
5. Каков порядок проведения опытов?
6. Какая скорость называется критической? Какой критерий является гидродинамической характеристикой потока?
7. Что такое критическое число Рейнольдса?
8. Как определяется расход? средняя скорость? число Рейнольдса?
9. Для чего в работе используется кинематический коэффициент вязкости? Какова его размерность?
10. Какими методами в работе определяется режим движения?
11. Чему равна теоретическая критическая скорость для данной трубы? Какое получено опытное значение критической скорости?
12. Совпали ли визуальные наблюдения с теоретическими расчетами?

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и включает в себя:

- краткие теоретические положения, где обязательно приводятся используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их единицами измерения;
- схему установки с названиями входящих в нее элементов;
- выводы по работе, в которых даются ответы на следующие вопросы: 7, 10, 11,12.

Лабораторная работа № 3

Определение потерь напора по длине и коэффициента гидравлического трения

3.1. Теоретические положения

Часть механической энергии, идущая на преодоление ***сил гидравлического сопротивления,*** возникающих при движении реальной (вязкой) жидкости по трубам и каналам, теряется для данной системы безвозвратно. Эта потеря обусловлена необратимым переходом механической энергии, равной работе сил вязкого трения, в теплоту. Поэтому под ***гидравлическими сопротивлениями*** будем понимать все внешние факторы, приводящие к затратам энергии, а под ***гидравлическими потерями*** - величину, равную потере полной энергии на данном участке.

Гидравлические сопротивления, а также и потери напора подразделяют на два вида

- ***потери напора по длине (или линейные)***, т. е. распределенные по всей длине, вдоль которой происходит движение;
- ***местные потери напора***, т. е. сосредоточенные в конкретном месте, где происходит переформирование потока.

Основным гидравлическим сопротивлением при движении потока жидкости является вся внутренняя поверхность твердой границы потока, так называемое ***линейное сопротивление***.

Потери напора по длине в напорном трубопроводе зависят от геометрических размеров трубопровода, длины и диаметров трубы, средней скорости движения, режима движения жидкости и состояния внутренней поверхности трубы, т. е. её шероховатости.

Потери по длине рассчитываются по формуле Дарси-Вейсбаха:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \qquad (3.1)$$

λ – коэффициент гидравлического трения, коэффициент Дарси;

l, d - длина и диаметр участка;

v - средняя скорость в сечении потока.

Значение коэффициента λ и выбор зависимости для его расчета в общем случае зависят от режима течения жидкости, характеризуемого числом Рейольдса, и шероховатостью Δ/d. Характеристикой шероховатости внутренней поверхности труб является высота выступов шероховатости Δ – ***абсолютная шероховатость***. Отношение Δ/d называют ***относительной шероховатостью***, а обратную величину d/Δ - ***относительной гладкостью***.

$$\lambda = f(Re, \frac{\Delta}{d}). \qquad (3.2)$$

Потери напора h_l связаны со скоростью движения жидкости v закономерностью, которую называют ***общим законом сопротивления***:

$$I = \frac{h_l}{l} = av^n, \qquad (3.3)$$

где I - удельные потери напора по длине (или гидравлический уклон);

a – коэффициент, зависящий от рода жидкости, от формы и размеров русла;

n – показатель степени, изменяющийся от 1 до 2.

При ***ламинарном режиме*** движения ($Re \leq 2300$, $n = 1$, $h_l \sim v$) коэффициент Дарси не зависит от шероховатости стенок и может быть определен по формуле Пуазейля:

$$\lambda = 64/Re. \qquad (3.4)$$

При ***турбулентном режиме*** зависимость h_l от v более сложная, показатель степени n изменяется в пределах от 1,75 до 2. Вследствие этого в турбулентном режиме выделяют три зоны с различным ***законом сопротивления.*** Коэффициент Дарси для каждой из зон определяют по

соответствующим формулам. При этом важным является понятие гидравлических «гладких» и «шероховатых» труб (рис.3.1).

Измерения скоростей показывают, что при турбулентном режиме у стенок имеется тонкий слой жидкости, в котором частицы, подторможенные и направленные стенкой, сохраняют в основном слоистый характер. Этот слой называют ***пограничным*** или ***вязким пристенным слоем*** и толщину его обозначают **δ**:

$$\delta = \frac{32{,}5d}{Re\sqrt{\lambda}}. \qquad (3.5)$$

Определение «гидравлически гладких» стенок связано с толщиной этого слоя следующим образом. Если пристенный слой полностью перекрывает выступы шероховатости (**δ > Δ**, рис. 3.1, а), то стенки называются «гидравлически гладкими», если **δ < Δ**(рис. 3.1, б), то стенки считаются «шероховатыми».



а) «гладкая» стенка б) «шероховатая» стенка в) эквивалентная шероховатость

Рис.3.1. К определению понятий гидравлических «гладких» и «шероховатых» труб

Границы зон турбулентного режима можно определить различными способами, но наиболее применяемыми в последнее время считаются рекомендации А.Д. Альтшуля. Критерием для определения зоны турбулентности является число **Re** и **Δэ/d**, где Δэ - эквивалентная шероховатость. Обычно естественная шероховатость имеет многообразные нерегулярные формы (рис. 3.1, а, б) и установить ее среднее значение невозможно. Поэтому параметр шероховатости вводится как условная величина, определяемая по специальной шкале искусственной однородной шероховатости (рис. 3.1, в). Значения ее приводятся в справочной литературе в зависимости от материала поверхности, способа изготовления, периода и условий эксплуатации. При необходимости Δэ определяется опытным путем.

При турбулентном режиме могут быть рекомендованы следующие зависимости для определения коэффициента Дарси.

1. ***«Гидравлически гладкие» стенки*** ($h_l \sim v^{1,75}$).

К началу этой области будем относить числа **Re > 2300**. Границу конца гладкостенного течения определим по соотношению

$$Re = 20\,d / \Delta_э,$$

т. е. будем считать течение, происходящим вдоль гладких стенок, если

$$2300 < Re \le 20d/\Delta_э. \qquad (3.6)$$

Для этой зоны может быть рекомендована формула Блазиуса:

$$\lambda = 0{,}3164 / Re^{0,25}. \qquad (3.7)$$

2. Область ***доквадратичного закона сопротивления*** шероховатых стенок соответствует турбулентному течению с числами Рейнольдса

$$20d/\Delta_э < Re < 500d/\Delta_э. \qquad (3.8)$$

Коэффициент **λ** в этой области определяется по формуле Альтшуля

$$\lambda = 0{,}11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d}\right)^{0,25} \qquad (3.9)$$

3. Область ***квадратичного закона сопротивления*** характеризуется тем, что потери напора пропорциональны ***квадрату*** скорости: $h_l \sim v^2$.

Границей начала данной области – области автомодельности турбулентного режима – можно считать число Рейнольдса

$$Re = 500d/\Delta_э.$$

В этой области вязкий слой практически разрушен и не оказывает влияния на потери напора, при этом δ минимально возможное и постоянное, а коэффициент гидравлического трения не зависит от числа Рейнольдса.

Итак, при

$$Re \geq 500d/\Delta_э \qquad (3.10)$$

формулы для определения коэффициента Дарси:

Никурадзе

$$\lambda = (1{,}74 + 2\lg(r/\Delta_э))^{-2} \qquad (3.11)$$

Шифринсона

$$\lambda = 0{,}11(\Delta_э/d)^{0{,}25}. \qquad (3.12)$$

На рис.3.2 представлена схема для выбора теоретической расчетной формулы коэффициента λ, обобщающая изложенные выше теоретические положения.

3.2. Выполнение лабораторной работы

3.2.1. Цель лабораторной работы

1. Определить опытным путем коэффициент гидравлического трения, коэффициент Дарси $\lambda_{оп}$ в трубопроводе при различных скоростях движения воды.
2. Рассчитать теоретическое значение коэффициента Дарси $\lambda_{теор}$ в соответствии с режимом движения воды и зоной сопротивления.

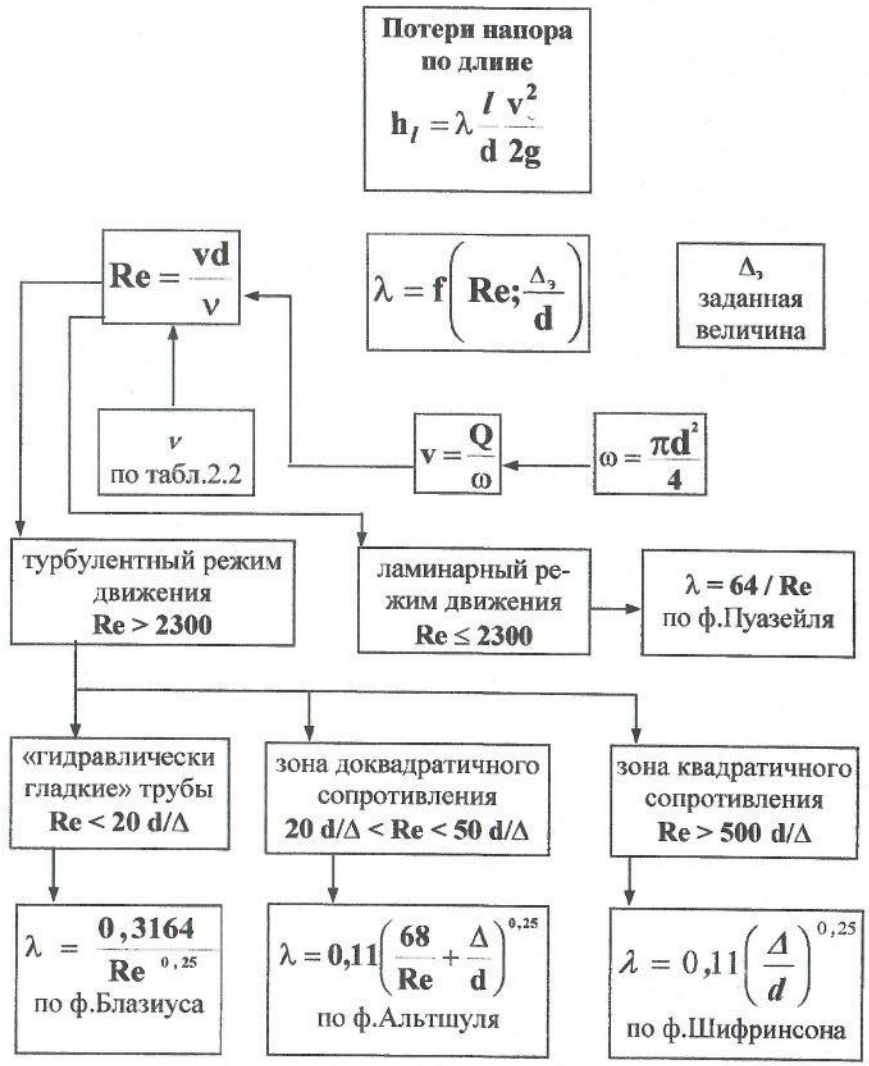


Рис. 3.2. Схема выбора теоретической формулы для расчета коэффициента гидравлического трения $\lambda_{теор}$

3.2.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка (рис 3.3) состоит из напорного бака **1**, трубопровода постоянного диаметра **2**, вентиля **3** для регулирования скорости движения воды, пьезометров **4**, присоединенных к штуцерам в начале и в конце испытуемого участка трубы, мерной ёмкости **5**.

Лабораторные работы выполняются при установившемся движении, поэтому для поддержания постоянного напора в напорном баке **1** предусмотрена сливная труба **7**. Подпитка напорного бака осуществляется от центробежного насоса или из водопроводной сети по соответствующим трубам **8**.

3.2.3. Порядок выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа по определению коэффициента гидравлического трения λ может быть выполнена по указанию преподавателя на одной из труб: с диаметром **d** = 36мм или **d** = 20 мм. Длина экспериментального участка l = 4,4 м.

В процессе проведения работы опытные значения коэффициента гидравлического трения $\lambda_{оп}$ следует определить при различной средней скорости движения воды в трубе. Первый опыт можно начать с небольшой скорости и затем от опыта к опыту увеличивать скорость, или в обратной последовательности: начать с максимальной скорости и уменьшать ее от опыта к опыту.

Последовательность проведения каждого опыта.

1. Перед началом работы осмотреть установку. В табл. 3.1. внести значения диаметра и длины рабочего участка испытуемой трубы. Проверить подключение пьезометров, установить их нумерацию: 1 – в начале участка трубы; 2 – в конце трубы по ходу движения жидкости. Убедиться, что нет воздушных пробок в соединительных резиновых трубах: показания пьезометра должны быть одинаковы.

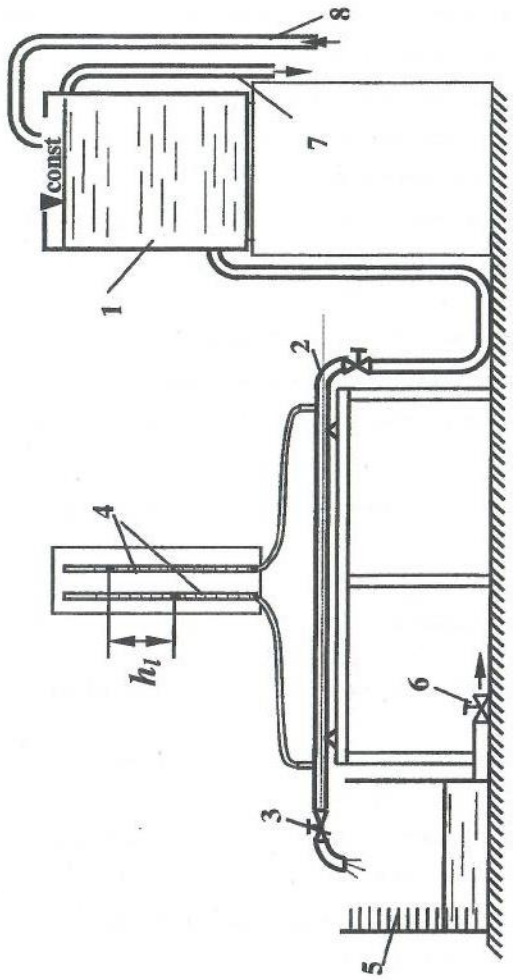


Рис. 3.3. Установка для изучения потерь напора по длине:
1 – напорный бак; 2 – исследуемая труба; 3 – вентиль; 4 – пьезометры; 5 – мерный бак;
6 – сливная труба; 7 – переливная труба; 8 – подпиточная труба

2. Открыть регулировочный вентиль **3**, установить определенную скорость движения воды, одновременно с помощью подпиточной трубы (8) (или насоса) и сливной трубы **7** установить постоянный уровень воды в напорном баке. Таким образом обеспечить установившееся движение воды в экспериментальной установке.
3. Перекрыть вентиль **6** на сливной трубе мерной емкости.
4. Перейти к снятию замеров и показаний приборов:

- снять показания пьезометров **4**;
- с помощью секундомера определить время наполнения определенного объема воды в мерной емкости **5**. Цена деления в мерной емкости 10 литров ($10^4 см^3$);
- измерить температуру воды в мерном баке.

5. Последовательно провести 5-6 опытов при различных скоростях, полностью используя возможности установки. Если мерный бак **5** переполняется в процессе работы, можно, открыв вентиль **6**, слить воду из него, снова закрыть вентиль и продолжить работу до завершения.
6. Все исходные и опытные данные занести в табл. 3.1. и обработать результаты экспериментов.

3.2.4. Обработка результатов лабораторной работы

1. Рассчитывается площадь живого сечения трубы:

$$\omega = \pi d^2 / 4.$$

2. В соответствии с температурой по табл. 2.2.выбирается кинематический коэффициент вязкости воды ν.

3. Находится величина расхода воды в каждом опыте:

$$Q = W / t.$$

4. Определяется средняя скорость воды в каждом опыте:

$$v = Q / \omega.$$

5. Вычисляются потери напора:

$$h_l = p_1/(\rho g) - p_2/(\rho g). \qquad (3.13)$$

6. Рассчитывается опытное значение коэффициента гидравлического трения:

$$\lambda_{оп} = \frac{2gdh_l}{l \cdot v^2}. \qquad (3.14)$$

7. Для каждого опыта вычисляется число Рейнольдса **Re**

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

и определяется режим движения воды.

8. В случае турбулентного режима определяются граничные значения чисел **Re** для установления области сопротивления

$$20d/\Delta_э = ? \qquad 500d/\Delta_э = ?$$

Сравнивая полученные значения с числами **Re** в каждом опыте, определяют зону турбулентного течения.

9. В соответствии с выполненными расчетами руководствуясь теоретическими положениями (рис.3.2), выбирается теоретическая формула для определения коэффициента Дарси $\lambda_{теор}$.

10. Затем для сравнения полученных значений $\lambda_{теор}$ и $\lambda_{оп}$ вычисляется величина отклонения ε опытного значения коэффициента от теоретического:

$$\varepsilon = (|\lambda_{теор} - \lambda_{оп}| / \lambda_{теор}) \cdot 100\%. \qquad (3.15)$$

Результаты обработки измерений заносятся в таблицу 3.1.

11. По заданию преподавателя для одного из опытов может быть выполнен расчет погрешности определения $\lambda_{оп}$. Для этого формула (3.14) может быть представлена в виде:

$$\lambda_{оп} = \frac{h_l d^5 t^2}{0{,}0827 l W^2} \qquad (3.16)$$

и тогда расчет ошибки может быть выполнен по зависимости:

$$\delta\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta h_l}{h_l} + \frac{5\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta W}{W} + \frac{2\Delta t}{t}. \qquad (3.17)$$

Таблица 3.1

Определение коэффициента гидравлического трения

Наименование параметров	Номер опыта					
	1	2	3	4	5	6
1. Диаметр трубы **d** ,см						
2. Длина рабочего участка ***l***, см						
3. Площадь живого сечения **ω**, $см^2$						
4. Эквивалентная шероховатость **Δ**,см						
5. Температура воды **T**, °C						
6. Кинематический коэффициент вязкости воды **ν**, $см^2/с$						
7. Объём воды в мерном баке **W**,$см^3$						
8. Время заполнения объёма **t**, с						
9. Расход воды **Q**, $см^3/с$						
10. Средняя скорость воды **v**, см/с						
11. Показание первого пьезометра $p_1/(\rho g)$, см						
12.Показание второго пьезометра $p_2/(\rho g)$, см						
13.Потери напора h_l, см						
14.Опытное значение коэффициента $\lambda_{оп}$						
15.Число Рейнольдса **Re**						
16.Режим движения и область сопротивления турбулентного режима						
17.Теоретическое значение коэффициента $\lambda_{теор}$						
18. Отклонение ε, %						

Абсолютные погрешности измеряемых величин Δ... принимаются следующим образом:

$\Delta d = 0{,}1$ мм; $\Delta W = 0{,}1$ наименьшего деления шкалы мерного бака; $\Delta t = 0{,}1$ с; $\Delta h_l = 0{,}5$ цены деления шкалы пьезометра; погрешностью измерения длины трубы можно пренебречь вследствие малости.

3.2.5. Вопросы для самопроверки и составления выводов по работе

1. Что такое гидравлические сопротивления, какие виды гидравлических сопротивлений учитывают в инженерных расчетах?
2. Каковы причины, вызывающие потери напора по длине? Какие имеются формулы для определения потерь по длине?
3. От каких параметров зависит коэффициент гидравлического трения?
4. Какие зоны турбулентного режима различают?
5. Какой смысл вкладывается в понятия «гидравлически гладкие» и «гидравлически шероховатые» трубы?
6. Что такое «эквивалентная шероховатость», как ее можно определить?
7. Какие имеются рекомендации для определения границ зон турбулентного режима?
8. Какие показатели степени у скорости в общем, законе сопротивления при различных режимах и в разных зонах сопротивления турбулентного режима?
9. Как в данной работе экспериментально определяются потери напора по длине?
10. Из каких элементов состоит лабораторная установка?
11. Какие замеры выполняются в каждом опыте на установке?

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и содержит следующие моменты:

- краткие теоретические положения, обязательно включающие используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их размерностями;
- схему установки с названиями входящих в нее элементов;
- выводы по работе, в которых даются ответы на вопросы: 1, 2, 3, 7, а также приводятся значения границ зон турбулентного режима для данной трубы и обоснование выбранных расчетных формул для теоретического значения коэффициента Дарси; в заключении отмечаются опыты с наилучшей сходимостью опытных и теоретических значений коэффициента.

Лабораторная работа №4

Определение местных потерь напора и коэффициентов местных сопротивлений

4.1.Теоретические положения

Местными сопротивлениями называются различного рода устройства, при прохождении через которые меняется направление движения потока жидкости или величина скорости, или и то, и другое. К местным сопротивлениям относятся краны, задвижки, повороты труб, тройники, внезапное сужение потока, внезапное расширение и т.п.

Потери напора в местном сопротивлении рассчитываются по формуле Вейсбаха:

$$h_r = \zeta \frac{v^2}{2g}, \qquad (4.1)$$

где ζ - коэффициент местного сопротивления, показывающий долю скоростного напора, затрачиваемого на преодоление данного сопротивления.

Течение жидкости через местные сопротивления – очень сложное явление, и теоретические значения коэффициентов ζ получены лишь для немногих видов местных сопротивлений.

Для большинства местных сопротивлений значения коэффициентов ζ получены из экспериментов и приводятся в гидравлических справочниках.

На величину коэффициента ζ влияют многие факторы, в том числе геометрические параметры устройства, режим течения, шероховатость его стенок. Для запорных устройств (кранов, вентилей, задвижек, клапанов, дросселей и т. д.) большое влияние на величину ζ оказывает степень открытия.

Рассмотрим подробнее несколько видов местных сопротивлений, а именно тех, которые используются в данной лабораторной работе.

Вентиль (рис.4.1, а). Это очень распространенный элемент запорной арматуры. Выпускается промышленностью с различной конструкцией и конфигурацией внутренних клапанов. На рисунке показана примерная структура потока при прохождении вентиля. При различном открытии вентиля коэффициент ζ будет иметь свои значения. Кроме того, эти значения зависят от диаметра трубопровода, от расположения делительных стенок. В справочной литературе значения коэффициента ζ чаще всего приводятся для полностью открытого вентиля.

Диафрагма (измерительная шайба) (рис.4.1, б). Такое устройство часто применяется в качестве измерительного прибора для определения величины расхода. В самом деле, потери напора $\mathbf{h_r}$ пропорциональны напору $\mathbf{v^2/(2g)}$ и, следовательно, расходу жидкости **Q**. Если предварительно выполнить тарировочные работы, т.е. опытным путем получить для диафрагмы зависимость $\mathbf{h_r=f(Q)}$ или, наоборот, $\mathbf{Q=f(h_r)}$ то, построив график этой зависимости (рис.4.1, в), можно его применять в дальнейшем для определения величины расхода по показаниям пьезометров или дифманометра.

Значение коэффициента сопротивления ζ для диафрагмы зависят от размера проходного отверстия.

Пробковый кран (4.1, г). Эти устройства часто применяются в гидросистемах для регулирования расхода, для включения и выключения системы. Коэффициент ζ зависит от угла поворота пробки относительно оси. Примерные значения ζ при турбулентном режиме течения с числами $\mathbf{Re>10^4}$ приведены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Коэффициент сопротивления пробкового крана

α,град	5	10	20	30	40	50	55	67
ζ	0,05	0,31	1084	6,15	20,7	95,3	275	∞

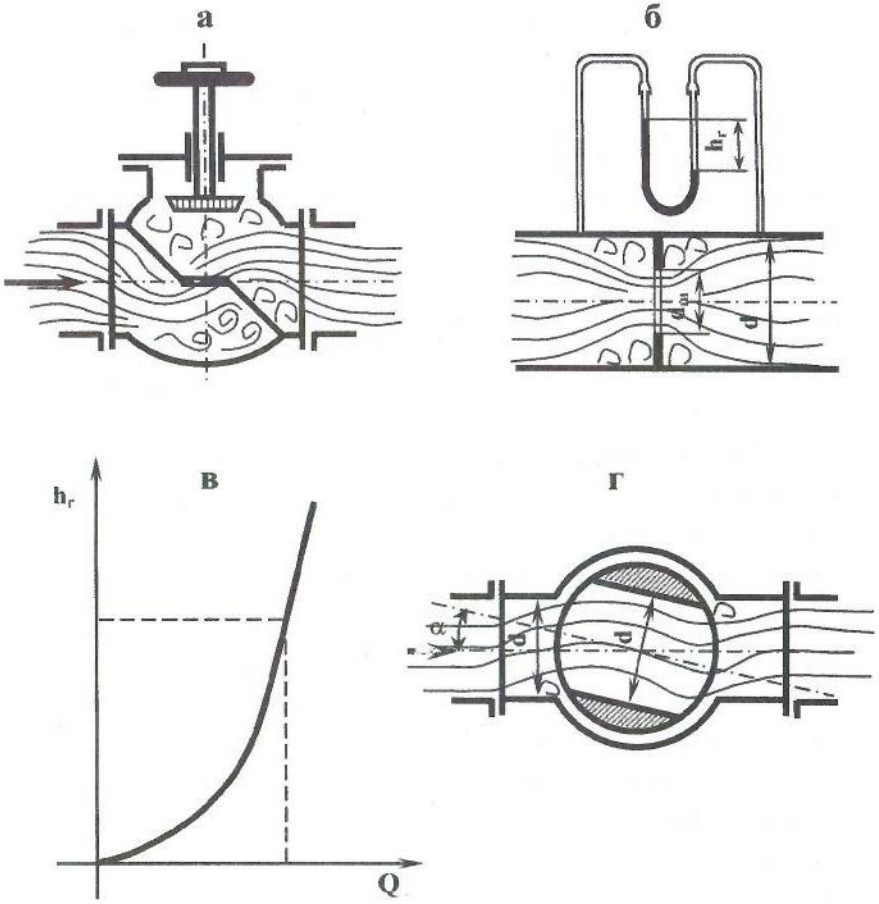


Рис. 4.1. Примеры местных сопротивлений

Значения коэффициентов ζ для местных сопротивлений строго индивидуальны и даже при соблюдении рекомендаций по установке стандартной аппаратуры в каждом случае могут появиться отклонения значений ζ от табличных справочных данных. Поэтому важно уметь определять коэффициенты сопротивлений опытным путем.

4.2. Выполнение лабораторной работы

4.2.1. Цель лабораторной работы

1. Определить опытным путем коэффициенты местных сопротивлений различных устройств: вентиля, пробкового крана, диафрагмы.

2. Изменить угол открытия пробкового крана в пределах от 5° до 45° и, определив коэффициенты сопротивления пробкового крана при разных углах открытия, сравнить опытные значения с табличными.

4.2.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка для изучения потерь напора в местных сопротивлениях аналогична установке для определения потерь напора по длине. Обе питаются от одного напорного бака, смонтированы на одной раме, имеют аналогичные измерительные приборы.

Лабораторная установка (рис. 4.2) состоит из напорного бака **1**, трубопровода постоянного диаметра **2** с вентилем **3** для регулирования расхода и с рабочими местными сопротивлениями: вентилем **4**; пробковым краном **5**, диафрагмой **6**. На трубе у каждого местного сопротивления, до и после него, имеются штуцеры, к которым присоединены пьезометры **7**. Мерная емкость **8** оборудована сливом **9**. У напорного бака **1** для обеспечения постоянного напора имеется подпиточная **10** и сливная **11** трубы.

4.2.3. Порядок выполнение лабораторной работы

Перед началом выполнения опытов осмотреть установку, внимательно разобраться с присоединением пьезометров к местным сопротивлениям, установить их нумерацию по ходу движения жидкости для каждого местного сопротивления. Убедиться, что в резиновых трубках, идущих к пьезометрам, нет пузырьков воздуха.

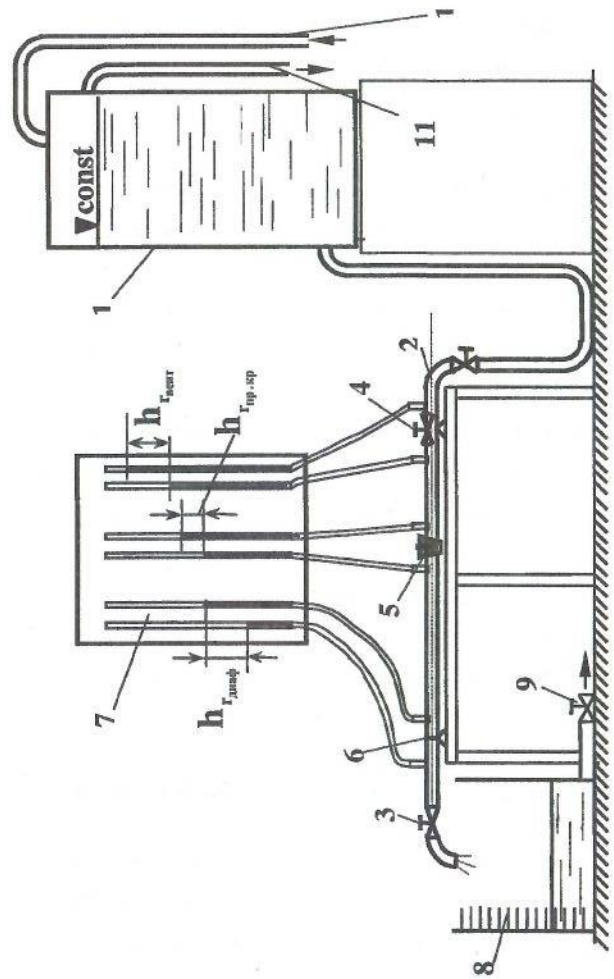


Рис.4.2. Установка для изучения потерь напора в местных сопротивлениях:
1 – напорный бак; **2** – исследуемая труба; **3** – вентиль для регулирования скорости; **4** – вентиль; **5** – пробковый кран; **6** – диафрагма (шайба); **7** – пьезометры; **8** – мерный бак; **9** – сливная труба; **10** - подпиточная труба; **11** – переливная труба

На установке можно проводить различные опыты, в том числе тарирование измерительной диафрагмы, определение зависимости коэффициентов сопротивления пробкового крана от угла поворота пробки.

Чаще всего определяются коэффициенты ζ для всех сопротивлений при двух различных расходах воды.

Порядок эксперимента следующий:

1. Открыть полностью вентиль **4** и пробковый кран **5**.
2. Вентилю **3** дать значительное открытие, так чтобы установился развитый турбулентный режим (открывать вентиль **3** можно до тех пор, пока есть показания во 2-ом пьезометре измерительной шайбы).
3. Подпиточным краном или насосом установить постоянный уровень воды в напорном баке.
4. Перекрыв вентиль слива мерного бака, измерить время заполнения установленного объема. Снять показание всех пьезометров (у каждого местного сопротивления). Открыть слив и измерить температуру воды в мерном баке. Данные опыта заносятся в таблицу 4.2.
5. Следующая серия опытов проводится при измерении угла открытия пробкового крана. Гаечным ключом пробка поворачивается на определенный угол в интервале от 5° до 45°. Опыт повторяется при новом расходе.

4.2.4. Обработка результатов лабораторной работы

Обработка экспериментальных данных аналогична обработке данных лабораторной работы №3 по определению потерь напора на трение по длине. В расчетах принять ускорение свободного падения $\mathbf{g = 981}$ см/с^2.

Таблица 4.2.

Определение коэффициентов местных сопротивлений

Наименование параметров	Вентиль		Пробковый кран		Диафрагма	
	1 опыт	2 опыт	1 опыт	2 опыт	1 опыт	2 опыт
1. Диаметр трубы **d** ,см						
2. Площадь живого сечения ω, см^2						
3. Температура воды **T**, °C						
4. Кинематический коэффициент вязкости воды ν,см^2/с						
5. Объём воды в мерном баке **W**, см^3						
6. Время опыта **t**, с						
7. Расход воды **Q**, см^3/с						
8. Средняя скорость воды **v**, см/с						
9. Показание первого пьезометра $\mathbf{p_1/(\rho g)}$, см						
10.Показание второго пьезометра $\mathbf{p_2/(\rho g)}$, см						
11.Потери напора $\mathbf{h_r}$, см						
12. Коэффициент местного сопротивления ζ						
13.Число Рейнольдса **Re**, режим течения						

1. Рассчитывается площадь живого сечения трубы:

$$\omega = \pi d^2 / 4.$$

2. В соответствии с температурой по табл. 2.2 .выбирается кинематический коэффициент вязкости воды ν.

3. Находится величина расхода воды в каждом опыте:

$$Q = W / t.$$

4. Определяется средняя скорость воды в каждом опыте:

$$v = Q / \omega.$$

5. Вычисляются местные потери напора:

$$h_r = p_1/(\rho g) - p_2/(\rho g). \qquad (4.2)$$

6. Определяется значение коэффициентов местных сопротивлений:

$$\zeta = 2gh_r/v^2 . \qquad (4.3)$$

7. Для каждого опыта вычисляется число Рейнольдса **Re**

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

и определяется режим движения воды.

8. Все расчетные данные заносятся в таблицу 4.2.

9. По заданию преподавателя для одного из опытов может быть выполнен расчет погрешности определения ζ. Для этого формула (4.3) может быть представлена в виде:

$$\zeta = 12{,}08\, h_r\, d^4\, t^2/W^2 \qquad (4.4)$$

и тогда расчет относительной систематической погрешности может быть выполнен по зависимости:

$$\delta\zeta = \frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\Delta h_r}{h_r} + \frac{4\Delta d}{d} + \frac{2\Delta W}{W} + \frac{2\Delta t}{t}. \qquad (4.5)$$

Абсолютные погрешности измеряемых величин Δ... принимаются следующим образом:

$\Delta d = 0{,}1$ мм; $\Delta W = 0{,}1$ наименьшего деления шкалы мерного бака; $\Delta t = 0{,}1$ с; $\Delta h_r = 0{,}5$ цены деления шкалы пьезометра.

4.2.5. Вопросы для самопроверки и составления выводов по работе

1. Что такое местное сопротивление?
2. По какой формуле рассчитываются местные потери напора?
3. Какие местные сопротивления используются при выполнении лабораторной работы?
4. Как экспериментально в данной работе определялись местные потери напора?
5. От чего зависит коэффициент местного сопротивления для запорной аппаратуры?
6. Из каких элементов состоит лабораторная установка?
7. Какие измерения выполняются в каждом опыте?
8. Для чего измеряется температура в опыте?

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и содержит следующее:

- краткие теоретические положения, обязательно включающие используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их размерностями;
- схему установки с названиями входящих в нее элементов и построением пьезометрической линии для одного из опытов;
- выводы по работе, в которых даются ответы на вопросы: 1, 2, 3, 4. Так же следует указать, каким был угол открытия ***пробкового крана*** в 1 и 2 опытах, как изменилось значение коэффициента сопротивления крана при изменении угла. Сравнить экспериментальные значения коэффициента с табличными (таб. 4.1). Если по таблице интерполирование значения коэффициента $\zeta_{кр}$ не дает достаточной точности, то значение коэффициента $\zeta_{кр}$ требуется найти по графику (рис. 4.3).

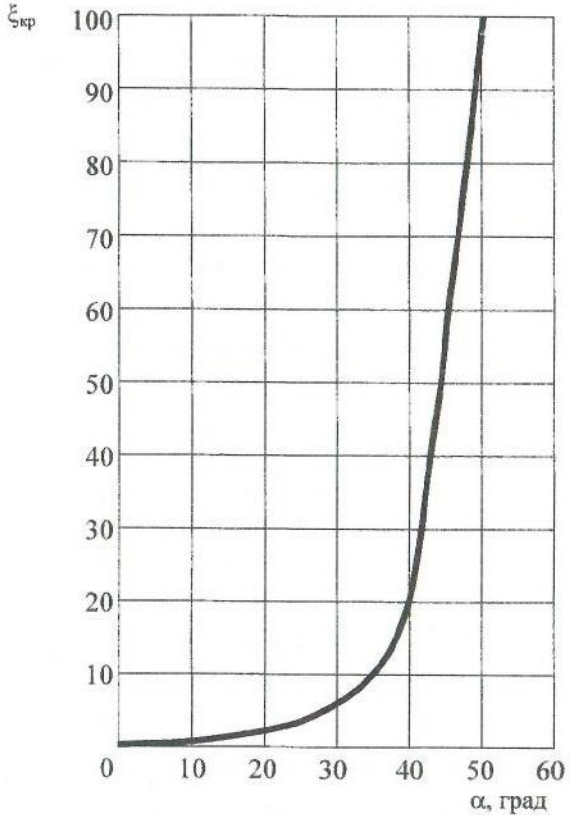


Рис. 4.3. График зависимости коэффициента сопротивления пробкового крана от угла поворота

Лабораторная работа №5

Истечение жидкости через отверстия и насадки

5.1. Теоретические положения

В инженерной практике часто приходится встречаться с явлниями истечения жидкости через отверстия различной формы и через насадки - короткие патрубки разной конфигурации длиной $(3\div5)\mathbf{d}_{отв}$ (диаметров отверстий), к которым они присоединены. Через отверстия и насадки происходит перетекание жидкости из одного резервуара в другой, опорожнение резервуаров. Насадки и их комбинации являются конструктивными элементами различных аппаратов и устройств.

Отверстия различают малые и большие, в тонкой или толстой стенке. Истечение может происходить при постоянном или переменном напоре.

Насадки по форме патрубка могут быть цилиндрические (внутренние и внешние), конические (сходящиеся и расходящиеся) и коноидальные, выполненные по форме выходящей струи.

Отверстие можно считать малым, если его высота не превышает 0,1H. При этом условии скорость в точках сжатого сечения (на расстоянии полудиаметра, рис.5.1) практически одинакова и может быть определена по формуле

$$\mathbf{v} = \varphi\sqrt{\mathbf{2gH}}\ , \qquad (5.1)$$

где **H** – напор над центром тяжести отверстия;

φ - коэффициент скорости, которым учитываются потери энергии на формирование струи, выходящей из отверстия с коэффициентом местного сопротивления $\zeta_{отв}$,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_{отв}}} \qquad (5.2)$$

α - коэффициент Кориолиса, $\alpha = 1$ при турбулентном режиме.

Площадь сжатого сечения струи определяется через площадь отверстия ω и коэффициент сжатия ε: $\omega_{сж} = \varepsilon\omega$, тогда $\varepsilon = \omega_{сж}/\omega$ и для круглого отверстия

$$\varepsilon = d_{сж}^2/d^2 \ . \qquad (5.3)$$

При установившимся движении пропускная способность **Q** (расход) малых отверстий и насадков вычисляется по зависимости:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH}\ , \qquad (5.4)$$

в которой μ – коэффициент расхода, связанный с остальными коэффициентами соотношением

$$\mu = \varepsilon\varphi. \qquad (5.5)$$

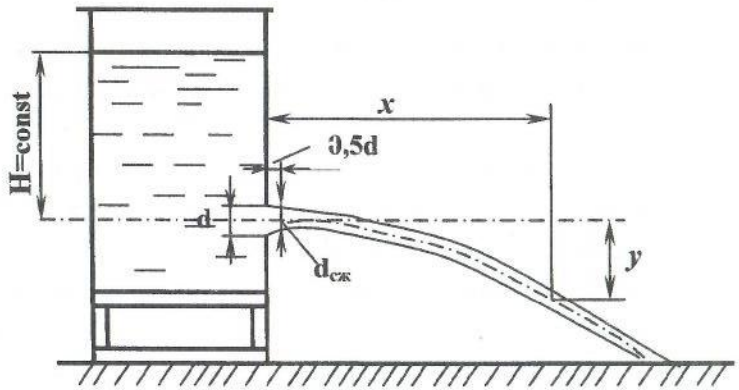


Рис.5.1. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке

Коэффициенты истечений $\zeta_{отв}$, ε, φ, μ зависят от формы отверстий и насадков, характера обработки кромок отверстия, от полноты и совершенства сжатия струи, а для конических насадков – от угла конусности. Для некоторых видов отверстий и насадков значения коэффициентов приведены в табл.5.1.

Таблица 5.1

Коэффициенты скорости, сжатия струи и расхода

Вид конструктивного элемента	φ	ε	μ
Круглое отверстие в тонкой стенке с полным совершенным сжатием	0,97	0,64	0,62
Внешний цилиндрический насадок	0,82	1,00	0,82
Конический сходящийся насадок с углом конусности $13^{\circ}24'$	0.96	0.98	0,94
Конический расходящийся насадок с углом конусности 7°	0,50	1,00	0,50

Явление сжатия струи весьма сложно: форма поперечного сечения струи изменяется по сравнению с формой сечения струи в самом отверстии. Это явление называется ***инверсией струй***. Так, при вытекании жидкости из круглого отверстия струя имеет в сжатом сечении форму эллипса; из квадратного - форму креста; из треугольного - форму буквы γ.

Для вывода формул опытного определения коэффициентов истечения рассматривается свободное истечение струи через малое отверстие в тонкой стенке с полным совершенным сжатием. Траектория струи имеет форму параболы (рис.5.1). Координаты траектории струи можно получить, допустив, что каждая частица струи движется, как свободная материальная точка, на которую действует только сила тяжести.

Тогда горизонтальное перемещение равно $x = vt$,

вертикальное – $y = gt^2/2$.

Исключив **t**, выразим скорость через координаты x и y

$v = x\sqrt{g/(2y)}$. Приравнивая полученное выражение к скорости по формуле (5.1), получим

$$\varphi = \frac{x}{2\sqrt{yH}} \qquad (5.6)$$

Отличительной особенностью истечения жидкости через гидравлические насадки является образование сжатого сечения внутри насадка на расстоянии **0,5d** и возникновение вакуума в области сжатия струи. Сужаясь на входе в насадок, как при истечении через отверстие, струя жидкости затем расширяется, заполняя все сечение. Сжатие струи отсутствует в коноидальном насадке, форма которого очерчена по форме вытекающей струи.

Наличие вакуума внутри насадка, присоединенного к отверстию, способствует дополнительному подсосу жидкости и увеличению пропускной способности отверстия, т.к. для насадка действующий напор увеличивается. Он складывается из пьезометрического (**H**) и вакуумметрического ($\mathbf{H_{вак}}$) напоров. Для насадков величина вакуума составляет: цилиндрический ≈ **0,75H**; конический сходящийся ≈ **0,8H**; конический расходящийся ≈ **0,85H**.

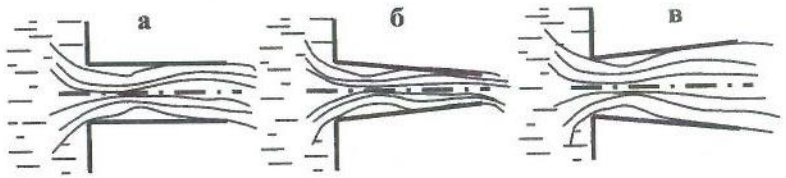


Рис.5.2. Истечение жидкости через насадки
а - внешний цилиндрический насадок, **б** - конический сходящийся насадок, **в** - конический расходящийся насадок

Особенности истечения жидкости через насадки – наличие вакуума - учитываются величиной коэффициентов скорости φ, сжатия ε и расхода μ (табл.5.1).

5.2. Выполнение лабораторной работы

5.2.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является экспериментальное изучение процесса истечения жидкости через малое отверстие в тонкой стенке и насадки при постоянном напоре с определением коэффициентов скорости, сжатия и расхода.

5.2.2. Описание лабораторной установки

Установка для проведения лабораторных работ (рис.5.3) по изучению истечения жидкости через отверстия и насадки состоит из металлического напорного бака **1**, на торцевой стенке которого имеются малое отверстие в тонкой стенке **2** и гидравлические насадки: внешний цилиндрический **3**, конический расходящийся **4** и конический сходящийся **5**. Краном **6** регулируется поступление воды в бак и поддерживается постоянный действующий напор **H** при проведении эксперимента. Напор **H** на уровне оси отверстия измеряется с помощью пьезометра **7**. Подвижным координатником **8** измеряются координаты (**x**, **y**) вытекающей струи. Расход жидкости определяется объемным методом по установленному объему и времени заполнения его в подвижном мерном баке **9**. Кран **10** служит для выпуска воздуха из бака **1** при заполнении его водой. При помощи клапанов **11** осуществляется открытие отверстия и насадков. Для гидравлических насадков величина вакуума определяется с помощью U -образного вакуумметра **12**.

5.2.3. Порядок выполнения лабораторной работы

1. С помощью штангенциркуля проводятся замеры геометрических размеров отверстия и насадков, а именно, внутреннего диаметра. Линейкой замеряется координата *y* на подвижном координатнике **8**. Это расстояние от оси отверстия до натянутой нити в координатнике.

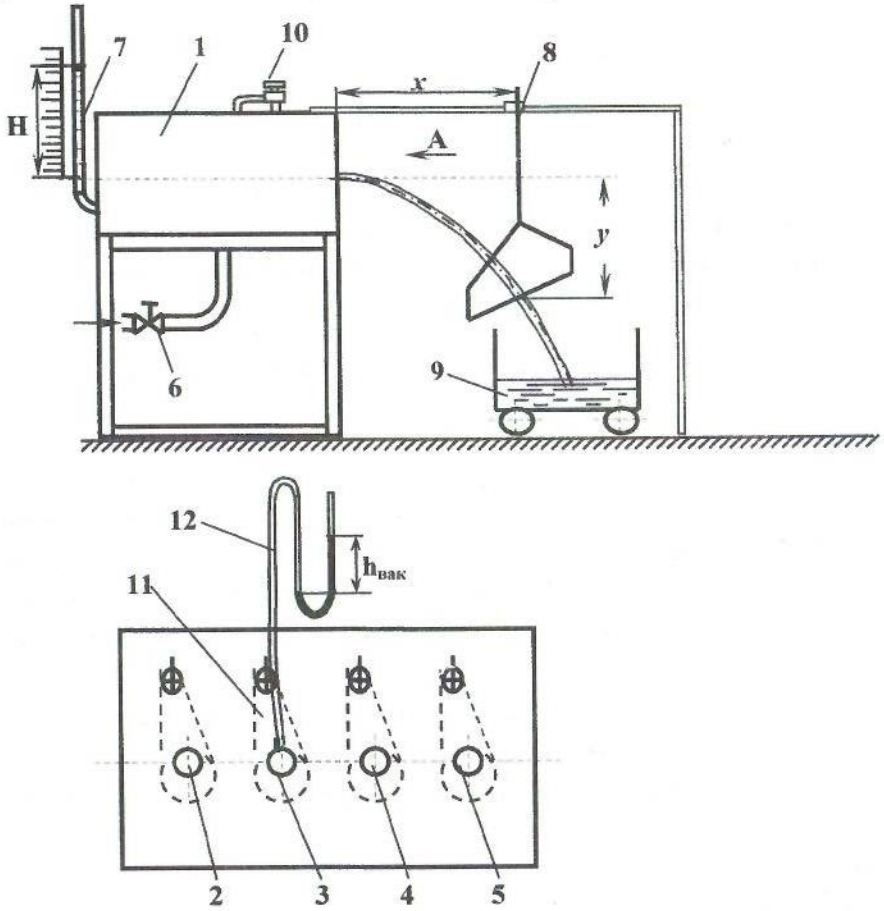


Рис.5.3. Схема установки для изучения истечения жидкости через отверстие и насадки

Данные вносятся в табл. 5.2 для отверстия или в табл. 5.3 для насадков.

2. Открывается регулировочный кран **6.** Заполняется напорный бак **1** и устанавливается некоторый действующий напор **H**. При заполнении напорного бака установка освобождается от воздуха путем открытия крана **10**.

3. Поворотом клапана **11** открывается малое отверстие или один из насадков в зависимости от цели эксперимента.

4. При помощи регулировочного вентиля **6** устанавливается постоянный действующий напор **H**, который фиксируется по пьезометру (**7**).

5. Производится визуальное наблюдение за характером истечения жидкости, видом вытекающей струи, ее траекторией. Для малого отверстия наблюдается явление инверсии струи.

6. Одновременно измеряются и записываются следующие параметры: действующий напор **H** по пьезометру **7**; время **t** наполнения установленного объема жидкости в подвижном баке, принимающем вытекающую струю; координата ***x*** траектории вытекающей струи, при этом натянутая нить координатника **8** должна быть установлена по оси струи; диаметр струи в сжатом сечении $d_{сж}$ на расстоянии **0,5d** от входа в отверстие.

Все данные вносятся в соответствующие таблицы: табл. 5.2 или табл. 5.3.

7. При истечении жидкости через насадки замеряется величина вакуума с помощью U - образного вакуумметра **9**, заполненного жидкостью, плотность которой больше плотности воды, например, четыреххлористым углеродом CCl_4 или ртутью.

В табл. 5.3 вносится величина $h_{вак}$,, равная высоте столба жидкости в U - образном манометре и соответствующая вакууму.

При проведении опытов с насадками наличие вакуума можно наглядно продемонстрировать следующим образом: на расстоянии **0,5d** в месте сжатия струи и возникновения вакуума выводится штуцер, на который одевается резиновая трубка с зажимом, трубка опускается в сосуд с подкрашенной жидкостью. При открытии зажима подкрашенная жидкость вследствие вакуума всасывается в насадок, и струя, выходящая из насадка, окрашивается.

8. В конце опыта закрывается клапан **11**, а по окончании всех опытов закрывается кран **6** на трубе, подающей воду в напорный бак **1**. Затем выпускается вода из напорного бака.

Таблица 5.2

Истечение жидкости через малое отверстие

Наименование параметров	№ опыта				
	1	2	3	4	5
1. Диаметр отверстия **d** ,см					
2. Площадь живого сечения **ω**, $см^2$					
3. Действующий напор **H**, см					
4. Объем воды в мерной емкости **W**, $см^3$					
5. Время наполнения принятого объема **t**, с					
6. Объемный расход воды **Q**, $см^3/с$					
7. Коэффициент расхода **μ**					
8. Координата траектории струи **x**, см					
9. Координата траектории струи **y**, см					
10. Коэффициент скорости **φ**					
11. Коэффициент сжатия **ε**					
12. Диаметр струи в сжатом сечении $d_{сж}$, см					
13. Опытное значение коэффициента сжатия $ε_{оп}$					

Таблица 5.3

Истечение жидкости через гидравлические насадки

Наименование параметров	Цилиндрический насадок		Конический расходящийся насадок		Конический сходящийся насадок	
	Опыты		Опыты		Опыты	
	1	2	1	2	1	2
1. Диаметр насадка **d** ,см						
2. Площадь живого сечения **ω**, $см^2$						
3. Действующий напор **H**, см						
4. Показание вакуометра $h_{вак}$, см						
5. Вакуумметрический напор $H_{вак}$, см вод. ст.						
6. Расчетный напор $H_{расч}=H+H_{вак}$, см						
7. Объем воды в мерной емкости **W**, $см^3$						
8. Время наполнения принятого объема **t**, с						
9. Объемный расход воды **Q**, $см^3/с$						
10. Коэффициент расхода **μ**						
11. Координата траектории струи **x**, см						
12. Координата траектории струи **y**, см						
13. Коэффициент скорости **φ**						
14. Коэффициент сжатия **ε**						

5.2.4. Обработка экспериментальных данных

Для удобства вычислений линейную размерность следует принять в см, поэтому ускорение $g = 981$ см/с^2.

До начала обработки экспериментальных данных следует проверить, чтобы в табл.5.2 или табл. 5.3 были внесены следующие величины, полученные в результате измерений:

d - диаметр отверстия или насадков;

H - действующий напор;

W - объем воды в мерной емкости;

t – время заполнения фиксированного объема воды;

x и ***y*** - координаты вытекающей струи;

$\mathbf{d_{сж}}$ - диаметр сжатого сечения струи для малого отверстия;

$\mathbf{h_{вак}}$ - показание вакуумметра для насадков.

При обработке опытных данных следует вычислить следующие параметры и внести в соответствующую таблицу.

1. Площадь живого сечения $\omega = \pi d^2 / 4$.
2. Объемный расход воды $Q = W / t$.
3. Коэффициент расхода $\mu = Q / \omega\sqrt{2gH}$. (5.6)
4. Коэффициент скорости, определяется по формуле 5.2

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_{отв}}}.$$

5. Значение коэффициента сжатия ε определяется, исходя из величины коэффициентов расхода μ и скорости φ согласно формуле 5.5:

$$\varepsilon = \mu / \varphi.$$

6. Опытное значение коэффициента сжатия ($\varepsilon_{оп}$) можно получить путём геометрических замеров диаметра отверстия и диаметра струи в сжатом сечении и рассчитать по формуле 5.3: $\varepsilon = d_{сж}^2 / d^2$.

7. Величину вакуумметрического напора в гидравлических насадках рассчитываем в см вод. ст., исходя из следующих рассуждений. Вакуумметрическое давление внутри насадка определяется по зависимости:

$$p_{вак} = \rho_ж g h_{вак}, \quad (5.7)$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости в приборе (уточняется у преподавателя);

$\mathbf{h_{вак}}$- показание U-образного вакуумметра.

Вакуумметрический напор внутри насадка в см вод.ст. найдется из соотношения

$$H_{вак}\,(\text{см вод.ст.}) = p_{вак}/\rho_{воды} g = \rho_ж h_{вак} / \rho_{воды}. \quad (5.8)$$

Показание $\mathbf{h_{вак}}$ U-образного манометра следует снимать в см.

Закончив обработку экспериментальных данных, следует проанализировать полученные величины коэффициентов расхода, скорости и сжатия и сравнить их с табличными значениями, приведенными в табл. 5.1.

5.2.5. Вопросы для самопроверки и составления вывода по работе

1. Какое отверстие называется малым отверстием в тонкой стенке?
2. Какое явление называется инверсией струи?
3. Что такое гидравлический насадок? Классификация насадков.
4. Приведите расчетную формулу пропускной способности **Q**, (расхода) для отверстий и насадков.
5. Каковы особенности истечения жидкости через насадки?
6. Как влияет возникновение вакуума в насадке на величину расхода?
7. Какими коэффициентами характеризуется процесс истечения через отверстия и насадки? От чего зависит величина этих коэффициентов?
8. Опишите принцип действия лабораторной установки для изучения процесса истечения жидкости через отверстия и насадки.
9. Какие показания снимаются в процессе проведения лабораторной работы?

10. Какие параметры и коэффициенты рассчитываются, исходя из опытных данных?

11. Приведите примеры области применения отверстий и насадков.

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и содержит следующее:

- краткие теоретические положения, обязательно включающие используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их размерностями;
- схему установки с названиями входящих в нее элементов;
- выводы по работе, в которых должны быть сформулированы цели и задачи эксперимента, описан процесс истечения жидкости через отверстие и особенности истечения через насадки. Провести сравнение опытных и табличных значений характеристических коэффициентов скорости, сжатия и расхода, дана оценка проведенным опытам.

Лабораторная работа № 6

Определение эквивалентной шероховатости трубопровода

6.1. Теоретические положения

При движении жидкости в напорном трубопроводе потери напора по длине трубы постоянного сечения зависят от геометрических размеров трубопровода l, d, скоростного напора $v^2/(2g)$ и коэффициента гидравлического трения λ и рассчитываются по формуле Дарси-Вейсбаха:.

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Как известно (см. лабораторную работу №3), коэффициент Дарси λ в общем случае является функцией числа Рейнольдса и шероховатости $\lambda = f(Re, \Delta/d)$. Движение воды в технических трубопроводах чаще всего происходит при турбулентном режиме, так как ламинарный режим в них весьма неустойчив. При турбулентном режиме определение коэффициента Дарси обусловлено областью (зоной) сопротивления. Понятие области сопротивления связано с шероховатостью и толщиной образующегося у стенки трубопровода пограничного слоя (или подслоя), называемого вязким (ранее – ламинарным) пристенным слоем, толщину которого можно оценить по формуле (3.5)

$$\delta = \frac{32{,}5d}{Re\sqrt{\lambda}}.$$

Данный слой характеризуется малыми скоростями движения жидкости, и его толщина влияет на характер трения при турбулентном режиме и на общий закон сопротивления (3.3)

$$I = \frac{h_l}{l} = av^n,$$

в связи с которым выделено 3 зоны сопротивления турбулентного режима.

Область гидравлически гладких труб. Это такое условие движения жидкости, когда толщина пограничного слоя больше высоты выступов абсолютной шероховатости, и она не влияет на величину коэффициента Дарси.

Согласно формуле (3.5) с увеличением числа **Re** толщина пограничного слоя δ уменьшается, происходит разрыв его выступами шероховатости. На величину коэффициента λ начинает влиять как число Рейнольдса, так и шероховатость трубы. Течение вдоль ***гидравлически шероховатых стенок,*** когда с возрастанием числа Рейнольдса толщина вязкого слоя уменьшается и при достижении определенного значения ($\mathbf{Re = 20\,d / \Delta_э}$), становится меньше абсолютной шероховатости, делится на 2 зоны.

Область доквадратичного сопротивления. Исследования показали, что потери по длине в этом случае пропорциональны скорости в степени $\mathbf{1{,}75<n<2{,}0}$. Значения коэффициента λ для технических труб с неравномерной шероховатостью определяются по формуле А.Д. Альтшуля

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d}\right)^{0.25}. \qquad (3.9)$$

Область квадратичного сопротивления. Для неравномерной шероховатости в технических трубах предельное значение числа Рейнольдса, при котором начинает действовать квадратичный закон сопротивления, можно с точностью до 5% принять $\mathbf{Re = 500d / \Delta_э}$. В этом случае коэффициент сопротивления является функцией только шероховатости и не зависит от числа **Re** . Для зоны квадратичного сопротивления существует ряд формул для расчёта коэффициента λ, например, Б.Л. Шифринсона (3.12)

$$\lambda = 0{,}11(\Delta_э/d)^{0{,}25}.$$

Обычно естественная действительная неравномерная шероховатость имеет многообразные нерегулярные формы (рис.3.1, а, б) и установить ее среднее значение невозможно. Поэтому параметр шероховатости вводится как условная величина - ***гидравлически эквивалентная шероховатость*** $\Delta_э$ (рис.3.1 в). Это - равномерно зернистая условная шероховатость, которая определяется путем измерения сопротивления. Она зависит:

- от материала и способа производства труб (например, чугунные трубы изготовленные центробежным литьем более гладкие, чем сварные); трубы, изготовленные одним и тем же способом, имеют одинаковую эквивалентную шероховатость независимо от диаметра;
- от свойства жидкости, протекающей по трубе; влияние жидкости на внутреннюю поверхность трубы может проявиться в виде коррозии стенок, образовании наростов и осадка;
- от продолжительности эксплуатации труб.

Рекомендации по величине $\Delta_э$ можно найти в справочной литературе (например, И.Е. Идельчик "Справочник по гидравлическим сопротивлениям) для различного вида труб, как металлических – стальных, чугунных, так и бетонных, асбестоцементных, деревянных, фанерных, стеклянных и т.д. Весьма важно уметь определять $\Delta_э$ опытным путем.

6.2 Выполнение лабораторной работы

6.2.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является определение эквивалентной шероховатости трубы.

Так как лабораторная работа выполняется на установке, схема которой представлена на рис. 3.3, и для расчета $\Delta_э$ необходимо определить коэффициент Дарси, то описание лабораторной установки и выполнение

эксперимента следует смотреть в разделах **3.2.2** и **3.2.3**. Исходные, экспериментальные и расчетные данные заносятся в таблицу 6.1.

6.2.2.Обработка результатов лабораторной работы.

1. Рассчитывается площадь живого сечения трубы:

$$\omega = \pi d^2 / 4.$$

2. В соответствии с температурой по табл. 2.2.выбирается кинематический коэффициент вязкости воды ν.

3. Находится величина расхода воды в каждом опыте:

$$Q = W / t.$$

4. Определяется средняя скорость воды в каждом опыте:

$$v = Q / \omega.$$

5. Вычисляются потери напора:

$$h_l = p_1/(\rho g) - p_2/(\rho g).$$

6. Рассчитывается опытное значение коэффициента гидравлического трения:

$$\lambda_{оп} = \frac{2gdh_l}{lv^2}.$$

7. Для каждого опыта вычисляется число Рейнольдса **Re**

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$

8. Вычисляется значение эквивалентной шероховатости Δ, по зависимости, полученной из формулы Альтшуля:

$$\Delta_э = d\left[\left(\frac{\lambda}{0{,}11}\right)^4 - \frac{68}{Re}\right]. \qquad (6.1)$$

9. Определяется по формуле (3.5) толщина пристенного вязкого слоя

$$\delta = \frac{32{,}5d}{Re\sqrt{\lambda}}.$$

10. По соотношению $\Delta_э$ и δ выясняется область сопротивления турбулентного режима.

6.2.3. Вопросы для самопроверки и составления выводов по работе

1. Какие потери напора называются потерями по длине? Расчётная формула потерь по длине.

2. Функцией каких параметров является коэффициент сопротивления **λ**?

3. Что лежит в основе методики выбора расчётной зависимости коэффициента **λ**?

4. Какие области сопротивления различают при турбулентном режиме?

5. От чего зависит коэффициент гидравлического трения в каждой области сопротивления?

6. Каковы расчётные формулы коэффициента **λ** для каждой области сопротивления при турбулентном режиме?

7. Как экспериментально определяются потери напора по длине? Из каких частей состоит лабораторная установка для определения потерь по длине и эквивалентной шероховатости труб?

8. Как определяется расход воды в системе?

9. Как рассчитывается скорость воды в трубе

10. С какой целью определяется температура воды?

11. Как определяется режим движения воды? Каков он в опытах?

12. Как рассчитывается эквивалентная шероховатость?

13. Как определяется толщина вязкого слоя?

14. Какое заключение можно сделать из сравнения полученной эквивалентной шероховатости и толщины пограничного слоя?

Таблица 6.1

Определение эквивалентной шероховатости

Наименование параметров	Номер опыта					
	1	2	3	4	5	6
1. Диаметр трубы **d** ,см						
2. Длина рабочего участка *l*, см						
3. Площадь живого сечения **ω**, см^2						
4. Температура воды **T**, °C						
5. Кинематический коэффициент вязкости воды **ν**, см^2/с						
6. Объём воды в мерном баке **W**,см^3						
7. Время заполнения объёма **t**, с						
8. Расход воды **Q**, см^3/с						
9. Средняя скорость воды **v**, см/с						
10. Показание первого пьезометра $p_1/(\rho g)$, см						
11. Показание второго пьезометра $p_2/(\rho g)$, см						
12. Потери напора h_l, см						
13. Опытное значение коэффициента $\lambda_{оп}$						
14. Число Рейнольдса **Re**						
15. Эквивалентная шероховатость $\Delta_э$, см						
17. Толщина вязкого слоя δ, см						
18. Область сопротивления						

Состав отчета

Отчет составляется на стандартных листах формата А4 и включает в себя:

- краткие теоретические положения, где обязательно приводятся используемые расчетные формулы с расшифровкой обозначений и их размерностями;
- схему установки с названиями входящих в нее элементов;
- выводы по работе, в которых даются ответы на следующие вопросы: 11,12, 13, 14.

Список использованной литературы

1. ***Альтшуль А.Д.*** Гидравлические сопротивления. М.: Недра,1970.
2. ***Гейер В.Г., Дулин В.С.*** и др. Гидравлика и гидропривод. - М.: Недра, 1990.
3. ***Константинов Н.М.*** и др. Гидравлика, гидрология, гидрометрия. - М.: Высшая школа, 1987.
4. ***Идельчик И.Е.*** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.:Машиностроение, 1992.
5. ***Лабораторный курс гидравлики, насосов и гидропередач.*** / под ред.С.С. Руднева и Л.Г. Подвидза. – М.: Машинотроение, 1984.
6. ***Чугаев Р.Р.*** Гидравлика (техническая механика жидкости). М.: Энергия, 1986

Татьяна Павловна Бебенина
Светлана Ивановна Часс
Наталья Владимировна Савинова

Лабораторный практикум по гидродинамике

Корректура кафедры технической механики
Подписано в печать 15.03.2004 г.
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 4,4. Уч.изд. л.3,89. Тираж 350 экз. Заказ №46

Издательство УГГГА
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.В.04 ГИДРОМЕХАНИКА

Специальность –
21.05.04 Горное дело
Специализация –
Шахтное и подземное строительство
форма обучения: очная, заочная
год набора: 2021

Авторы: Двинин Л.А., доцент, к.т.н., Двинина Л. Б., доцент, к.т.н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Технической механики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Таугер В.М.	Осипов П.А..
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 09.10.2020	Протокол № 2 от 14.10.2020
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2021

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки 25.05.04 Горное дело, и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «ГИДРОМЕХАНИКА».

Форма контроля самостоятельной работы студентов – проверка на практическом занятии, контрольные работы, зачет.

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа

Расчетно-графические работы выполняются по методической литературе, изданной кафедрой:

Часс С. И. [Текст]: Гидромеханика. Сборник задач. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. – 145 с.

Часс С. И. [Текст]: Гидравлика. Гидромеханика. Сборник задач и контрольных заданий. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. – 137 с.

Номера вариантов берутся по номеру в списке группы или назначаются преподавателем, номера заданий берутся по таблице.

Методические рекомендации для решения задач и примеры для самостоятельного решения приведены в учебных пособиях:

Бебенина Т.П: Гидромеханика: Конспект лекций. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 224 с.

Часс С. И.: Гидравлика, гидромеханика. Механика жидкости и газа. Учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. – 215 с.

Тематика расчетно-графических работ:

1. Определение давления в точке жидкости, приборы для измерения давления. Гидростатический закон распределения давления, закон Паскаля.
2. Аналитический метод и графоаналитический метод определения силы на плоские поверхности.
3. Определение силы давления на криволинейные поверхности, закон Архимеда.
4. Ламинарный и турбулентный режимы движения, гидравлические сопротивления, расчет простых коротких трубопроводов.
5. Элементы расчетов сложных трубопроводных систем.

Для подготовки к практическим занятиям преподаватель может привлекать дополнительную литературу, а также раздаточный материал.

Подготовка к контрольной работе проводится студентом самостоятельно в рамках часов, выделенных на самостоятельную работу в учебном плане.

Контрольная работа № 1

1.Дать понятие вязкости жидкости. Представить коэффициенты, характеризующие вязкость жидкости, единицы измерения коэффициентов. Записать закон Ньютона.

2.Представить давление p=720 мм рт. ст. в единицах измерения системы СИ.

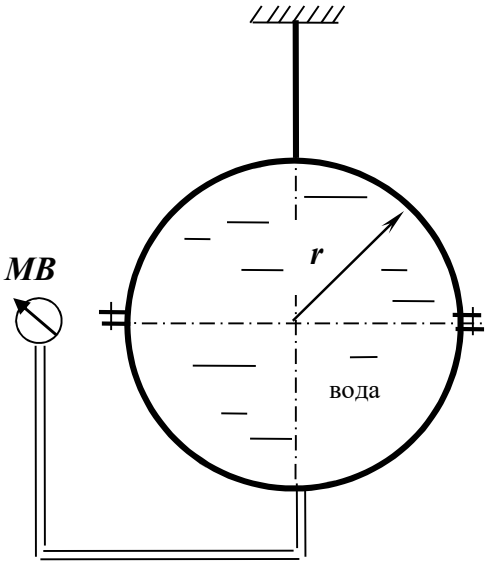
3.Определить какое давление – манометрическое или вакуум – показывает мановакуумметр, если абсолютное давление в измеряемой области равно 68 кПа. Величину давления представить в барах.

4.Определить давление в резервуаре, заполненном водой, на глубине h = 1,2 м, если избыточное давление на поверхности жидкости $p_{изб}$=62 кПа.

5.Сформулировать закон Архимеда.

Задача

Шаровой сосуд радиусом r = 0,4 м, заполненный водой, висит на тяге, прикрепленной к его верхней половине. Найти давление в центре сосуда (показание пружинного мановакуумметра ***МВ***), при котором нижнюю половину сосуда, имеющую силу тяжести G =1500 Н, можно не закреплять. Каким должно быть показание прибора, если силу тяжести не учитывать?



Контрольная работа № 2

1.Записать формулу связи коэффициентов вязкости: динамического μ и кинематического ν.

2.Представить давление $\boldsymbol{p}$ = 1,2 ат в единицах измерения системы СИ.

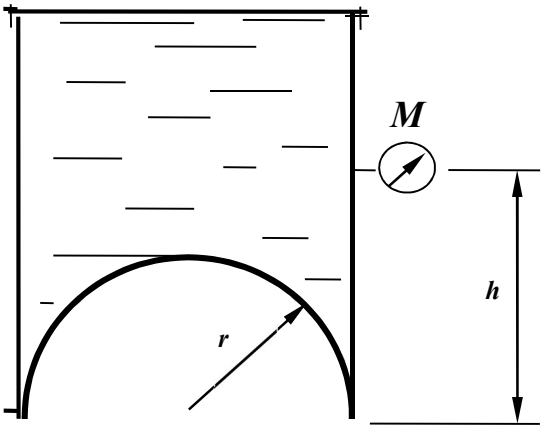
3.Определить абсолютное давление в резервуаре, заполненном воздухом, если показание вакуумметра, установленного на резервуаре, равно $\boldsymbol{p}_{вак}$=0,6 ат.

4.Определить каким будет показание манометра (в бар), установленного на глубине $\boldsymbol{h}$ =1,2 м открытого резервуара, заполненного бензином. Плотность бензина $\rho_{б}$= 700 кг/м^3.

5.Записать дифференциальные уравнения равновесия жидкости.

Задача

Определить силу давления воды на полусферическое дно резервуара радиуса $\boldsymbol{r}$ = 1 м, если показание манометра $\boldsymbol{M}$, установленного на расстоянии $\boldsymbol{h}$ = 1,3 м, равняется $\boldsymbol{p}_{ман}$= 0,2 бар.



Контрольная работа № 3.

1.Дать понятие физического свойства жидкости ***сжимаемость.***
Привести формулу коэффициента объемного сжатия.

2.Представить давление p = 196 кПа в атмосферах технических (ат).

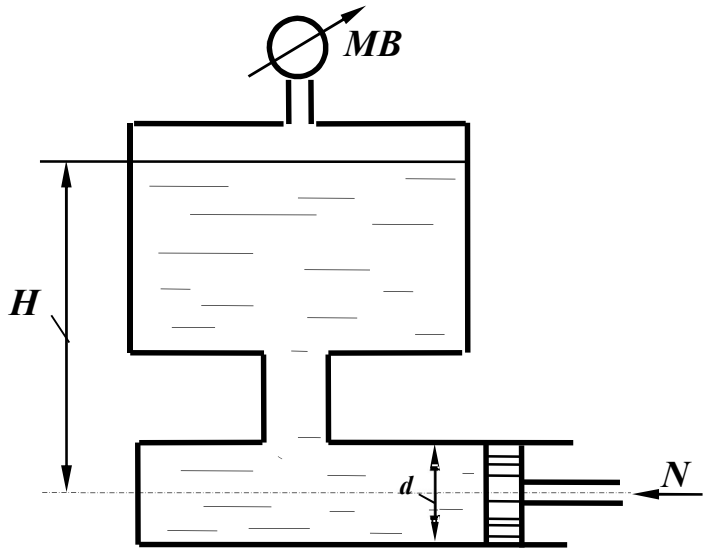
3.Манометрическое давление в измеряемой области равно $p_{ман}$ = 32 кПа. Записать величину абсолютного давления в области измерения.

4.Избыточное давление на поверхности масла в закрытом резервуаре равно $p_{изб}$= 0,13 ат. На какой глубине h установлен манометр, если его показание равно $p_{ман}$= 0,31 ат; плотность масла $\rho_м$= 900 кг/м^3.

5.Записать гидростатический закон распределения давления.

Задача

Определить усилие N, которое надо приложить к штоку поршня для удержания его на месте, если показание мановакуумметра $p_{мв}$= 0,5 ати, диаметр штока d = 100 мм, высота уровня масла над осью штока H = 1,5 м, плотность масла $\rho_м$ = 800 кг/м^3.



Контрольная работа № 4

1.Дать понятие физического явления ***кавитация***.
2.Представить давление $\boldsymbol{p}$ = 500 мм рт.ст. в единицах измерения системы СИ.

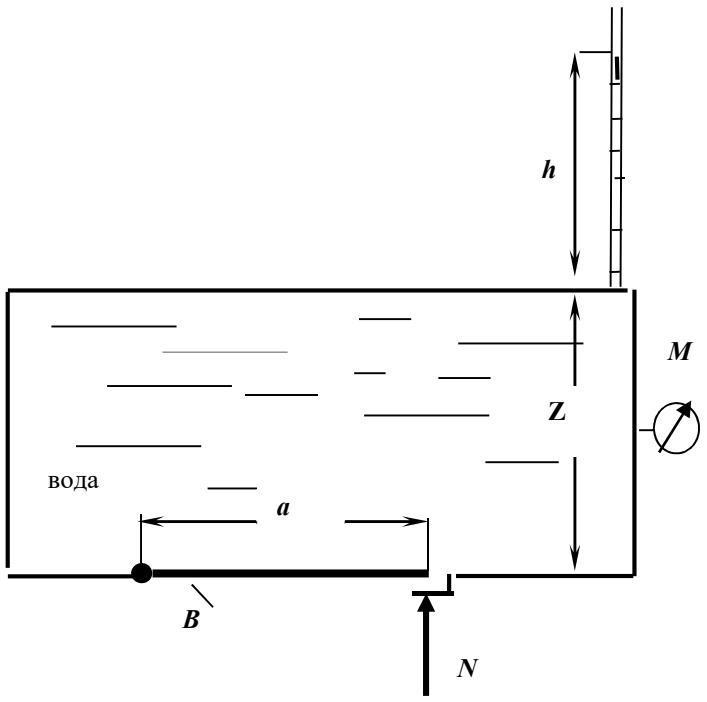
3.Вакуумметрическое давление в измеряемой области равно $\boldsymbol{p}_{вак}$=38 кПа, записать величину абсолютного давления в области измерения.

4.Определить, каким должно быть давление на поверхности масла закрытого резервуара, если показание манометра на глубине $\boldsymbol{h}$ = 0,8 м равно $\boldsymbol{p}_{ман}$= 0,12 ат. Плотность масла принять равной $\rho_м$ =900 кг/м^3.

5.Сформулировать закон Паскаля.

Задача

Определить показание манометра ***M*** в центре боковой стенки резервуара с водой, а также усилие ***N***, приложенное к запорному устройству плоской квадратной крышки ***B*** при следующих данных: ***Z*** = 3 м; ***h*** = 2 м; ***a*** = 1 м.



Контрольная работа № 5

1.Дать понятие гидростатического давления. Свойства гидростатического давления. Единицы измерения давления в системе СИ.

2.Представить давление p = 200 мм рт. ст. в Па.

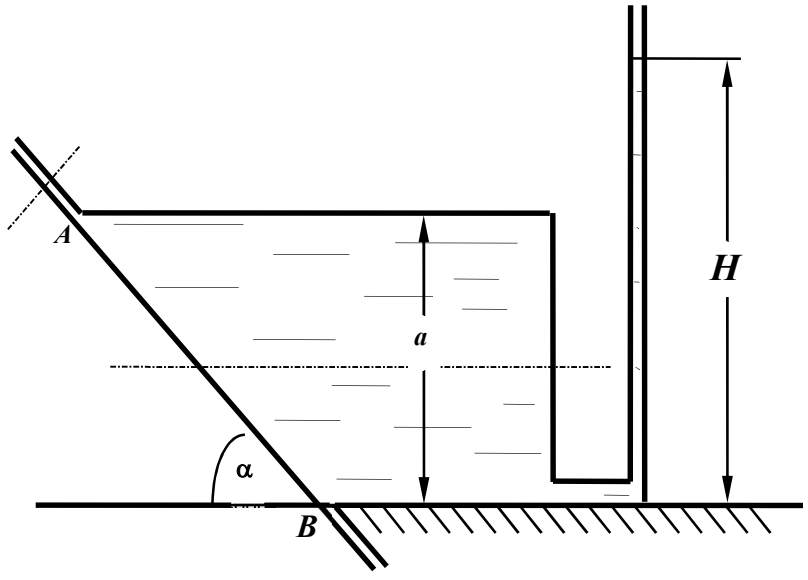
3.Определить, какое давление, манометрическое или вакуум, показывает мановакуумметр и его величину, если абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$= 0,8 ат.

4.Определить, каким будет показание мановакуумметра на глубине h = 2,2 м закрытого резервуара, заполненного водой, если на поверхности жидкости действует вакуумметрическое давление $p_{вак}$= 0,1 ат.

5.Дать определение свойства жидкости ***вязкость***.

Задача

Определить силу давления на крышку маслобака AB, если показание пьезометра H = 400 мм, угол наклона крышки α = 45°. В сечении бак имеет форму квадрата со стороной a = 200 мм. Плотность масла $\rho_м$ = 900 кг/м^3.



Контрольная работа № 6

1. Дать понятие плоскости уровня, представить уравнение плоскости уровня.

2. Представить перевод давления p =1,2 ат в м вод.ст., в Па.

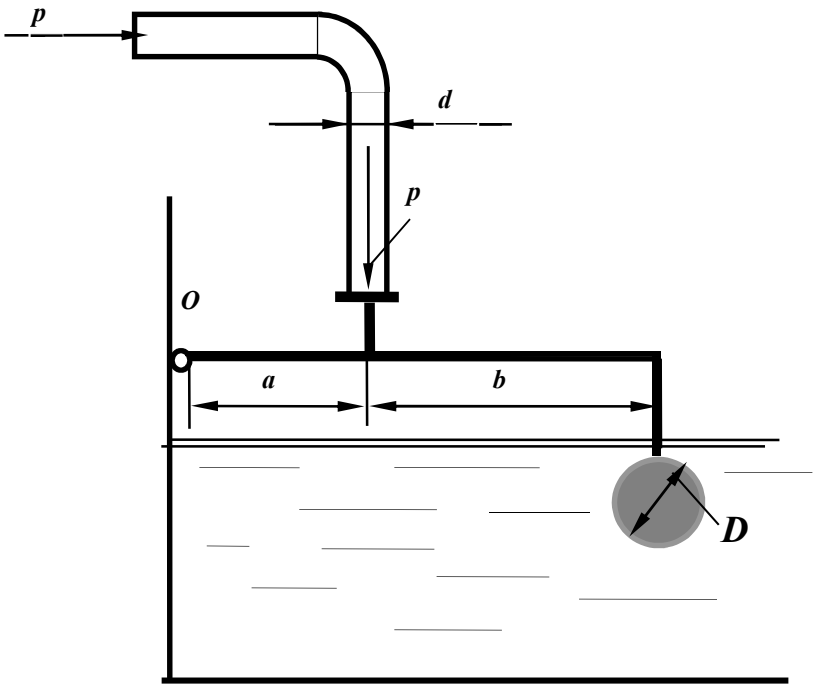
3. Дать понятие абсолютного давления. Записать абсолютное давление при манометрическом давлении $p_{ман}$= 32 кПа.

4. Показание манометра на определенной глубине в открытом резервуаре с водой равно $p_{ман}$=0,14 ат. Определить, как изменится показание манометра на той же глубине, если резервуар заполнить маслом плотностью $\rho_м$= 800 кг/м^3.

5. Нарисовать схему пьезометра для измерения абсолютного давления.

Задача

Вода, подаваемая под давлением p = 2,5 ати по трубе d = 150 мм, заполняет резервуар. Определить минимально необходимый диаметр D шарообразного поплавка, обеспечивающий автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если: a = 100 мм; b = 500 мм. Собственным весом рычага, клапана и поплавка пренебречь



Контрольная работа № 7

1. Записать основное уравнение гидростатики, пояснить все входящие в него параметры.

2. Представить давление $\boldsymbol{p}$ = 1,6 ат в единицах измерения системы СИ.

3. Дать понятие абсолютного давления. Записать величину абсолютного давления при вакуумметрическом давлении $\boldsymbol{p}_{вак}$= 38 кПа.

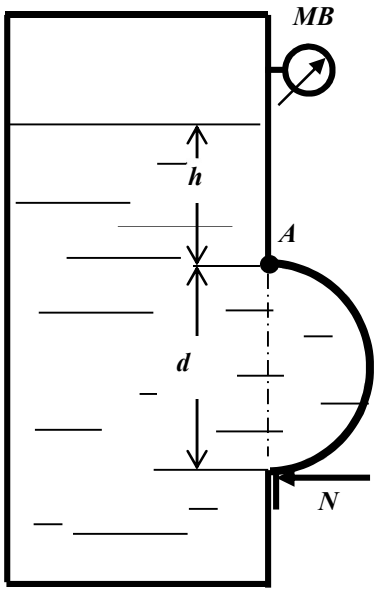
4. Показание манометра на определенной глубине открытого резервуара, заполненного бензином плотностью $\rho_{бен}$= 700 кг/м^3, равно $\boldsymbol{p}_{ман}$= 0,12 ат. Как изменится показание манометра на той же глубине, если резервуар заполнить маслом плотностью $\rho_{мас}$= 900 кг/м^3.

5. По какой формуле следует определять силу давления жидкости на плоскую стенку, если на свободной поверхности жидкости действует абсолютное давление $\boldsymbol{p_0}$ больше атмосферного, а не смоченная сторона стенки находится под атмосферным давлением?

Задача

Закрытый резервуар заполнен дизельным топливом с плотностью ρ = 846 кг/м^3. В вертикальной стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие, закрытое полуцилиндрической крышкой. Она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси в точке ***A***. Пренебрегая силой тяжести крышки, определить усилие ***N***, которое нужно приложить к крышке, чтобы она не открывалась при следующих данных: $\boldsymbol{p_{MB}}$ = 11,4 кПа; ***d*** = 1 м; ***h*** = 1 м; ***b*** =1,2 м.

Размер ***b*** перпендикулярен плоскости чертежа.



Контрольная работа № 8

1.Записать гидростатический закон распределения давления. Дать определение геометрического и пьезометрического напоров.

2.Представить давление $\boldsymbol{p}$ =196 кПа в технических атмосферах (ат).

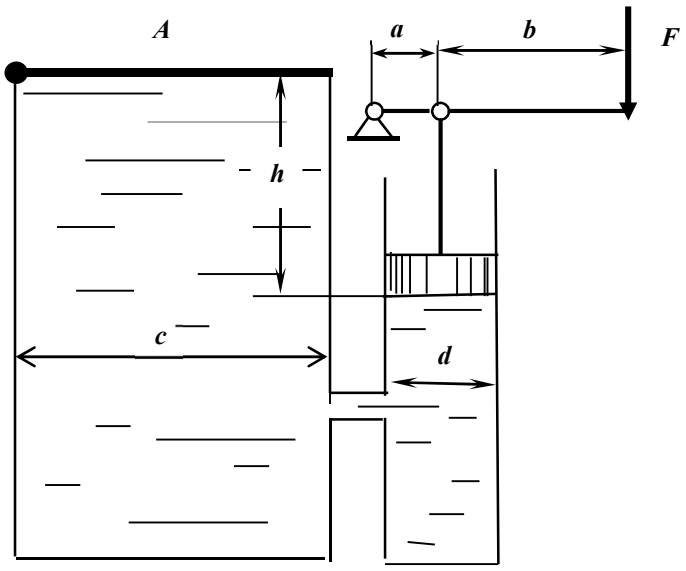
3.Определение абсолютного давления. Чему равно абсолютное давление при манометрическом давлении $\boldsymbol{p}_{ман}$= 62 кПа.

4.Показание манометра, установленного на закрытом резервуаре, заполненном маслом плотностью $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3, равно $\boldsymbol{p}_{ман}$= 0,12 ат. Рассчитать, какой должна быть высота уровня масла в пьезометре, выведенном на уровне установки манометра.

5.Дать понятие тела давления, на примерах пояснить различные тела давления.

Задача

К рычагу гидроусилителя приложена сила $\boldsymbol{F}$. Определить силу давления жидкости с плотностью ρ = 900 кг/м^3 на квадратную крышку $\boldsymbol{A}$ при следующих данных: $\boldsymbol{F}$ = 180 Н; $\boldsymbol{d}$ = 40 мм; $\boldsymbol{c}$ =1 м; $\boldsymbol{h}$ = 1 м; $\boldsymbol{a}$ = 10 мм; $\boldsymbol{b}$ =40 мм.



Контрольная работа № 9

1.Понятие гидростатического давления. Расчетная формула давления. Единицы измерения давления.

2.Представить давление, равное p = 12 м вод. ст., в единицах измерения системы СИ.

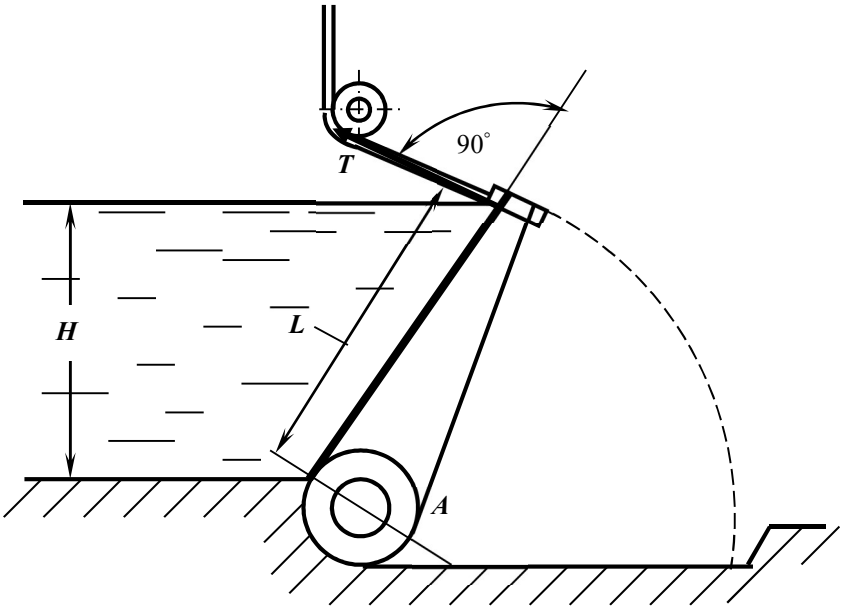
3.Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$= 0,38 ат. Установить, каким прибором следует пользоваться для измерения давления, рассчитать его величину в системе СИ.

4.Определить давление на поверхности жидкости закрытого резервуара, если показание ртутного U- образного манометра, установленного на глубине h = 1,5 м равно p = 100 мм рт.ст.

5.Какой зависимостью выражается гидростатический напор?

Задача

Плоский прямоугольный затвор с размерами L = 2,5 м и B = 10 м создает подпор воды H = 2,3 м. Затвор может вращаться относительно оси шарнира A. Определить силу натяжения троса T, удерживающую затвор в заданном положении. Размер B перпендикулярен плоскости чертежа



Контрольная работа № 10

1.Понятие физического свойства ***вязкость.*** Коэффициенты, характеризующие вязкость, единицы их измерения.

2.Перевести давление, равное 12 м вод.ст., в мм рт.ст.

3.Дать понятие абсолютного давления. Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание манометра в этой области равно $p_{ман}$= 0,8 ат.

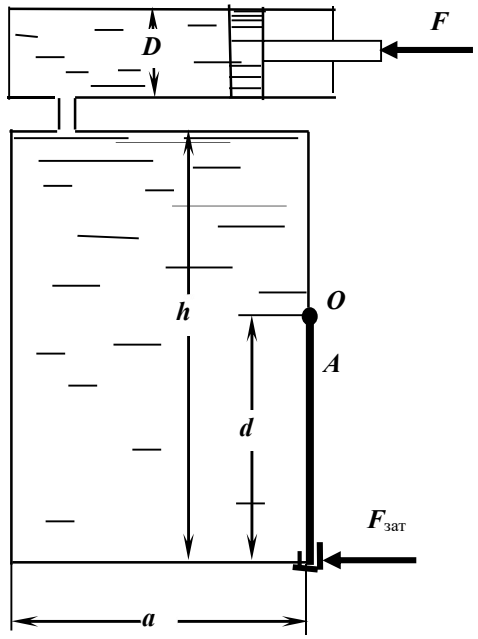
4.Вакуумметрическое давление на поверхности воды в закрытом резервуаре равно $p_{вак}$= 0,6 ат. Установить, каким прибором следует измерить давление на глубине h = 1,5 м и рассчитать его величину.

5.Как расположена линия действия силы избыточного (весового) давления жидкости, действующей на плоскую фигуру любой формы?

Задача

Жидкость в емкости «$a \cdot h$» нагревается до температуры 20ºС. Определить усилие F, которое требуется приложить к поршню расширительного цилиндра диаметром D, чтобы сохранился прежний объем жидкости?

Также найти усилие $F_{зат}$, на которое должен быть рассчитан затвор круглой крышки диаметром d при следующих данных: плотность ρ = 1000 кг/м^3, d =500 мм, D =260 мм, h = 2 м, a =1,5 м; β_T=150·10^{-6}1/град; β_p=0,5 ·10^{-10}Па$^{-1}$.



Контрольная работа № 11

1. Понятие ***плоскости уровня***. Уравнение плоскости уровня. Значение параметров, входящих в уравнение.

2. Представить перевод давления p = 100 мм рт. ст. в единицах измерения системы СИ.

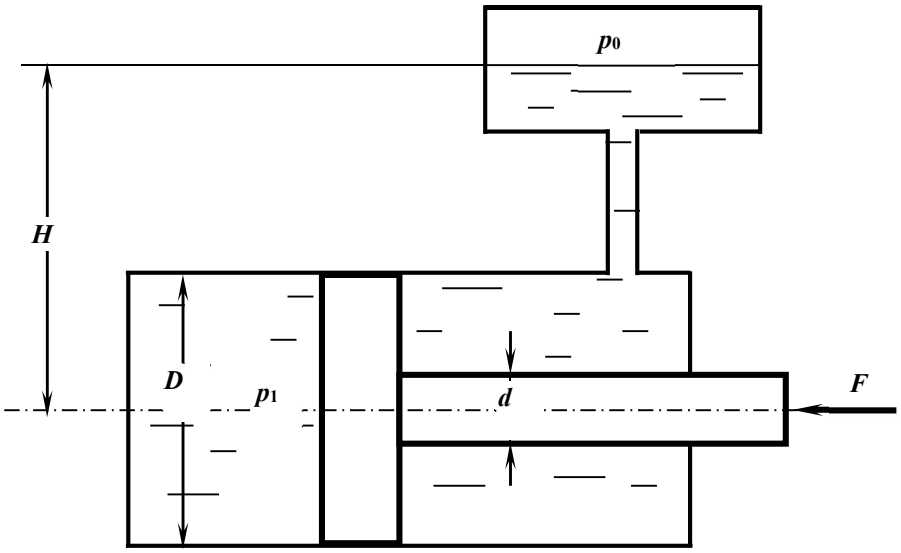
3. Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание вакуумметра в этой области $p_{вак}$= 0,6 ат.

4. Вакуумметрическое давление на поверхности закрытого резервуара равно $p_{вак}$= 0,1 ат. Установить каким прибором следует измерить давление на глубине h = 3,0 м и рассчитать его величину.

5. Размерность кинематического коэффициента вязкости в системе СИ

Задача

Определить давление жидкости p_1 в гидроцилиндре, необходимое для преодоления усилия на штоке F при следующих данных: F = 10 кН; диаметр поршня D =160 мм; диаметр штока d = 80 мм; p_0 = 20 кПа, H = 10 м; ρ =900 кг/м^3.



Контрольная работа № 12

1.Записать гидростатический закон распределения давления. Дать понятие геометрического и пьезометрического напоров.

2.Представить давление p = 68 кПа в м вод. ст.

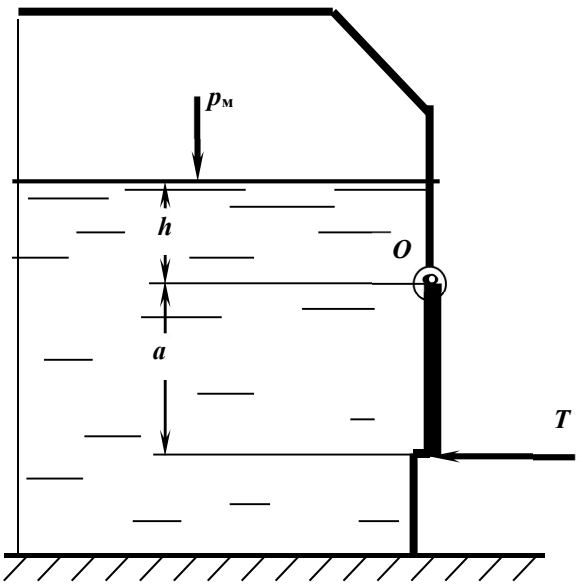
3.Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$ =198 кПа. Установить, каким прибором следует пользоваться для измерения давления и рассчитать показание этого прибора.

4.Показание манометра на глубине h =1,5 м закрытого резервуара, заполненного водой, равно $p_{ман}$= 0,121 ат. Определить, каким будет показание манометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен маслом. Плотность масла равна $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3.

5.Записать дифференциальные уравнения равновесия жидкости; пояснить параметры, входящие в уравнения.

Задача

Усилие T удерживает плоскую квадратную крышку со стороной a в закрытом положении. Определить предельно допустимое значение избыточного давления над уровнем жидкости $p_м$, при котором крышка остается в закрытом положении, при следующих данных: T = 2100 Н, a = 50 см, h = 2 м, ρ =1000 кг/м^3.



Контрольная работа № 13

1. Понятие физического свойства жидкости ***капиллярность***.

2. Представить давление $\boldsymbol{p}$ = 300 мм рт.ст. в единицах измерения системы СИ.

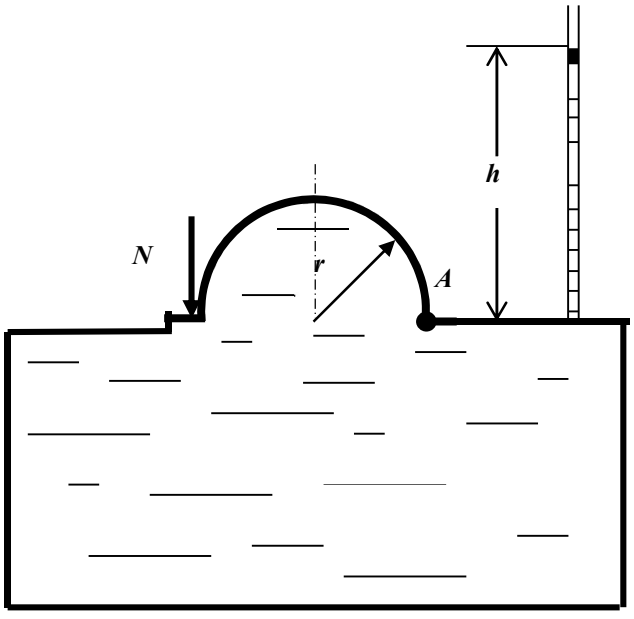
3. Показание манометра в измеряемой области равно $\boldsymbol{p}_{\text{ман}}$= 0,12 ат. Представить расчет абсолютного давления в этой области и его величину в системе СИ.

4. В закрытом резервуаре, заполненном бензином, показание манометра на некоторой глубине составляет $\boldsymbol{p}_{\text{ман}}$= 0,07 ат. Определить пьезометрическую высоту, соответствующую этому давлению: $\rho_б$=700 кг/м^3.

5. Каковы единица измерения ***динамической вязкости*** ?

Задача

Определить усилие $\boldsymbol{N}$, которое нужно приложить к цилиндрическому затвору, установленному на квадратном отверстии крышки резервуара с водой, при следующих данных: $\boldsymbol{h}$ = 1м, $\boldsymbol{r}$ = 0,2 м. Затвор поворачивается вокруг шарнира в точке $\boldsymbol{A}$.



Контрольная работа № 14

1. Представить ***основное уравнение гидростатики***, дать определение, пояснить значение входящих параметров.

2. Представить давление p = 730 мм рт.ст. в ат.

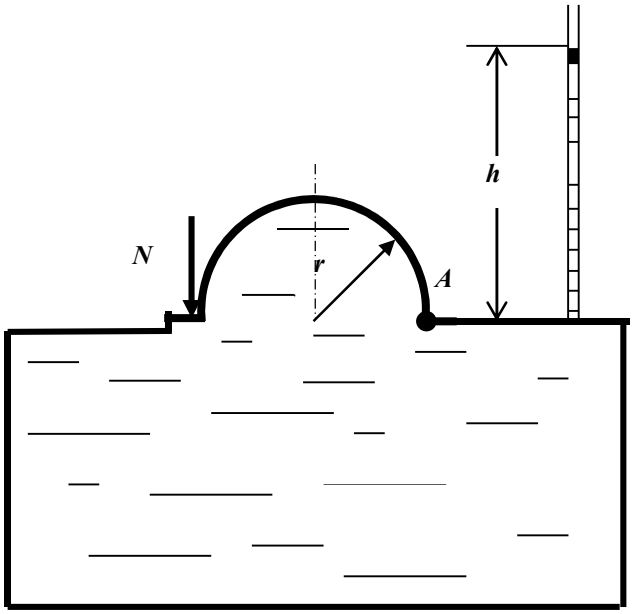
3. Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$= 68 кПа. Определить, каким будет показание мановакуумметра, установленного в этой области, и величину давления.

4. В закрытом резервуаре, заполненном маслом, показание манометра на определенной глубине составляет $p_{ман}$= 0,06 ат. Определить какой будет пьезометрическая высота (напор) на уровне установки манометра. Плотность масла принять $\rho_м$ = 800 кг/м^3.

5. Дать определение свойства жидкости ***сжимаемость.***

Задача

Запорное устройство полусферической крышки радиусом ***r*** рассчитано на усилие ***N***. Определить показание манометра в центре боковой стенки при максимально допустимом давлении в жидкости плотностью ρ = 900 кг/м^3: ***N*** = 90 кН, ***a*** =3 м, ***r*** =0,4 м.



Контрольная работа № 15

1.Записать уравнения Эйлера для равновесного состояния жидкости. Пояснить параметры, входящие в уравнение.

2.Показание манометра на глубине h =2,5 м закрытого резервуара, заполненного водой, равно $p_{ман}$= 0,32 ат. Определить, каким будет показание манометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен маслом. Плотность масла равна $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3.

3.Определить показание механического вакуумметра (в ат), установленного на воздушном резервуаре, если показание ртутного вакуумметра, присоединенного к тому же резервуару, составляет 0,2 м.

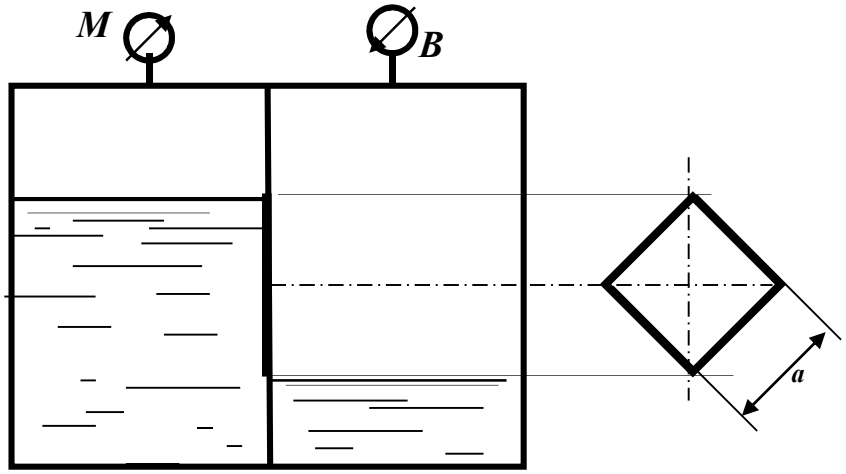
4.В чем физический смысл понятия ***гидростатического давления***.

5.Какие силы действуют в жидкости?

Задача

Замкнутый резервуар с нефтью (ρ =900 кг/м^3) разделен на две части плоской перегородкой, имеющей квадратное отверстие со стороной a = 1 м. Давление над нефтью в левой части резервуара определяется показанием манометра p_M= 0,15 ат, а в правой – показанием вакуумметра p_B= 0,2 ат.

Найти величину силы давления, действующей на крышку, закрывающую отверстие в перегородке, и точку ее приложения.



Контрольная работа № 16

1. Какое движение жидкости называется установившимся?

2. Определить диаметр трубы для пропуска воды с расходом Q = 2,0 л/с при скорости V= 1,0 м/с.

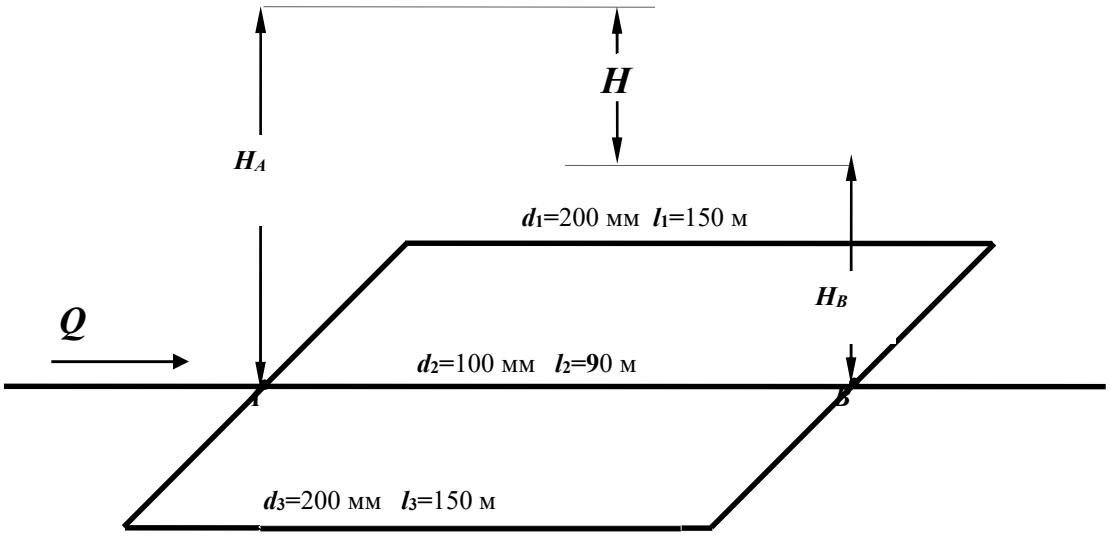
3. Рассчитать коэффициент сопротивления вентиля $\zeta_{вент}$, если потери напора в нем составляют $h_{вент}$= 0,25 м при скорости V= 0,5 м/с.

4. Записать уравнение Бернулли для целого потока реальной жидкости, представить диаграмму уравнения.

5. Определить режим движения жидкости в трубе d = 100 мм, шероховатостью Δ = 0,05 мм при скорости движения V = 0,21 м/с. Коэффициент кинематической вязкости жидкости ν = $0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с. Для турбулентного режима проверить область сопротивления.

Задача

Определить расход воды, подводимый к системе параллельно соединенных труб, если действующий напор H=10 м. Трубы стальные, новые. Местными потерями пренебречь.



Контрольная работа № 17

1.Какое движение жидкости называется равномерным?

2.Определить скорость движения воды в трубе диаметром d_1 = 50 мм, если при постоянном расходе скорость в трубе d_2= 100 мм равна V_2 = 1,0 м/с.

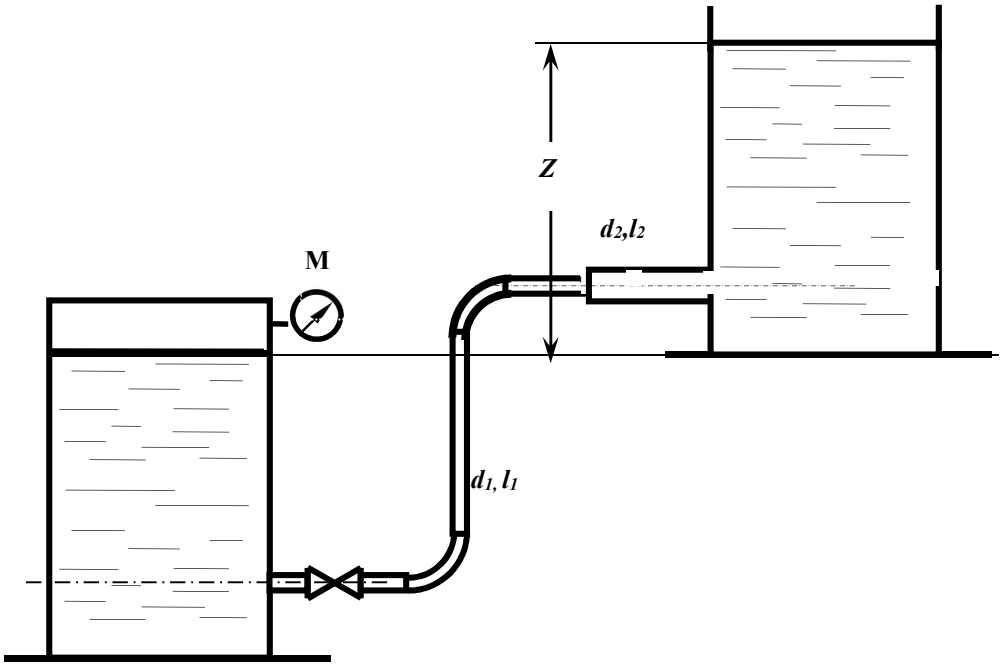
3.Геометрический смысл уравнения Бернулли для идеальной жидкости. Диаграмма уравнения.

4.Определить потери напора в пробковом кране $h_{кр}$, если коэффициент сопротивления крана $\zeta_{кр}$= 17,0, а скорость движения воды V = 1,2 м/с.

5.Определить потери напора при подаче воды по трубопроводу d=200 мм и длиной l=1500 м при скорости потока V=13,1 см/с и температуре 10^0С (ν=0,0131 см^2/с). Трубы стальные, новые (Δ=0,05мм).

Задача

Определить максимально возможную высоту наполнения верхнего резервуара Z из нижней емкости при расходе воды Q = 8 л/с по двум коротким трубам d_1= 100 мм, l_1= 40 м, d_2 = 150 м, l_2 = 60 м при показании манометра $p_м$ = 50 кПа; ν = 0,01 Ст; Δ = 0,1 мм; пробковый кран закрыт на 30°.



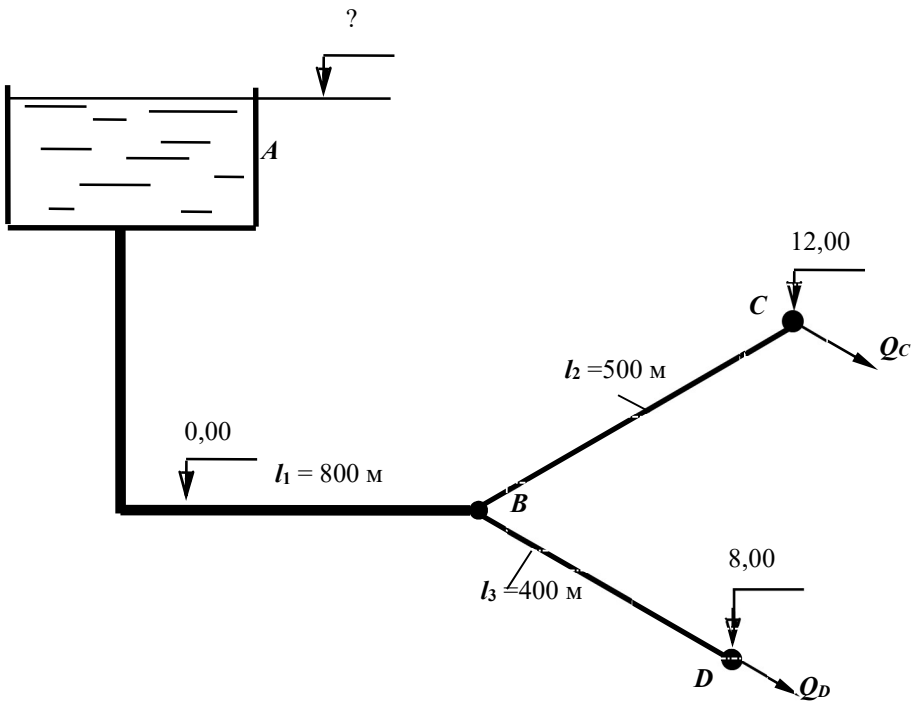
Контрольная работа № 18

1.Какой трубопровод называется коротким?
2.Рассчитать расход воды в трубе d = 100 мм при скорости V =1,27 м/с.
3.Как экспериментально определяется скоростной напор и рассчитывается скорость в точке потока? Нарисовать схему прибора.
4.Какие гидравлические сопротивления называются местными? Привести расчетную формулу определения потерь напора в местных сопротивлениях.
5.Определить режим движения жидкости в трубе d = 100 мм и шероховатостью Δ = 0,05 мм при пропускной способности Q = 1,6 л/с, если коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с. Для случая турбулентного режима движения установить область сопротивления.

Задача

Из напорного бака ***A*** идет магистральный трубопровод длиной ***l*** =800 м.

В т.***B*** магистраль разделяется на две нитки: одна идет к пункту ***C***, где расходуется $\boldsymbol{Q}_C$ =11 л/с, другая –к пункту ***D***, где потребляется $\boldsymbol{Q}_D$ =95 л/с. Определить диаметры каждого участка и отметку уровня воды в баке, при условии, что $\boldsymbol{V} \leq 1{,}2$ м/с.



Контрольная работа № 19

1.От чего зависит величина коэффициента гидравлического трения в квадратичной области сопротивления турбулентного режима?

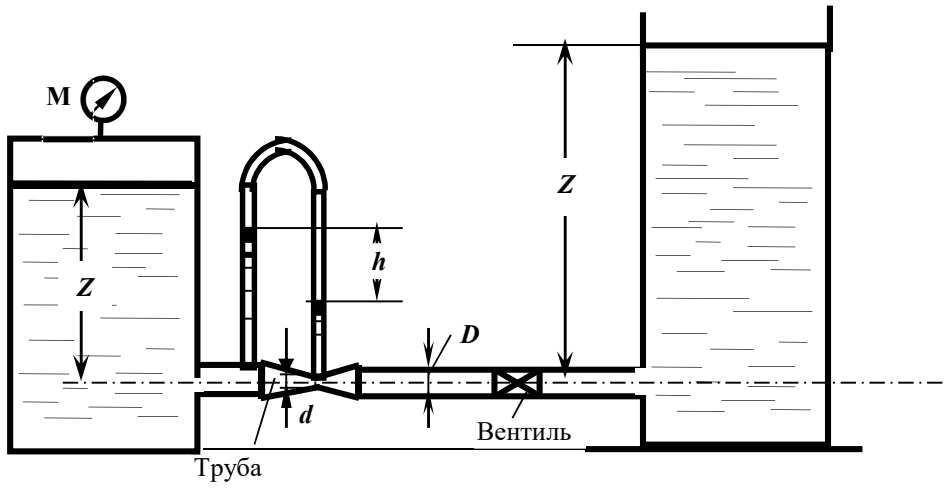
2. Рассчитать диаметр трубы для пропуска расхода Q =2 л/с при скорости V =1,0 м/с.
3.Каким прибором определяется полный напор в точке потока жидкости? Начертить схему прибора.

4.Какие внешние факторы вызывают потери напора по длине? Записать расчетные зависимости для определения этих потерь.

5.Определить режим движения жидкости в трубе диаметром d = 50 мм при расходе **Q** = 1,2 л/с, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3 \times 10^{-4}$ м^2/с.

Задача

В трубопроводе диаметром D = 100 мм длиной l = 100 м установлен расходомер Вентури с модулем $d^2/D^2 = 0{,}3$.Определить расход воды Q по перепаду уровней жидкости в дифманометре h = 0,5 м. Определить избыточное давление на поверхности жидкости в баке, под действием которого происходит движение при следующих данных: Z_1 = 2 м, Z_2 = 5 м, коэффициенты сопротивления вентиля принять $\zeta_{вен} = 7{,}0$; трубы Вентури $\zeta_{Вент} = 0{,}5$; остальные коэффициенты местных сопротивлений по таблице. Труба водопроводная нормальная (коэффициет Дарси при турбулентном режиме можно определить по таблице).



Контрольная работа № 20

1.Какой трубопровод называется простым?

2.Рассчитать гидравлический радиус потока жидкости в круглой трубе диаметром d = 100 мм и в трубе квадратного сечения со стороной a = 200 мм.

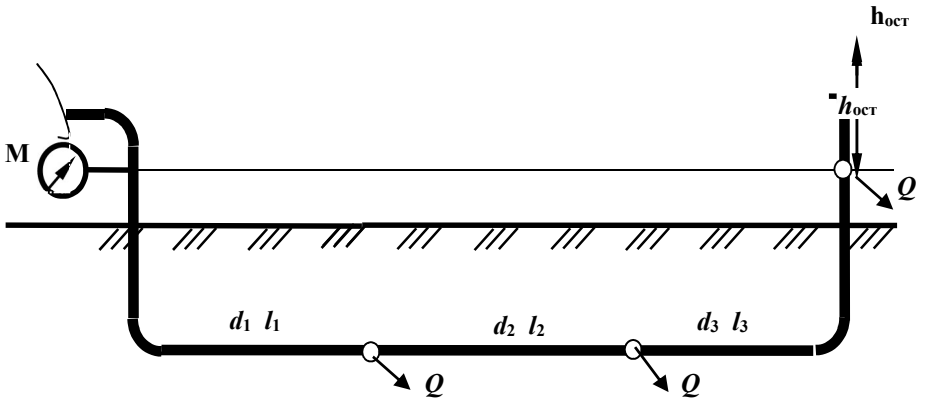
3.Представить уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения. Дать пояснение всех параметров, входящих в уравнение.

4.Как изменятся потери напора по длине при постоянном расходе, если диаметр трубопровода уменьшится в 2 раза? Показать расчетом.

5.Определить, при каком значении коэффициента кинематической вязкости ν возможен ламинарный режим в трубе d = 50 мм при скорости движения V =1,2 м/с.

Задача

Определить расходы воды у потребителей в системе трех последовательно соединенных труб: d_1 = 200 мм, l_1 = 600 м, d_2 = 150 мм, l_2 = 300 м, d_3 = 100 мм, l_3 = 200 м, если показания манометра в начале системы $p_м$ = 3,0 ат и остаточный напор у потребителя должен быть не менее 10 м. Местные потери принять равными 5% от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию.



Контрольная работа № 21

1.Дать определение ламинарного режима.

2.Определить, при какой скорости воды в трубе диаметром ***d*** = 100 мм будет обеспечен расход **Q** = 2 ,0 л/с.

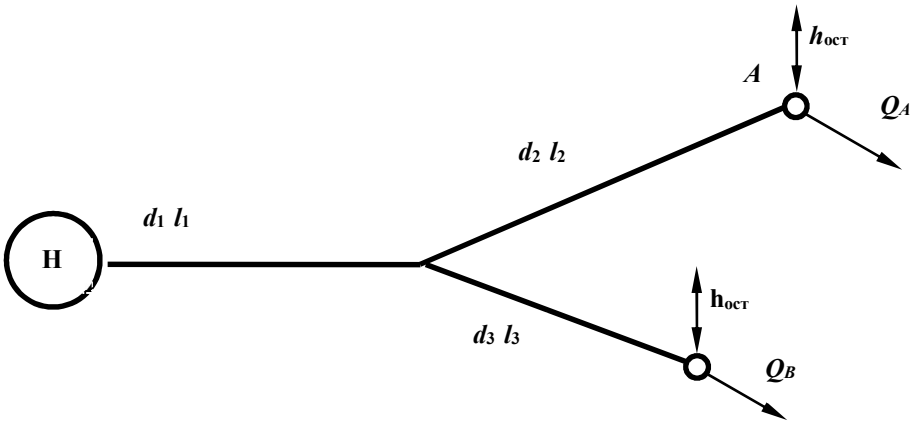
3. Записать уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости, построить диаграмму уравнения, пояснить параметры, входящие в уравнение.

4.Рассчитать потери напора по длине в трубе диаметром ***d*** = 100 мм длиной ***L*** = 10 м при расходе ***Q*** = 8,2 л/с и коэффициенте гидравлического трения λ = 0,04.

5.Определить режим движения воды в трубе диаметром *d* = 100 мм при скорости *V* =1,2 м/с, если кинематический коэффициент вязкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, шероховатость внутренней поверхности трубы Δ=0,5мм. При турбулентном режиме установить область сопротивления.

Задача

Рассчитать тупиковую водопроводную систему, снабжающую водой шахты ***A*** и ***B***, а также определить высоту водонапорной башни ***H*** (действующий напор), если остаточный напор у потребителя должен быть не менее 10 м , расходы шахт составляют Q_A = 40 л/с; Q_B = 60 л/с, эксплуатационная скорость в трубах $V_{экс}$ =1,5 м/с; длины участков: l_1 = 1000 м, l_2 = 1200 м, l_3 = 900 м. Местные потери принять равными 10% от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию. Чертеж представлен в плане



Контрольная работа № 22

1.Охарактеризовать турбулентный режим движения.

2.Определить пропускную способность (расход) для трубы диаметром d = 100 мм при скорости движения потока воды V =1,27 м/с.

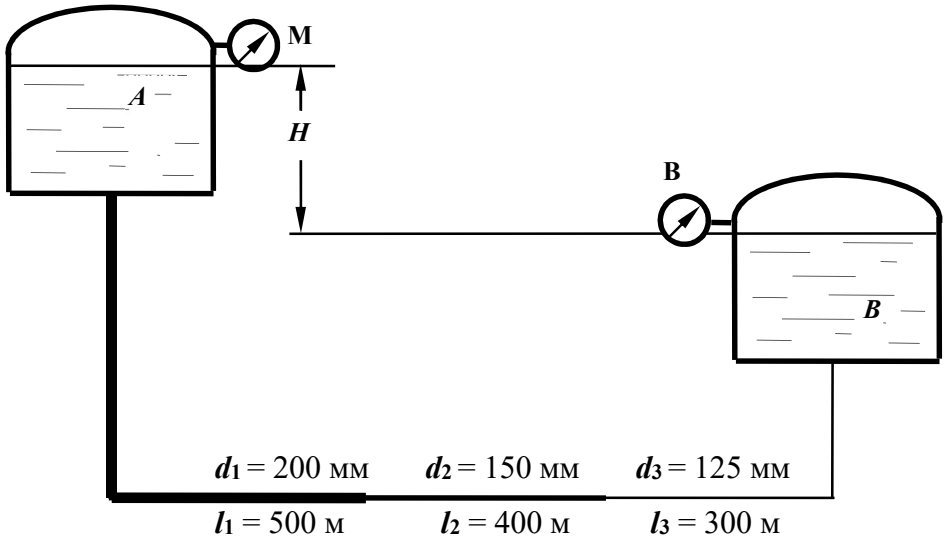
3.Записать уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости, построить диаграмму уравнения. Пояснить параметры, входящие в уравнение.

4.Рассчитать коэффициент гидравлического трения λ для водопроводной трубы d = *100* мм, длиной L = 40 м, если потери напора по длине h_l = 1,5 м при расходе Q = 9 ,5 л/с.

5.Определить режим движения воды в трубе диаметром d = 50 мм с шероховатостью Δ= 1,0 мм при скорости V =1,2 м/с, если кинематический коэффициент вязкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с. Для турбулентного режима установить область сопротивления.

Задача

Расход Q = 20 л/с поступает из напорного бака A в резервуар B по системе последовательно соединенных труб (размеры – на схеме). Определить H при следующих показаниях приборов: $p_{ман}$=0,5 ат, $p_{вак}$= 0,2 ат. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери составляют 10% потерь по длине. Построить пьезометрическую линию.



Контрольная работа № 23

1.Что такое критическая скорость и как ее определить для трубопровода?

2.Определить пропускную способность (расход) для трубы диаметром ***d*** = 100 мм, при скорости движения потока воды ***V*** =2,0 м/с; какой режим движения в трубе при этой скорости?

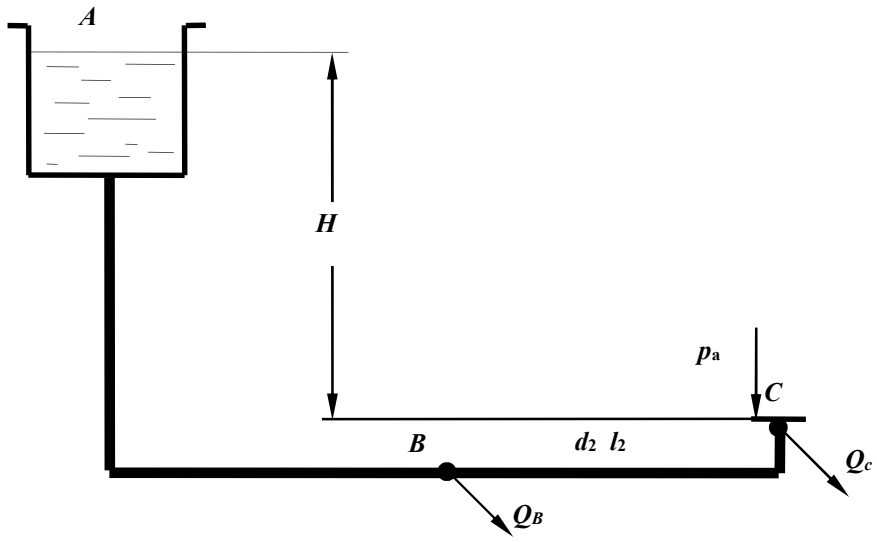
3.Построить диаграмму уравнения Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости; пояснить геометрический смысл уравнения.

4.Как изменятся потери напора по длине, если расход жидкости увеличится в 2 раза, показать расчетом.

5.Определить, при какой скорости возможен ламинарный режим для потока жидкости в трубе диаметром ***d*** = 50 мм, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3 \times 10^{-4}$ м^2/с.

Задача

Из водонапорного бака ***A*** в пункты ***B*** и ***C*** подаются одинаковые расходы воды $Q_B = Q_c = Q$. Определить величину ***Q*** расхода у потребителей, если напор ***H*** =15 м, трубы водопроводные, нормальные, соединены последовательно: d_1 = 100 мм, l_1 = 500 м, d_2 = 75 мм, l_2 = 300 м. Местные потери принять равными 5% от потерь по длине.



Контрольная работа № 24

1.Записать уравнение неразрывности потока.

2.Дать понятие гидростатического напора в сечении потока. Как он определяется экспериментально?

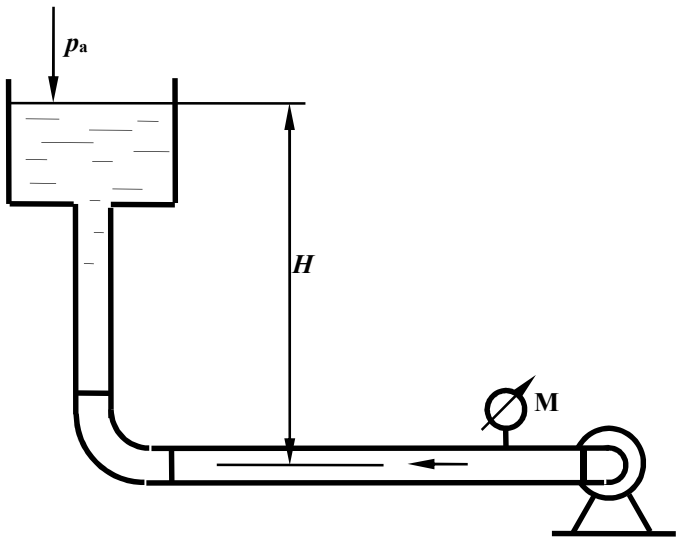
3.Рассчитать при каком значении коэффициента сопротивления пробкового крана $\zeta_{кр}$ будет обеспечен расход **Q** = 1 л/с в трубе диаметром ***d*** = 50 мм, если величина потерь напора в кране составляет $h_{кр}$= 25 см.

4.Определить потери напора по длине в трубе длиной ***L*** = 20 м диаметром ***d*** = 50 мм с абсолютной шероховатостью **Δ**= 0,5 мм при расходе **Q** = 2,5 л/с, если коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

5.Рассчитать гидравлический радиус потока жидкости в круглой трубе диаметром ***d*** = 200 мм и в трубе квадратного сечения со стороной ***a*** = 100 мм.

Задача

Определить манометрическое давление, которое должен создавать насос, чтобы подать воду в количестве ***Q*** = 5 л/с в водонапорный бак на высоту ***H*** = 12 м по трубопроводу длиной ***l*** = 50 м с высотой выступов шероховатости внутренней поверхности трубы $\Delta_э$ = 1мм; при температуре воды ***t*** = 15^{0}С (ν = 0,011463 см^2/с). Диаметр трубы ***d***=150 мм, коэффициент сопротивления колен $\zeta_{кол}$ = 0,29.



Контрольная работа № 25

1.Определение потерь напора по длине с помощью обобщенных параметров.

2. Рассчитать диаметр трубопровода для пропуска расхода **Q** =4 л/с при скорости V =1,6 м/с.

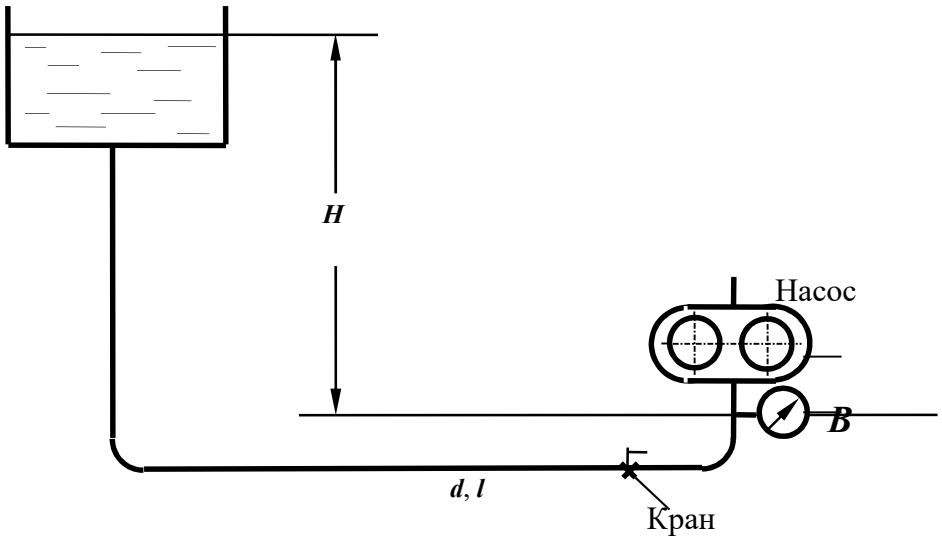
3.Записать уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости, построить диаграмму уравнения. Пояснить параметры, входящие в уравнение, исходя из геометрической интерпретации уравнения.

4.Определить потери напора в пробковом кране $h_{кр}$, если коэффициент сопротивления крана $\zeta_{кр}$= 27,0, а скорость движения воды V = 2,1 м/с.

5.Определить режим движения жидкости в трубе диаметром d = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,05 мм при скорости V =0,21 м/с, если коэффициент кинематической вязкости жидкости $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с.

Задача

Определить расстояние H от уровня жидкости в маслобаке, если давление на входе в шестеренный насос системы смазки, подающий расход Q = 1 л/с машинного масла $p_{вак}$=0,1 ат; $\rho_м$ = 900 кг/м^3, $\nu = 38 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, d = 35 мм, l = 5 м, , $\zeta_{кр}$ = 4, $\zeta_{кол}$ = 0,3.



Контрольная работа № 26

1.Дать определение понятия «***гидравлически гладкие стенки***».

2.Определить разность показаний трубки Пито и пьезометра, если скорость в точке установки прибора равна $\boldsymbol{u}$ =0,21 м/с. Начертить схему установки приборов.

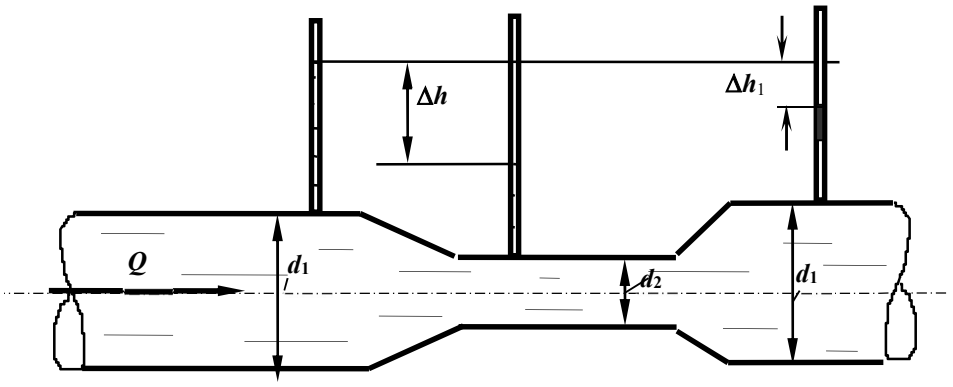
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной вязкой жидкости; привести формулы, пояснить параметры.

4.Определить разность показаний пьезометров, установленных до и после пробкового крана, если скорость движения воды в трубопроводе равна $\boldsymbol{V}$ =0,8 м/с, а коэффициент сопротивления пробкового крана равен $\zeta_{кр}$= 7,0.

5.Определить, каким должно быть давление в начале трубы для транспортирования воды, если длина участка составляет $\boldsymbol{L}$ = 150 м, диаметр $\boldsymbol{d}$ = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм, показание манометра в конце участка $\boldsymbol{p}$ = 0,7 ат, пропускная способность трубы равна $\boldsymbol{Q}$ = 6,3 л/с, кинематической коэффициент вязкости жидкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

Задача

Определить разность показаний пьезометров $\Delta\boldsymbol{h}$, установленных на водомере Вентури с диаметрами $\boldsymbol{d_1}$ = 100 мм, $\boldsymbol{d_2}$ = 50 мм, если расход воды равен $\boldsymbol{Q}$ = 3 л/с. Потерями напора в водомере пренебречь, коэффициент Кориолиса α принять равным 1. Найти также $\Delta\boldsymbol{h}_1$ для случая учета сопротивления трубы Вентури , если принять $\zeta_{\text{Вентури}}$= 0,5.

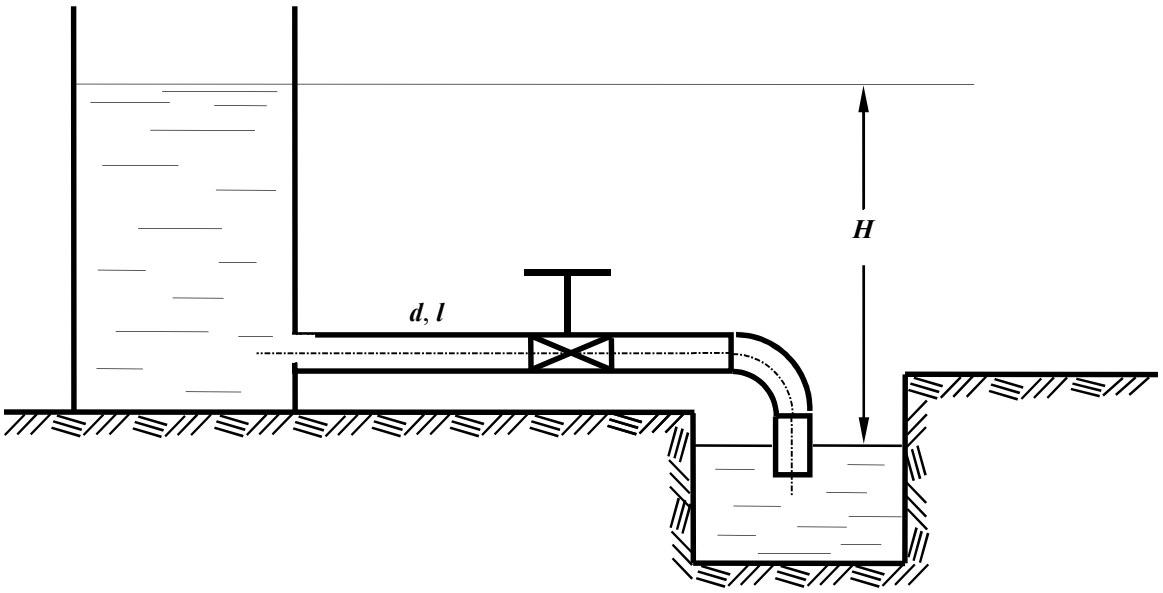


Контрольная работа № 27

1.Каким должен быть коэффициент сопротивления вентиля, чтобы при пропускной способности трубопровода $\boldsymbol{Q}$ = 2,5 л/с потери напора в вентиле составили $\boldsymbol{h_{вент}}$= 32 см. Диаметр трубопровода равен $\boldsymbol{d}$ = 50 мм.
2.Определить скорость по оси потока жидкости в горизонтальной трубе, если показание трубки Пито, установленной по оси потока равно 100 мм, а показание пьезометра – 50 мм. Начертить схему установки приборов.
3.Записать уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения.
4.Разность показаний пьезометров, установленных на расстоянии $\boldsymbol{L}$ = 5 м в горизонтальной водопроводной трубе диаметром $\boldsymbol{d}$ = 50 мм, равна 30 см. Определить коэффициент гидравлического трения (λ), если расход воды составляет $\boldsymbol{Q}$ = 2,5 л/с.
5.Что такое квадратичная область сопротивления?

Задача

Определить, какой должна быть разность уровней трансформаторного масла в резервуаре и отстойнике, чтобы по трубе диаметром $\boldsymbol{d}$ = 50 мм и длиной $\boldsymbol{l}$ = 25 м проходил расход $\boldsymbol{Q}$ = 3,0 л/с. На трубе установлен пробковый кран с углом открытия α = 20°. Кинематический коэффициент вязкости масла $\nu = 0{,}38 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.



Контрольная работа № 28

1.Пояснить, какие параметры составляют гидравлическую характеристику сечения потока. Дать определения.

2.В горизонтальной трубе с плавным сужением скорость в первом сечении равна V=0,5 м/с, пьезометрический напор – $p_1/\rho g$ = 0,8 м. Рассчитать пьезометрический напор во 30втором сечении, если диаметр трубы уменьшится в два раза.

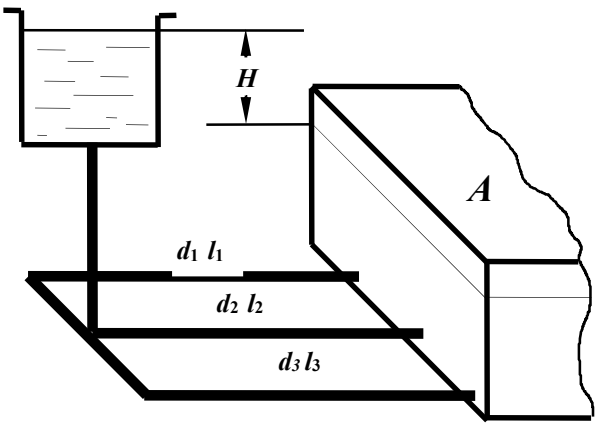
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной жидкости. Записать уравнения.

4. Рассчитать критическую скорость для потока бензина в трубе диаметром d = 50 мм, 30пли кинематический коэффициент вязкости бензина равен $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с.

5.Определить давление в начале водопроводной стальной трубы длиной L =200 м, диаметром d = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм, если показание манометра в конце участка p = 0,9 ат, пропускная способность трубы равна **Q =** 5,3 л/с, кинематической коэффициент вязкости жидкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

Задача

В бассейн A из напорного бака через три параллельно соединенных трубопровода поступает расход Q = 50 л/с. Определить необходимый напор H и расход в каждом трубопроводе, трубы водопроводные, нормальные; область сопротивления – квадратичная. Местные потери напора принять равными 10% от потерь по длине. Размеры труб: d_1=150 мм; l_2=450м d_2 =100 мм; l_2=400м; d_3=200мм; l_3=420м.



Контрольная работа № 29

1.Записать дифференциальные уравнения движения жидкости (уравнение Эйлера).

2.Рассчитать скоростной напор потока воды в трубе диаметром d = 100 мм, если при таком же расходе скоростной напор в трубе диаметром d = 50 мм равен 0,2 м.

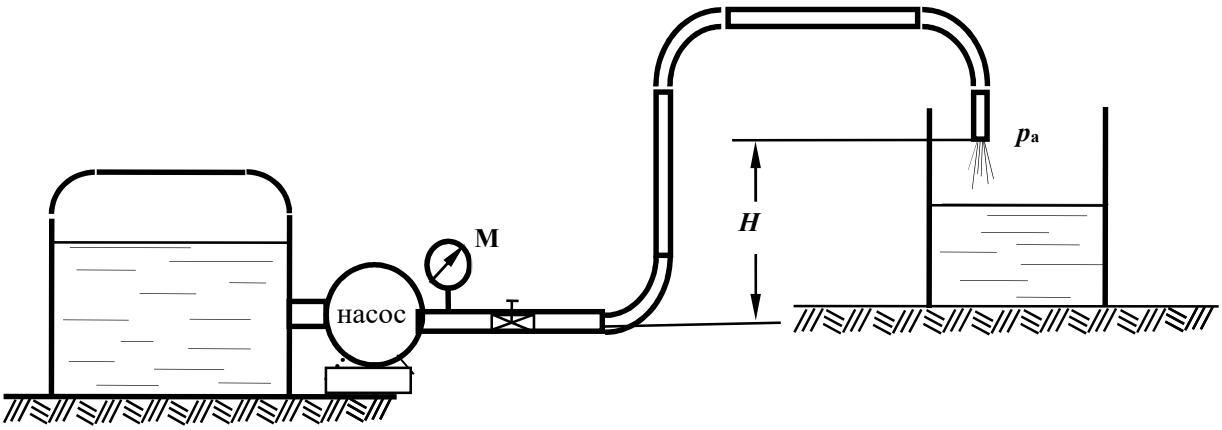
3.Записать уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости. Дать пояснения параметров, входящих в уравнение, учитывая его геометрическую интерпретацию. Построить диаграмму уравнения.

4.При какой скорости потока воды произойдет переход от ламинарного режима к турбулентному в стеклянной трубе диаметром d = 30 мм, если кинематический коэффициент вязкости равен $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

5.Определить потери напора при подаче воды по трубопроводу диаметром d = 50 мм и длиной l=150 м при скорости потока V=1,3 м/с и температуре 10^0С (ν=0,0131 см^2/с). Трубы стальные, новые (Δ=0,05мм).

Задача

Определить длину трубопровода диаметром d = 100 мм (Δ = 0,5 мм), с помощью которого бензин ($\rho_б$ = 700 кг/м^3 и $\nu = 3{,}0\cdot10^{-6}$м^2/с) может быть поднят на высоту H = 12 м при пропускной способности Q = 6 л/с, если показания манометра, установленного после насоса, $p_м$ = 1,2 ат. Истечение бензина происходит в атмосферу. Сумму коэффициентов местных сопротивлений принять равной $\sum\zeta$ = 6,0.



Контрольная работа № 30

1.Пояснить понятие ***коэффициент расхода трубопровода.***

2. Определить сторону ***a*** квадратного сечения трубопровода пропускной способностью ***Q*** = 2,5 л/с при скорости движения жидкости ***V*** = 1,0 м/с.

3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки реальной жидкости к целому потоку? Записать уравнения.

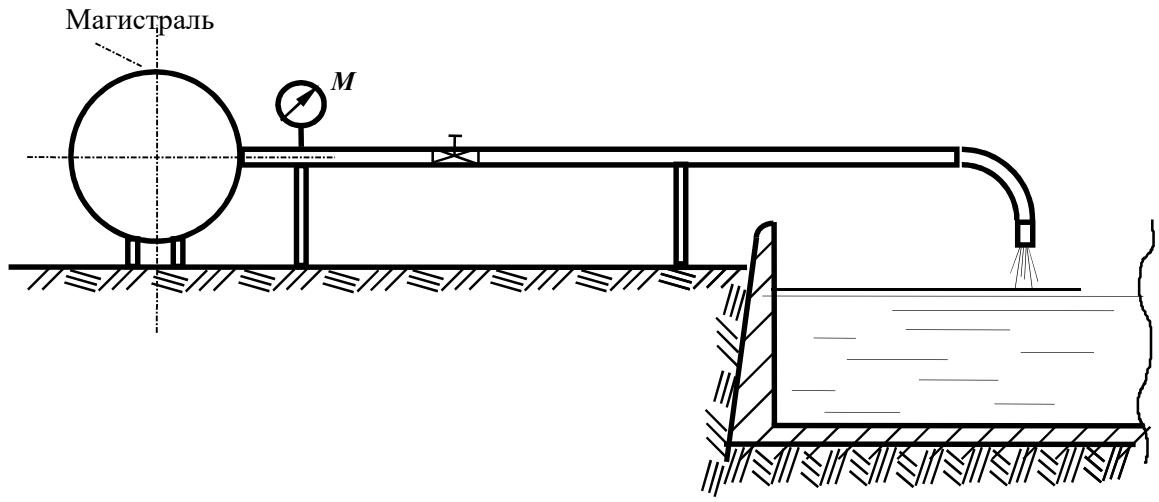
4.Определить при какой скорости движения воды в водопроводной трубе диаметром ***d*** = 50 мм и длиной ***L*** = 40 м потери напора по длине составят h_l = 30 см. Коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0{,}03$.

5. Определить давление в конце водопроводной трубы длиной ***L*** = 150 м, диаметром ***d*** = 100 мм (Δ= 1,0 мм), если показание манометра в начале трубы ***p*** = 0,87 ат, расход составляет ***Q*** = 6,3 л/с ($\nu = 10^{-6}$ м^2/с).

Задача

Определить какой объем воды (***W***) наполнится в бассейне за 30 мин, если на трубе установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha = 30^o$ и одно колено.

Через нормальную водопроводную трубу длиной ***l*** = 50 м и диаметром ***d*** = 100 мм, присоединенную к магистральному трубопроводу с избыточным давлением $p_м$ = 100 кПа,



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.В.08 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Специальность –
21.05.04 Горное дело
Специализация –
Шахтное и подземное строительство
форма обучения: очная, заочная
год набора: 2021

Авторы: Котельников А.П, к.т.н., доц.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Технической механики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Таугер В.М.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 09.10.2020	Протокол № 2 от 14.10.2020
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки 21.05.04 Горное дело, и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «Прикладная механика».

Форма контроля самостоятельной работы студентов – проверка на практическом занятии, расчетно-графическая работа, зачет.

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, владений (опыта деятельности), характеризующие формирование компетенций

Ознакомление обучающихся с процедурой и алгоритмом оценивания (в начале изучения дисциплины).

Проверка ответов на задания, выполненных работ.

Сообщение результатов оценивания обучающимся, обсуждение результатов.

Оформление необходимой документации.

Самостоятельная работа включает выполнение расчетно-графической работы.

При выполнении расчетно-графической работы по заданной кинематической схеме механизма и исходным данным необходимо выполнить следующие виды работ:

– провести структурный анализ механизма;

– выполнить кинематический анализ механизма, для чего при заданном положении кривошипа построить планы механизма, скоростей и ускорений, а также эскиз вала кривошипа с установленными на нём элементами;

– определить величину уравновешивающей силы и уравновешивающего момента методом «жёсткого рычага» Н.Е. Жуковского;

– произвести проверочный расчёт вала кривошипа, включающий оценку статической прочности и расчёт на сопротивление усталости.

Масштабы плана механизма и эскиза вала принимаются по ЕСКД, масштабы планов скоростей и ускорений и «жёсткого рычага» выбираются самостоятельно с учётом рационального расположения построений на листе формата А1.

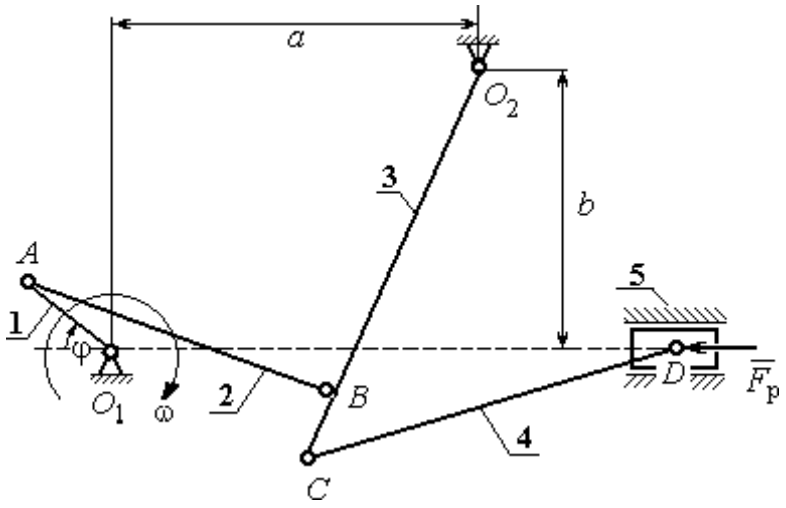
В расчётах для всех заданий и вариантов принять предел текучести материала вала $\sigma_т$ = 380 МПа, допускаемое напряжение смятия шпонки $[\sigma_{см}]$ = 120 МПа, обработку поверхности вала – чистовую.

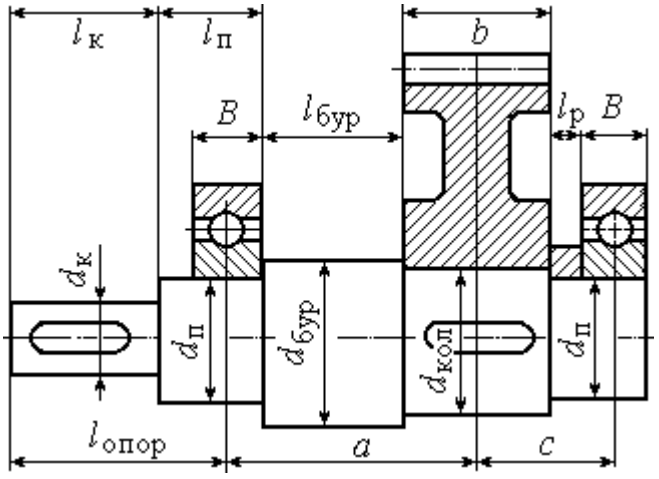
По результатам расчётов составить пояснительную записку на листах формата А4, оформленную в соответствии с правилами ЕСКД.

Построение планов механизма, скоростей, ускорений и «жёсткого рычага» выполнить на листе формата А1.

Вариант задания № 1. Инерционный конвейер

Схемы механизма инерционного конвейера и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 1





Инерционный конвейер состоит из кривошипа 1 шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4 и рештака (ползуна) 5. Центр масс кривошипа расположен на оси вращения в точке O_1, а центры масс остальных звеньев – посередине их длин. Сила сопротивления движению рештака постоянна и равна $F_р$. Рабочий ход слева – направо. На холостом ходу сила сопротивления составляет 10 % от номинальной.

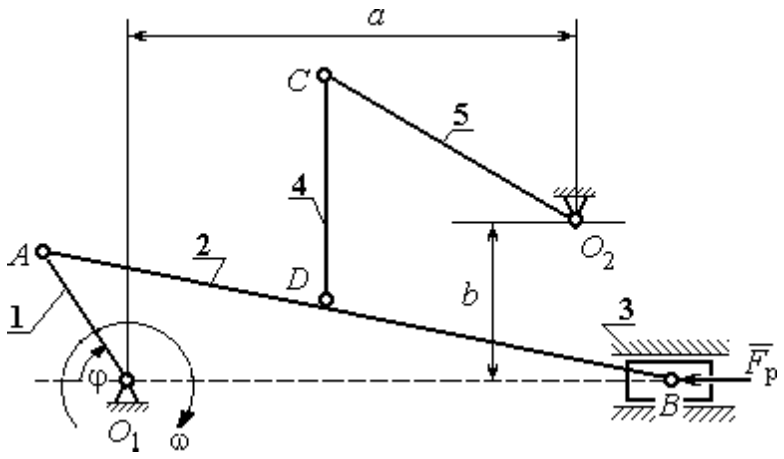
Ведомый вал редуктора привода кривошипа инерционного конвейера имеет несимметричное правое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

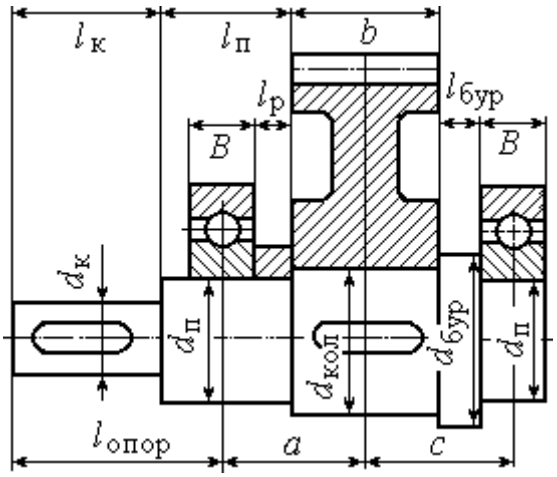
Варианты исходных данных механизма инерционного конвейера для варианта задания № 1

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,24	0,25
	AB	0,8	0,8	0,11	0,11	0,29	0,23	0,11	0,11	0,92	1,06
	O_2B	1,0	1,0	0,12	0,12	0,25	0,25	0,12	0,12	0,84	0,87
	O_2C	1,2	1,2	0,1	0,12	0,15	0,25	0,15	0,12	0,9	0,5
	CD	1,2	1,2	0,25	0,25	0,3	0,4	0,4	0,3	1,45	0,65
	a	0,9	0,9	0,06	0,04	0,15	0,35	0,04	0,07	0,8	0,8
	b	0,7	0,7	0,04	0,06	0,05	0,11	0,06	0,02	0,6	0,6
Угол поворота кривошипа, град	φ	45	30	290	235	120	115	140	50	300	150
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	190	95	200	180	150	170	250	190	100	120
Массы звеньев механизма, кг	m_2	80	8	15	18	38	24	16	20	37	32
	m_3	100	10	18	25	23	30	28	25	22	17
	m_4	60	6	25	25	30	40	40	30	36	31
	m_5	100	10	100	70	80	90	90	60	73	62
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,5	0,5	0,2	0,1	0,1	0,09	0,18	0,09	0,3	0,21
	J_2	1,0	1,0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,08	0,2	4,1	3,1
	J_3	0,8	0,8	0,4	0,8	0,18	0,2	0,6	0,5	2,7	2,9
	J_4	0,6	0,6	1,2	1,0	1,03	1,4	1,4	1,05	1,6	1,1
Сила сопротивления, кН	$F_р$	10,0	2,25	3,0	2,5	1,5	1,6	3,0	1,8	4,6	3,6
Передаточное число редуктора	u	5,6	6,3	4,1	4,0	4,5	3,5	6,0	3,1	6,3	8,0
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	650	750	750	800	850	750	650	800	750	700

Вариант задания № 2. Плунжерный питатель с грохотом

Схемы механизма плунжерного питателя с грохотом и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 2





Плунжерный питатель с грохотом состоит из кривошипа 1, шатунов 2 и 4, сита грохота 5, плунжера 3. Центр тяжести кривошипа расположен на оси вращения O_1, центры тяжести остальных звеньев находятся в их середине. Сила сопротивления движению плунжера 3 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода (рабочий ход слева – направо). На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

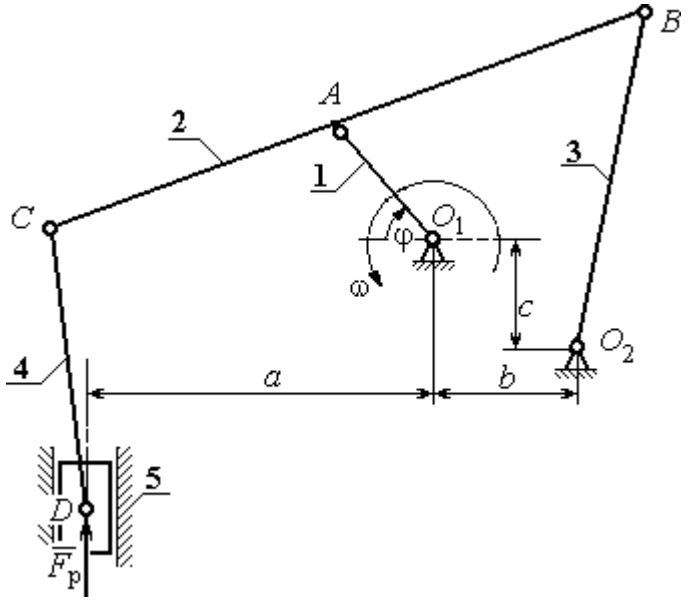
Ведомый вал редуктора привода кривошипа плунжерного питателя имеет симметричное расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

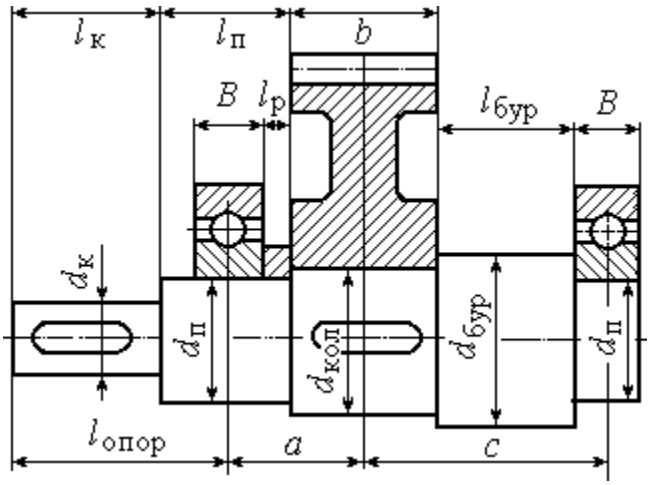
Варианты исходных данных механизма плунжерного питателя с грохотом для варианта задания № 2

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,8	0,05	0,06	0,08	0,06	0,08	0,08	0,06	0,1	0,1
	AB	0,5	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,4	0,6	0,5
	DB	0,4	0,3	0,3	0,35	0,3	0,25	0,25	0,3	0,43	0,33
	O_2C	0,4	0,27	0,19	0,3	0,24	0,25	0,22	0,24	0,31	0,21
	CD	0,12	0,09	0,2	0,2	0,2	0,13	0,14	0,2	0,16	0,16
	a	0,57	0,45	0,4	0,57	0,45	0,5	0,45	0,45	0,5	0,4
	b	0,12	0,02	0,12	0,12	0,12	0,05	0,05	0,13	0,13	0,13
Угол поворота кривошипа, град	φ	60	56	58	55	55	58	57	65	60	70
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	150	30	210	150	160	140	130	160	130	120
Массы звеньев механизма, кг	m_2	42	38	35	36	31	35	36	31	40	40
	m_3	8	12	8	10	12	8	10	12	10	12
	m_4	16	9	16	18	20	13	14	20	16	16
	m_5	40	27	35	30	24	25	22	24	31	21
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,08	0,09	0,08	0,1	0,07	0,07	0,08	0,07	0,1	0,1
	J_2	1,3	1,2	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,0	1,2	1,2
	J_4	0,5	0,3	0,5	0,6	0,6	0,4	0,5	0,6	0,4	0,5
	J_5	1,2	0,9	1,1	0,9	0,8	0,8	0,7	0,8	1,0	0,6
Сила сопротивления, кН	$F_р$	100	90	980	80	80	80	700	80	100	60
Передаточное число редуктора	u	6,8	6,0	7,0	6,3	5,0	4,8	2,8	3,5	4,0	4,5
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	750	700	650	800	850	650	750	700	800	850

Вариант задания № 3. Поршневой насос

Схемы механизма поршневого насоса и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 3





Механизм **поршневого насоса** состоит из кривошипа 1, шатунов 2 – 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня сверху – вниз. Центры масс звеньев2 – 4 находятся посредине их длин, звена 1 – в точке O_1, звена 5 – в точке D. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

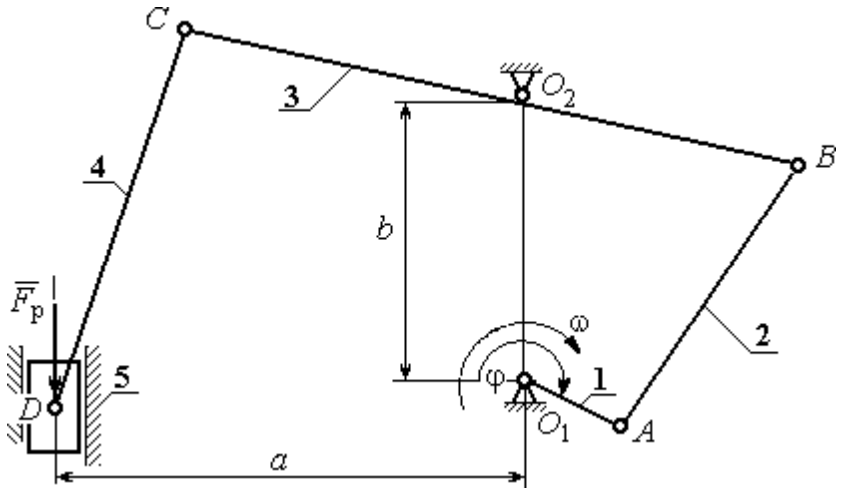
Ведомый вал редуктора привода кривошипа поршневого насоса имеет несимметричное левое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

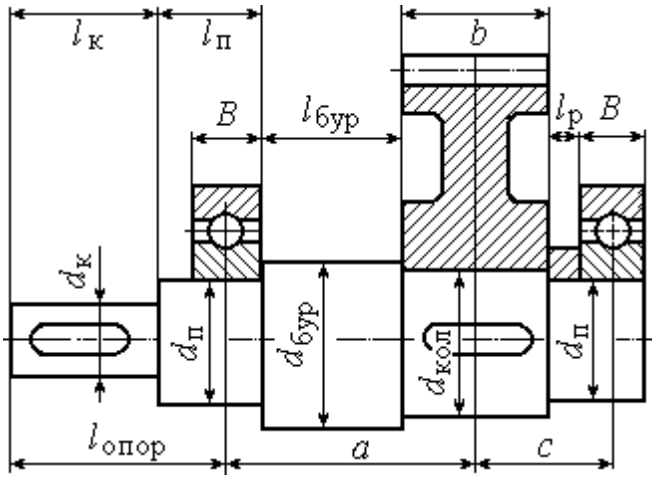
Варианты исходных данных механизма поршневого насоса для варианта задания № 3

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,16	0,13	0,16	0,18	0,11	0,18	0,13	0,12	0,18	0,1
	AB	0,56	0,5	0,52	0,6	0,6	0,56	0,47	0,45	0,56	0,42
	AC	0,38	0,35	0,4	0,4	0,3	0,42	0,35	0,3	0,42	0,3
	O_2B	0,55	0,5	0,55	0,55	0,45	0,55	0,5	0,48	0,55	0,45
	CD	0,6	0,55	0,6	0,55	0,45	0,6	0,55	0,5	0,6	0,45
	c	0,5	0,3	0,32	0,35	0,25	0,5	0,4	0,3	0,5	0,2
	a	0,5	0,45	0,45	0,3	0,3	0,5	0,28	0,4	0,5	0,35
	b	0,3	0,35	0,32	0,3	0,25	0,38	0,28	0,3	0,38	0,2
Угол поворота кривошипа, град	φ	60	56	45	60	65	65	23	65	60	63
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	140	70	130	160	80	110	90	55	110	50
Массы звеньев механизма, кг	m_2	28	28	30	30	26	30	25	25	30	26
	m_3	25	20	25	25	18	25	28	20	25	18
	m_4	28	25	28	30	20	28	36	22	25	20
	m_5	38	32	25	40	34	28	45	26	28	22
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,15	0,11	0,18	0,2	0,1	0,2	0,13	0,1	0,15	0,1
	J_2	0,92	0,7	0,83	1,08	0,72	0,8	0,95	0,6	0,85	0,72
	J_3	0,75	0,63	1,05	0,8	0,62	1,15	0,72	0,65	1,1	0,86
	J_4	1,15	0,93	1,2	1,05	0,95	1,15	1,1	0,9	1,15	1,0
Сила сопротивления, кН	$F_р$	1,2	1,4	1,5	20,4	0,8	2,2	1,4	1,7	2,2	0,8
Передаточное число редуктора	u	3,1	4,4	5,8	6,2	7,3	3,2	4,5	5,2	6,3	7,2
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	680	780	880	820	730	560	580	630	680	720

Вариант задания № 4. Глубинный насос

Схемы механизма глубинного насоса и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 4





Механизм **глубинного насоса** состоит из кривошипа 1 шатунов 2 и 4, коромысла 3 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня снизу – вверх. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посредине их длин, звена 1 – в точке O_1, звена 5 – в точке D. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

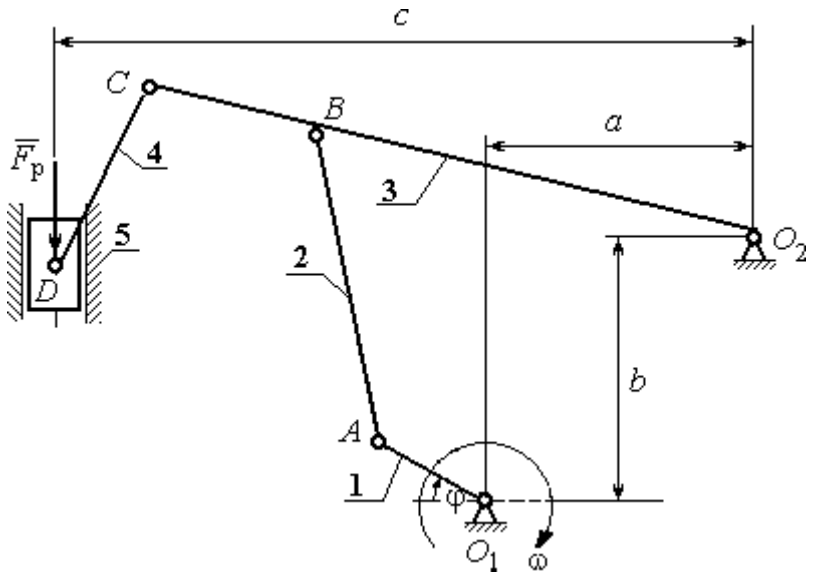
Ведомый вал редуктора привода кривошипа глубинного насоса имеет несимметричное правое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

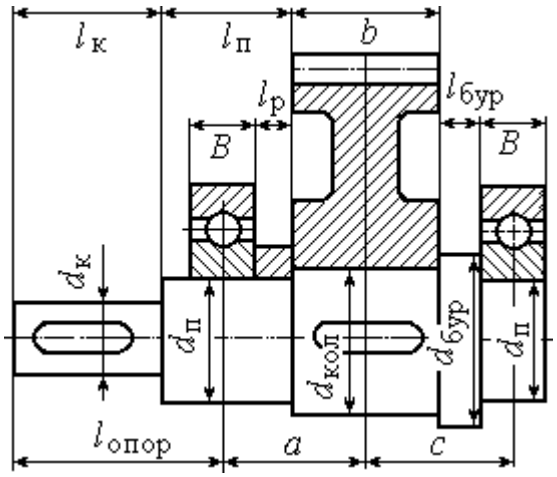
Варианты исходных данных механизма глубинного насоса для варианта задания № 4

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,09	0,11	0,15	0,1	0,12	0,17	0,13	0,14	0,16	0,95
	AB	0,6	0,72	0,7	0,7	0,7	0,55	0,8	0,70	0,65	0,9
	O_2B	0,38	0,47	0,5	0,4	0,5	0,5	0,6	0,8	0,7	0,8
	O_2C	0,2	0,7	0,5	0,45	0,35	0,5	0,5	0,55	0,75	0,6
	CD	0,6	0,8	0,85	0,6	0,65	0,8	1,5	1,55	1,75	1,6
	a	0,45	0,43	0,5	0,36	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,65
	b	0,46	0,63	0,6	0,45	0,66	0,6	0,5	0,55	0,7	0,8
Угол поворота кривошипа, град	φ	180	210	0	165	150	253	30	45	60	120
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	140	130	180	70	150	200	100	110	160	190
Массы звеньев механизма, кг	m_2	38	24	14	22	27	20	23	26	29	30
	m_3	35	52	34	40	47	40	33	37	41	44
	m_4	33	30	36	28	34	40	43	47	49	51
	m_5	35	36	20	32	30	20	44	49	51	60
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,22	0,1	0,14	0,2	0,1	0,15	0,1	0,2	0,3	0,4
	J_2	1,1	0,83	0,5	1,2	0,9	0,75	0,8	0,9	0,6	0,4
	J_3	3,5	4,9	2,5	4	4,1	4,3	2,1	2,5	2,7	3,0
	J_4	2,1	2,0	2,3	1,6	2,2	2,4	3,0	3,5	3,9	4,4
Сила сопротивления, кН	$F_р$	3,0	1,26	1,44	1,68	2,17	2,16	3,0	4,8	5,1	6,1
Передаточное число редуктора	u	3,5	6,0	3,1	6,3	8,0	3,2	2,0	5,6	4,0	5,2
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	750	650	800	750	700	800	680	720	770	810

Вариант задания № 5. Вытяжной пресс

Схемы механизма вытяжного пресса и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 5





Механизм вытяжного **пресса** состоит из кривошипа 1, шатунов 2 – 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня снизу – вверх. Центры масс звеньев 2 –4 находятся посредине их длин, звена 1 – в точке O_1, звена 5 – в точке D. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

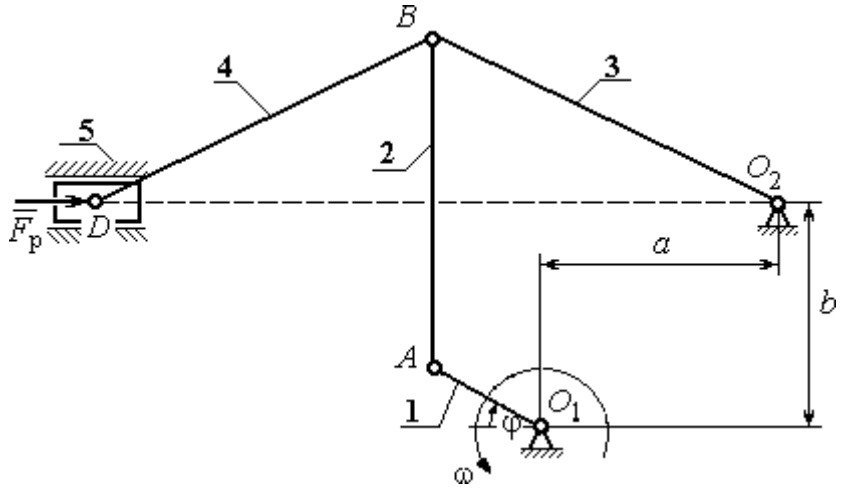
Ведомый вал редуктора привода кривошипа вытяжного пресса имеет симметричное расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

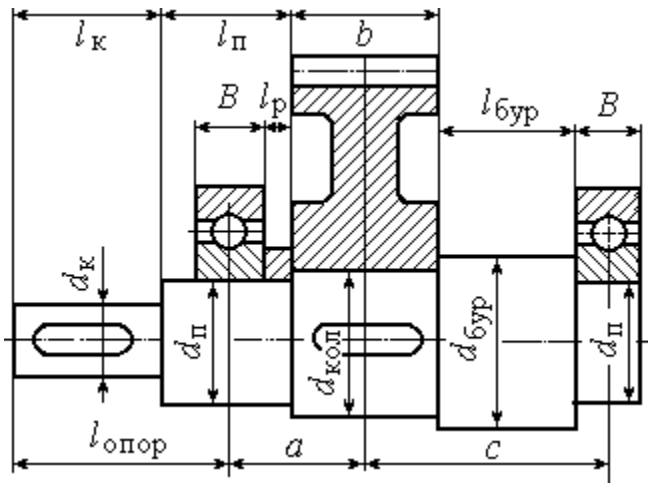
Варианты исходных данных механизма вытяжного пресса для варианта задания № 5

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,1	0,09	0,09	0,09	0,08	0,1	0,07	0,1	0,11	0,08
	AB	0,32	0,45	0,36	0,38	0,4	0,42	0,46	0,48	0,5	0,52
	O_2B	0,3	0,6	0,5	0,42	0,51	0,6	0,62	0,46	0,45	0,5
	O_2C	0,42	0,9	0,7	0,6	0,7	0,85	0,8	0,66	0,65	0,7
	CD	0,11	0,3	0,4	0,6	0,5	0,8	0,9	0,35	0,49	0,5
	a	0,16	0,35	0,45	0,44	0,56	0,62	0,6	0,64	0,68	0,66
	b	0,29	0,3	0,4	0,41	0,46	0,5	0,51	0,55	0,6	0,6
	c	0,41	0,7	0,6	0,56	0,65	0,75	0,8	0,62	0,6	0,65
Угол поворота кривошипа, град	φ	30	60	120	150	210	240	300	330	25	45
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	40	65	50	55	60	165	70	75	285	150
Массы звеньев механизма, кг	m_2	30	7	8	9	10	12	11	14	12	11
	m_3	40	12	10	10	8	10	8	7	14	10
	m_4	15	5	6	4	7	8	9	6	4	5
	m_5	20	30	33	35	37	30	37	35	40	42
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,5	2,0	2,4	2,4	2,6	2,5	2,2	2,0	2,2	2,2
	J_2	0,2	0,10	0,20	0,21	0,24	0,28	0,29	0,31	0,33	0,35
	J_3	0,3	0,20	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
	J_4	0,1	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22	0,24	0,26
Сила сопротивления, кН	$F_р$	36	36	40	41	39	37	34	32	36	42
Передаточное число редуктора	u	3,1	4,4	5,8	6,2	7,3	6,8	6,0	7,0	6,3	5,0
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	680	780	880	820	730	750	700	650	800	850

Вариант задания № 6. Гайковырубной автомат

Схемы механизма гайковырубного автомата и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 6





Механизм гайковырубного **автомата** состоит из кривошипа 1, шатунов 2, 4, коромысла 3 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посредине их длин, кривошипа 1 – в точке O_1, звена 5 – в точке D. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

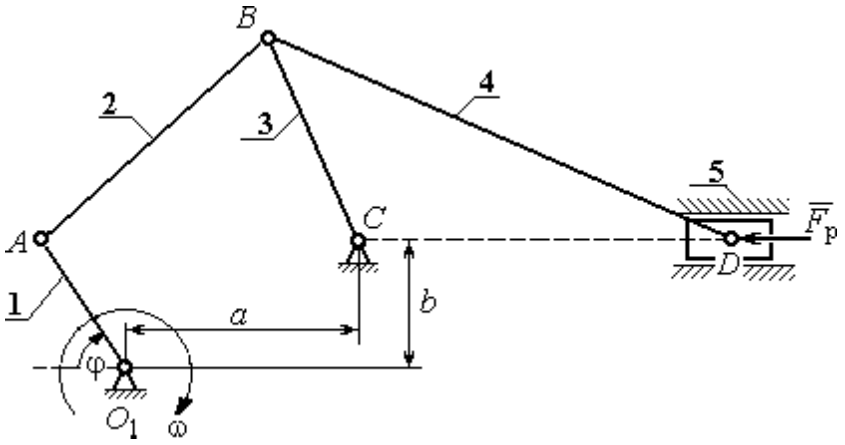
Ведомый вал редуктора привода кривошипа гайковырубного автомата имеет несимметричное левое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

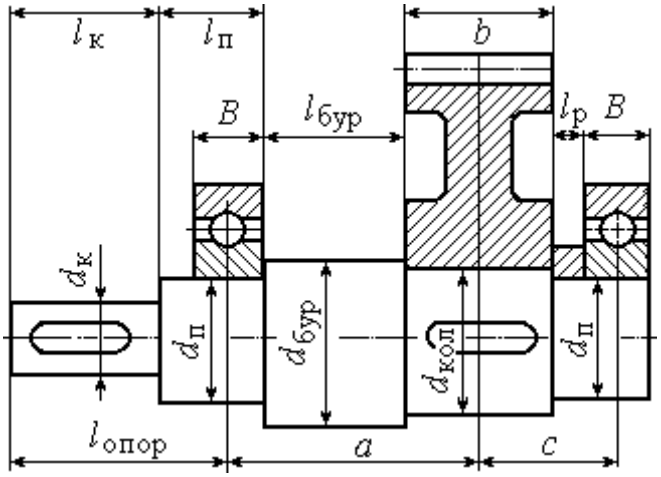
Варианты исходных данных механизма гайковырубного автомата для варианта задания № 6

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,09	0,11	0,1	0,12	0,08	0,11	0,12	0,1	0,1	0,12
	AB	0,43	0,41	0,48	0,43	0,38	0,48	0,44	0,44	0,37	0,52
	O_2B	0,25	0,29	0,28	0,3	0,22	0,28	0,31	0,26	0,26	0,31
	BD	0,25	0,29	0,28	0,3	0,22	0,28	0,31	0,26	0,26	0,31
	a	0,24	0,27	0,27	0,29	0,21	0,27	0,3	0,25	0,25	0,29
	b	0,45	0,43	0,5	0,45	0,4	0,5	0,47	0,39	0,39	0,55
Угол поворота кривошипа, град	φ	30	45	60	120	150	210	240	300	305	25
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	100	45	50	55	60	65	70	75	80	90
Массы звеньев механизма, кг	m_2	11	10	12	10	9	12	11	11	9	13
	m_3	15	17	16	20	13	18	19	16	16	18
	m_4	15	17	16	20	13	18	19	16	16	18
	m_5	60	62	56	70	46	65	67	57	58	63
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	1,2	1,4	1,6	1,0	0,9	1,5	1,3	1,1	1,0	1,3
	J_2	0,2	0,17	0,28	0,18	0,13	0,28	0,21	0,21	0,12	0,35
	J_3	0,09	0,14	0,12	0,18	0,08	0,14	0,18	0,11	0,11	0,17
	J_4	0,09	0,14	0,12	0,18	0,08	0,14	0,18	0,11	0,11	0,17
Сила сопротивления, кН	$F_р$	60	65	70	58	55	52	53	54	60	70
Передаточное число редуктора	u	5,6	2,8	3,5	5,1	6,3	3,2	4,6	5,9	6,0	3,4
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	750	650	700	800	640	600	620	680	710	800

Вариант задания № 7. Качающийся конвейер

Схемы механизма качающегося конвейера и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 7





Механизм качающегося **конвейера** состоит из кривошипа 1, шатунов 2, 4, коромысла 3 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 2 – 4 находятся посредине их длин, кривошипа 1 – в точке O_1, звена 5 – в точке D. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

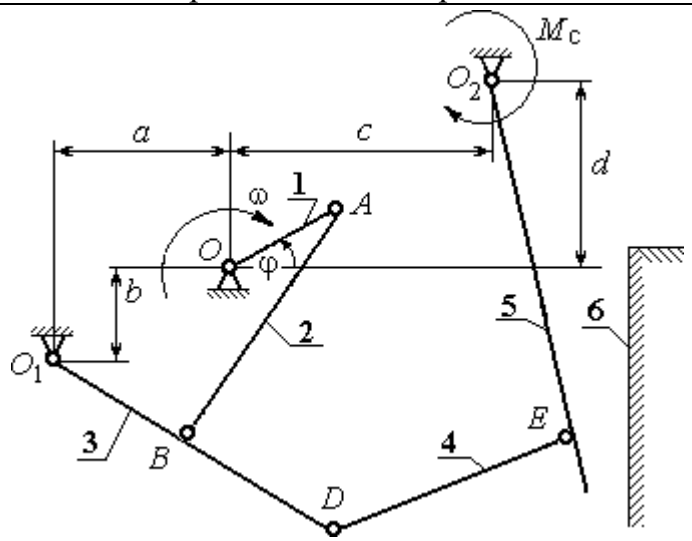
Ведомый вал редуктора привода кривошипа качающегося конвейера имеет несимметричное правое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

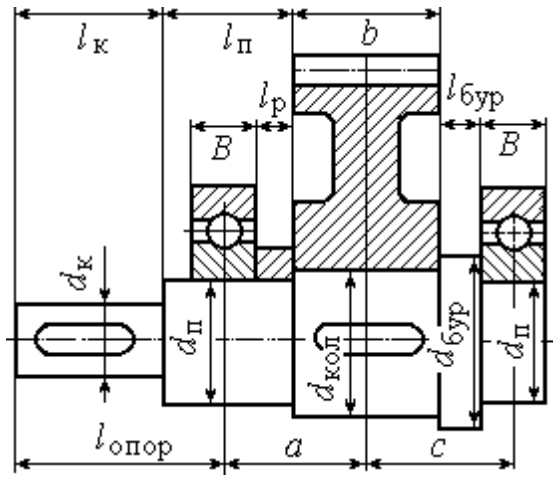
Варианты исходных данных механизма качающегося конвейера для варианта задания № 7

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	O_1A	0,1	0,09	0,1	0,11	0,12	0,14	0,1	0,12	0,14	0,12
	AB	0,38	0,38	0,46	0,42	0,46	0,28	0,45	0,55	0,53	0,45
	BC	0,32	0,3	0,33	0,35	0,39	0,35	0,4	0,4	0,45	0,38
	BD	1,3	1,4	1,5	1,4	1,5	1,6	1,5	1,5	1,6	1,5
	a	0,29	0,3	0,34	0,32	0,33	0,32	0,35	0,41	0,4	0,35
	b	0,05	0,06	0,06	0,05	0,06	0,04	0,05	0,07	0,07	0,06
Угол поворота кривошипа, град	φ	25	45	60	115	135	150	210	245	290	300
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	80	60	68	73	70	63	63	79	74	50
Массы звеньев механизма, кг	m_2	20	20	21	20	20	25	20	22	25	20
	m_3	90	80	90	100	85	100	90	95	100	90
	m_4	400	400	450	500	500	500	400	450	500	450
	m_5	900	800	900	900	950	900	950	800	900	950
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	1,0	1,0	1,1	1,0	1,2	1,4	1,0	1,2	1,4	1,2
	J_2	1,0	1,0	1,1	1,0	1,2	1,4	1,0	1,2	1,4	1,2
	J_3	0,4	0,4	0,6	0,5	0,5	0,6	0,4	0,5	0,6	0,5
	J_4	40	40	42	35	40	38	42	45	35	45
Сила сопротивления, кН	$F_р$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0
Передаточное число редуктора	u	3,2	4,5	5,2	6,3	7,2	3,5	6,0	3,1	6,3	8,0
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	560	580	630	680	720	750	800	800	750	700

Вариант задания № 8. Щековая дробилка

Схемы механизма щековой дробилки и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 8





Механизм щековой **дробилки** состоит из кривошипа 1, шатуна 2,коромысла 3, тяги 4, подвижной щеки 5 и неподвижной щеки 6. Рабочий ход подвижной щеки слева – направо. Центр масс кривошипа 1 – в точке O_1. У остальных звеньев 2 – 5 центры масс находятся посредине их длин. Момент сил сопротивления движению подвижной щеки 5 сохраняет постоянное значение M_C на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу щеки момент сил сопротивления постоянный и составляет 10 % от номинального.

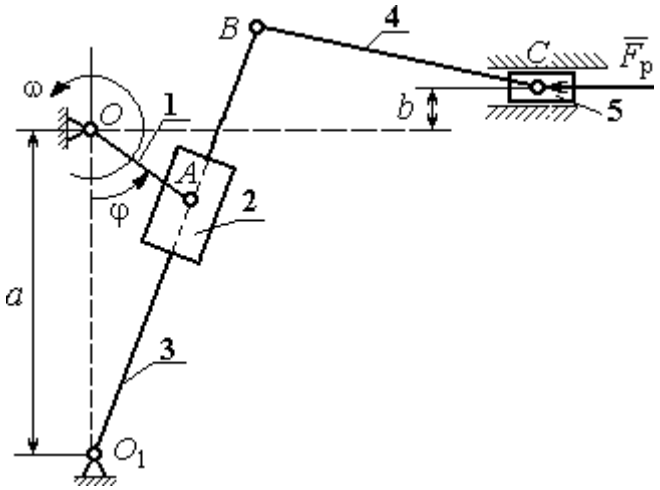
Ведомый вал редуктора привода кривошипа щековой дробилки имеет симметричное расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

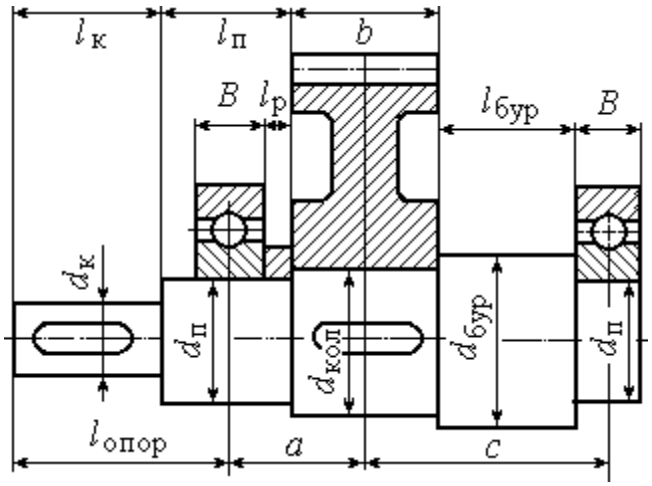
Варианты исходных данных механизма щековой дробилки для варианта задания № 8

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,11	0,1	0,15	0,07	0,15	0,08	0,1	0,15	0,12	0,07
	AB	0,8	0,9	0,75	0,6	0,9	0,7	0,45	0,9	0,8	0,65
	O_1B	0,45	0,5	0,6	0,3	0,6	0,6	0,5	0,6	0,6	0,3
	BD	0,2	0,15	0,2	0,3	0,1	0,15	0,25	0,15	0,2	0,2
	O_2E	0,8	0,85	1,2	0,9	1,15	1,0	0,8	1,2	1,0	0,75
	DE	0,6	0,55	0,6	0,4	0,7	0,35	0,3	0,65	0,3	0,45
	a	0,45	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4	0,5	0,4	0,4	0,3
	b	0,55	0,6	0,5	0,4	0,5	1,0	0,5	0,5	1,0	0,4
	c	0,4	0,35	0,6	0,3	0,6	0,4	0,25	0,6	0,5	0,3
	d	0,12	0,15	0,3	0,4	0	0,2	0,2	0	0,1	0,2
Угол поворота кривошипа, град	φ	20	30	45	60	115	145	215	240	295	330
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	160	190	150	250	170	200	200	140	240	240
Массы звеньев механизма, кг	m_2	55	50	45	40	48	40	35	55	50	40
	m_3	30	25	30	15	30	30	25	30	35	30
	m_4	30	27	30	20	35	18	15	33	15	22
	m_5	90	85	120	110	100	80	120	100	75	100
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	0,23	0,25	0,35	0,2	0,3	0,2	0,25	0,35	0,2	0,24
	J_2	0,8	4,0	3,4	1,6	3,9	1,9	0,7	4,5	3,2	1,7
	J_3	0,9	0,6	1,1	0,14	1,1	1,1	0,5	1,1	0,26	0,14
	J_4	0,9	0,82	1,0	0,32	1,7	0,22	0,14	1,4	0,15	0,45
	J_5	6,3	6,1	17,3	7,3	14,5	10,0	5,1	17,3	10,0	4,2
Момент сил сопротивления, кН·м	M_C	4	8	30	9	20	10	7	35	2	15
Передаточное число редуктора	u	5,6	3,8	4,7	6,3	4,0	4,5	4,8	2,8	3,5	4,0
Предел прочности материала вала, МПа	σ_B	670	710	820	630	750	700	650	740	720	810

Вариант задания № 9. Кулисный конвейер

Схемы механизма кулисного конвейера и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 9





Механизм кулисного **конвейера** состоит из кривошипа 1, ползуна 2, кулисы 3, шатуна 4 и ползуна (поршня) 5. Рабочий ход поршня слева – направо. Центры масс звеньев 3, 4 находятся посредине их длин, кривошипа 1 – в точке *O*, ползуна 2 – в точке *A*, звена 5 – в точке *C*. Сила сопротивления движению поршня 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

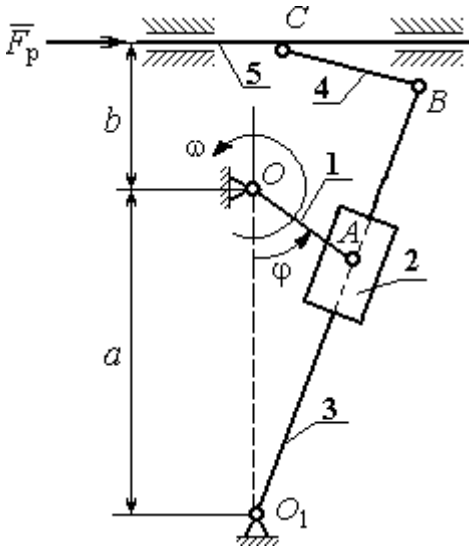
Ведомый вал редуктора привода кривошипа кулисного конвейера имеет несимметричное левое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

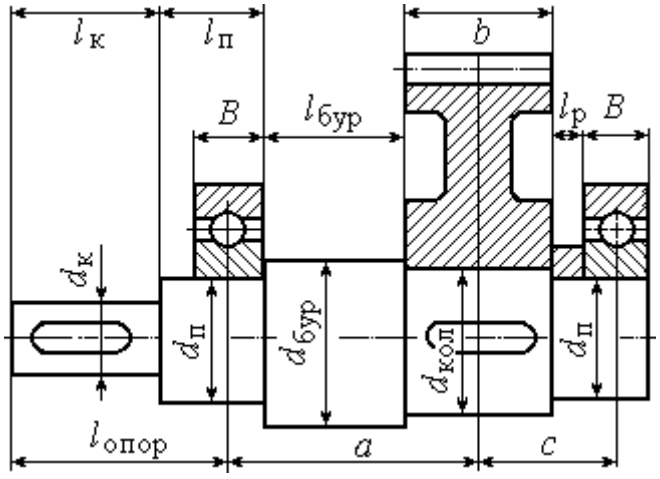
Варианты исходных данных механизма кулисного конвейера для варианта задания № 9

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,17	0,08	0,1	0,12	0,0,9	0,11	0,13	0,14	0,15	0,16
	O_1B	1,5	0,8	1,0	1,2	0,9	1,1	1,3	1,4	1,25	1,45
	BC	2,1	1,8	1,9	2,0	1,75	1,65	1,45	1,5	1,85	1,95
	a	0,9	0,6	0,8	0,9	0,6	0,6	0,7	1,0	0,95	1,1
	b	0,28	0,05	0,07	0,08	0,09	0,1	0,055	0,065	0,06	0,065
Угол поворота кривошипа, град	φ	300	20	30	45	60	110	120	150	210	240
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	190	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Массы звеньев механизма, кг	m_2	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	m_3	28	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	m_4	32	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	m_5	280	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	3,0	1	2	3	4	4,5	3,6	4,7	2,8	2,9
	J_2	0,65	0,6	0,4	0,3	0,5	0,7	0,8	0,35	0,45	0,55
	J_3	6,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
	J_4	1,5	2,0	2,5	3,5	4,5	5,0	3,0	4,0	6,0	6,5
Сила сопротивления, кН	$F_р$	14	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Передаточное число редуктора	u	3,2	4,5	5,2	6,3	7,2	3,5	6,0	3,1	6,3	7,3
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	560	520	680	650	730	750	820	800	740	700

Вариант задания № 10. Строгальный станок

Схемы механизма кулисного конвейера и компоновки узла ведомого вала кривошипа для варианта задания № 10





Механизм строгального **станка** состоит из кривошипа 1, ползуна 2, кулисы 3, шатуна 4 и резца (вместе с суппортом) 5. Рабочий ход резца справа – налево. Центры масс звеньев 3, 4 находятся посредине их длин, кривошипа 1 – в точке *O*, ползуна 2 – в точке *A*, резца 5 – в точке *C*. Сила сопротивления движению резцу 5 сохраняет постоянное значение $F_р$ на протяжении всего рабочего хода. На холостом ходу сила сопротивления постоянна и составляет 10 % от номинальной.

Ведомый вал редуктора привода кривошипа кулисного конвейера имеет несимметричное правое расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

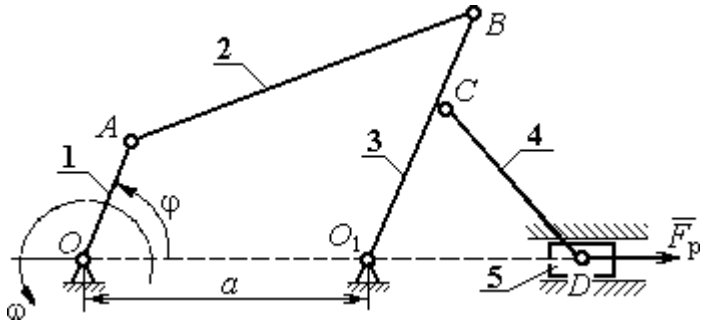
Варианты исходных данных механизма кулисного конвейера для варианта задания № 10

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Размеры звеньев механизма и характерные расстояния, м	OA	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
	O_1B	1,35	1,45	1,6	1,6	1,8	1,55	1,45	1,75	1,45	1,4
	BC	0,5	0,6	0,7	0,8	0,45	0,35	0,55	0,65	0,75	0,8
	a	0,8	0,85	0,9	0,95	1,05	0,75	0,65	0,85	1,1	1,2
	b	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,95	0,95	1,05	0,6	0,5
Угол поворота кривошипа, град	φ	20	35	60	75	120	150	210	240	295	330
Частота вращения кривошипа, об/мин	n	120	130	140	150	160	170	180	190	110	100
Массы звеньев механизма, кг	m_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	m_3	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	m_4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
	m_5	25	28	30	32	35	37	40	43	45	49
Моменты инерции звеньев относит. центров масс, кг·м^2	J_1	1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3
	J_2	0,2	0,25	0,3	0,35	0,1	0,15	0,18	0,22	0,26	0,32
	J_3	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	J_4	1,1	1,3	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3
Сила сопротивления, кН	$F_р$	6	5	4	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10
Передаточное число редуктора	u	2	3,1	4	5	6,3	7,1	4,5	5,6	3,3	3,9
Предел прочности материала вала, МПа	$\sigma_В$	650	700	750	800	850	900	670	770	870	600

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим последовательность выполнения расчетно-графической работы на примере условной схемы пятизвенного плоского механизма с симметричной компоновкой узла ведомого вала кривошипа (рис. 1).

Пятизвенный механизм



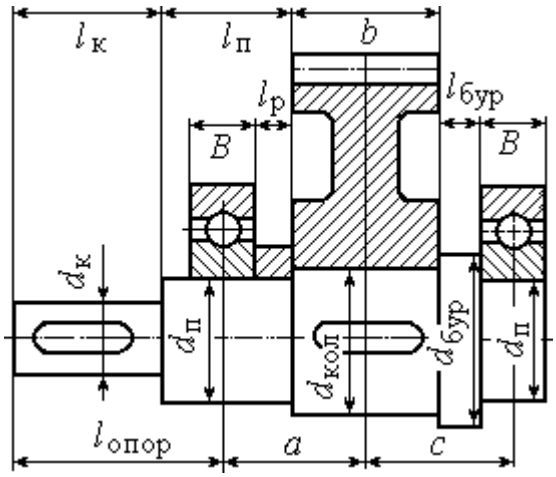


Рис. 1. Схемы пятизвенного механизма и компоновки узла ведомого вала кривошипа

Механизм состоит из кривошипа 1, шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4 и ползуна 5. Центр масс кривошипа расположен на оси вращения, в точке *O*, центры масс звеньев 2 – 4 – посередине их длин, центр масс звена 5 – в точке *D*. Рабочий ход ползуна справа – налево. Сила сопротивления движению ползуна на

протяжении рабочего хода равна $F_р$. На холостом ходу сила сопротивления составляет 10 % от номинального значения.

Ведомый вал редуктора привода кривошипа механизма имеет симметричное расположение колеса относительно опор вала – подшипников.

Данные для кинематического и динамического расчета механизма приведены в табл. 1 – 2.

Таблица 1

Кинематические характеристики механизма

Размеры звеньев механизма						Угол поворота кривошипа, φ, град	Частота вращения кривошипа, n, об/мин
a, м	OA, м	AB, м	O_1C, м	BC, м	CD, м		
0,4	0,1	0,4	0,15	0,15	0,5	90	95,5

Таблица 2

Параметры динамического расчёта

Массы звеньев, кг					Моменты инерции звеньев, кг·м^2				Сила полезного сопротивления, кН	Передаточное число редуктора	Предел прочности материала вала, МПа
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	J_{01}	J_{S2}	J_{O_13}	J_{S4}	$F_р$	u	$\sigma_В$
5	40	30	50	10	1	2	1	3	16,045	5	640

1. Структурный и кинематический анализ механизма

Структурный анализ механизма

В рассматриваемом механизме (рис. 2, *а*) 5 подвижных звеньев и 7 кинематических пар:

– вращательная кинематическая пара O (рис. 2, *b*) низшего типа 5-го класса образуется неподвижной стойкой 6 и кривошипом 1;

– вращательная кинематическая пара A (рис. 2, c) низшего типа 5-го класса образуется кривошипом 1 и шатуном 2;

– вращательная кинематическая пара B (рис. 2, d) низшего типа 5-го класса образуется шатуном 2 и коромыслом 3;

– вращательная кинематическая пара O_1 (рис. 2, e) низшего типа 5-го класса образуется коромыслом 3 и стойкой 7;

– вращательная кинематическая пара C (рис. 2, f) низшего типа 5-го класса образуется коромыслом 3 и шатуном 4;

– вращательная кинематическая пара D (рис. 2, g) низшего типа 5-го класса образуется шатуном 4 и ползуном 5;

– поступательная кинематическая пара D_1 (рис. 2, h) низшего типа 5-го класса образуется ползуном 5 и стойкой 8.

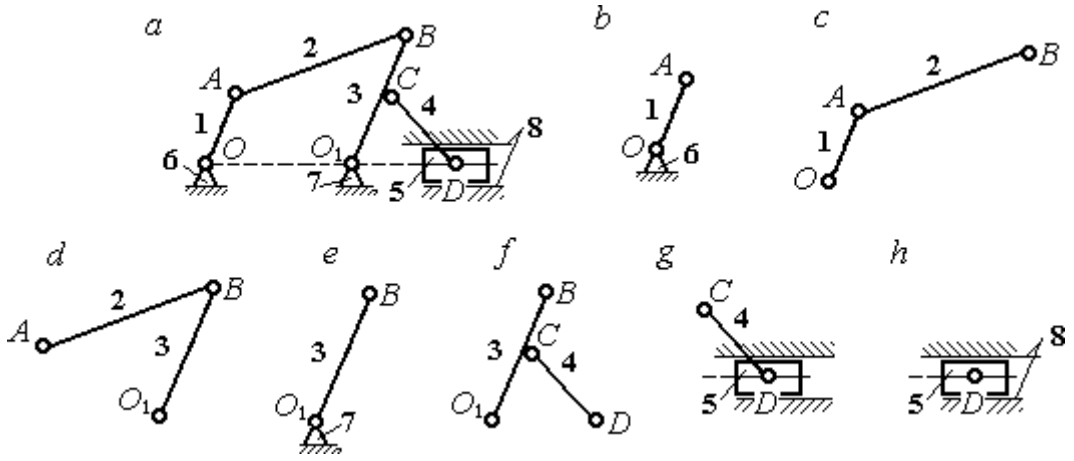


Рис. 2. Кинематические пары механизма:
a – схема механизма; *b* – *h* – звенья, составляющие кинематические пары

Высших кинематических пар в данном механизме нет, так как соединение всех звеньев осуществляется по поверхности. Кинематические пары и звенья, составляющие кинематические пары, показаны на рис. 2.

Степень подвижности плоского механизма определяется по формуле П. Л. Чебышева: $W = 3n - 2\,p_5 = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 1$, где $n = 5$ – число подвижных звеньев механизма, $p_5 = 7$ – число кинематических пар 5-го класса. Следовательно, механизм имеет одно ведущее звено.

В рассматриваемом механизме можно выделить две группы Ассура и начальное звено (рис. 3):

– группа звеньев, состоящая из шатуна 4 и ползуна 5, является группой Ассура II класса, второго вида (ползун – поводок), рис. 3, *b*;

– группа звеньев, состоящая из коромысла 3 и шатуна 2, является группой Ассура II класса, первого вида (двухповодковая группа), рис. 3, *c*;

– кривошип 1 вместе со стойкой 6 образуют начальное звено или начальный механизм I класса, рис. 3, *d*.

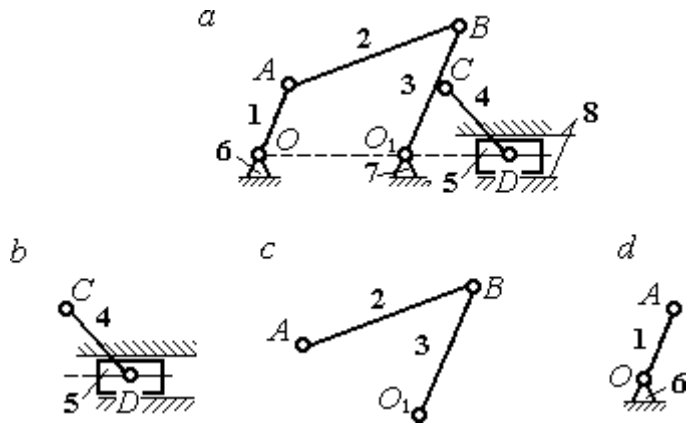


Рис. 3. Группы Ассура механизма:
a – схема механизма; *b*, *c* – группы Асура; *d* – начальное звено

Схема образования механизма группами Ассура:

$$(1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (4, 5).$$

К первому (ведущему) звену присоединяется группа Ассура, состоящая из звеньев 2 и 3, образуя раму, имеющую ту же степень подвижности, что и исходный механизм. К группе Ассура, состоящей из звеньев 2 и 3, присоединяется группа Ассура, состоящая из звеньев 4 и 5. При этом степень подвижности образованного механизма не увеличивается.

Представленный механизм включает начальный механизм I класса и две группы Ассура II класса, в результате чего является механизмом II класса.

Результаты структурного анализа механизма приводятся в табл. 3 – 4.

Таблица 3

Анализ кинематических пар

Обозначение кинематической пары	O	A	B	O_1	C	D	D_1
Звенья, образующие пару	1 – 6	1 – 2	2 – 3	3 – 7	3 – 4	4 – 5	5 – 8
Наименование пары	Вращательная, низшая						Поступательная, низшая
Класс пары	5 класс						

Таблица 4

Анализ групп Ассура

Группы Ассура	4 – 5	2 – 3	1
Наименование группы Ассура	Ползун-поводок	Двухповодковая	Начальное звено
Класс групп Ассура	II класс	II класс	I класс
Класс механизма	Механизм II класса		

Построение плана механизма

Построение плана механизма начинается с определения масштабного коэффициента длины. Выберем для плана механизма стандартный масштаб, например 1:4. Масштаб выбирается таким образом, чтобы длина самого большого звена механизма на чертеже не превышала 100 – 150 мм. При выбранном масштабе длина отрезка l_{CD}, изображающего на чертеже звено CD максимальной длины 0,5 м, составит: $l_{CD} = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125$ м = 125 мм и находится в пределах допустимых границ длин. Масштабный коэффициент длины рассчитывается как отношение $k_l = \frac{0{,}5}{125} = 0{,}004 \ \frac{\text{м}}{\text{мм}}$.

Определяем длины звеньев на чертеже с учётом масштабного коэффициента:

$$l_{OA} = \frac{OA}{k_l} = \frac{0{,}1}{0{,}004} = 25 \text{ мм}, \qquad l_{CD} = \frac{CD}{k_l} = \frac{0{,}5}{0{,}004} = 125 \text{ мм},$$

$$l_{AB} = \frac{AB}{k_l} = \frac{0{,}4}{0{,}004} = 100 \text{ мм}, \qquad l_a = \frac{a}{k_l} = \frac{0{,}4}{0{,}004} = 100 \text{ мм},$$

$$l_{O_1C} = \frac{O_1C}{k_l} = \frac{0{,}15}{0{,}004} = 37{,}5 \text{ мм}, \quad l_{BC} = \frac{BC}{k_l} = \frac{0{,}15}{0{,}004} = 37{,}5 \text{ мм}.$$

Порядок построения положения механизма таков:

1. Первоначально на чертеже фиксируем неподвижные точки O и O_1. Поставим на свободном поле чертежа точку O_1, затем, отложив расстояние a, поставим точку O_2.

2. Радиусом l_{OA} проведём окружность, по которой будет перемещаться точка A, лежащая на кривошипе. Установим заданное положение кривошипа под углом $\varphi = 90^\circ$ и получим положение точки A (начальное положение и направление отсчёта угла показано на схеме механизма).

3. Из точки A проводим дугу радиусом l_{AB}, затем из точки O_1 дугу радиусом $l_{O_1B} = l_{O_1C} + l_{CB}$. В точке пересечения ставим точку B. Прямая линия, соединяющая точки A и B, определяет положение шатуна 2.

4. Из точки C, находящейся на средине коромысла 3, проводим дугу окружности радиусом l_{DC} до пересечения её с продолжением линии OO_1. Точка пересечения D определяет положение ползуна 5.

План механизма в масштабе 1: 4 показан на рис. 4.

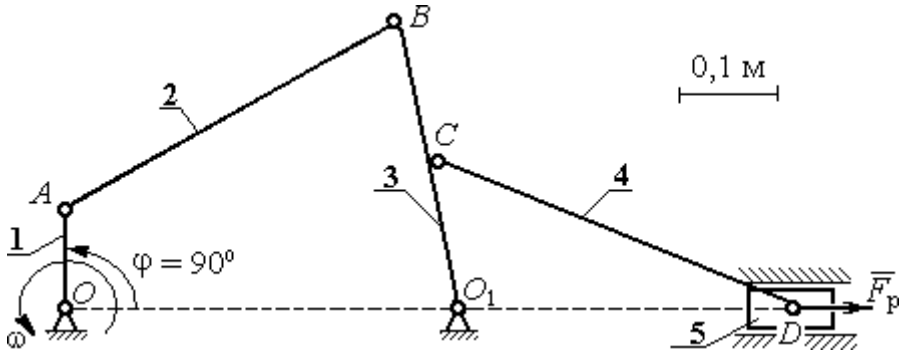


Рис. 4. План механизма в масштабе 1:4

Построение плана скоростей механизма

Построение начинаем с определения модуля скорости точки *A* ведущего звена 1 – кривошипа.

Вычисляем угловую скорость кривошипа ω, рад/с, по заданной его частоте вращения *n*, об/мин: $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 95{,}5}{30} = 10$ рад/с. Вычисляем модуль скорости точки *A* кривошипа: $V_A = \omega \cdot O_1A = 10 \cdot 0{,}1 = 1$ м/с. Длину вектора скорости $\vec{V}_A$ точки *A* на плане скоростей принимаем равной 100 мм. Вычисляем масштаб плана скоростей: $k_v = \frac{V_A}{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ (мм/с)/м.

Точка *B* принадлежит как звену *AB* (шатун 2), совершающему плоскопараллельное движение, так и звену O_1B (коромысло 3), вращающемуся вокруг неподвижного центра O_1 (см. рис. 4). Скорость точки *B* звена *AB*, равна векторной сумме скорости полюса, например точки *A*, и скорости точки *B* во вращательном движении звена *AB* по отношении к полюсу. Тогда для определения скорости точки *B* имеем первое векторное равенство: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, где $\vec{V}_B$ – вектор скорости точки *B*; $\vec{V}_A$ – вектор скорости точки *A*, известный по величине и направлению; $\vec{V}_{BA}$ – вектор скорости точки *B* во вращательном движении звена *AB* по отношении к полюсу *A*. Известно, что вектор скорости $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярен линии *AB*.

С другой стороны, в силу того, что точка *B* принадлежит звену O_1B, вращающемуся вокруг неподвижного центра O_1, скорость точки *B* может быть найдена из второго векторного равенства $\vec{V}_B = \vec{V}_{BO_1}$, где $\vec{V}_{BO_1}$ – вектор скорости точки *B* при вращении звена BO_1 вокруг центра O_1. Вектор $\vec{V}_{BO_1}$ (и, следовательно, вектор $\vec{V}_B$) перпендикулярен линии BO_1.

Проведём построение векторов на плане скоростей (рис. 5). Выберем в качестве полюса плана скоростей точку p_v, которую изображаем на поле чертежа в удобном для построения месте. Изобразим вектор скорости $\vec{V}_A$, направив его из

точки p_v. При заданном положении кривошипа вектор $\vec{V}_A$ на плане скоростей горизонтален. Направление вектора $\vec{V}_A$ перпендикулярно кривошипу O_1A в сторону его вращения. Длина вектора на чертеже устанавливается в соответствии с масштабным коэффициентом (100 мм). В конце построенного вектора поставим точку *a*. Таким образом, вектор $\vec{V}_A$ на плане скоростей изображается отрезком $p_v a$ (см. рис. 5).

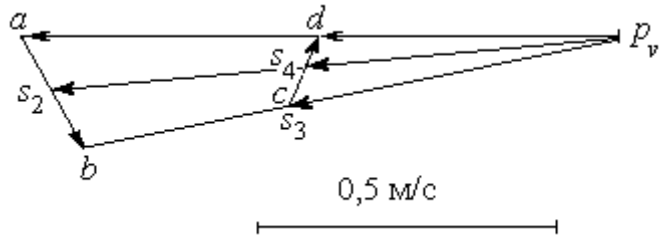


Рис. 5. План скоростей механизма для угла поворота кривошипа φ = 90°

Далее, из точки *a* направляем вектор $\vec{V}_{BA}$, перпендикулярно линии звена *AB*. Величина вектора $\vec{V}_{BA}$ неизвестна и потому вектор скорости $\vec{V}_B$ найти невозможно. Для того, чтобы его найти, построим вектор $\vec{V}_B$ в соответствии со вторым векторным уравнением. Из него следует, что величина и направление вектора $\vec{V}_B$ совпадает с величиной и направлением вектора $\vec{V}_{BO_1}$, который перпендикулярен линии звена BO_1. Проведём из полюса p_v линию, перпендикулярную BO_1 до пересечения её с линией, вдоль которой направлен вектор $\vec{V}_{BA}$. Обозначим пересечение этих линий точкой *b*. Вектор, проведённый из полюса p_v в точку *b*, равен вектору скорости $\vec{V}_B$. Модуль скорости точки *B* найдём измерив длину отрезка $p_v b$ на плане скоростей (в миллиметрах) и умножив её на масштабный коэффициент плана скоростей: $V_B = p_v b \cdot k_v = 92 \cdot 0{,}01 = 0{,}92$ м/с.

Скорость точки *B* во вращательном движении звена *AB* вокруг полюса *A* V_{BA} найдём измерив длину отрезка *ab* на плане скоростей и умножив её на величину масштабного коэффициента $V_{BA} = ab \cdot k_v$.

Угловая скорость ω_2 звена *AB* определяется как отношение $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{BA} = \frac{ab \cdot k_v}{BA} =$

$\frac{18 \cdot 0{,}01}{0{,}4} = 0{,}45$ рад/с.

Угловая скорость вращения коромысла BO_1: $\omega_3 = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{0{,}92}{0{,}3} = 3{,}06$ рад/с.

Точка C принадлежит коромыслу BO_1. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен линии BO_1 и по модулю равен: $V_C = \omega_3 \cdot CO_1 = 3{,}06 \cdot 0{,}15 = 0{,}46$ см/с.

Точке C механизма, являющейся срединой коромысла BO_1, на плане скоростей соответствует точка c, лежащая на средине отрезка $p_v b$, изображающего скорость точки B (так как скорость точки C механизма направлена так же как скорость точки B, но по величине в два раза её меньше).

Величина и направление $\vec{V}_D$ скорости точки D (ползуна 5) находится с учётом плоскопараллельного движения звена CD на основании векторной формулы: $\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}$. По определению вектор $\vec{V}_{DC}$ скорости точки D при вращении звена CD вокруг полюса C направлен перпендикулярно звену CD. Тогда на плане скоростей из точки C проводим прямую, перпендикулярную линии CD, и так как точка D (ползун 5) движется горизонтально из полюса p_v проводим горизонтальную прямую, параллельную линии движения ползуна OO_1. Точка d пересечения этих прямых на плане скоростей определяет конец вектора $\vec{V}_D$. Для того, чтобы найти модуль скорости, измерим расстояние $p_v d$ и умножим его на масштабный коэффициент скоростей. Получим $V_D = p_v d \cdot k_v = 44 \cdot 0{,}01 = 0{,}44$ м/с.

Угловая скорость звена 4 равна $\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC}$. Модуль скорости точки D V_{DC} при вращении звена CD вокруг полюса C равен измеренному на плане скоростей расстоянию dc и умноженному на масштабный коэффициент $\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC} = \frac{dc \cdot k_v}{DC} =$

$\frac{8 \cdot 0{,}01}{0{,}5} = 0{,}16$ рад/с.

Найдём скорости центров масс звеньев механизма. Полагая, что центры масс звеньев механизма расположены в средине соответствующих отрезков, отметим

эти точки на плане скоростей. Для того, чтобы на плане скоростей найти скорость центра масс звена AB механизма, разделим пополам отрезок ab. Получим точку s_2. Скорость центра масс звена AB равна расстоянию $p_v s_2$, умноженному на масштабный коэффициент: $V_{S_2} = p_v s_2 \cdot k_v = 96 \cdot 0{,}01 = 0{,}96$ м/с.

Аналогично, разделив пополам отрезки $p_v b$, cd на плане скоростей, получим точки s_3, s_4, которые определяют скорости центров масс, соответственно, звена 3 (коромысла) и звена 4 (шатуна). Измерив расстояния $p_v s_3$, $p_v s_4$ и умножив их на масштабный коэффициент, получим скорости центров масс: $V_{S_3} = p_v s_3 \cdot k_v = 46 \cdot 0{,}01 = 0{,}46$ м/с, $V_{S_4} = p_v s_4 \cdot k_v = 44 \cdot 0{,}01 = 0{,}44$ м/с.

Результаты расчётов скоростей центров масс звеньев механизма и угловых скоростей звеньев приведены в табл. 5.

Таблица 5

Абсолютные скорости центров масс и угловые скорости звеньев

Звено	AB	BO_1	CD	Ползун
Обозначение скорости центра масс звена	V_{S_2}	V_{S_3}	V_{S_4}	V_D
Величина скорости, м/с	0,96	0,46	0,44	0,44
Обозначение угловой скорости звена	ω_2	ω_3	ω_4	–
Величина угловой скорости, рад/с	0,45	3,06	0,16	–

Построение плана ускорений механизма

Для определения значений линейных и угловых ускорений звеньев механизма построим план ускорений. Принимаем, что ведущее звено 1 движется с постоянной угловой скоростью. В этом случае касательное ускорение точки A равно нулю – $a_A^{\tau} = 0$, полное ускорение $\vec{a}_A$ точки A совпадает с нормальным и потому направлено к оси вращения звена – точке O_1. По величине ускорение $\vec{a}_A$ точки A будет: $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1 A = 10^2 \cdot 0{,}1 = 10$ м/с^2.

Перед началом построений выберем масштабный коэффициент. Примем

длину вектора ускорения точки A на плане ускорений 100 мм, тогда масштабный коэффициент ускорения: $k_a = \frac{a_A}{100} = \frac{10}{100} = 0{,}1$ (м/с^2)/мм.

Чертёж плана ускорения начинаем с построения ускорения точки A.

Из некоторой точки p_a, называемой полюсом плана ускорений и взятой на чертеже в произвольном месте, направим вектор $\vec{a}_A$ вертикально вниз, что соответствует выбранному вертикальному положению кривошипа. С учётом масштабного коэффициента ускорений длина вектора ускорения точки A на чертеже 100 мм. В конце вектора поставим стрелку и точку a (рис. 6). Ускорение точки B находим в соответствии с векторной формулой: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A, выбранной за полюс; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B во вращательном движении шатуна AB относительно полюса A. Правило сложения векторов в векторной формуле определения ускорения точки B на плане ускорений выглядит следующим образом. К концу вектора, изображающего на чертеже ускорение $\vec{a}_A$, присоединяем вектор, изображающий ускорение $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, а к его концу – вектор, изображающий ускорение $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$. Тогда вектор, проведённый из начала первого вектора в конец последнего, представляет собой сумму векторов.

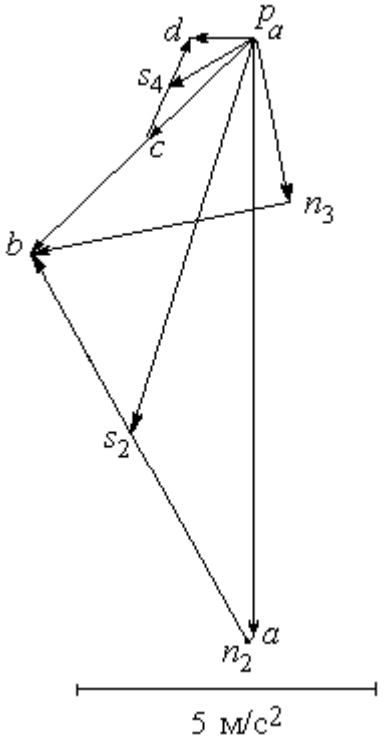


Рис. 6. План ускорений механизма для угла поворота кривошипа φ = 90º

Проведём необходимые построения для определения ускорения точки B. Ускорение $\vec{a}_A$ на чертеже изображается отрезком $p_a a$. Модуль вектора нормальной

составляющей ускорения точки B: $a^n_{BA} = \omega_2^2 \cdot AB = 0{,}45^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м/с^2. На плане ускорений это будет отрезок длиной $\frac{a^n_{BA}}{k_a} = \frac{0{,}08}{0{,}1} = 0{,}8$ мм. Отложим на чертеже из точки a отрезок длиной 0,8 мм вдоль линии, параллельной звену AB механизма, в сторону, куда на плане механизма направлен вектор. В конце поставим точку n_2. Отрезок an_2 на плане ускорений изображает нормальную составляющую ускорения точки B во вращательном движении шатуна AB относительно полюса A. Здесь следует заметить, что расчётная величина отрезка an_2 настолько мала, что на чертеже показать его точно невозможно. Можно считать, что вектор нормальной составляющей ускорения точки B $\vec{a}^n_{BA}$ и, следовательно, отрезок an_2 на плане ускорений равны нулю. На рис. 6 отрезок an_2 показан для того, чтобы сохранить правило последовательного построения суммы векторов.

Далее необходимо из конца отрезка an_2 провести линию, параллельную той, вдоль которой на плане механизма направлен вектор $\vec{a}^\tau_{BA}$ – перпендикулярно линии звена BA (то есть, перпендикулярно отрезку an_2). Однако вычислить ускорение точки B, пользуясь одним этим построением, невозможно, так как величина касательного ускорения a^τ_{BA} неизвестна. Воспользуемся тем, что точка B принадлежит звену 3 – коромыслу, совершающему вращательное движение вокруг неподвижного центра O_1. Следовательно, полное ускорение точки B может быть представлено как сумма его нормального и касательного составляющих – $\vec{a}_B = \vec{a}^n_B + \vec{a}^\tau_B$, где величина нормальной составляющей ускорения равна $a^n_B = \omega_3^2 \cdot O_1B = 3{,}06^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}84$ см/с^2, а направление – вдоль BO_1 от точки B в сторону O_1. Относительно касательной составляющей $\vec{a}^\tau_B$ ускорения точки B известно только, что она направлена перпендикулярно BO_1. Вычислим длину отрезка, изображающего на чертеже нормальную составляющую ускорения точки B, как отношение $\frac{a^n_B}{k_a} = \frac{2{,}84}{0{,}1} = 28{,}4$ мм и из полюса p_a на чертеже отложим его

параллельно звену BO_1. В конце отрезка поставим точку n_3. В соответствии с правилом сложения векторов, из точки n_3 – конца отрезка $p_a n_3$, изображающего ускорение $\vec{a}_B^{\,n}$, проводим линию, перпендикулярную этому отрезку. Это линия перпендикулярна звену BO_1 и вдоль неё направлена касательная составляющая $\vec{a}_B^{\,\tau}$ ускорения точки *B*. Находим точку пересечения двух перпендикуляров – к отрезку $p_a n_3$ и к отрезку an_2 и обозначим её точкой *b*. Тогда отрезок, проведённый из полюса p_a в точку *b*, изображает на плане ускорений полное ускорение $\vec{a}_B$ точки *B* механизма. Величину ускорения точки *B* найдём, измерив на чертеже длину отрезка $p_a b$ и умножив его на масштабный коэффициент: $a_B = p_a b \cdot k_a = 52 \cdot 0{,}1 = 5{,}2$ м/с^2.

Отрезок $n_3 b$ изображает на чертеже касательную составляющую ускорения $\vec{a}_B^{\,\tau}$ точки *B* . Измеряем длину отрезка $n_3 b$ ($n_3 b = 43$ мм), тогда угловое ускорение звена 3: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_B^{\tau}}{BO_1} = \dfrac{n_3 b \cdot k_a}{BO_1} = \dfrac{43 \cdot 0{,}1}{0{,}3} = 14{,}3$ рад/с^2. Угловое ускорение звена 2 находится аналогично. На чертеже измеряем отрезок $n_2 b$, который изображает ускорение $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ ($n_2 b = 74$ мм). Тогда угловое ускорение звена 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_{BA}^{\tau}}{BA} = \dfrac{n_2 b \cdot k_a}{BA} = \dfrac{74 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 18{,}5$ рад/с^2.

Точка *C* принадлежит звену 3, совершающему вращательное движение вокруг неподвижного центра O_1. Направление ускорения точки *C* такое же как и у точки *B*, которое на плане ускорений показано отрезком $p_a b$. Так как точка *C* на плане механизма находится в средине звена BO_1, соответствующая ей точка *c* на плане ускорений находится на средине отрезка $p_a b$. Тогда отрезок $p_a c$ изображает ускорение точки *C*.

Ускорение точки *D* находим на основании векторной формулы $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^{\,n} + \vec{a}_{DC}^{\,\tau}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки *C*, выбранной за полюс; $\vec{a}_{DC}^{\,n}$, $\vec{a}_{DC}^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки *D* во вращательном движении шатуна *DC* относительно полюса *C*.

Проведём необходимые построения. Заметим сразу, что направление ускорения $\vec{a}_D$ точки D ползуна 5 известно. Ускорение направлено вдоль линии OO_1 на плане механизма. Это означает, что на плане ускорений ускорение точки D изображается горизонтальным отрезком, исходящим из центра p_a. Модуль вектора нормальной составляющей ускорения точки D $a^n_{DC} = \omega_4^2 \cdot DC = 0{,}16^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}01$ м/с^2. На плане ускорений это будет отрезок, длиной $\frac{a^n_{DC}}{k_a} = \frac{0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1$ мм. Можно считать, что вектор нормальной составляющей ускорения точки D $\vec{a}^n_{DC}$ и соответствующий ему отрезок на плане ускорений равны нулю. Тогда, исходя из векторной формулы сложения ускорений и с учётом нулевого вектора $\vec{a}^n_{DC}$, на плане ускорений из конца отрезка $p_a c$, изображающего вектор ускорения $\vec{a}_C$, необходимо провести линию, перпендикулярную звену CD, вдоль которой на плане механизма направлен вектор $\vec{a}^\tau_{DC}$. Находим точку пересечения этой линии с горизонтальной прямой, проведённой из полюса ускорений, вдоль которой направлен вектор ускорения точки D. Обозначим точку пересечения d. Отрезок прямой $p_a d$ изображает на плане ускорений ускорение точки D. Замеряем длину отрезка $p_a d$ ($p_a d$ = 13 мм) и находим ускорение точки D: $a_D = p_a d \cdot k_a = 13 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$ м/с^2.

Замеряем на плане ускорений длину отрезка cd, изображающего ускорение $\vec{a}^\tau_{DC}$ (cd = 18 мм), и находим угловое ускорение звена 4: $\varepsilon_4 = \frac{a^\tau_{DC}}{DC} = \frac{cd \cdot k_a}{DC} = \frac{18 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 3{,}6$ рад/с^2.

Определим ускорения центров масс звеньев механизма.

Разделим пополам отрезок ab на плане ускорений, обозначим середину отрезка точкой s_2 и соединим с полюсом p_a. Отрезок $p_a s_2$ изображает ускорение центра масс звена 2 – кривошипа AB. Длина отрезка $p_a s_2$ = 70 мм. Ускорение центра масс звена 2: $a_{S2} = p_a s_2 \cdot k_a = 70 \cdot 0{,}1 = 7$ м/с^2. Аналогично, точка s_4, лежащая на средине отрезка cd, изображает центр масс звена 4 шатуна CD. Ускорение центра

масс звена 4: $a_{S4} = p_a s_4 \cdot k_a = 18 \cdot 0{,}1 = 1{,}8$ м/с^2.

Все построения плана ускорений приведены на рис. 6.

Результаты вычислений ускорений центров масс звеньев, а также угловых ускорений звеньев механизма приводятся в табл. 6.

Таблица 6

Ускорения центров масс звеньев механизма и угловые ускорения звеньев

Звено	AB	BO_1	DC	Ползун
Обозначение ускорения центра масс звена	a_{S_2}	a_{S_3}	a_{S_4}	a_D
Величина ускорения, м/с^2	7	2,6	1,8	1,3
Обозначение углового ускорения звена	ε_2	ε_3	ε_4	–
Величина углового ускорения, рад/с^2	18,5	14,3	3,6	–

Определение движущего момента, приведённого к валу кривошипа, по методу Н. Е. Жуковского

Определим уравновешивающую силу, приведённую к крайней точке A кривошипа.

Вычисляем силы тяжести звеньев.

$$G_2 = m_2 g = 40 \cdot 9{,}8 = 392 \text{ Н}, \quad G_3 = m_3 g = 30 \cdot 9{,}8 = 294 \text{ Н},$$

$$G_4 = m_4 g = 50 \cdot 9{,}8 = 490 \text{ Н}, \quad G_5 = m_5 g = 10 \cdot 9{,}8 = 98 \text{ Н}.$$

Вычисляем модули сил инерции, действующих на механизм.

$$F_2^{\text{ин}} = m_2 a_{S2} = 40 \cdot 7 = 280 \text{ Н}, \quad F_3^{\text{ин}} = m_3 a_{S2} = 30 \cdot 2{,}6 = 78 \text{ Н},$$

$$F_4^{\text{ин}} = m_4 a_{S4} = 50 \cdot 1{,}8 = 90 \text{ Н}, \quad F_5^{\text{ин}} = m_5 a_D = 10 \cdot 1{,}3 = 13 \text{ Н}.$$

Вычисляем модули моментов сил инерции.

$$M_2^{\text{ин}} = J_{S2} \varepsilon_2 = 2 \cdot 18{,}5 = 37 \text{ Н·м}, \quad M_3^{\text{ин}} = J_{S3} \varepsilon_3 = 1 \cdot 14{,}3 = 14{,}3 \text{ Н·м},$$

$$M_4^{\text{ин}} = J_{S4} \varepsilon_4 = 3 \cdot 3{,}6 = 10{,}8 \text{ Н·м}.$$

Построим «жёсткий рычаг» Жуковского. Изобразим план скоростей механизма, повернув его на 90º (рис. 3.7). Приложим в точках, изображающих на повернутом плане скоростей центры масс звеньев механизма, силы тяжести и силы инерции. Направление сил инерции противоположно направлению ускорений центров масс, показанных на плане ускорений. Моменты сил инерции, действующие на звенья механизма, раскладываем на две антипараллельные силы, приложенные к крайним точкам звена, перпендикулярно ему.

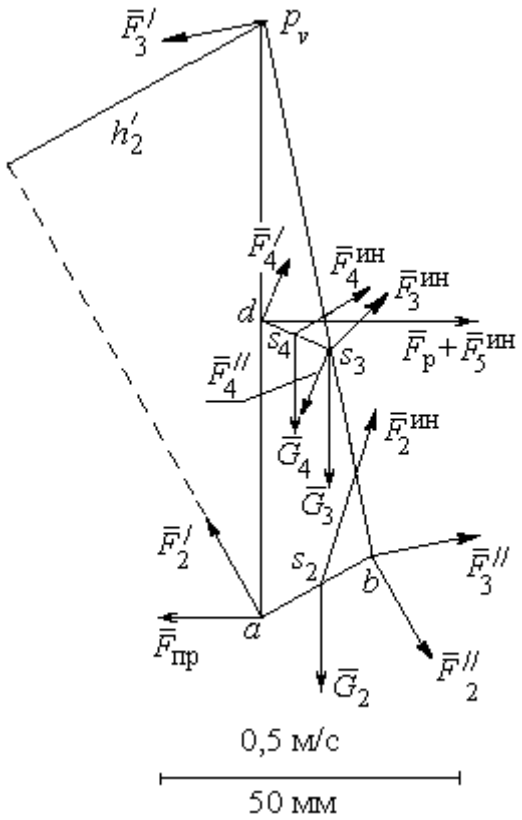


Рис. 3.7. «Жёсткий рычаг» Н. Е. Жуковского

$$F_2' = F_2'' = \frac{M_2^{ин}}{AB} = \frac{37}{0{,}4} = 92{,}5 \text{ Н},$$

$$F_3' = F_3'' = \frac{M_3^{ин}}{O_1B} = \frac{14{,}3}{0{,}3} = 48 \text{ Н},$$

$$F_4' = F_4'' = \frac{M_4^{ин}}{CD} = \frac{10{,}8}{0{,}5} = 21{,}6 \text{ Н}.$$

Заданное положение кривошипа осуществляется на рабочем ходу поршня. Сила полезного сопротивления $F_р$ направлена в сторону, противоположную движению поршня.

Рычаг Н. Е. Жуковского приведён на рис. 3.7. На рисунке отмечены силы тяжести и силы инерции звеньев, приложенные в точках плана скоростей s_2 – s_4, соответствующих положению центров масс этих звеньев. Показаны пары сил инерции $(\vec{F}_2', \vec{F}_2'')$, $(\vec{F}_3', \vec{F}_3'')$, $(\vec{F}_4', \vec{F}_4'')$, образующие главные моменты сил инерции $M_2^{ин}$, $M_3^{ин}$, $M_4^{ин}$, приложенные ко 2, 3 и 4 звеньям.

Применение «рычага Жуковского» для определения приведённой силы заключается в составлении уравнения равновесия в форме равенства нулю суммы моментов заданных сил относительно полюса p_v:

$$-F_{пр} \cdot h_{пр} - F_2' \cdot h_2' + F_2'' \cdot h_2'' - G_2 \cdot h_{G2} + F_2^{ин} \cdot h_2 + F_3'' \cdot h_3'' - F_4' \cdot h_4' + F_4'' \cdot h_4'' -$$

$$-G_4 \cdot h_{G4} - G_3 \cdot h_{G3} + (F_{\text{р}} + F_5^{\text{ин}})h_5 + F_4^{\text{ин}} \cdot h_4 + F_3^{\text{ин}} \cdot h_3 = 0.$$

При вычислении моментов сил плечи сил определяются графически с учётом масштабного коэффициента плана скоростей. Так при вычислении момента приведённой силы относительно полюса p_v плечом $h_{\text{пр}}$ силы $\vec{F}_{\text{пр}}$ на плане рычага Жуковского является отрезок $p_v a$, равный, согласно масштабному коэффициенту плана скоростей, 100 мм. Тогда $h_{\text{пр}} = p_v a = 100$ мм.

На рис. 3.7, в качестве примера, показан способ вычисления плеча h_2' силы $\vec{F}_2'$ – как кратчайшее расстояние от полюса p_v до линии действия силы $\vec{F}_2'$. Измерив это расстояние, найдём $h_2' = 52$ мм. Аналогичным образом в уравнении равновесия вычисляются плечи остальных сил.

В результате получим равенство

$$F_{\text{пр}} \cdot 100 = -92{,}5 \cdot 52 + 92{,}5 \cdot 21 - 392 \cdot 6 + 280 \cdot 31 + 48 \cdot 92 - 21{,}6 \cdot 23 + 21{,}6 \cdot 33 -$$

$$-490 \cdot 3 - 294 \cdot 7 + (16045 + 13)44 + 90 \cdot 42 + 78 \cdot 36.$$

Откуда $F_{\text{пр}}$ =7177 Н. Величина движущего момента, приведенного к валу кривошипа, находится из формулы: $M_{\text{дв}} = F_{\text{пр}} \cdot O_1 A$ = 7177·0,1 = 717,7 Н·м.

Найденный движущий момент является исходной величиной для конструирования ведомого вала кривошипа.

2. Конструирование вала редуктора
Предварительный расчет зубчатой передачи

Крутящий момент на валу $T_2 = M_{\text{дв}} = 717{,}7$ Н·м.

Твердость материала колеса по Бринеллю (приближённо)

$$HB = 0{,}285\sigma_{\text{в}} = 0{,}285 \cdot 640 = 182{,}4 \text{ МПа}.$$

Предел контактной выносливости при базовом числе циклов

$$\sigma_{H\,\text{lim}} = 2\,HB + 70 = 2 \cdot 182{,}4 + 70 = 434{,}8 \text{ МПа}.$$

При долговременной передаче принимаем:

– коэффициент долговечности $K_{HL} = 1{,}4$,

– коэффициент безопасности $S_H = 1{,}15$.

Допустимое контактное напряжение в зацеплении колеса

$$\sigma_{H\,adm} = \frac{\sigma_{H\,\lim}}{S_H} K_{HL} = \frac{434{,}8}{1{,}15} \cdot 1{,}4 = 529{,}3 \text{ МПа}.$$

Выберем средние значения коэффициента неравномерности нагрузки на венец зубчатого колеса $K_{H\beta}$ и коэффициента ширины колеса относительно межосевого расстояния ψ_{ba}. При симметричном расположении колеса принимаем:

$$K_{H\beta} = 1{,}1; \quad \psi_{ba} = 0{,}4.$$

Межосевое расстояние передачи

$$a_w = K_a (u+1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta}}{\psi_{ba} u^2 \sigma^2_{H\,adm}}} = 495(5+1) \sqrt[3]{\frac{717{,}7 \cdot 1{,}1}{0{,}4 \cdot 5^2 \cdot 529{,}3^2}} = 194{,}7 \text{ мм}.$$

Округляем расчётное межосевое расстояние до ближайшего большего значения из ряда межосевых расстояний. Принимаем $a_w = 200$ мм.

Делительный диаметр колеса

$$d_2 = \frac{2a_w u}{u+1} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{5+1} = 333{,}3 \text{ мм}.$$

Ширина ступицы колеса и длина распорной втулки

$$b = \psi_{ba} a_w = 0{,}4 \cdot 200 = 80 \text{ мм}, \quad l_р = 0{,}15b = 0{,}15 \cdot 80 = 12 \text{ мм}.$$

Полученные расчетные результаты ширины ступицы колеса b и длины распорной втулки $l_р$ не требуют округления, так как совпадают со значениями ряда номинальных линейных размеров *R*-40.

Принимаем $b = 80$ мм, $l_р = 12$ мм.

Конструирование вала

Примем допустимое касательное напряжение кручения вала $\tau_{к\,adm} = 20$ МПа.

Диаметр консольной части вала

$$d_{к} = \sqrt[3]{\frac{T_2 \cdot 10^3}{0{,}2\tau_{к\,adm}}} = \sqrt[3]{\frac{717{,}7 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 20}} = 56{,}4 \text{ мм}.$$

Расчётное значение диаметра консольной части вала округляем до ближайшего большего значения из ряда *R*-40 номинальных линейных размеров.

Принимаем $d_{к} = 60$ мм.

Длина консольной части вала пропорциональна его диаметру: $l_{к} = (1{,}5 \div 2{,}5)d_{к}$. Выбираем

$$l_{к} = 2d_{к} = 2 \cdot 60 = 120 \text{ мм}.$$

Результат расчёта не требует округления, так как является одним из значений ряда *R*-40 номинальных линейных размеров.

Принимаем $l_{к} = 120$ мм.

При диаметре консольной части вала$d_{к} = 60$ мм высота ступени $t = 3$ мм (приложение, табл. П2). Диаметр вала под подшипник

$$d_{п} = d_{к} + 2t = 60 + 2 \cdot 3 = 66 \text{ мм}.$$

Результат округляем до ближайшего большего числа, кратного 5.

Принимаем $d_{п} = 70$ мм.

Длина ступени вала в месте посадки подшипника пропорциональна диаметру этого участка вала. Выберем минимальный из заданных значений коэффициент пропорциональности. Длина ступеньки вала в месте посадки подшипника

$$l_{п} = 1{,}25d_{п} = 1{,}25 \cdot 70 = 87{,}5 \text{ мм}.$$

Расчётное значение длины ступеньки вала в месте посадки подшипника округляем до ближайшего большего значения из ряда *R*-40 номинальных линейных размеров.

Принимаем $l_{п} = 90$ мм.

При диаметре вала под подшипник $d_{п} = 70$ мм координата фаски подшипника $r = 3{,}5$ мм (см. приложение, табл. П2). Диаметр вала под колесом

$$d_{кол} = d_{п} + 3{,}2r = 70 + 3{,}2 \cdot 3{,}5 = 81{,}2 \text{ мм}.$$

Расчётное значение диаметра вала под колесом округляем до ближайшего большего значения из ряда *R*-40 номинальных линейных размеров.

Принимаем $d_{кол} = 85$ мм.

При диаметре вала под колесом $d_{кол} = 85$ мм фаска ступицы колеса $f = 3$ мм (см. приложение, табл. П2). Диаметр упорного буртика

$$d_{бур} = d_{кол} + 3f = 85 + 3 \cdot 3 = 94 \text{ мм}.$$

Расчётное значение диаметра буртика округляем до ближайшего большего значения из ряда *R*-40 номинальных линейных размеров.

Принимаем $d_{бур} = 95$ мм.

Длина упорного буртика при симметричном расположении колеса относительно опор вала – подшипников

$$l_{бур} = 0{,}15b = 0{,}15 \cdot 80 = 12 \text{ мм}.$$

Принимаем без округления $l_{бур} = 12$ мм.

При диаметре вала в месте посадки подшипника $d_{\text{п}} = 70$ мм ширина подшипника $B = 24$ мм (см. табл. 5).

При переходе от консольной части вала к участку вала под подшипником диаметры участков $d_{\text{к}} = 60$ мм, $d_{\text{п}} = 70$ мм.

Величина ступеньки $t = 0{,}5(d_{\text{п}} - d_{\text{к}}) = 0{,}5(70 - 60) = 5$ мм.

Радиус галтели ступеньки вала пропорционален высоте ступеньки. Выберем среднее значение коэффициента пропорциональности. Радиус галтели

$$R = 0{,}6t = 0{,}6 \cdot 5 = 3 \text{ мм}.$$

В месте установки распорной втулки при переходе от участка вала под левым подшипником к участку под колесом на валу имеется ступенька. Радиус галтели ступеньки вала пропорционален координате фаски распорной втулки, равной координате фаски подшипника. Выберем среднее значение коэффициента пропорциональности. Радиус галтели

$$R = 0{,}6r = 0{,}6 \cdot 3{,}5 = 2{,}1 \text{ мм}.$$

Округляем расчётную величину до ближайшего числа, кратного 5.

Принимаем $R = 2$ мм.

При переходе от участка вала под колесом к буртику, где происходит упор ступицы колеса в буртик, на валу имеется ступенька. Радиус галтели ступеньки вала пропорционален величине фаски ступицы колеса. Радиус галтели

$$R = 0{,}7f = 0{,}7 \cdot 3 = 2{,}1 \text{мм}.$$

Принимаем $R = 2$ мм.

В месте установки правого подшипника при переходе от буртика к участку вала под подшипником на валу имеется ступенька. Радиус галтели ступеньки вала пропорционален координате фаски подшипника. Выберем среднее значение коэффициента пропорциональности. Радиус галтели

$$R = 0{,}6r = 0{,}6 \cdot 3{,}5 = 2{,}1 \text{ мм}.$$

Округляем расчётную величину до ближайшего числа, кратного 5.

Принимаем $R = 2$ мм.

Проверка прочности шпоночного соединения

Диаметр консольной части вала $d_к = 60$ мм, длина $l_к = 120$ мм.

Выбираем размеры призматической шпонки в консольной части вала: ширина $b_ш = 18$ мм; высота $h_ш = 11$ мм; длина $l_ш = 80$ мм; глубина паза в вале $t_1 = 7$ мм (табл. П1).

Рабочая длина шпонки: $l_ш^р = l_ш - b_ш = 80 - 18 = 62$ мм.

Напряжение смятия шпонки и условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{2T_2 \cdot 10^3}{l_ш^р d_к (h_ш - t_1)} = \frac{2 \cdot 717{,}7 \cdot 10^3}{62 \cdot 60(11-7)} = 96{,}5 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

При выборе шпонки под колесом, где диаметр вала $d_{кол} = 85$ мм, ширина ступицы колеса $b = 80$ мм, принимаем по табл. П1 ширину шпонки $b_ш = 22$ мм; высоту $h_ш = 14$ мм; длину $l_ш = 63$ мм; глубину паза в вале $t_1 = 9$ мм. Рабочая длина шпонки: $l_ш^р = l_ш - b_ш = 63 - 22 = 41$ мм.

Напряжение смятия шпонки и условие прочности

$$\sigma_{см} = \frac{2T_2 \cdot 10^3}{l_ш^р d_{кол} (h_ш - t_1)} = \frac{2 \cdot 717{,}7 \cdot 10^3}{41 \cdot 85(14-9)} = 82{,}4 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

3. Проверочный расчёт вала редуктора

Расчетная схема вала. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

Схематическое изображение вала и действующей на него нагрузки в вертикальной и горизонтальной плоскостях приведено на рис. 8, *т*. Показаны предположительно опасные сечения вала: *А*, *Б* – сечения на участках вала, ослабленных вырезом под шпонку; *В*, *Г*, *Д* – сечения по ступенькам вала.

Рассмотрим силовую нагрузку вала при симметричном расположении колеса.

Консольная сила от муфты $F_{\text{м}}=125\sqrt{T_2}=125\sqrt{717,7}=3348,7$ Н.

Силы в зацеплении зубчатой передачи:

– окружная сила $F_t=\dfrac{2T_2\cdot10^3}{d_2}=\dfrac{2\cdot717,7\cdot10^3}{333,3}=4306,6$ Н,

– радиальная сила $F_r=F_t\text{tg}20^\circ=4306,6\cdot0,364=1567,6$ Н.

Для построения эпюр изгибающих моментов вычислим расстояния между точками приложения сил, отнесенных к оси вала

$$l_{\text{опор}}=l_{\text{к}}+l_{\text{п}}-(l_{\text{р}}+0,5B)=120+90-(12+0,5\cdot24)=186 \text{ мм},$$

$$a=0,5b+l_{\text{р}}+0,5B=0,5\cdot80+12+0,5\cdot24=64 \text{ мм},$$

$$c=0,5b+l_{\text{бур}}+0,5B=0,5\cdot80+12+0,5\cdot24=64 \text{ мм}.$$

Эпюра изгибающих моментов M_x в вертикальной плоскости

Условия равновесия вала в вертикальной плоскости (рис. 8, *n*):

$$F_r c-R_{1y}(a+c)=0,\quad -F_r a+R_{2y}(a+c)=0.$$

Находим реакции опор подшипников в вертикальной плоскости:

$$R_{1y}=\frac{F_r c}{(a+c)}=\frac{1567,6\cdot64}{64+64}=783,8 \text{ Н},\quad R_{2y}=\frac{F_r a}{(a+c)}=\frac{1567,6\cdot64}{64+64}=783,8 \text{ Н}.$$

Проверка: $R_{1y}-F_r+R_{2y}=783,8-1567,6+783,8=0.$

На 1-м участке вала $0\le z_1\le l_{\text{опор}}$, $M_{1x}=0.$

Изгибающие моменты в сечении вала *A*, где вал ослаблен шпоночным вырезом, и в сечении *B*, где имеется ступенька вала при переходе от консольной части к участку вала под подшипник, равны нулю: $M_{xA}=M_{xB}=0.$

На 2-м участке вала $0\le z_2\le a$. Эпюра изгибающих моментов

$$M_{2x}=R_{1y}z_2$$

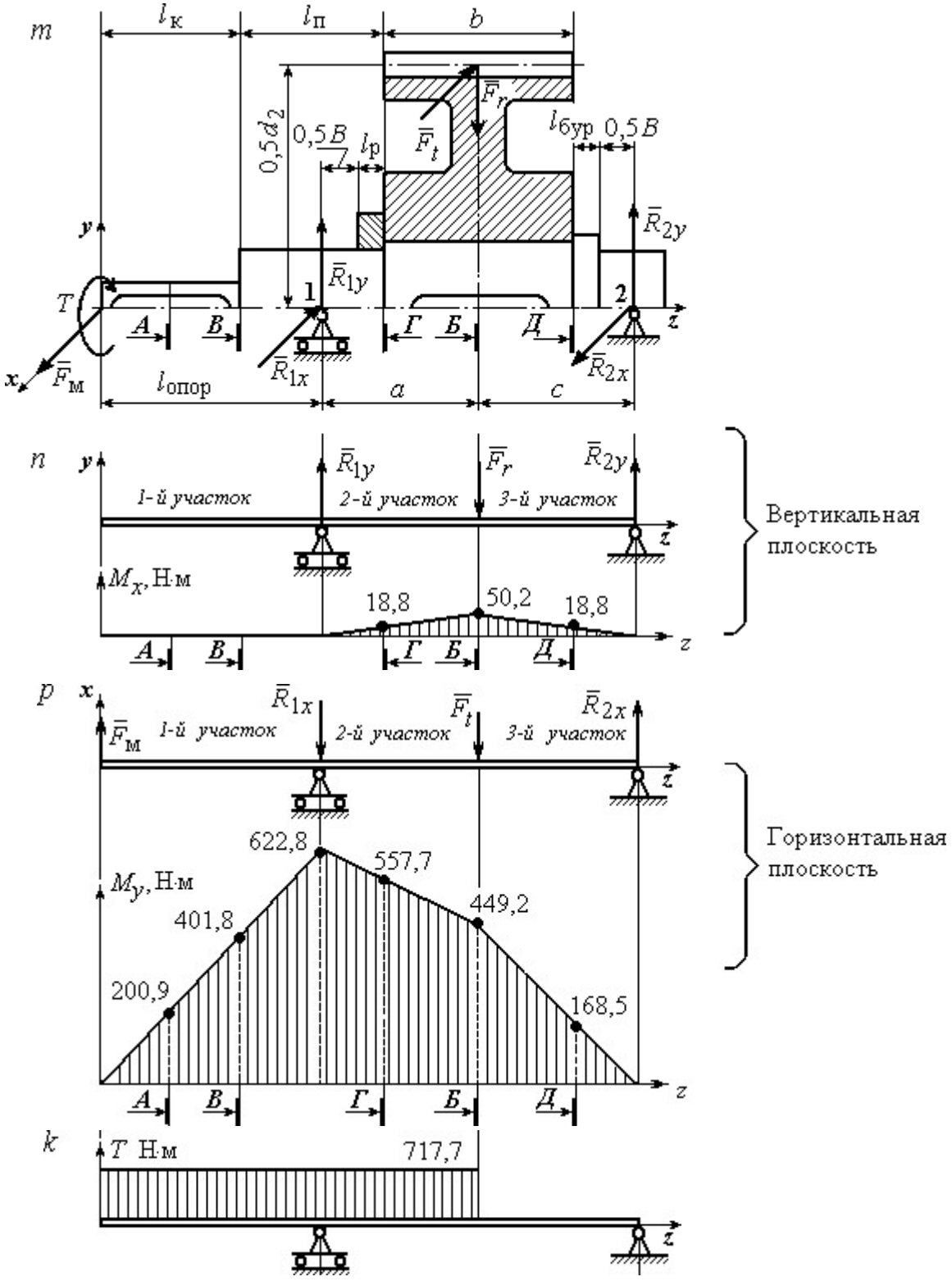


Рис. 8. Расчётная схема вала:
m – нагрузка вала; *n* – проекция нагрузки на вертикальную плоскость
и эпюра изгибающих моментов M_x; *p* – проекция нагрузки
на горизонтальную плоскость и эпюра изгибающих моментов M_y; *k* – эпюра крутящих моментов

В начале участка $z_2 = 0$, $M_{2x} = 0$. В конце участка при $z_2 = a = 64 \cdot 10^{-3}$ м

$$M_{2x} = R_{1y} a = 783{,}8 \cdot 64 \cdot 10^{-3} = 50{,}2 \text{ Н·м}.$$

Изгибающий момент в сечении *Г*, где у вала ступенька перехода от диаметра под подшипник к диаметру под колесо, при $z_{2Г} = a - 0{,}5b = 24$ мм

$$M_{xГ} = R_{1y}(a - 0{,}5b) = 783{,}8 \cdot 24 \cdot 10^{-3} = 18{,}8 \text{ Н·м}.$$

Изгибающий момент в сечении *Б*, где вал ослаблен шпоночным вырезом под колесом, при $z_{2Б} = a = 64$ мм $M_{xБ} = R_{1y} a = 783{,}8 \cdot 64 \cdot 10^{-3} = 50{,}2$ Н·м.

На 3-м участке вала $0 \le z_3 \le c$. Эпюра изгибающих моментов

$$M_{3x} = R_{1y}(z_3 + a) - F_r z_3.$$

В начале 3-го участка при $z_3 = 0$, $M_{3x} = 50{,}2$ Н·м. В конце участка при $z_3 = c = 64 \cdot 10^{-3}$ м, $M_{3x} = 0$.

Изгибающий момент в сечении *Д*, где у вала ступенька при переходе от участка под колесом к буртику, при $z_{3Д} = 0{,}5b = 40$ мм

$$M_{xД} = R_{1y}(0{,}5b + a) - F_r 0{,}5b =$$

$$= 783{,}8(40 + 64)10^{-3} - 1567{,}6 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 18{,}8 \text{ Н·м}.$$

Вид эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости M_x показан на рис. 8, *п*.

Эпюра изгибающих моментов M_y в горизонтальной плоскости

Условия равновесия вала в горизонтальной плоскости (рис. 8, *р*):

$$-F_м(l_{опор} + a + c) + F_t c + R_{1x}(a + c) = 0, \quad -F_м l_{опор} - F_t a + R_{2x}(a + c) = 0.$$

Реакции опор подшипников в горизонтальной плоскости

$$R_{1x} = \frac{1}{(a + c)}\left[F_м(l_{опор} + a + c) - F_t c\right] =$$

$$= \frac{1}{(64 + 64)}\left[3348{,}7(186 + 64 + 64) - 4306{,}6 \cdot 64\right] = 6061{,}5 \text{ Н},$$

$$R_{2x} = \frac{1}{(a + c)}\left[F_м l_{опор} + F_t a\right] =$$

$$= \frac{1}{(64+64)}\left[3348{,}7 \cdot 186 + 4306{,}6 \cdot 64\right] = 7019{,}4 \text{ Н}.$$

Проверка: $F_{\text{м}} - R_{1x} - F_t + R_{2x} = 3348{,}7 - 6061{,}5 - 4306{,}6 + 7019{,}4 = 0.$

На 1-м участке вала $0 \le z_1 \le l_{\text{опор}}$. Эпюра изгибающих моментов

$$M_{1y} = F_{\text{м}} z_1.$$

В начале 1-го участка при $z_1 = 0$, $M_{1y} = 0$.

В конце участка при $z_1 = l_{\text{опор}}$

$$M_{1y} = F_{\text{м}} l_{\text{опор}} = 3348{,}7 \cdot 186 \cdot 10^{-3} = 622{,}8 \text{ Н·м}.$$

Положим координату сечения вала *А*, где вал ослаблен шпоночным вырезом, $z_{1A} = 0{,}5 l_{\text{к}} = 60$ мм. Изгибающий момент в сечении *А*

$$M_{yA} = F_{\text{м}} 0{,}5 l_{\text{к}} = 3348{,}7 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 200{,}9 \text{ Н·м}.$$

Изгибающий момент в сечении *В* при $z_{1B} = l_{\text{к}} = 120$ мм

$$M_{yB} = F_{\text{м}} l_{\text{к}} = 3348{,}7 \cdot 120 \cdot 10^{-3} = 401{,}8 \text{ Н·м}.$$

На 2-м участке вала $0 \le z_2 \le a$. Эпюра моментов

$$M_{2y} = F_{\text{м}} (l_{\text{опор}} + z_2) - R_{1x} z_2.$$

В начале участка при $z_2 = 0$, $M_{2y} = F_{\text{м}} l_{\text{опор}} = 3348{,}7 \cdot 186 \cdot 10^{-3} = 622{,}8$ Н·м.

В конце участка при $z_2 = a = 64 \cdot 10^{-3}$ м

$$M_{2y} = F_{\text{м}} (l_{\text{опор}} + a) - R_{1x} a =$$

$$= 3348{,}7(186+64)10^{-3} - 6061{,}5 \cdot 64 \cdot 10^{-3} = 449{,}2 \text{ Н·м}.$$

Изгибающий момент в сечении *Г* при $z_{2Г} = a - 0{,}5b = 24$ мм

$$M_{yГ} = F_{\text{м}} \left(l_{\text{опор}} + a - 0{,}5b\right) - R_{1x} \left(a - 0{,}5b\right) =$$

$$= 3348{,}7\left(186 + 24\right)10^{-3} - 6061{,}5 \cdot 24 \cdot 10^{-3} = 557{,}7 \text{ Н·м}.$$

Изгибающий момент в сечении *Б* при $z_2 = a = 64 \cdot 10^{-3}$ равен изгибающему моменту в конце 2-го участка $M_{yБ} = 449{,}2$ Н·м.

На 3-м участке вала $0 \le z_3 \le c$. Эпюра изгибающих моментов

$$M_{3y} = F_{\text{м}} (l_{\text{опор}} + a + z_3) - R_{1x} (z_3 + a) - F_t z_3.$$

В начале 3-го участка при $z_3 = 0$

$$M_{3y} = F_{\text{м}}(l_{\text{опор}} + a) - R_{1x}a = 449{,}2 \text{ Н·м}.$$

В конце 3-го участка при $z_3 = c = 64 \cdot 10^{-3}$ м $M_{3y} = 0$.

Изгибающий момент в сечении *Д* при $z_{3Д} = 0{,}5b = 40$ мм

$$M_{yД} = F_{\text{м}}\left(l_{\text{опор}} + a + 0{,}5b\right) - R_{1x}\left(a + 0{,}5b\right) - F_t\, 0{,}5b =$$

$$= \left[3348{,}7\left(186 + 64 + 40\right) - 6061{,}5\left(64 + 40\right) - 4306{,}6 \cdot 40\right]10^{-3} = 168{,}5 \text{ Н·м}.$$

Эпюра изгибающих моментов в горизонтальной плоскости приведена на рис. 8, *p*.

Эпюра крутящих моментов показана на рис 8, *k*.

Проверочный расчёт вала

Результаты расчётов изгибающих моментов в потенциально опасных сечениях показаны на рис. 8, *n*, *p* и приведены в табл. 7.

Среди сечений, ослабленных шпоночным пазом (сечение *А*, *Б*), наиболее опасным является сечение *Б* вала под колесом. Суммарный изгибающий момент в этом сечении $M_{\text{сум}\,Б} = 452$ Н·м.

Среди сечений в местах ступенчатого перехода вала (сечения *В*, *Г* и *Д*) наиболее опасным является сечение *Г* – ступенька вала при переходе от диаметра вала под подшипник к диаметру под колесо. В этом сечении суммарный изгибающий момент $M_{\text{сум}\,Г} = 558$ Н·м.

Таким образом, проверку вала на усталостную прочность необходимо проводить в двух наиболее опасных сечениях – *Г* и *Б*.

Таблица 7

Изгибающие моменты в потенциально опасных сечениях вала при расчётах на сопротивление усталости

Параметр	Виды опасных сечений				
	сечения, где вал ослаблен шпоночным пазом		сечения в местах ступенчатого перехода вала		
Сечение на валу	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*
Изгибающий момент в вертикальной плоскости M_x, Н·м	0	50,2	0	18,8	18,8
Изгибающий момент в горизонтальной плоскости M_y, Н·м	200,9	449,2	401,8	557,7	168,5
Суммарный изгибающий момент $M_{\text{сум}}$, Н·м	200,9	452,0	401,8	558,0	169,5

Сечение Г. При расчёте момента сопротивления сечения выбирается меньший из диаметров – диаметр вала под подшипник $d_{\text{п}} = 70$ мм.

Момент сопротивления сечения *Г*

$$W_{\text{и}Г} = 0{,}1 d_{\text{п}}^3 = 0{,}1 \cdot 70^3 = 34{,}3 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплитуда цикла нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma_{aГ} = \frac{M_{\text{сум}\,Г} 10^3}{W_{\text{и}Г}} = \frac{558 \cdot 10^3}{34{,}3 \cdot 10^3} = 16{,}3 \text{ МПа}.$$

В сечении *Г* отношение радиуса галтели к диаметру $\frac{R}{d_{\text{п}}} = \frac{2}{70} = 0{,}03$.

Коэффициент концентрации напряжений изгиба в сечении *Г*: $K_\sigma = 2$ (рис. П2, приложение).

Для материала вала с пределом прочности $\sigma_{\text{в}} = 640$ МПа при чистовой обработке поверхности коэффициент качества обработки поверхности вала $\beta = 0{,}83$ (рис. П4, приложение).

При расчётном диаметре сечения $d_{\text{п}} = 70$ мм масштабный фактор для напряжений изгиба $\varepsilon_\sigma = 0{,}77$ (рис. П3, приложение).

Коэффициент учета постоянной составляющей напряжений изгиба при $\sigma_{\text{в}} = 640$ МПа $\psi_\sigma = 0{,}05$ (табл. П4, приложение).

Среднее напряжение цикла нормальных напряжений $\sigma_{mГ} = 0$.

Предел выносливости материала вала при симметричном цикле изгиба

$$\sigma_{-1} = 0{,}43\sigma_{в} = 0{,}43 \cdot 640 = 275{,}2 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса сопротивления усталости по изгибу в сечении *Г*

$$n_{\sigma Г} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon_\sigma}\sigma_{aГ} + \psi_\sigma\sigma_{mГ}} = \frac{275{,}2}{\frac{2}{0{,}83 \cdot 0{,}77}16{,}3} = 5{,}4.$$

Предел выносливости материала вала при пульсирующем цикле касательных напряжений пропорционален пределу прочности материала вала. Выберем среднее значение коэффициента пропорциональности

$$\tau_{-1} = 0{,}25\sigma_{в} = 0{,}25 \cdot 640 = 160 \text{ МПа}.$$

Полярный момент сопротивления сечения *Г*

$$W_{pГ} = 0{,}2d_{п}^3 = 0{,}2 \cdot 70^3 = 68{,}6 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплитуда цикла касательных напряжений и среднее напряжение

$$\tau_{aГ} = \tau_{mГ} = \frac{T_2 \cdot 10^3}{2W_{pГ}} = \frac{717{,}7 \cdot 10^3}{2 \cdot 68{,}6 \cdot 10^3} = 5{,}2 \text{ МПа}.$$

Коэффициент концентрации касательных напряжений в сечении *Г* при отношении радиуса галтели к диаметру вала $\frac{R}{d_{п}} = \frac{2}{70} = 0{,}03$, $K_\tau = 1{,}49$ (рис. П2, приложение).

Коэффициент качества при чистовой обработки поверхности вала $\beta = 0{,}83$ (рис. П4, приложение).

Масштабный фактор для касательных напряжений при диаметре сечения $d_{п} = 70$ мм $\varepsilon_\tau = 0{,}65$ (рис. П3, приложение).

Коэффициент учета постоянной составляющей касательных напряжений при $\sigma_{в} = 640$ МПа $\psi_\tau = 0$ (табл. П3, приложение).

Коэффициент запаса сопротивления усталости по кручению в сечении *Г*

$$n_{\tau Г} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\beta\varepsilon_\tau}\tau_{aГ} + \psi_\tau\tau_{mГ}} = \frac{160}{\frac{1{,}49}{0{,}83 \cdot 0{,}65}5{,}2} = 11{,}1.$$

Общий коэффициент запаса сопротивления усталости сечения *Г*

$$n_Г = \frac{n_{\sigma Г} n_{\tau Г}}{\sqrt{n_{\sigma Г}^2 + n_{\tau Г}^2}} = \frac{5{,}4 \cdot 11{,}1}{\sqrt{5{,}4^2 + 11{,}1^2}} = 4{,}8 > n_{adm} = 2{,}5 \div 3{,}0.$$

В сечении *Г* вал удовлетворяет условию прочности.

Сечение Б. Предел выносливости материала вала при симметричном цикле изгиба $\sigma_{-1} = 275{,}2$ МПа.

Момент сопротивления сечения *Б* при изгибе с учетом шпоночного паза

$$W_{иБ} = 0{,}1 d_{кол}^3 - \frac{b_ш t_1 (d_{кол} - t_1)^2}{2 d_{кол}} = 0{,}1 \cdot 85^3 - \frac{22 \cdot 9 (85 - 9)^2}{2 \cdot 85} = 54{,}7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплитуда цикла нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma_{аБ} = \frac{M_{сум\,Б} 10^3}{W_{иБ}} = \frac{452 \cdot 10^3}{54{,}7 \cdot 10^3} = 8{,}3 \text{ МПа}.$$

Коэффициент концентрации напряжений изгиба для сечения *Б*, ослабленного шпоночным пазом, $\sigma_в = 640$ МПа, $K_\sigma = 1{,}85$ (табл. П3, приложение).

Коэффициент качества при чистовой обработке поверхности вала $\beta = 0{,}83$ (рис. П4, приложение).

Масштабный фактор для напряжений изгиба вала при $d_{кол} = 85$ мм $\varepsilon_\sigma = 0{,}72$ (рис. П3, приложение).

Коэффициент учета постоянной составляющей напряжений изгиба при $\sigma_в = 640$ МПа $\psi_\sigma = 0{,}05$ (табл. П4, приложение).

Среднее напряжение цикла нормальных напряжений $\sigma_{mБ} = 0$.

Коэффициент запаса сопротивления усталости по изгибу в сечении *Б*

$$n_{\sigma Б} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta \varepsilon_\sigma} \sigma_{аБ} + \psi_\sigma \sigma_{mБ}} = \frac{275{,}2}{\frac{1{,}85}{0{,}83 \cdot 0{,}72} 8{,}3} = 10{,}7.$$

Предел выносливости материала вала при пульсирующем цикле касательных напряжений $\tau_{-1} = 160$ МПа.

Полярный момент сопротивления сечения *Б* с учетом шпоночного паза

$$W_{рБ} = 0{,}2 d_{кол}^3 - \frac{b_ш t_1 (d_{кол} - t_1)^2}{2 d_{кол}} = 0{,}2 \cdot 85^3 - \frac{22 \cdot 9 (85 - 9)^2}{2 \cdot 85} = 116{,}1 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплитуда цикла касательных напряжений и среднее напряжение

$$\tau_{aБ} = \tau_m = \frac{T_2 \cdot 10^3}{2W_{pБ}} = \frac{717{,}7 \cdot 10^3}{2 \cdot 116{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}1 \text{ МПа.}$$

Коэффициент концентрации касательных напряжений для сечения *Б* при $\sigma_в$ = 640 МПа K_τ = 1,6 (табл. П3, приложение).

Коэффициент качества при чистовой обработке поверхности вала при $\sigma_в$ = 640 МПа β = 0,83 (рис. П4, приложение).

Масштабный фактор для касательных напряжений вала при $d_{кол}$ = 85 мм ε_τ = 0,62 (рис. П3, приложение).

Коэффициент учета постоянной составляющей касательных напряжений при $\sigma_в$ = 640 МПа ψ_τ = 0 (табл. П4, приложение).

Коэффициент запаса сопротивления усталости по кручению в сечении *Б*

$$n_{\tau Б} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\beta\varepsilon_\tau}\tau_{aБ} + \psi_\tau \tau_{mБ}} = \frac{160}{\frac{1{,}6}{0{,}83 \cdot 0{,}62}3{,}1} = 16{,}6.$$

Общий коэффициент запаса сопротивления усталости сечения *Б*

$$n_Б = \frac{n_{\sigma Б} n_{\tau Б}}{\sqrt{n_{\sigma Б}^2 + n_{\tau Б}^2}} = \frac{10{,}7 \cdot 16{,}6}{\sqrt{10{,}7^2 + 16{,}6^2}} = 8{,}9 > n_{adm} = 2{,}5 \div 3{,}0.$$

В сечении *Б* вал удовлетворяет условию прочности.

Расчёт на статическую прочность

При расчёте на статическую прочность опасное сечение вала проходит через средину подшипника 1. В этом сечении суммарный изгибающий момент максимальный, равный $M_{сум1}$ = 622,8 Н·м.

Диаметр сечения $d_п$ = 70 мм. Вал сплошной. Осевой и полярный моменты сопротивления сечения при изгибе и кручении

$$W_{и1} = 0{,}1 d_п^3 = 0{,}1 \cdot 70^3 = 34{,}3 \cdot 10^3 \text{ мм}^3, \quad W_{p1} = 0{,}2 d_п^3 = 0{,}2 \cdot 70^3 = 68{,}6 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Напряжения изгиба и кручения в опасном сечении

$$\sigma_{и1} = \frac{M_{сум1} \cdot 10^3}{W_{и1}} = \frac{622{,}8 \cdot 10^3}{34{,}3 \cdot 10^3} = 18{,}2 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{к1} = \frac{T_2 \cdot 10^3}{W_{p1}} = \frac{717{,}7 \cdot 10^3}{68{,}6 \cdot 10^3} = 10{,}5 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_{и1}^2 + 3\tau_{к1}^2} = \sqrt{18{,}2^2 + 3 \cdot 10{,}5^2} = 25{,}7 \text{ МПа}.$$

Коэффициент перегрузки $k = 2$. Предел текучести материала вала

$\sigma_т = 380$ МПа.

Запас статической прочности

$$n_т = \frac{\sigma_т}{k\sigma_{экв}} = \frac{380}{2 \cdot 25{,}7} = 6{,}2 > n_{т\,adm} = 1{,}2 \div 1{,}8.$$

Результаты проверочного расчёта вала на прочность приведены в табл. 8.

Эскизный чертёж вала дан на рис. 9.

Таблица 8

Результаты расчета вала на прочность

Параметр	Виды расчётов		
	сопротивление усталости		статическая прочность
	сечения, где вал ослаблен шпоночным пазом	сечения в местах ступенчатого перехода вала	сечение, где суммарный изгибающий момент максимальный
Наиболее опасное сечение вала	*Б*	*Г*	средина опоры 1
Суммарный изгибающий момент $M_{сум}$, Н·м	452	558	622,8
Коэффициент запаса сопротивления усталости по изгибу, n_σ	10,7	5,4	–
Коэффициент запаса сопротивления усталости по кручению, n_τ	16,6	11,1	–
Общий коэффициент запаса сопротивления усталости, n	8,9	4,8	–
Коэффициент запаса статической прочности	–	–	6,2

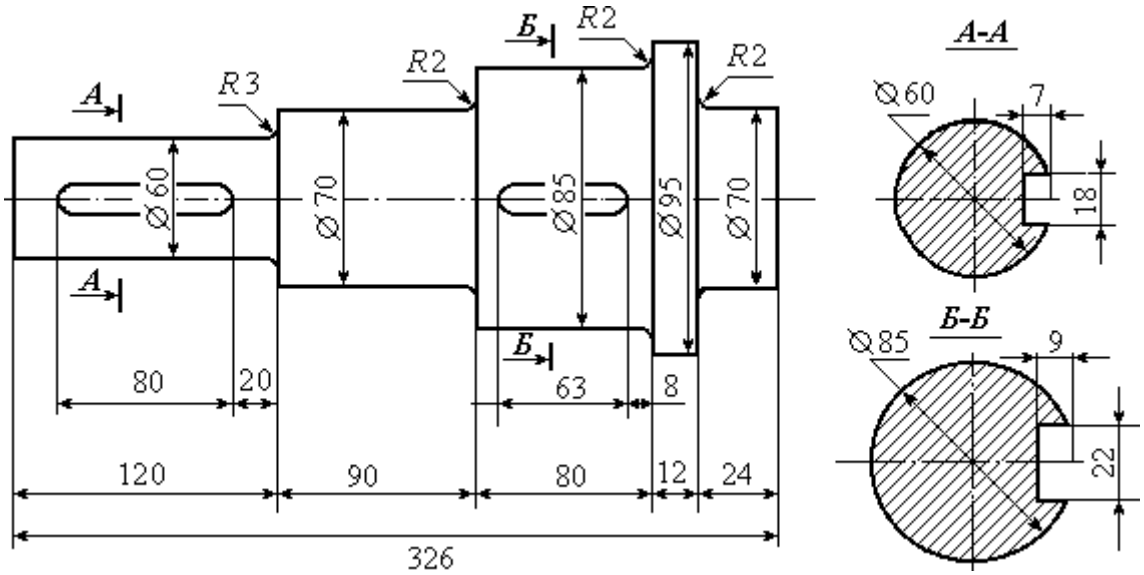
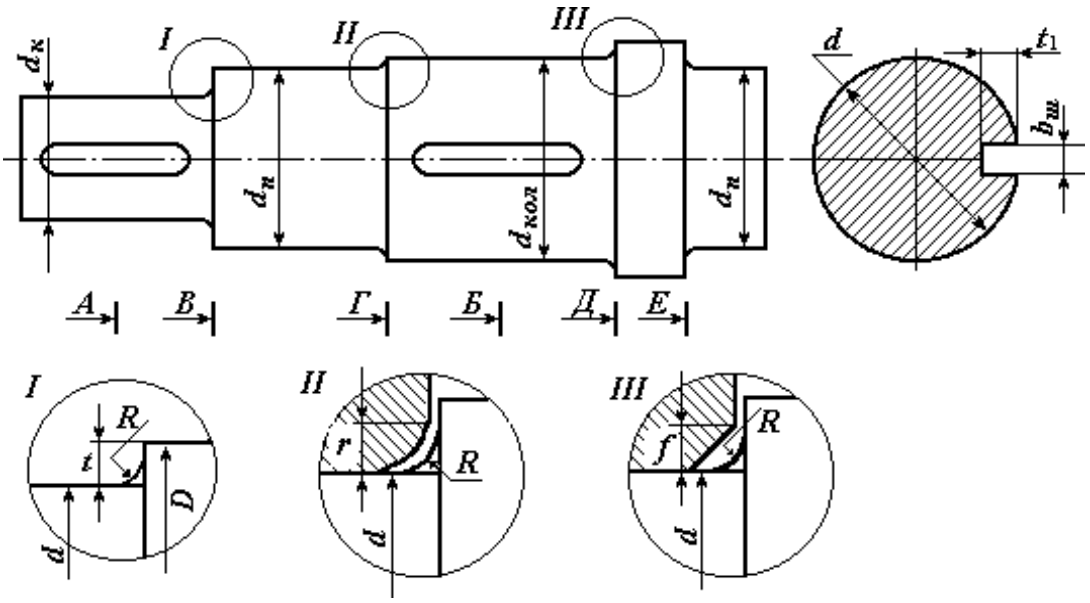


Рис. 9. Эскизный чертёж вала

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рис. П1.



Элементы конструкций вала:
R – радиус галтели; *t* – высота ступеньки; *r* – координата фаски подшипника;
f – величина фаски ступицы

Таблица П1

Шпонки призматические (ГОСТ 23360-78)

Диаметр вала, мм	Сечение шпонки, мм			Глубина паза, мм	Диаметр вала, мм	Сечение шпонки, мм			Глубина паза, мм
d	$b_ш$	$h_ш$	$l_ш$	t_1	*d*	$b_ш$	$h_ш$	$l_ш$	t_1
17÷22	6	6	14÷70	3,5	58 ÷ 65	18	11	50÷200	7
22÷30	8	7	18÷90	4	65 ÷75	20	12	56÷220	7,5
30 ÷ 38	10	8	22÷110	5	75 ÷85	22	14	63÷250	9
38 ÷ 44	12	8	28÷140	5	85 ÷95	25	14	70÷280	9
44 ÷ 50	14	9	36÷160	5,5	95 ÷110	28	16		10
50 ÷ 58	16	10	45÷180	6	110÷130	32	18		11

Примечание. Длина шпонки $l_ш$ (мм) выбирается из стандартного ряда длин: 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125

Таблица П2

Значения высоты *t* ступеньки вала, координаты *r* фаски подшипника и величины *f* фаски ступицы колеса в зависимости от диаметра *d* вала, мм

d	17–24	25–30	32–40	42–50	52–60	63–70	75–85	85–95	95–105	105–115
t	2	2,2	2,5	2,8	3	3,3	3,5	3,8	4	4
r	1,6	2	2,5	3	3	3,5	3,5	4	4	4
f	1	1	1,2	1,6	2	2	2	2,2	2,6	2,6

Таблица П3

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для сечений валов, ослабленных шпоночными пазами

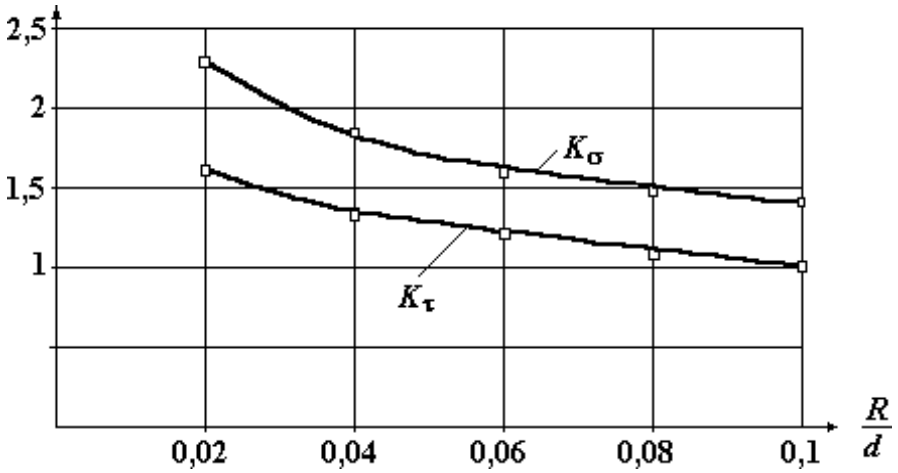
$\sigma_в$, МПа	500	700	900
K_σ	1,6	1,9	2,15
K_τ	1,4	1,7	2,05

Таблица П4

Коэффициенты чувствительности асимметрии цикла

$\sigma_в$, МПа	350 – 520	520 – 720	720 – 1000	1000 – 1200
ψ_σ	0	0,05	0,1	0,2
ψ_τ	0	0	0,05	0,1

Рис. П2. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений K_σ и K_τ в зависимости от отношения радиуса галтели к диаметру вала



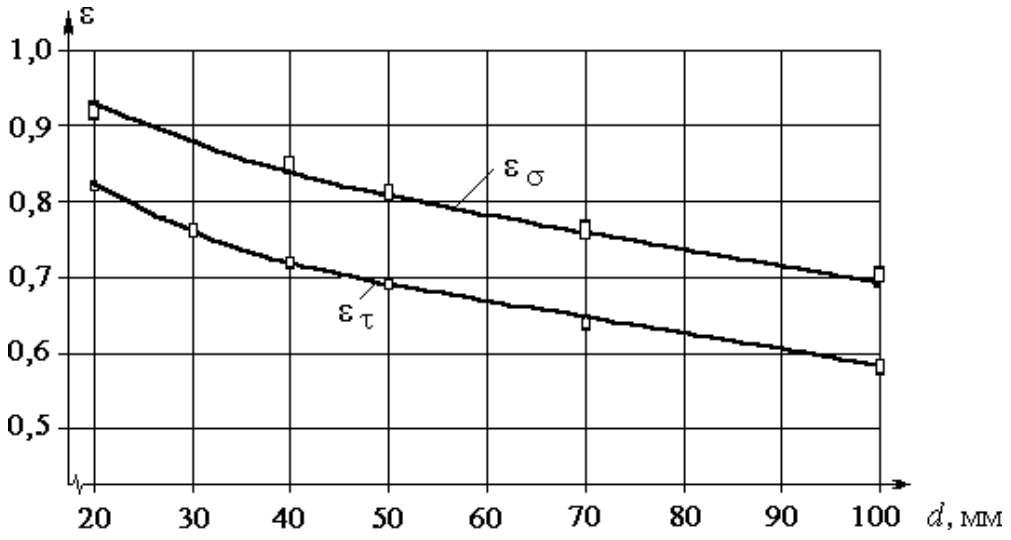


Рис. П3. Зависимость значений масштабных факторов ε_σ и ε_τ от диаметра вала

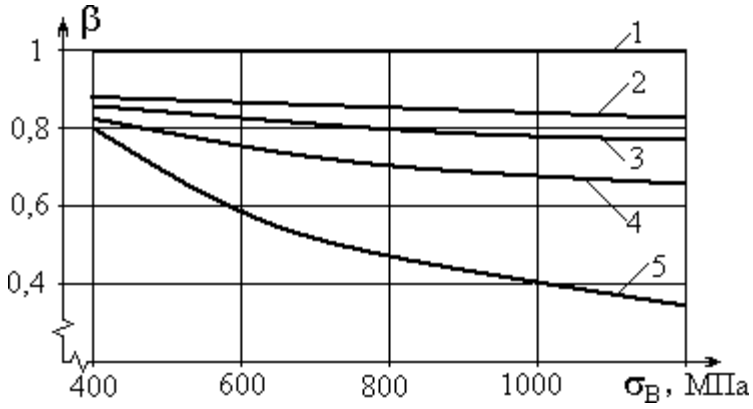


Рис. П4. Зависимость коэффициента β качества обработки поверхности от предела выносливости материала и вида обработки:

1 – полированная поверхность; 2 – шлифование; 3 – тонкая (чистовая) обработка; 4 – грубое точение; 5 – окалина

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Афанасьев А. И., Ляпцев С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. – Екатеринбург: Изд–во УГГУ, 2005.

Дунаев П. Ф., Леликов О. П. Конструирование узлов и деталей машин: учебн. пособие для студ. техн. спец. вузов. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 496 с.

Краснов М. М., Вереина Л. И. Техническая механика. М.: – Academia, 2010. – 288 с.

Левитский И. И. Теория механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 2007.

Мокрушин Н. В., Ляпцев С. А. Лекции по сопротивлению материалов. – Екатеринбург: Изд–во УГГУ, 2012.

Сопротивление материалов в примерах и задачах. *Под ред*. *Мокрушина Н. В.*– Екатеринбург: Изд–во УГГУ, 2010.

Олофинская В. П. Техническая механика. – М.: Форум, 2009.

Смеляпин А. И. Теория механизмов и машин. – М.: Инфра, 2009.

Степин П. А. Сопротивление материалов. – М.: Лань, 2010.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.В.08 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Специальность –
21.05.04 Горное дело
Специализация –
Шахтное и подземное строительство
форма обучения: очная, заочная
год набора: 2021

Авторы: Котельников А.П, к.т.н., доц.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Технической механики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Таугер В.М.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 2 от 09.10.2020	Протокол № 2 от 14.10.2020
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки 21.05.04 Горное дело, и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «Прикладная механика».

Форма контроля самостоятельной работы студентов – проверка на практическом занятии, расчетно-графическая работа, зачет.

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, владений (опыта деятельности), характеризующие формирование компетенций

Ознакомление обучающихся с процедурой и алгоритмом оценивания (в начале изучения дисциплины).

Проверка ответов на задания, выполненных работ.

Сообщение результатов оценивания обучающимся, обсуждение результатов. Оформление необходимой документации.

1. ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шпоночные и шлицевые соединения служат для закрепления деталей на осях и валах и передачи крутящего момента от вала к ступице детали или наоборот, от ступицы к валу.

Рабочими гранями призматических и сегментных шпонок служат их боковые, более узкие грани. На боковых гранях возникают напряжения смятия $\sigma_{см}$, а в продольном сечении шпонки – напряжения среза $\tau_{ср}$.

Условие прочности на смятие для призматических шпонок (рис. 1):

$$\sigma_{см} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot l_{раб}} \le [\sigma_{см}],$$

условие прочности шпонки на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{2 \cdot T \cdot 10^3}{d \cdot b \cdot l_{раб}} \le [\tau_{ср}],$$

где T – крутящий момент на валу; d – диаметр вала; h – высота шпонки; b – ширина шпонки; $l_{раб}$ – рабочая длина призматической шпонки.

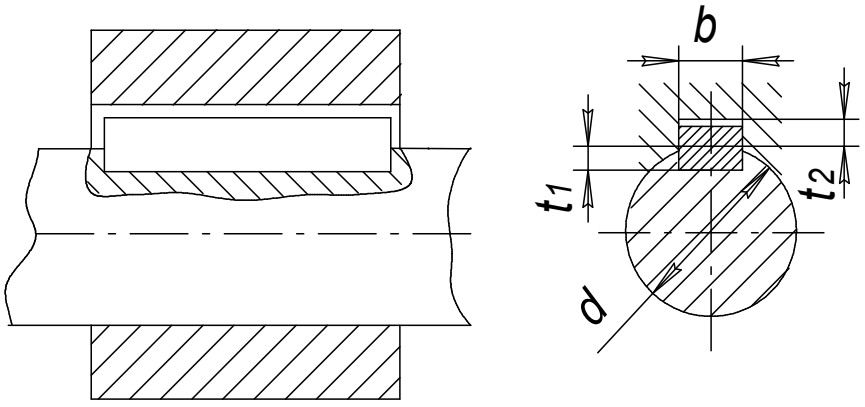


Рис. 1. Шпоночное соединение

Для неподвижных шпоночных соединений допускают:
при переходных посадках $[\sigma_{см}] = 80...150$ МПа; при посадках с натягом $[\sigma_{см}] = 110...200$ МПа. Меньшие значения для чугунных ступиц и при резких изменениях нагрузки. В подвижных соединениях (в осевом направлении) $[\sigma_{см}] = 20...30$ МПа. Допускаемые напряжения на срез шпоночных соединений $[\tau_{ср}] = 60...90$ МПа.

Допускаемое напряжение смятия в неподвижных шлицевых соединениях при тяжёлых условиях эксплуатации $[\sigma_{см}] = 35...50$ МПа.

Задача № 1

Для вала диаметром 60 мм подобрать размеры призматической шпонки с закругленными концами. Определить, какой момент может передавать эта шпонка. Принять длину шпонки $l = 1{,}3 \cdot d$; $[\sigma_{см}] = 80$ МПа.

Решение

По рекомендации вычисляем предварительную длину шпонки $l = 1{,}3 \cdot 60 = 78{,}0$ мм. .

По ГОСТу 23360-78 принимаем $l = 80$ мм и выбираем размеры сечения шпонки высота h=11 мм; ширина b=18 мм в соответствии с диаметром вала d=60 мм (табл.П.1). Рабочая длина шпонки

$$l_{раб} = l - b. \qquad (1)$$

Запишем условие прочности на смятие

$$\sigma_{см} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot l_{раб}} \le [\sigma_{см}] , \qquad (2)$$

откуда определяем крутящий момент

$$T \le \frac{[\sigma_{см}] \cdot d \cdot h \cdot l_{раб}}{4 \cdot 10^3} = \frac{80 \cdot 60 \cdot 11 \cdot (80 - 18)}{4 \cdot 10^3} = 818 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача № 2

Выбрать по ГОСТу призматическую шпонку для соединения шестерни с валом диаметром 35 мм (рис.1), передаваемый момент равен $150 Н \cdot м$. Выполнить полную проверку соединения на прочность.

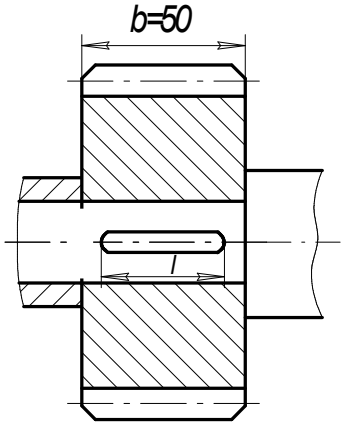


Рис. 2. Соединение к задаче 2

Решение

По ГОСТу 23360-78 выбираем сечение шпонки h=8 мм; b=10 мм. Из конструктивных соображений длину шпонки l принимаем на 5─10 мм меньше ширины зубчатого венца шестерни b_w=50 мм, поэтому l =45 мм. Итак, размеры шпонки по ГОСТ $10 \times 8 \times 45$ мм.

Проверим прочность шпонки на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot l_{раб}} = \frac{4 \cdot 150 \cdot 10^3}{35 \cdot 8 \cdot (45 - 10)} = 61{,}2 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа}, \quad (3)$$

где $[\sigma_{см}] = 80$ МПа .

Проверим шпонку на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{2 \cdot T \cdot 10^3}{d \cdot b \cdot l_{раб}} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^3}{35 \cdot 10 \cdot (45 - 10)} = 24{,}5 \text{ МПа} < 60 \text{ МПа}, \quad (4)$$

где $\lfloor \tau_{ср} \rfloor = 60$ МПа. Условия прочности выполнены.

Задача № 3

Зубчатое колесо, рассчитанное для передачи окружного усилия $F_t = 6кН$, соединено с валом призматической шпонкой (рис.3). Проверить шпоночное соединение на прочность.

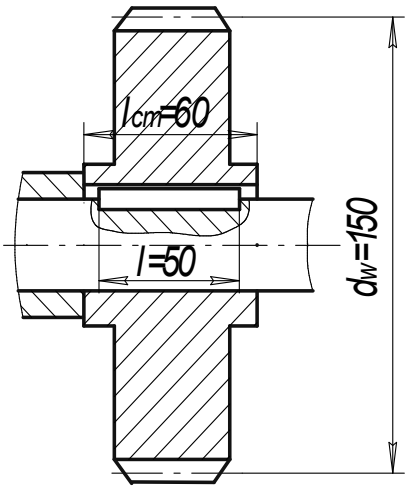
Решение

Определяем крутящий момент на валу, передаваемый цилиндрическим зубчатым колесом, Н·м:

$$T = \frac{F_t \cdot d_w}{2} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{2} = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала определяем из условия прочности вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0{,}2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{450 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 15}} = 53{,}1 \text{ мм}, \quad (5)$$



где [τ] – пониженное напряжение на кручение, обычно принимают для редукторных и аналогичных валов [τ] = (12…15) МПа.

Округляем по ряду Ra 40 диаметр вала *d*=56 мм.

Размеры шпонки выбираем по ГОСТу 23360-78 $16 \times 10 \times 50$ (по табл. П. 1).

Проводим проверку шпонки на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot l_{раб}} = \frac{4 \cdot 450 \cdot 10^3}{56 \cdot 10 \cdot (50 - 16)} = 94{,}5 \text{ МПа}. \quad (6)$$

Поскольку $\sigma_{см} = 94{,}5 \text{ МПа} < [\sigma_{см}] = 200 \text{ МПа}$, условие прочности соблюдается, так как посадка колеса на вал с натягом.

Рис.3. Соединение к задаче 3

Задача № 4

Втулочная муфта, соединяющая два вала, установлена на сегментных шпонках (рис. 4). Соединение с натягом. Подобрать размеры шпонки и проверить соединение на срез и смятие. Расчетный момент определить из условия прочности вала на кручение, при допускаемом напряжении на кручение $[\tau_{КР}] = 25МПа$, ослабление вала шпоночной канавкой не учитывать.

Решение

Условие прочности вала на кручение:

$$\tau_{кр} = \frac{T}{0{,}2 \cdot d^3} \leq [\tau_{кр}], \quad (7)$$

откуда вычисляем крутящий момент

$$T \le \frac{[\tau_{кр}] \cdot 0{,}2 \cdot d^3}{10^3} = \frac{25 \cdot 0{,}2 \cdot 38^3}{10^3} = 274\ \text{Н} \cdot \text{м}\ .$$

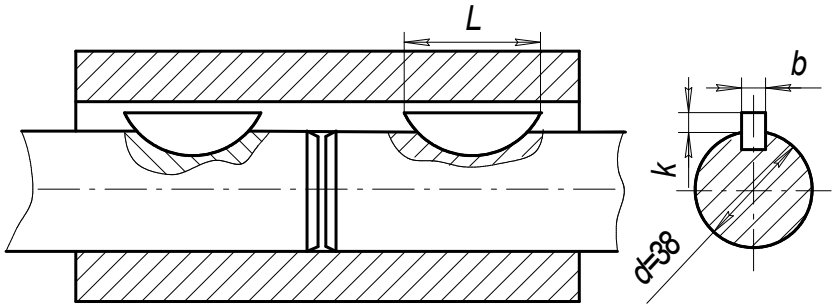


Рис. 4. Соединение к задаче 4

Размеры шпонки выбираем по ГОСТ 24071-80: высота h=13 мм; ширина b=10 мм; D=32 мм; глубина врезания t_1=10 мм; t_2 = 3,3 мм (далее в формуле $k = t_2$) см. табл. П. 2. Проверяем подобранную шпонку на смятие

$$\sigma_{см} = \frac{2 \cdot T}{d \cdot k \cdot L} = \frac{2 \cdot 274 \cdot 10^3}{38 \cdot 3{,}3 \cdot 32} = 137\ \text{МПа}, \qquad (8)$$

где длина шпонки $L \approx D \approx 32$ мм .

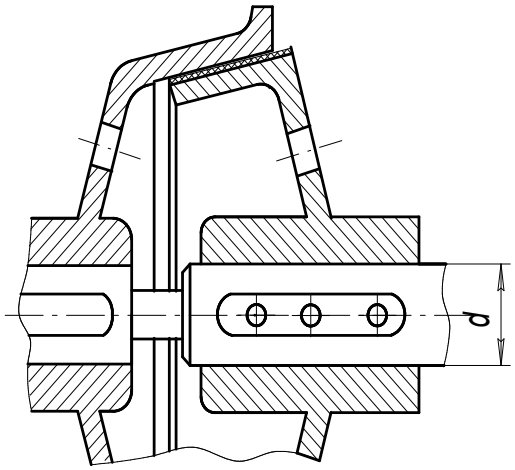
Поскольку $\sigma_{см} = 137\ \text{МПа} < [\sigma_{см}] = 200\ \text{МПа}$, то далее проверяем шпонку на срез

$$\tau_{ср} \approx \frac{2 \cdot T}{d \cdot b \cdot L} \approx \frac{2 \cdot 274 \cdot 10^3}{38 \cdot 10 \cdot 32} \approx 45\ \text{МПа} < 60\ \text{МПа}. \qquad (9)$$

Отмечаем, что соединение с натягом является прочным.

Задача № 5

Определить рабочую длину и сечение призматической шпонки вала конической фрикционной муфты (рис. 5.) по следующим данным: d=45 мм; материал сталь 50. Материал муфты – чугун СЧ18. Момент, передаваемый муфтой, равен $T = 345\ \text{Н} \cdot \text{м}$. Перемещение муфты производится под нагрузкой, вал работает с незначительными толчками, $[\sigma_{см}] = 40\ \text{МПа}$.



Решение

По ГОСТу 23360-78 выбираем сечение шпонки 14х9 мм, где b=14 мм; h=9 мм; t_1=5,5 мм; t_2 = 3,8 мм; (табл. П.1).

Условие прочности на смятие:

Рис. 5. Муфта коническая

$$\sigma_{CM} = \frac{4 \cdot T \cdot 10^3}{d \cdot h \cdot l_{РАБ}} \le [\sigma_{CM}], \qquad (10)$$

откуда определяем рабочую длину шпонки $l_{раб} \ge \frac{4 \cdot T \cdot 10^3}{d \cdot h \cdot [\sigma_{см}]} = \frac{4 \cdot 345 \cdot 10^3}{45 \cdot 9 \cdot 40} = 85{,}2$ мм.

Вычисляем предварительно длину призматической шпонки $l = l_{раб} + b = 85{,}2 + 14 = 99{,}2$ мм и принимаем по ГОСТ окончательно l =100 мм.

2. ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Задача № 6

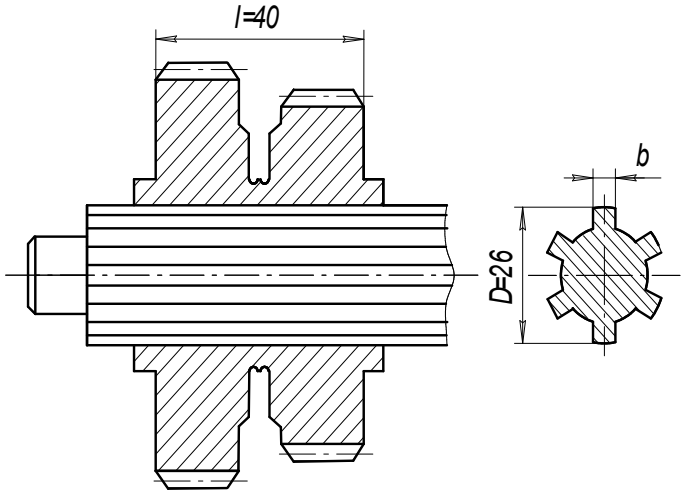


Рис. 6. Шлицевое соединение

Проверить зубчатое (шлицевое) прямобочное соединение блока шестерен с валиком (рис. 6) коробки передач токарного станка по следующим данным: материал вала – сталь 45, число зубьев (шлицов) $z = 6$. Передаваемый момент T= 100 Н·м. Блок шестерен из стали 40, переключение не под нагрузкой. Рабочая поверхность шлицов термически обработана и шлифована.

Условия эксплуатации средние.

Решение

По заданному наружному диаметру D=26 мм выбираем по табл. П.3 легкую серию с размерами: b =6 мм, c =0,3 мм, l =40 мм, d =23 мм, z = 6.

Проверяем соединение на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{2 \cdot T}{d_{ср} \cdot k_з \cdot z \cdot h \cdot l} \le [\sigma_{см}], \qquad (11)$$

где $d_{ср} = \frac{D + d}{2} = \frac{26 + 23}{2} = 24{,}5$ мм; $k_з = 0{,}7...0{,}8$; принимаем $k_з = 0{,}75$;

$h = \frac{D - d}{2} - 2 \cdot c = \frac{26 - 23}{2} - 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$ мм; $[\sigma_{см}] = 45$ МПа;

$\sigma_{см} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{24{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 6 \cdot 0{,}9 \cdot 40} = 50{,}4$ МПа > 45 МПа, из этого следует, что легкая серия не подходит, а значит выбираем среднюю. Для средней серии: D=2 мм, b =6 мм, c =0,3 мм, l =40 мм, d =23 мм, z = 6.

$$\sigma_{см} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{25{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 6 \cdot 1{,}9 \cdot 40} = 22{,}9 \text{ МПа}, \quad \text{где} \quad d_{ср} = \frac{D+d}{2} = \frac{28+23}{2} = 25{,}5 \text{ мм};$$

$$h = \frac{D-d}{2} - 2 \cdot c = \frac{28-23}{2} - 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}9 \text{ мм}; \quad \sigma_{см} = 22{,}9 \text{ МПа} < 45 \text{ МПа},$$

следовательно, средняя серия удовлетворяет условию прочности.

3. СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Сварка – это технологический процесс соединения металлических деталей при сильном местном нагреве их до расплавленного или пластического состояния с применением давления. Затвердевший после сварки металл называется сварным швом. Прочность соединения зависит от однородности и непрерывности материала сварного шва и окружающей его зоны.

Наибольшее распространение получили следующие виды сварки: электродуговая ручная, автоматическая дуговая под слоем флюса, контактная (оплавленная, точечная, шовная, трением). Электрошлаковая сварка предназначена для соединения деталей большой толщины и для чугунных отливок.

Все виды контактной сварки высокопроизводительны, их широко применяют в массовом производстве для сварки труб, арматуры, кузовов автомашин, металлической обшивки железнодорожных вагонов, корпусов самолетов, тонкостенных резервуаров и т. д.

В зависимости от толщины свариваемых дуговой сваркой деталей требования к форме кромок различны: края тонких листов до 3 мм загибают, кромки листов толщиной от 8 до 20 мм при автоматической сварке выполняют прямыми, а при большей толщине деталей делают скошенные края под углом 60 градусов.

По сравнению с клёпаными и литыми конструкциями сварные обеспечивают существенную экономию металла и значительно снижают трудоемкость процесса изготовления. Поэтому сварные конструкции в большинстве случаев гораздо дешевле клепаных и литых. Применение сварки особенно целесообразно при изготовлении конструкций сложной формы, отдельные детали которых получают прокаткой, ковкой, штамповкой и отливкой.

К недостаткам сварных конструкций относятся: появление остаточных напряжений в свариваемых элементах после окончания процесса сварки, коробление, плохое восприятие переменных и особенно вибрационных нагрузок, сложность и трудоемкость контроля качества сварных швов.

Конструкции и расчет на прочность. Сварные соединения относятся к неразъёмным. По взаимному расположению элементов их можно разделить на следующие группы: стыковые, угловые, нахлесточные и тавровые.

Сварной шов стыкового соединения называется стыковым швом, а сварной шов углового, нахлесточного или таврового соединений – угловым швом.

Стыковые швы рассчитывают:

на растяжение $\sigma_р = \dfrac{F}{b \cdot \delta} \le [\sigma']_р$; (12)

и на сжатие $\sigma_{сж} = \dfrac{F}{b \cdot \delta} \le [\sigma']_{сж}$; (13)

а также на изгиб $\sigma = \dfrac{M}{W} = \dfrac{M \cdot 6}{b \cdot \delta^2}$, (14)

где F – внешняя нагрузка; $[\sigma'_р]$ – допускаемое напряжение сварного шва при растяжении, пишется со штрихом и вычисляется по формуле: $[\sigma'_р] = (0{,}9...1{,}0) \cdot [\sigma_р]$; $[\sigma_р]$ – допускаемое напряжение при растяжении для материала деталей; b - длина сварного шва; δ – толщина деталей; M – изгибающий момент в плоскости сечения; W – момент сопротивления расчетного сечения шва.

Угловые швы имеют следующие основные геометрические характеристики – катет k и высоту h ; для нормального шва $h = k \sin 45 = 0{,}7k$ (рис. 7).

В зависимости от расположения швы различают: фланговые, лобовые и косые.

Лобовой шов расположен перпендикулярно линии действия нагружающей силы, а фланговый - параллельно. Обычно применяют комбинированные сварные швы в соединениях.

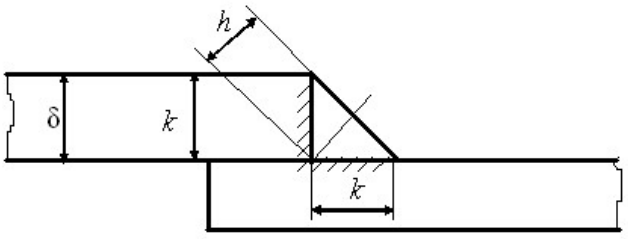


Рис. 7. Угловой шов

Условие прочности флангового шва записывается в виде:

$$\tau = \frac{F}{0{,}7k_1 \cdot 2l} \le [\tau'] \quad (15)$$

где $[\tau']$- допускаемое напряжение в сварном шве при срезе.

Для сравнительно коротких швов, если соединение нагружено парой сил с моментом Т, касательные напряжения определяется в виде

$$\tau = \frac{T}{0{,}7klb} \le [\tau'] \quad (16)$$

Если одна из соединяемых деталей асимметрична, например, к листу приварен уголок, то расчет прочности производят с учетом нагрузки, воспринимаемой каждым швом и распределяемой по швам обратно пропорционально плечам a_1 и a_2 (рис. 8).

При этом напряжения в обоих фланговых швах определяются:

$$\tau = \frac{F}{0{,}7k(l_1 + l_2)} \le \left[\tau'\right] \tag{17}$$

и длина каждого шва находится обратно пропорционально плечам: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{a_2}{a_1}$.

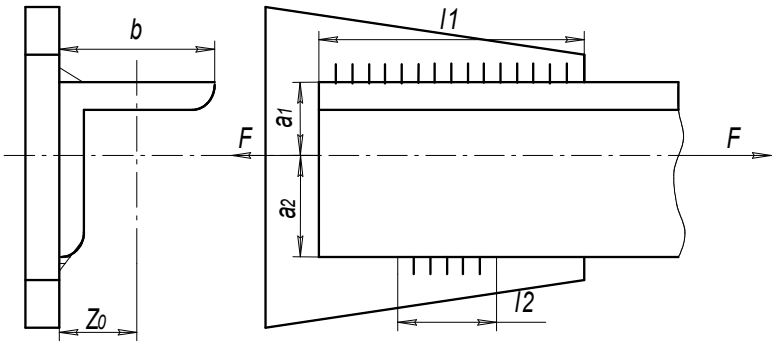


Рис. 8. Фланговый шов асимметричной детали

Л о б о в ы е ш в ы

Лобовые швы рассчитывают только по касательным напряжениям, действующим в плоскости биссектрисы m-m:

$$\tau = \frac{F}{0{,}7kl} \le \left[\tau'\right] \tag{18}$$

Если соединение нагружено парой сил с моментом Т, то условие прочности:

$$\tau_c = \frac{T}{W} = \frac{6T}{0{,}7klb^2} \le [\tau'_c]. \tag{19}$$

При сложном напряженном состоянии растяжения (или сжатия) с изгибом прочность соединения определяют по формулам:

для соединений встык, выполненных стыковым швом

$$\sigma_p = \frac{F}{b \cdot \delta} + \frac{6M}{b \cdot \delta^2} \le \left[\sigma'_p\right] \tag{20}$$

для нахлёсточных соединений, выполненных угловыми швами

$$\tau_c = \frac{6M}{0{,}7k \cdot 2l^2} + \frac{F}{0{,}7k \cdot 2l} \le [\tau'_c]. \tag{21}$$

Для решения задач приведены физико-механические свойства некоторых сталей (табл. 1).

Таблица 1

Физико-механические свойства некоторых материалов

Марка стали	Предел прочности $\sigma_в$, МПа	Предел текучести $\sigma_т$, МПа	Предел выносливости σ_{-1}, МПа

Ст 3 и 10	340	200	160
Сталь 20	400	240	170
Сталь 35	500	300	180
Сталь 45	600	360	240
Сталь 35 Х	800	640	280
Сталь 30ХГСА	1000	900	300

Допускаемые напряжения сварных швов зависят от вида шва, способа сварки, марки электродов и характера нагрузки (табл.2.).

Таблица 2

Допускаемые напряжения в сварных швах

Вид технологического процесса сварки	Допускаемые напряжения в швах при		
	Растяжении $[\sigma']_P$	Сжатии $[\sigma']_{СЖ}$	Срезе $[\tau']$
Автоматическая под флюсом, ручная электродами Э42А и Э50А, контактная стыковая	$[\sigma]_P$	$[\sigma]_P$	$0{,}65[\sigma]_P$
Ручная дуговая электродами Э42 и Э50, газовая сварка	$0{,}9[\sigma]_P$	$[\sigma]_P$	$0{,}6[\sigma]_P$
Контактная точечная и шовная	-	-	$0{,}5[\sigma]_P$

Примечание. $[\sigma]_р = \sigma_T / s$ - допускаемое напряжение на растяжение для материала соединяемых деталей при статических нагрузках. Для металлических конструкций запас прочности s =1,4…1,6.

Задача №7

Проверить прочность соединения двух стальных листов толщиной $\delta = 10$ мм, шириной $b = l = 200$ мм , нагруженных силой $F = 140$ кН. Материал – сталь Ст5 ($\sigma_т = 200$ МПа).

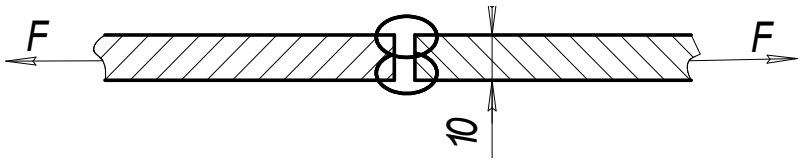


Рис. 9. Сварное соединение к задаче 7

Решение

Определяем допускаемое напряжение в материале

$$[\sigma]_р = \sigma_т / s = \frac{200}{1{,}5} = 133 \text{ МПа}.$$

Определяем допускаемое напряжение в сварном шве по табл. 2:
$\lfloor\sigma'\rfloor_{\text{р}} = 0{,}9 \cdot 133 = 120$ МПа .

Запишем условие прочности сварного шва

$$\sigma'_{\text{р}} = \frac{F}{\delta \cdot l} \le \left[\sigma'\right]_{\text{р}} \qquad (22)$$

и вычислим

$$\sigma'_P = \frac{140 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 70 \cdot 10^6\, Па = 70 МПа < 120 МПа$$

Значит, соединение прочное.

Задача № 8

Две полосы из стали Ст3 шириной 200 мм и толщиной 12 мм соединены сварным швом и нагружены силами F (рис. 8).Материал листов – сталь Ст3, для которой $\lfloor\sigma_p\rfloor = 160 МПа$. Требуется определить допускаемые значения силы для следующих вариантов выполнения шва:

а) ручная сварка электродом Э42;

б) сварка автоматическая под слоем флюса.

Для каждого из указанных вариантов определить процент использования основного материала конструкции.

Решение

а) Определяем допускаемое напряжение в сварном шве:

б) $[\sigma'] = 0{,}9 \cdot \lfloor\delta_p\rfloor = 0{,}9 \cdot 160 = 144 МПа$ - по табл. 2;

Из условия прочности $\sigma_{\text{р}} = \frac{F}{b \cdot \delta} \le [\sigma'_{\text{р}}]$ (23)

определяем усилие: $F \ge b \cdot \delta \cdot [\sigma'] = 200 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 144 \cdot 10^6 = 346 кН$. (24)

Использовано только 90% основного материала.

б) Определяем допускаемое напряжение в сварном шве:
$[\sigma'] = \lfloor\delta_p\rfloor = 160 МПа$

определяем усилие: $F \ge A \cdot [\sigma'] = 200 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 160 \cdot 10^6 = 384 кН$.

Используется 100% основного материала.

Задача №9

Определить длины сварных швов, соединяющих уголок с косынкой. Сварка ручная электродом Э42. Катет швов равен толщине полки уголка №10. Материал сталь 35.

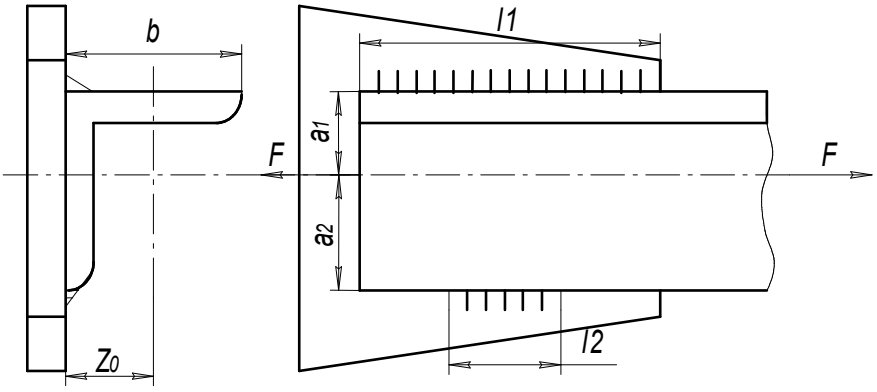


Рис.10. Сварное соединение задаче 9

Решение

Определяем допускаемое напряжение в материале:

$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{S} = \frac{300}{1{,}5} = 200\ МПа \cdot$

Определяем допускаемое напряжение в сварном шве (по табл. 2):

$[\tau'_C] = 0{,}6 \cdot [\sigma_p] = 0{,}6 \cdot 200 = 120 МПа$

По справочнику [6] для уголка № 10 определяем размеры: ширина полки $b = 100 мм$; толщина полки $t = 10 мм$; расстояние от полки до центра тяжести $z_0 = 28{,}3 мм$; площадь $A = 1920 мм^2$; $a_1 = 28{,}3 мм$; $a_2 = b - z_0 = 100 - 28{,}3 = 71{,}7 мм$.

Исходя из прочности уголка $\sigma_p = \frac{F}{A} \le [\sigma_p]$,

определяем допускаемую силу $F \le A \cdot [\sigma_p] = 1920 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^6 = 384 \cdot 10^3 H = 384\ кН \cdot$

Составляем условие прочности для сварного шва:

$$\tau = \frac{F}{0{,}7K \cdot l_\Sigma} \le [\tau'_C], \qquad (25)$$

откуда определяем суммарную длину сварного шва (l_Σ)

$$l_\Sigma \ge \frac{F}{0{,}7k \cdot [\tau'_C]} = \frac{384 \cdot 10^3}{0{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 120 \cdot 10^6} = 457 \cdot 10^{-3} м \cdot$$

Решаем систему уравнений $\frac{l_1}{l_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{71{,}7}{28{,}3} = 2{,}53$; (26)

$$l_1 + l_2 = l_\Sigma . \qquad (27)$$

Из уравнения (26) $l_1 = 2{,}53 \cdot l_2$;

подставляем в уравнение (27) $2{,}53 \cdot l_2 + l_2 = 457$ мм;

далее вычисляем $l_2 = \frac{457}{3{,}53} = 129$ мм; $l_1 = l_\Sigma - l_2 = 455 - 129 = 328$ мм.

Ответ: $l_1 = 328$ мм; $l_2 = 129$ мм.

Задача № 10

Проверить прочность сварных швов, соединяющих диск с зубчатым ободом и

диск со ступицей диаметром 120 мм. Катеты сварных швов $k_1 = 4$ мм, $k_2 = 6$ мм. Передаваемая мощность $P = 18$ кВт и угловая скорость зубчатого колеса $\omega = 3\ ^{\text{рад}}/_{\text{с}}$. Диаметры $d_2 = 120$ мм; $D_1 = 450$ мм. Допускаемое напряжение $[\sigma_р] = 200$ МПа.

Решение

Определяем допускаемое напряжение в сварном шве (по табл. 2):
$[\tau'_с] = 0{,}6 \cdot [\sigma_р] = 0{,}6 \cdot 200 = 120$ МПа.

Определяем крутящий момент, передаваемый зубчатым колесом:

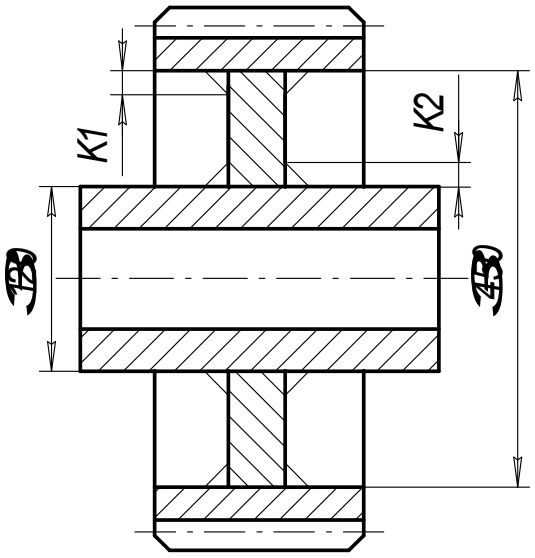


Рис.11. Сварное зубчатое колесо

$$T = \frac{P \cdot 10^3}{\varpi} = \frac{18 \cdot 10^3}{3} = 6 кН \cdot м .$$

Условия прочности для двухстороннего сварного шва 1 между диском и зубчатым ободом: $\tau'_1 = \frac{F_1}{0{,}7K_1 \cdot 2\pi D_1} \le [\tau']$, (28)

где $F_1 = \frac{2T}{D_1} = \frac{2 \cdot 6000}{450 \cdot 10^{-3}} = 26{,}7 кН$;

$$\tau'_1 = \frac{26{,}7 \cdot 10^3}{0{,}7 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 450 \cdot 10^{-3}} = 3{,}37 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3{,}37 \text{ МПа};$$

соединение прочное, так как 3,37 МПа <120МПа.

Условия прочности для сварного шва 2 между диском и ступицей:

$$\tau'_2 = \frac{F_2}{0{,}7k_2 \cdot 2\pi \cdot d_2} \le [\tau'], \quad (29)$$

где $F_2 = \frac{2 \cdot T}{d_2} = \frac{2 \cdot 6000}{120 \cdot 10^{-3}} = 100$ кН;

$$\tau'_2 = \frac{100 \cdot 10^3}{0{,}7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 120 \cdot 10^{-3}} = 31{,}6 \text{ МПа}.$$

Напряжение 31,6 МПа<120 МПа, следовательно, соединение прочное.

Задача № 11

Рассчитать сварное соединение листа 1 с уголком 2. Заданы действующее усилие Q = 11 кН; расстояние от сварного шва до точки приложения усилия *a* = 15см, сварные швы выполнены с обеих сторон. Материал свариваемых деталей сталь 35. Вид сварки принять самостоятельно.

Решение

Определяем допускаемое напряжение в материале:

$$\left[\sigma_{\text{р}}\right]=\frac{\sigma_{\text{т}}}{S}=\frac{300}{1{,}5}=200\ \text{МПа}\,.$$

Определяем допускаемое напряжение в сварном шве (по табл. 2):

$$\left[\tau'_{\text{с}}\right]=0{,}6\cdot\left[\sigma_{\text{р}}\right]=0{,}6\cdot 200=120\ \text{МПа}\,.$$

Переносим силу Q, действующую на уголок 2, к центру сварного шва и уравновешиваем её. Таким образом получаем, что на сварной шов действует сила Q и изгибающий момент M.

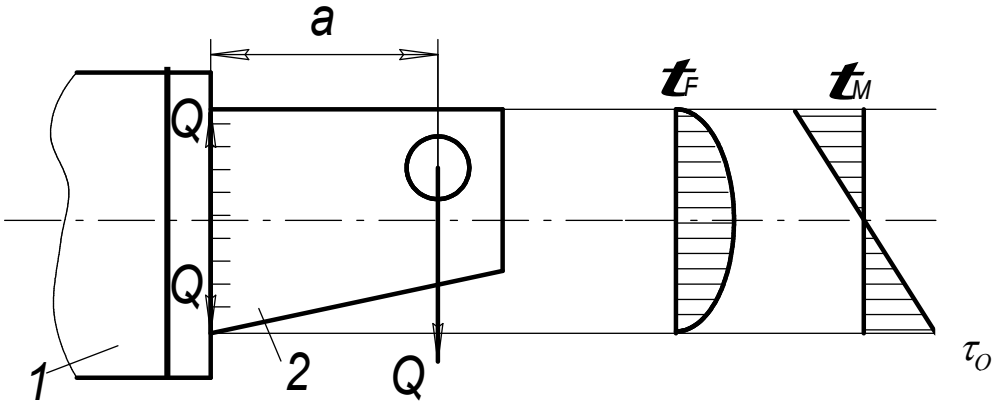


Рис. 12. Сварное соединение листа с уголком и эпюрами напряжений

При нагружении силой и изгибающим моментом прочность соединения определяем по формуле:

$$\tau_{\text{общ}}=\tau_{\text{Q}}+\tau_{\text{M}}\le\left[\tau'\right],\qquad(30)$$

где τ_{Q} – касательное напряжение от силы;

τ_{M} – касательное напряжение от изгибающего момента.

Поскольку в верхней точке сварного шва $\tau_{\text{Q}}=0$, то

$$\tau_{\text{общ}}=\tau_{\text{M}}=\frac{M}{W}\,.\qquad(31)$$

Вычисляем изгибающий момент

$$M=\text{Q}\cdot a=11\cdot 10^{3}\cdot 15\cdot 10^{-2}=1650\,\text{Н}\cdot\text{м}\,.\qquad(32)$$

Момент сопротивления сечения определяется по формуле:

$$W=\frac{0{,}7\kappa l^{2}}{6}\,.\qquad(33)$$

Определяем общее касательное напряжение по формуле:

$$\tau_{\text{общ}}=\frac{M\cdot 6}{2\cdot 0{,}7\kappa l^{2}}=\frac{6\cdot 1650}{2\cdot 0{,}7\kappa l^{2}}\le\left[\tau'\right].\qquad(34)$$

Пусть катет сварного шва k =3 мм. Тогда определяем длину сварного шва из формулы (34):

$$l \geq \sqrt{\frac{M \cdot 6}{2 \cdot 0{,}7 \cdot k \cdot [\tau']}} = \sqrt{\frac{1650 \cdot 6}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot 10^{+6}}} = 0{,}141\,\text{м} = 141\,\text{мм}.$$

Окончательно $l = 141$ мм.

4. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Соединения деталей с помощью болтов, винтов и винтовых стяжек относятся к резьбовым соединениям. Соединения деталей с помощью болтов, винтов и винтовых стяжек относятся к резьбовым соединениям (рис.13).

Резьба – выступы, образованные на основной поверхности винтов и гаек и расположенные по винтовой линии.

По форме основной поверхности различают цилиндрические и конические резьбы.

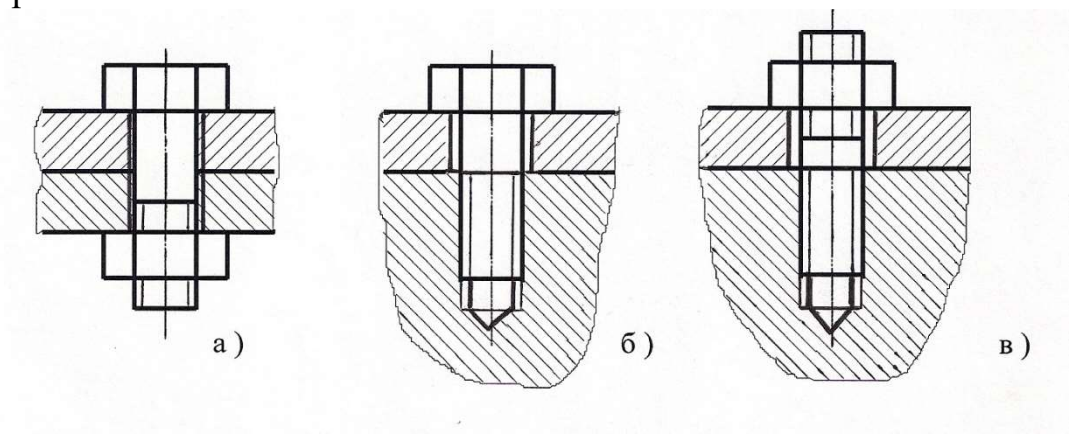


Рис.13. Соединение деталей с помощью болтов (а), винтов (б) и винтовых стяжек (в)

По профилю резьбы – треугольные, прямоугольные, трапецеидальные, круглые и др. Профиль резьбы – это контур сечения резьбы в плоскости, проходящей через ось основной поверхности.

По направлению винтовой линии различают правую и левую резьбы. У правой резьбы винтовая линия идет слева направо и вверх, а у левой - справа налево и вверх.

По числу заходов различают одно-, двухзаходную и т.д.

Основные типы резьб: крепежные и резьбы для винтовых механизмов.

К резьбам крепежным относятся: метрическая с треугольным профилем (рис. 14) – основная резьба, трубная – треугольная со скругленными вершинами и впадинами, а также круглая. Геометрические параметры метрической резьбы стандартизированы (прил. таблица 4).

Виды резьбы винтовых механизмов (ходовые резьбы): прямоугольная, трапецеидальная симметричная, трапецеидальная несимметричная (упорная).

Для изготовления крепежных деталей применяют низко- и средне-углеродистые стали, а для деталей, работающих при переменных и ударных нагрузках, – легированные стали. Наибольшее применение нашли стали: Ст3кп; Ст5; Ст10; Ст10кп. Характеристики этих марок сталей приведены в первой строке табл. 1.

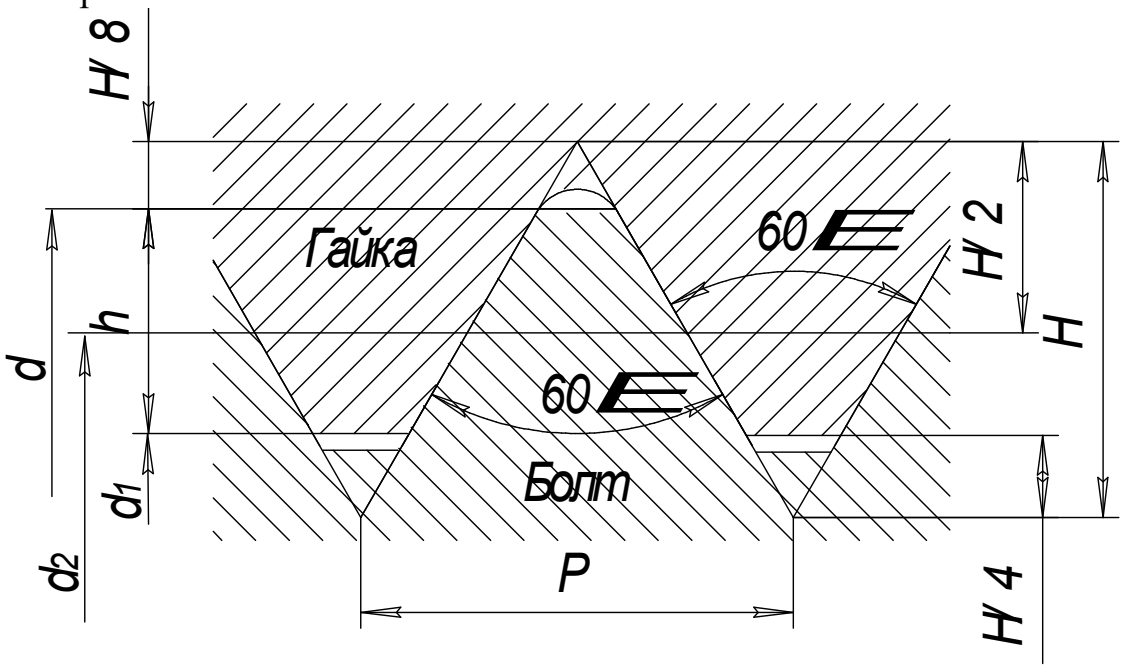


Рис.14. Геометрические параметры метрической резьбы:
d – наружный диаметр; d_1 – внутренний диаметр; d_2 – средний диаметр;
h – рабочая высота профиля; P – шаг; α – угол профиля.

Геометрические параметры резьбы определяются следующим образом:

d – наружный диаметр;

d_1 – внутренний диаметр;

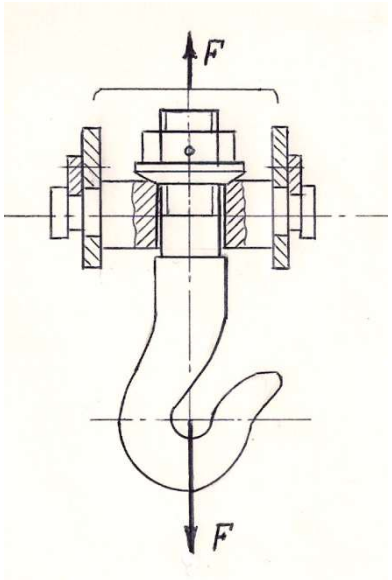
d_2 – средний диаметр;

h – рабочая высота профиля;

P – шаг (расстояние между одноименными сторонами соседних профилей, измеренное в направлении оси резьбы);

α – угол профиля.

Расчет болтов (винтов) при наиболее распространённых способах нагружения в соединениях.



1) **Растяжение в стержне (без затяжки).**

Пример: участок крюка для подвешивания груза. Стержень болта нагружен только внешней растягивающей силой. Опасным является сечение наименьшей площади диаметром d_1. Условие прочности по напряжениям растяжения в стержне:

$$\sigma_{экв} = \frac{F_з}{\pi \cdot d_1^2 / 4} \le [\sigma_р] \qquad (35)$$

где d_1 – внутренний диаметр резьбы, $F_з$ – сила затяжки; [$\sigma_р$] –допускаемые напряжения на растяжение см. в табл. 3.

крюк

2) **Болт затянут, внешняя нагрузка отсутствует.**

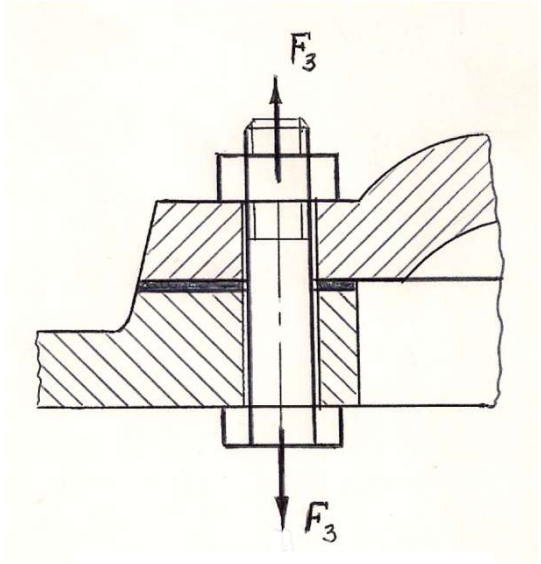


Рис.16. Болт затянут

Стержень болта растягивается и закручивается. Прочность болта определяют по эквивалентному напряжению:

$$\sigma_{экв} = \frac{F_з}{\pi \cdot d_1^2 / 4} \le [\sigma_р] \qquad (36)$$

Напряжения растяжения от силы $F_з$ и кручения от пары с моментом $T_р$:

$$\tau = \frac{T_р}{W_р} = 0{,}5 \cdot F_з \cdot d_2 \cdot tg(\psi + \varphi) / 0{,}2 d_1^3, \qquad (37)$$

где ψ- угол подъёма; φ - угол трения в резьбе.

В этом случае прочность болта определяется по эквивалентному напряжению: $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_р^2 + 3\tau^2} \le [\sigma_р]$. Вычисления показывают, что для стандартных метрических резьб [1]:

$$\sigma_{экв} = 1{,}3\sigma_р$$

или

$$\sigma_{экв} = \frac{1{,}3 \cdot F_з}{\pi \cdot d_1^2 / 4} \le [\sigma_р]. \qquad (38)$$

3) **Болтовое соединение нагружено силами, сдвигающими детали в стыке.** Условием надежности соединения является отсутствие сдвига деталей в стыке. Выполняется два варианта установки:

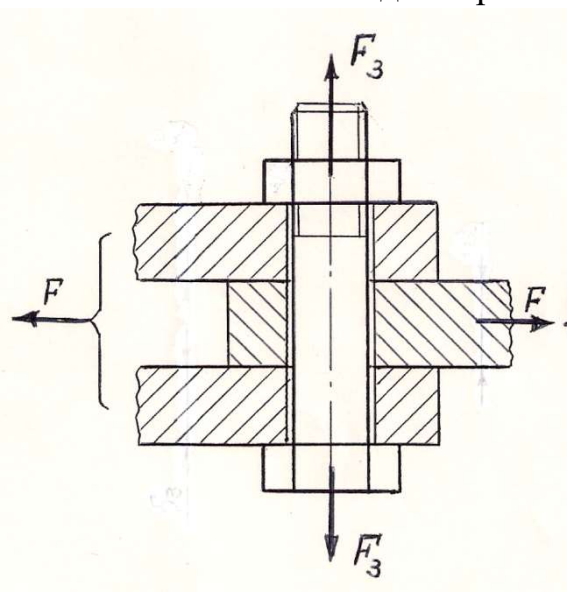


Рис.17. Болтовое соединение с зазором

а) **с зазором,** при этом внешнюю нагрузку F уравновешивают силами трения в стыке, образующимися от затяжки болта. Усилие затяжки определяется

$$F_з = \frac{K \cdot F}{i \cdot f}, \qquad (39)$$

где f = 0,15...0,20 - коэффициент трения в стыке для сухих стальных и чугунных поверхностей; i – число плоскостей стыка деталей (на рис.17 i=2); K – коэффициент запаса, принимающий численные значения при статической нагрузке K = 1,3...1,5; при переменной нагрузке K = 1,8...2,0.

Дальнейший расчёт проводится по эквивалентному напряжению (38).

б) **без зазора.** В этом случае должно выполняться два условия прочности. Первое условие – условие прочности при **срезе**

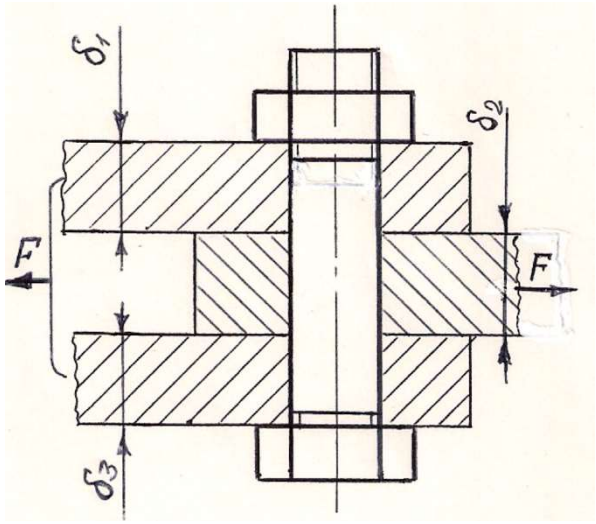


Рис. 18. Болтовое соединение без зазора

$$\tau = \frac{F}{(\pi \cdot d_1^{\,2}/4) \cdot i \cdot z} \le [\tau_c], \qquad (40)$$

где i– число плоскостей среза деталей; $[\tau_c]$ – допускаемое напряжение на срез, вычисляется при статической нагрузке $[\tau_c] = 0{,}4\,\sigma_т$; при переменной нагрузке $[\tau_c] = (0{,}2...0{,}3)\sigma_т$; z –число болтов.

Второе условие – условие прочности при **смятии**, которое при соединении трёх деталей записывается двумя уравнениями:
для средней детали:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{(\delta_2 \cdot d) \cdot n} \le [\sigma_{см}]; \qquad (41)$$

для крайних деталей:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{(\delta_1 + \delta_3) \cdot d \cdot n} \le [\sigma_{см}], \qquad (42)$$

где δ_1, ,δ_3 – толщина крайних соединяемых деталей, δ_2 –толщина средней детали.

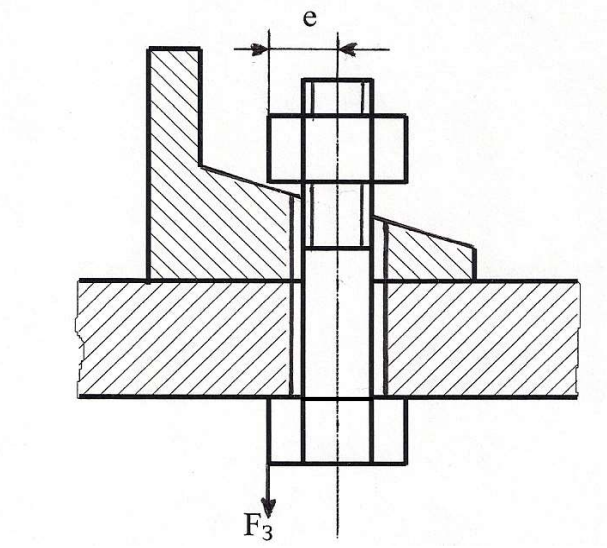


Рис. 19. Эксцентрично нагруженный болт

4) **Эксцентрично нагруженный** болт

В некоторых конструкциях резьбовых соединений болты нагружены также изгибающими их силами. Такое нагружение возникает вследствие перекосов плоскостей болта, гайки, соединяемых деталей, либо в связи с вынужденными конструктивными решениями.

После затяжки **эксцентрично нагруженного** болта кроме напряжений растяжения ($\sigma_р$) возникают также напряжения изгиба ($\sigma_и$) и максимальное эквивалентное напряжение определяют:

$$\sigma_{max} = \sigma_р + \sigma_и = \frac{F_з}{\pi \cdot d_1^{\,2}/4} + \frac{F_з \cdot e}{\pi \cdot d_1^{\,3}/32} \le [\sigma_р] \qquad (43)$$

после преобразования формулы получим:

$$\sigma_{max} = \frac{4F_з(d_1 + 8 \cdot e)}{\pi \cdot d_1^{\,3}} \le [\sigma_р] \qquad (44)$$

где e – эксцентриситет, который определяется как расстояние между возникающей парой сил, создающей изгибающий момент. Часто эксцентриситет принимают равным диаметру болта.

Допускаемые напряжения для резьбовых соединений и запасы прочности приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Допускаемые напряжения для резьбовых соединений

Вид нагрузки	Рекомендуемые значения
Растягивающая внешняя нагрузка: без затяжки болтов	$[\sigma] = 0{,}6 \cdot \sigma_Т$
с затяжкой болтов	$[\sigma] = \sigma_Т / [s]$ **Статическая** нагрузка: $[s]$ по таблице запасов – неконтролируемая затяжка; $[s]$ = 0,5…2,5 – контролируемая затяжка. **Переменная** нагрузка: $[s]$ по таблице запасов – неконтролируемая затяжка; $[s]$ = 1,5…2,5 – контролируемая затяжка
Поперечная внешняя нагрузка: болт поставлен с зазором	$[s]$ по таблице запасов – неконтролируемая затяжка; $[s]$ = 0,5…2,5 – контролируемая затяжка
болт поставлен без зазора	$[\tau] = 0{,}4 \cdot \sigma_Т$ (статическая); $[\tau] = (0{,}2...0{,}3) \cdot \sigma_Т$ - (переменная); $[\sigma_{см}] = 0{,}8 \cdot \sigma_Т$ - сталь; $[\sigma_{см}] = (0{,}4...0{,}5) \cdot \sigma_Т$ - чугун

Таблица 4

Запасы прочности для резьбовых соединений [s]

Материал болта	$[s]$ при неконтролируемой затяжке и постоянной нагрузке		
	М6…М16	М16…М30	М30…М60
Углеродистая сталь	5…4	4…2,5	2,5…1,5

Легированная сталь	6,5…5	5…3,3	3,3

Задача 12

Рычаг с грузом массой *m*=60 *кг* крепится на валике посредством клеммового соединения (рис. 20). Определить требуемый диаметр болтов, если коэффициент трения между валиком и ступицей рычага $f = 0{,}15$; число болтов $z = 2$; материал – сталь Ст3; затяжка неконтролируемая.

Указание. Момент сил трения должен быть на 20% больше момента от сил тяжести груза. Силы трения условно принять сосредоточенными в верхней и нижней точках контакта валика и ступицы клеммы.

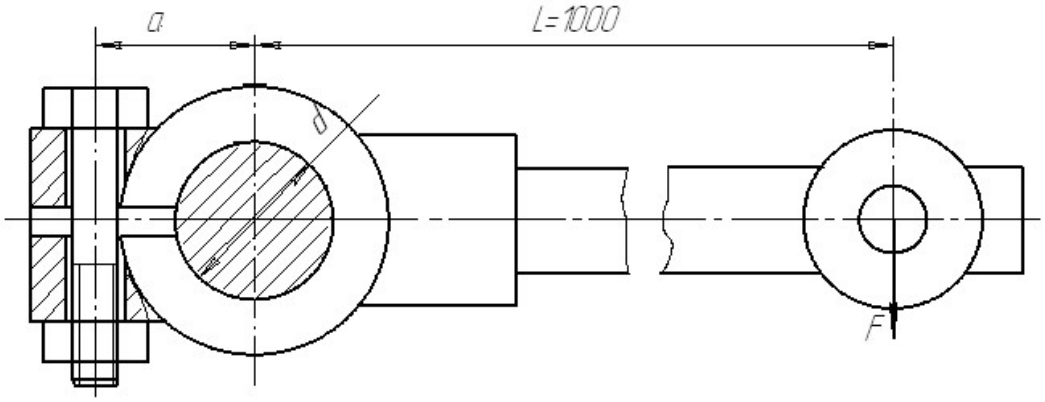


Рис. 20. Клеммовое соединение

Решение

Внешний момент от действия груза находим из выражения

$$M_{\text{внеш}} = F \cdot L = m \cdot g \cdot L = 60 \cdot 9{,}8 \cdot 1 = 588 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (45)$$

Укажем силы трения в верхней и в нижней точках контакта валика и ступицы клеммы согласно указания к решению задачи (рис. 21). Момент от пары сил трения, возникший между ступицей клеммы и валом, должен уравновесить внешний момент и должен превышать на 20 % внешний момент, то есть

$$M_{\text{внутр}} = F_{\text{тр}} \cdot d = M_{\text{внеш}} \cdot 1{,}2 \quad (46)$$

или подробнее $F_{\text{п}} \cdot f \cdot d = 1{,}2 \cdot M_{\text{внеш}}$,

откуда $$F_{\text{п}} = \frac{1{,}2 M_{\text{внеш}}}{f \cdot d} = \frac{1{,}2 \cdot 588}{0{,}15 \cdot 0{,}06} = 78{,}4 \text{ кН}. \quad (47)$$

Предположим, что половины ступицы клеммы соединены с рычагом шарнирно в точке 0. Из равенства моментов сил $F_{\text{п}}$ и $F_{\text{з}} \cdot \text{z}$ (с учётом количества болтов), относительно точки 0 имеем

$$-F_з\left(a + \frac{d}{2}\right) \cdot z + F_n \cdot \frac{d}{2} = 0. \quad (48)$$

Откуда сила затяжки одного болта

$$F_з = \frac{F_n \cdot d}{2\left(a + \frac{d}{2}\right) \cdot z} = \frac{F_n \cdot d}{(2 \cdot a + d) \cdot z} = \frac{78{,}4 \cdot 0{,}06}{(2 \cdot 0{,}055 + 0{,}06) \cdot 2} = 13{,}85\ кН$$

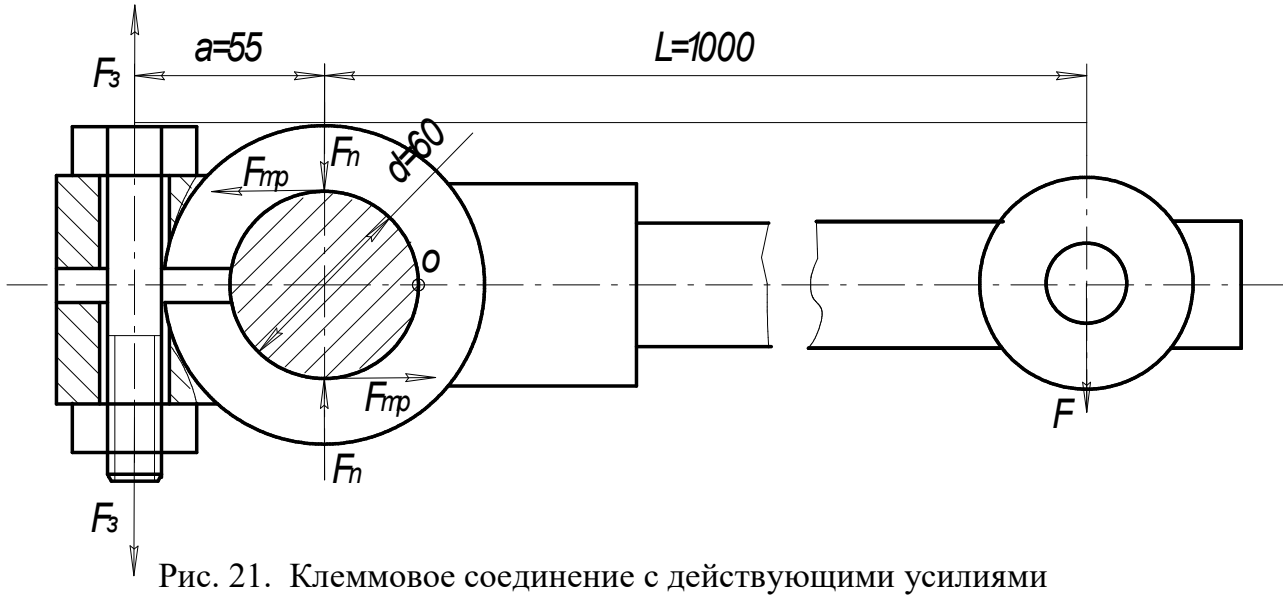


Рис. 21. Клеммовое соединение с действующими усилиями

Запишем условие прочности болта:

$$\sigma_{экв} = \frac{1{,}3 \cdot F_з}{\pi \cdot d_1^2 / 4} \le [\sigma_p], \qquad (49)$$

Из формулы (13) получаем зависимости для проектного расчета болта:

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}3 \cdot F_з}{[\sigma_р] \cdot \pi}}, \qquad (50)$$

где d_1- внутренний диаметр болта, мм; $[\sigma_Р]$- допускаемое напряжение на растяжение болта, МПа; s – запас прочности.

По табл. 3 определяем $[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{s}$.

Принимаем предварительно болт с резьбой М20, поэтому по табл.4 запасов для данного диаметра $s = 3$.

Вычисляем $[\sigma_p] = \frac{200}{3} = 66{,}7$ МПа;

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}3 \cdot 13850}{66{,}7 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14}} = 18{,}544 \cdot 10^{-3}\ м = 18{,}544\ мм.$$

Выбираем по табл. П. 4 болт М20х1 с параметрами: d_1 =18,918 мм; шаг р =1 мм; d = 20 мм.

Задача № 13

Рассчитать болты для крепления барабана лебедки к зубчатому колесу.

Усилие в тросе, навиваемом на барабан $Q = 10кН$, материал болта Ст3, $\sigma_т = 200$ МПа, коэффициент трения $f = 0{,}12$. Количество болтов – z = 6 штук. Дополнительные условия: болты установлены без зазора.

Решение

Внешний момент находим из выражения

$$M_{внеш} = 1{,}2 \cdot Q \cdot \frac{D_б}{2}; \qquad (51)$$

Внутренний момент находим по формуле

$$M_{внутр} = F_{тр} \cdot \frac{D_ш}{2}. \qquad (52)$$

Поскольку в соединении должно быть равновесие, то $M_{внеш} = M_{внутр}$,

или $F_{тр} \cdot \frac{D_ш}{2} = 1{,}2 \cdot Q \cdot \frac{D_б}{2}$. (53)

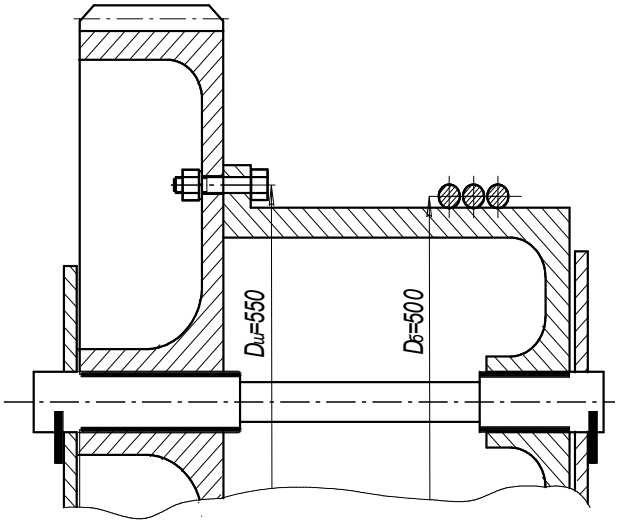


Рис. 22. Соединение зубчатого колеса с барабаном лебёдки

Отсюда вычисляем силу трения

$$F_{тр} = \frac{1{,}2 \cdot Q \cdot D_Б}{D_ш} = \frac{1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 500}{550} = 10909H.$$

При условии, что болт установлен без зазора, запишем условие прочности болта на срез

$$\tau_{ср} = \frac{F}{\pi \cdot d^2 / 4 \cdot n} \le [\tau_{ср}] \qquad (54)$$

Вычислим допускаемое напряжение на срез по табл. 3, примем нагрузку статической

$$[\tau_{ср}] = 0{,}4 \cdot [\sigma_т] = 0{,}4 \cdot 200 = 80 \text{ МПа}.$$

Определяем наружный диаметр болта из выражения

$$d \ge \sqrt{\frac{F \cdot 4}{\pi \cdot [\tau_{ср}] \cdot z}} = \sqrt{\frac{10909 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 6}} = 5{,}38 \cdot 10^{-3} \text{м} = 5{,}38 \text{ мм}. \qquad (54)$$

Принимаем по табл. П. 4 болт М6 (d=6мм).
Найденному значению d удовлетворяет чистый болт под развертку с диаметром нарезной части М6 и ненарезной – диаметром 7мм.

Запишем условие прочности на смятие

$$\sigma_{см} = \frac{F}{d \cdot \delta \cdot z} \le [\sigma_{см}]; \qquad (55)$$

$[\sigma_{см}] = 0{,}8 \cdot \sigma_т = 0{,}8 \cdot 200 = 160$ МПа (табл. 3).

Далее из выражения (55) определяем минимально необходимую толщину

фланцев соединяемых деталей (барабана и колеса):

$$\delta_{Б} = \delta_{К} \geq \frac{F}{d \cdot z \cdot [\sigma_{см}]} = \frac{10909}{7 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 160 \cdot 10^{6}} = 1{,}62 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 2 \text{ мм}.$$

В результате расчетов принимаем для крепления болты М6 и отмечаем, что минимально необходимая толщина фланцев барабана и колеса 2 мм.

5. ЗАКЛЁПОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Заклепочные соединения неразъёмные. По конструкции различают соединения внахлёстку и встык, однорядные и многорядные, односрезные и многосрезные. На рис. 23 приведён пример односрезного соединения внахлёст, на рис. 24 – пример двухсрезного соединения встык с двумя накладками.

Заклепочные соединения разделяются на [2, 3]:

1. Прочные соединения, используемые преимущественно в металлических конструкциях машин и строительных сооружениях.
2. Плотно-прочные соединения, используемые в котлах, работающих под давлением.
3. Плотные заклепочные соединения (в котлах низкого давления).

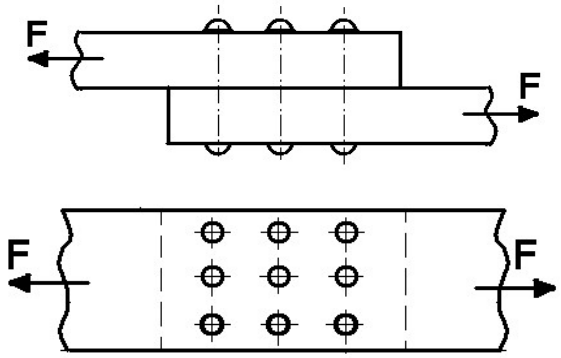


Рис. 23. Заклёпочное соединение внахлёст

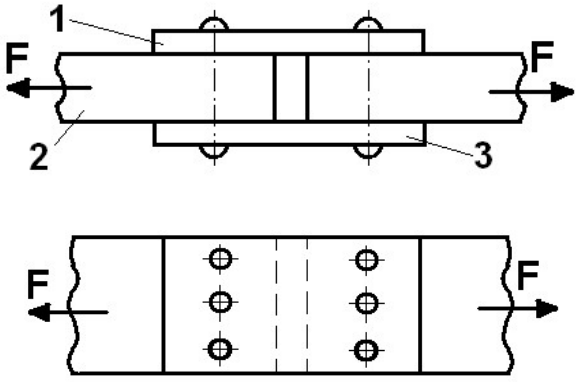


Рис. 24. Заклёпочное соединение встык с двумя накладками

Заклепочные соединения из-за неудобств технологического процесса клепки (необходимость нагрева заклепок до температуры 800 С) и перерасхода металла на соединение в настоящее время почти полностью вытеснены сваркой. Однако они сохранили применение в тяжелых конструкциях, а также

при использовании трудносвариваемых материалов (некоторые термообработанные стали и алюминиевые сплавы).

Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия. В них закладывается нагретый до красного каления стержень заклепки с одной головкой; другой конец заклепки расклепывается ударами специального молотка для образования замыкающей головки. Мелкие заклепки (малого диаметра — меньше 8 мм) ставятся в холодном состоянии.

Заклёпка – это стержень круглого сечения с заранее изготовленной закладной головкой на одном конце. Различают заклепочные соединения с полукруглой головкой, потайной, полупотайной головками (рис.25). Размеры этих заклёпок указаны в стандартах. Кроме стандартных, применяют специальные заклепки, например трубчатые. Заклёпки изготовляют из стали, меди, латуни, алюминия и др. сплавов. Материал заклёпок выбирают однородным с материалом соединяемых деталей, во избежание электрохимической коррозии и температурного изменения сил в соединении [3].

а) *б*) *в*)

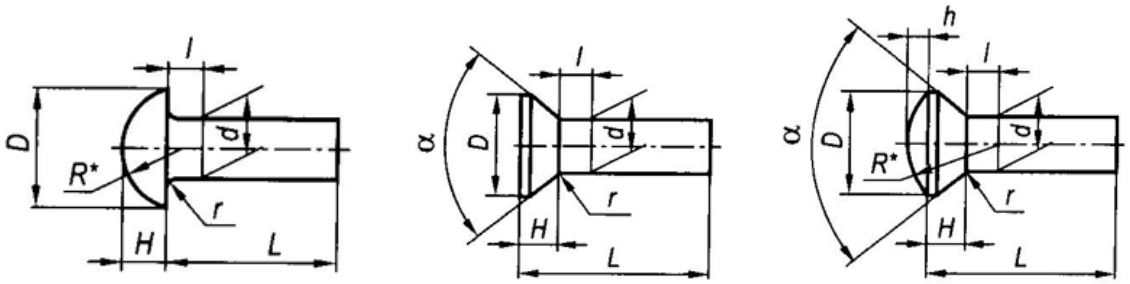


Рис. 25. Распространённые типы заклёпок: а — с полукруглой головкой (ГОСТ 10299-80); б — с потайной головкой (ГОСТ 10300-80); в — с полупотайной головкой (ГОСТ 10301-80)

Условия нагружения заклёпок идентичны условиям нагружения болтов, поставленных без зазора, при этом должно выполняться два условия прочности: при срезе (56) и при смятии (57), (58).

Условие прочности при **срезе**

$$\tau = \frac{F}{(\pi \cdot d_1^{\,2} / 4) \cdot i \cdot n} \le [\tau_c], \qquad (56)$$

где i – число плоскостей среза деталей; $[\tau_c]$ – допускаемое напряжение на срез.

Второе условие - условие прочности при **смятии**, которое при соединении трёх деталей (рис.24) записывается

для средней детали:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{(\delta_2 \cdot d) \cdot n} \le [\sigma_{см}] \qquad (57)$$

для крайних деталей:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{(\delta_1 + \delta_3) \cdot d \cdot n} \le [\sigma_{см}] \qquad (58)$$

где δ_1, ,δ_3 – толщина крайних соединяемых деталей, δ_2 – толщина средней детали.

Допускаемые напряжения для заклёпок (табл. 5) зависят от характера обработки отверстия и характера внешней нагрузки (постоянная или переменная).

Таблица 5

Допускаемые напряжения для заклёпочных соединений

Вид напряжений	Обработка отверстия	Допускаемые напряжения, МПа	
		Ст0 и Ст2	Ст3
Срез	Сверление	140	140
	Продавливание	100	100
Смятие	Сверление	280	320
	Продавливание	240	280

Задача № 14

Определить требуемое число заклепок диаметром d = 15 мм для крепления к листу двух равнобоких уголков № 9 с толщиной полки S=8 мм, нагруженных статической нагрузкой F= 430 кН. Допускаемое напряжение для заклепок на срез при сверлении для Ст3 $[\tau_{ср}]$=140МПа и на смятие $[\sigma_{см}]$=320МПа (табл.5).

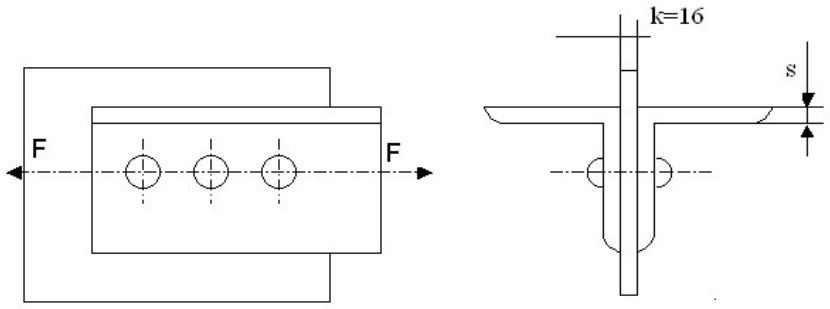


Рис. 26. Заклёпочное соединение к задаче 14

Решение

Определяем требуемое число заклепок из расчета на срез, полагая, что нагрузка между заклепками распределена равномерно. Так как соединение

выполнено с двумя уголками, то заклепки двухсрезные и количество их может быть определено по формуле

$$n \geq \frac{F}{2\frac{\pi d^2}{4}[\tau]_{ср}} = \frac{430 \cdot 10^3}{2\frac{3{,}14 \cdot (15 \cdot 10^{-3})^2}{4} 140 \cdot 10^{+6}} = 8{,}69 \qquad (59)$$

Предварительно принимаем число заклёпок n=9.

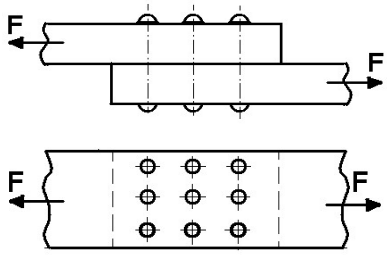
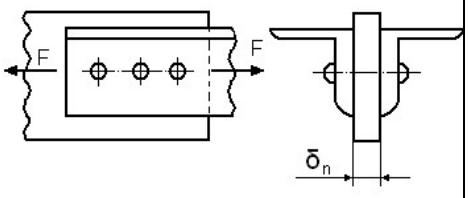
Проверяем напряжение смятия на поверхности между заклепкой и отверстием. Так как суммарная толщина уголков 2δ=2·8=16 мм равна толщине полосы $к$=16 мм (см. рис. 26), то в формуле для определения напряжений смятия подставляем толщину $к$=16 мм:

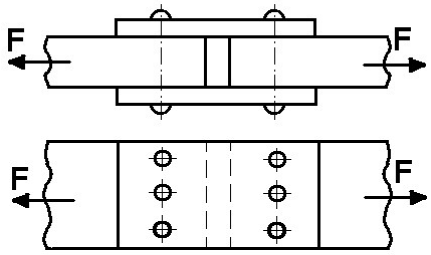
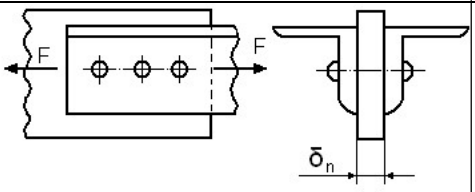
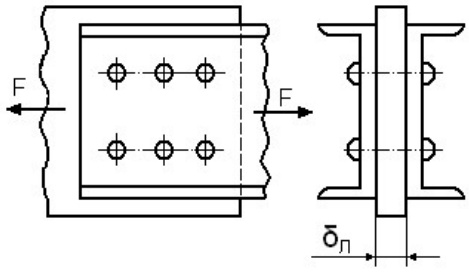
$$\sigma_{см} = \frac{F}{ndk} = \frac{430 \cdot 10^3}{12 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-3}} = 248{,}8 \cdot 10^{+6}\ \text{Па} = 248{,}8\ \text{МПа}. \qquad (60)$$

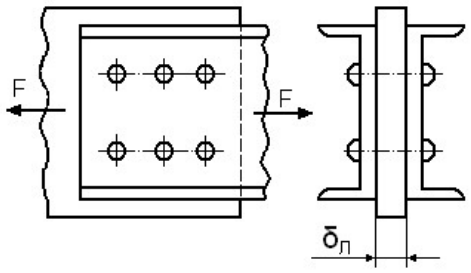
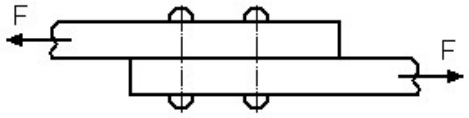
Так как $\sigma_{см}$ =248,8 МПа <[$\sigma_{см}$]=320 МПа, следовательно, прочность соединения обеспечена. Окончательно принимаем число заклёпок равным 9.

Таблица 6

Схемы для задач на заклёпочное соединение

	Варианты	
 Схема 1	1 2 3	Две пластины толщиной δ соединены внахлест, сила, приложенная на растяжение, равна F. В наличие имеются заклёпки диаметром *d*, а диаметр отверстия d_0 по ГОСТ. Материал заклёпок сталь Ст 2.Определить необходимое число заклёпок. *F*= 40 кН; *d*= 3 мм; δ= 4 мм; *F*= 50 кН; *d*= 4 мм; δ= 8 мм; *F*= 60 кН; *d*= 5 мм; δ= 10 мм.
	4 5 6	Проверить прочность заклёпочного соединения при толщине косынки, равной толщине полосы $\delta_к=\delta$, если приложена сила *F*, число заклёпок n и диаметр сверлений под них равен d_0 и $\delta_к=\delta=3$ мм. *n*= 12; *F*= 6,0 кН; *d*= 3 мм; *n*= 12; *F*= 20 кН; *d*= 4 мм; *n*= 14; *F*= 30 кН; *d*= 5 мм.
	7 8 9	Определить требуемый диаметр заклёпок из материала Ст 2, если известно, что этих заклёпок необходимо установить n и растягивающая сила равна *F*. *n*= 10; *F*= 80 кН; δ= 6 мм; *n*= 12; *F*= 60 кН; δ= 8 мм; *n*= 10; *F*= 90 кН; δ= 10 мм.
 Схема 2	10 11 12	Проверить, является ли заданное заклёпочное соединение равнопрочным прикрепляемым равнобочным уголкам. В наличие имеются заклёпки диаметром *d*= 10 мм, в количестве n. Материал заклёпок сталь Ст 2. Толщина полосы δ_n; уголок площадью А и размерами, $b\times b\times d_y$, мм. n= 25; δ_n = 16 мм; А= 12,3 см^2; 80×80×8 n= 25; δ_n = 14 мм; А= 15,6 см^2; 90×90×9 n= 30; δ_n = 20 мм; А= 19,2 см^2; 100×100×10

 Схема 3	Варианты 13 14 15	Проверить прочность заклёпок в соединении двух пластин толщиной *d*/2 каждая. Растягивающая сила *F*. Число заклёпок *n*. Толщина накладок *d*/4. *F*= 110 кН; *n*= 12; *d*= 14 мм; *F*= 180 кН; *n*= 40; *d*= 8 мм; *F*= 130 кН; *n*= 20; *d*= 12 мм.
	16 17 18	Определить, какое усилие может воспринимать заклёпочное соединение при креплении двух пластин толщиной *d*/2. Толщина накладок *d*/4. Число заклёпок *n*. *d*= 4 мм; *n*= 6; *d*= 5 мм; *n*= 8; *d*= 6 мм; *n*= 10.
 Схема 2	19 20 21	Определить требуемый диаметр заклёпок из материала Ст2, если известно, что этих заклёпок необходимо установить n и растягивающая сила равна *F*, уголок площадью *A* и размерами, $b \times b \times d_y$, мм. *n*= 8; δ_n = 12 мм; *A*= 12,3 см^2 ; 80×80×8 *n*= 10; δ_n = 16 мм; *A*= 15,6 см^2 ; 90×90×9 *n*= 20; δ_n = 18 мм; *A*= 19,2 см^2; 100×100×10
 Схема 4	22 23 24	Определить диаметр заклёпок из материала Ст 2, если известно, что этих заклёпок *n* и растягивающая сила равна *F*. Установлено два швеллера №14а, толщиной 9,5 мм. *n*= 8 ; $\delta_л$ = 12 мм; *F*= 100 кН; *n*= 10; $\delta_л$ = 16 мм; *F*= 80 кН; *n*= 20; $\delta_л$ = 20 мм; *F*= 130 кН.

 Схема 4	Вар 25 26 27	Проверить прочность заклёпок в соединении для заданного швеллера толщиной $d_ш$ с листом толщиной $\delta_л$.растягивающая сила равна F . Число заклёпок n. $D_ш$=10 мм. n= 8; d= 8 мм; $\delta_л$= 12 мм; F= 100 кН; n= 10; d= 10 мм; $\delta_л$= 16 мм; F= 200 кН; n= 20; d= 12 мм; $\delta_л$= 20 мм; F= 300 кН.
 Схема 5	28 29 30	Определить, какое усилие может воспринимать заклёпочное соединение при креплении двух пластин равной толщины d/2, где d – диаметр заклёпки из стали Ст2. Число заклёпок n. n= 16; d= 4 мм; n= 20; d= 5 мм; n= 24; d= 6 мм.
	31 32 33	Определить диаметр заклёпок из материала Ст 2, если известно, что этих заклёпок n и растягивающая сила равна F. у двух пластин . Число заклёпок n. n= 16; d= 6мм; F= 120 кН; n= 20; d= 8 мм; F= 160 кН; n= 24; d= 10 мм. F= 200 кН.
	34 35 36	Проверить прочность заклёпочного соединения при толщине косынки, равной толщине полосы, если приложена сила F, число заклёпок n и диаметр сверлений под них равен $d_{0,}$ $\delta_к$=δ=6 мм. n= 20; F= 10 кН; d= 10 мм; n= 25; F= 20 кН; d= 12 мм; n= 30; F= 30 кН; d= 14 мм.

6. ЗУБЧАТАЯ ПЕРЕДАЧА

При выполнении задания необходимо определить крутящие моменты, действующие на валах, допускаемое контактное напряжение и выполнить расчёт геометрических параметров цилиндрической или конической прямозубой передачи. Вычертить в масштабе зубчатое колесо.

Задача № 14

Рассчитать геометрические параметры прямозубой зубчатой передачи. Необходимые данные для расчета: № схемы зубчатого механизма, мощность на выходном валу (P_2), кВт, частота вращения входного вала (n_2), об/мин, передаточное число зубчатой передачи (u), предел прочности для стали, из которой изготовлены зубчатые колёса (σ_B), МПа – приведены в табл. 7.

Таблица 7

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
N схемы	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Мощность P_2 , кВт	9,0	2,0	12	2,5	20	3,0	28	4,5	6,0	1,7
Передаточное число	3,55	5	4,5	4	4,5	5	8	5	4,5	5
Частота вала n_1, об/мин	975	955	975	730	975	955	1470	965	970	950
Предел прочности σ_B, МПа	700	650	600	700	650	600	700	650	600	700

Решение задачи

Данные для расчета: схема зубчатого механизма – редуктор цилиндрический (1), мощность на выходном валу, P_2 =24кВт, частота вращения выходного вала, n_2 = 960 об/мин, передаточное число передачи – 4. Предел прочности материала σ_B =700 МПа.

6.1. Расчёт цилиндрической зубчатой передачи

Определяем крутящий момент на выходном валу

$$T = \frac{P}{\omega_2} = \frac{24 \cdot 10^3}{25{,}1} = 956 \text{ Н} \cdot \text{м}, \qquad (61)$$

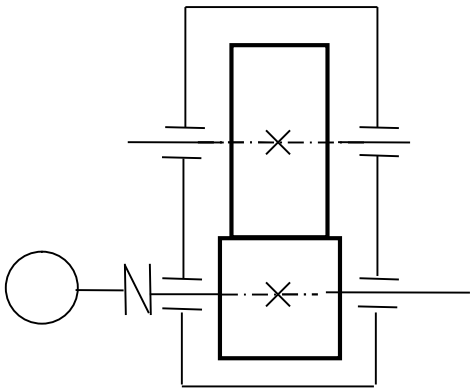


Схема 1. Редуктор цилиндрический

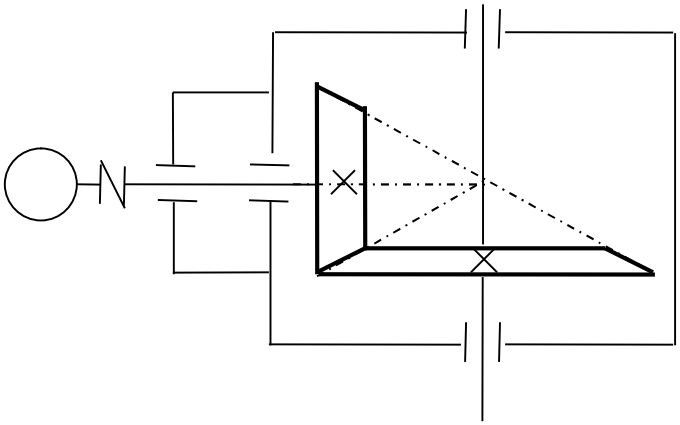


Схема 2. Редуктор конический

Рис. 26. Схемы заданий для расчёта передач:
схема 1 – редуктор цилиндрический;
схема 2 – редуктор конический

где T – крутящий момент на валу, Н·м; P – передаваемая на вал мощность, Вт; ω_2 – угловая скорость выходного вала, рад/с, которая связана с частотой вращения выходного вала n_2, об/мин, соотношением

$$\omega_2 = \frac{2\pi \cdot n_2}{60} = \frac{2\pi \cdot 240}{60} = 25{,}1 \text{ рад/с}, \quad (62)$$

$$u = \frac{n_1}{n_2} \text{ откуда } n_2 = \frac{n_1}{u} = \frac{960}{4} = 240 \text{ об/мин}.$$

Рассчитываем допускаемое контактное напряжение в зубчатом зацеплении колеса. Ориентировочно твердость материала по Бринеллю связана с пределом его прочности соотношением

$$HB = 0{,}285 \cdot \sigma_{\text{В}} = 0{,}285 \cdot 700 = 199{,}5 \text{ МПа}, \quad (63)$$

где *HB* – означает твердость материала в единицах Бринелля; $\sigma_{\text{В}}$ – предел прочности материала колеса, МПа, заданный в табл. 7.

Предел контактной выносливости зубчатого зацепления при базовом числе циклов для колес, выполненных из углеродистых сталей с твердостью поверхности зубьев *HB*<350, вычисляем по приближенной формуле

$$\sigma_{\text{H lim}} = 2 \cdot HB + 70 = 2 \cdot 199{,}5 + 70 = 469 \text{ МПа}, \quad (64)$$

где $\sigma_{\text{H lim}}$ – предел контактной выносливости зубчатого зацепления при базовом числе циклов, МПа.

Допускаемые контактные напряжения при расчете на выносливость зубчатого зацепления рассчитываем по формуле

$$[\sigma_{\text{H}}] = \frac{K_{\text{HL}}}{S_{\text{H}}} \cdot \sigma_{\text{H lim}} = \frac{1}{1{,}15} \cdot 469 = 408 \text{ МПа}, \quad (65)$$

где $[\sigma_{\text{н}}]$ – допускаемое контактное напряжение, МПа; K_{HL} – коэффициент долговечности; S_H – коэффициент безопасности. При числе циклов нагружения больше базового, что имеет место при длительной эксплуатации, принимают K_{HL}=1, S_{H}=1,15.

Приближенная оценка межосевого расстояния зубчатой передачи может быть получена из стандартной формулы для a_{w} путем усреднения входящих в неё коэффициентов по материалам средней прочности:

$$a_{\omega} = K_a \cdot (u+1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2 \cdot K_{\text{H}\beta}}{\psi_{ba} \cdot u^2 \cdot [\sigma_{\text{H}}]^2}} = 495 \cdot (4+1) \cdot \sqrt[3]{\frac{956 \cdot 1{,}1}{0{,}4 \cdot 4^2 \cdot 408^2}} = 246{,}4 \text{ мм}, \quad (66)$$

где a_w – межосевое расстояние передачи, мм; u – передаточное число; K_a – размерный коэффициент, для прямозубой передачи, K_a=495 МПа; T_2 – крутящий момент на выходном валу, Н·м; $K_{\text{H}\beta}$ – коэффициент неравномерности нагрузки на венец зубчатого колеса, выбирается в зависимости от конструктивной схемы узла, при симметричном расположении колеса относительно опор $K_{\text{H}\beta}$=1,0÷1,15; $[\sigma_{\text{н}}]$ – допускаемое контактное напряжение в зубчатом зацеплении колеса, МПа; ψ_{ba} – коэффициент ширины колеса относительно межосевого расстояния, выбирается самостоятельно из ряда

ψ_{ba}=0,25; 0,315; 0,4; 0,5.

Полученный в миллиметрах результат a_{w} округляем до ближайшего стандартного значения из ряда (ГОСТ 2185-66), приведённого в табл. 8 и принимаем a_{w} =250 мм.

Таблица 8

Одноступенчатые редукторы, a_{w}, мм

1 ряд	63	80	100	125	160	200	250	315	400	500	630

2 ряд	–	–	–	140	180	224	280	355	450	560	710

Значение **модуля** рекомендуется принимать в пределах

$$m = (0{,}01 \div 0{,}02)\, a_w = 0{,}01 \cdot 250 \div 0{,}02 \cdot 250 = 2{,}5 \div 5{,}0 \text{ мм}. \quad (67)$$

Полученное значение модуля m округляется до стандартного (табл. 9), причём численные значения предпочтительнее выбирать из первого ряда. Для силовых передач рекомендуется принимать модуль $m \geq 1{,}5$ мм. Принимаем модуль 5 мм.

Затем определяют **суммарное число зубьев** $z_c = z_1 + z_2$ для прямозубых передач по формуле

$$z_c = \frac{2a_w}{m} = \frac{2 \cdot 250}{5} = 100. \quad (68)$$

m, мм	1 ряд	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
	2 ряд	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11

Таблица 9

Значения модулей ***m*** по ГОСТ 9563-60

Чтобы избежать нарезания колес со смещением, значения модуля выбирают таким, чтобы z_c в формуле (69) было целым числом и $z_1 \geq z_{min}$. Минимальное число зубьев для прямозубых колес составляет: $z_{rnin} = 14 \ldots 17$.

Число зубьев шестерни определяется по формуле

$$z_1 = \frac{z_c}{u+1} = \frac{100}{4+1} = 20. \quad (69)$$

Число зубьев колеса

$$z_2 = z_c - z_1 = 100 - 20 = 80. \quad (70)$$

После определения z_1 и z_2 уточняют передаточное число ***u*** .

Фактическое передаточное число

$$u_ф = \frac{z_2}{z_1} = \frac{80}{20} = 4. \quad (71)$$

Отклонение от заданного числа ***u***

$$\Delta u = \frac{u_ф - u}{u} \cdot 100 = \frac{4-4}{4} \cdot 100 = 0\ \%. \quad (72)$$

Допускается отклонение передаточного отношения для одноступенчатой зубчатой передачи Δu не более 3 %.

Рабочая ширина венца зубчатого колеса определяется по формуле:

$$b_w = \psi_{ba} \cdot a_w = 0{,}4 \cdot 250 = 100 \text{ мм}. \quad (73)$$

Полученное значение b_w округляется до ближайшего стандартного по ГОСТ 6636-69 ряд R_a 40 (табл. 10), b_w =100 мм. Ширина шестерни b_1 для компенсации неточностей сборки часто выполняется несколько больше, примерно на 5…10 мм ширины колеса: b_1 = 100 + 5…10 = 105…110 мм. Принимаем по ГОСТ 6636-69 ряд R_a 40 (табл.10) b_1 = 110мм.

Таблица 10

Нормальные линейные размеры, мм (ГОСТ 6636-69)

Ra40						Дополнительные размеры					
6,3	6,7	7,1	7,5	8,0	8,5	6,5	7,0	7,3	7,8	8,2	8,8
9,0	9,5	10	10,5	11	11,5	9,2	9,8	10,2	10,8	11,2	11,8
12	13	14	15	16	17	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5
18	19	20	21	22	24	18,5	19,5	20,5	21,5	23	27
25	26	28	30	32	34	29	31	33	35	37	39
36	38	40	42	45	48	41	44	46	49	52	55
50	53	56	60	63	67	58	62	65	70	73	78
71	75	80	85	90	95	82	88	92	98	102	108
100	105	110	120	125	130	112	115	118	135	145	155
140	150	160	170	180	190	165	175	185	205	215	230
200	210	220	240	250	260	270	290	300	315	330	350
280	300	320	340	360	380	370	390				

Примечание: далее размеры можно определить, если приведённые в таблице числа умножать на десять.

Диаметры начальных (d_w), делительных (d) окружностей, окружностей вершин зубьев (d_a) и впадин (d_f) для зубчатых колёс, нарезанных без смещения, вычисляются по формулам, приведённым ниже (точность вычисления делительных диаметров колес до 0,01 мм) и вычисленные значения помещены в табл. 11:

Таблица 11

Геометрические параметры зубчатых колес

Параметр	Обозначение	Размер, мм
Межосевое расстояние	a_w	250
Ширина колеса	b_w	100
Ширина шестерни	b_{w1}	110
Модуль	m	5
Число зубьев шестерни	Z_1	20
Число зубьев колеса	Z_2	80
Делительный диаметр: - шестерни	d_{w1}	100

- колеса	d_{w2}	400
Диаметр выступов: - шестерни - колеса	 d_{a1} d_{a2}	 110 410
Диаметр впадин: - шестерни - колеса	 d_{f1} d_{f2}	 87,5 387,5

начальный шестерни $d_{w1} = m \cdot z_1 = 5 \cdot 20 = 100$ мм ; (74)

начальный колеса $d_{w2} = m \cdot z_2 = 5 \cdot 80 = 400$ мм ;

делительный шестерни $d_1 = m \cdot z_1 = 5 \cdot 20 = 100$ мм ;

делительный колеса $d_2 = m \cdot z_2 = 5 \cdot 80 = 400$ мм ;

вершин зубьев шестерни $d_{a1} = m \cdot z_1 + 2m = 5 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 110$ мм ;

вершин зубьев колеса $d_{a2} = m \cdot z_2 + 2m = 5 \cdot 80 + 2 \cdot 5 = 410$ мм ;

впадин зубьев шестерни $d_{f1} = m \cdot z_1 - 2{,}5 \cdot m = 5 \cdot 20 - 2{,}5 \cdot 5 = 87{,}5$ мм ;

впадин зубьев колеса $d_{f2} = m \cdot z_2 - 2{,}5 \cdot m = 5 \cdot 80 - 2{,}5 \cdot 5 = 387{,}5$ мм .

6.2. Расчёт конической передачи

Расчёт крутящего момента и допускаемого контактного напряжения выполняется аналогично, как и для цилиндрической передачи (см. п. 6.1).

Определяем главный параметр – **внешний делительный диаметр** колеса d_{e2}, мм [5]:

$$d_{e2} \geq 1650 \cdot \sqrt[3]{\frac{u \cdot T_2 \cdot K_{H\beta}}{\vartheta_H \cdot [\sigma_H]^2}} , \quad (75)$$

где T_2 – крутящий момент на колесе, Н·м**;** $[\sigma_H]$ – допускаемое контактное напряжение, вычисляемое по формуле (65), МПа; u – передаточное отношение; $K_{H\beta}$ – коэффициент, учитывающий распределение нагрузки по ширине венца (для прирабатывающихся колес с прямыми зубьями $K_{H\beta}$ =1, с круговыми зубьями $K_{H\beta}$ =1,1); ϑ_H – коэффициент вида конических колес (для прямозубых колес ϑ_H=1, для колес с круговыми зубьями ϑ_H=1,85 – при твердости колеса и шестерни ≤350 НВ**;** ϑн=1,5 твердости колеса ≤350 НВ и шестерни ≥45 HRC).

Полученное значение внешнего делительного диаметра колеса d_{e2} для нестандартных передач округляем до ближайшего значения из ряда нормальных линейных размеров *Ra* 40 (табл. 10).

Внешнее конусное расстояние (Re) определяется по формуле

$$R_e = d_{e2}/2\sin\delta_2, \text{ мм.} \quad (76)$$

Значение R_e вычислять до сотых, до целого числа не округлять.

Углы делительных конусов шестерни δ_1 и колеса δ_2 вычисляются по формулам

$$\delta_2=\text{arctg } u; \quad \delta_1=90 - \delta_2. \tag{77}$$

Точность вычислений до четвёртого знака после запятой [2].

Определяем **ширину** зубчатого венца шестерни и колеса b, мм:

$$b=\psi_R R_e, \tag{78}$$

где ψ_R =0,285 – коэффициент ширины венца. Значение b необходимо округлять до целого числа по ряду *Ra* 40 (см. табл.10).

Внешний окружной модуль m_e – для прямозубых колес, m_{te} – для колес с круговыми зубьями вычисляем по формуле

$$m_e(m_{te})=14T_2\cdot10^3/ (\vartheta_F\, d_{e2} b[\sigma_F]\, K_{F\beta}), \text{ мм}, \tag{79}$$

где $[\sigma_F]$ – допускаемое напряжение изгиба, МПа; d_{e2} – внешний делительный диаметр колеса, мм [5]; $K_{F\beta}$ – коэффициент, учитывающий распределение нагрузки по ширине венца. Для прирабатывающихся колес с прямыми зубьями $K_{F\beta}$ =1, с круговыми зубьями $K_{F\beta}$ =1,08; ϑ_F – коэффициент вида конических колес. Для прямозубых колес ϑ_F =0,85; для колес с круговыми зубьями ϑ_F =1.

Допускаемые напряжения изгиба при расчете на выносливость определяем по формуле

$$[\sigma_F]=(\sigma_{F\lim}/S_F)\cdot K_{FC}\cdot K_{FL}, \tag{80}$$

где $\sigma_{F\lim}$ – базовый предел выносливости зубьев по излому от напряжений изгиба, $\sigma_{F\lim}=HB+260$ МПа; S_F – коэффициент безопасности (при нормализации и улучшении материалов $S_F=1{,}75$); K_{FC} – коэффициент, учитывающий влияние двухстороннего приложения нагрузки (K_{FC}=1, так как в соответствии с заданием, на зубья действует односторонняя нагрузка); K_{FL} – коэффициент долговечности (предельные значения K_{FL} ограничиваются $1\le K_{FL}\le 2$)[2].

Значение модуля, полученное с точностью до двух знаков после запятой, до стандартной величины не округлять. **В силовых конических передачах принимать m_e (m_{te}) ≥1,5 мм.**

Числа зубьев колеса z_2, и шестерни z_1 определяем по формулам

$$z_2=d_{e2}/m_e(m_{te}); \tag{81}$$

$$z_1=z_2/u. \tag{82}$$

Полученные значения z_1 и z_2 округляем в ближайшую сторону до целого числа. Из условия уменьшения шума и отсутствия подрезания зубьев рекомендуется принять $z_1\ge 18$ – для прямозубых колес.

После вычисления чисел зубьев z_1 и z_2 уточняем фактическое передаточное число $u_ф$:

$$u_ф=z_2/z_1, \tag{83}$$

и проверяем его **отклонение** Δu от заданного передаточного числа u:

$$\Delta u=\left| u_ф - u\right|/u\cdot100\%\le4\%. \tag{84}$$

При невыполнении нормы отклонения передаточного числа Δu следует пересчитать z_1 и z_2 .

Определяются **действительные углы** делительных конусов шестерни δ_1 и колеса δ_2:

$$\delta_2=\text{arctg}u_ф; \quad (85)$$

$$\delta_1=90 - \delta_2. \quad (86)$$

Для конических передач с разностью средних твердостей шестерни и колеса $HB_{1ср} - HB_{2ср}\leq 100$ выбрать по табл. 12 **коэффициент смещения** инструмента x_{e1} для прямозубой шестерни и x_{n1} для шестерни с круговым зубом. Коэффициенты смещения колес соответственно определяются $x_{e2}=-x_{e1}$ и $x_{n2}=-x_{n1}$. Если $HB_{1ср} - HB_{2ср}>100$, то $x_1= x_2 =0$.

Для передач, у которых z_1 и u отличаются от указанных в табл. 12, коэффициенты x_{e1} и x_{n1} принимают с округлением в большую сторону.

Таблица 12

Коэффициенты смещения x_{e1} и x_{n1} для шестерён конических передач

z_1	x_{e1} при передаточном числе u					x_{n1} при передаточном числе u				
	2,0	2,5	3,15	4,0	5,0	2,0	2,5	3,15	4,0	5,0
12	–	0,50	0,53	0,56	0,57	0,32	0,37	0,39	0,41	0,42
13	0,44	0,48	0,52	0,54	0,55	0,30	0,35	0,37	0,39	0,40
14	0,42	0,47	0,50	0,52	0,53	0,29	0,33	0,35	0,37	0,38
15	0,40	0,45	0,48	0,50	0,51	0,27	0,31	0,33	0,35	0,36
16	0,38	0,43	0,46	0,48	0,49	0,26	0,30	0,32	0,34	0,35
18	0,36	0,40	0,43	0,45	0,46	0,24	0,27	0,30	0,32	0,32
20	0,34	0,37	0,40	0,42	0,43	0,22	0,26	0,28	0,29	0,29
25	0,29	0,33	0,36	0,38	0,39	0,19	0,21	0,24	0,25	0,25
30	0,25	0,28	0,31	0,33	0,34	0,16	0,18	0,21	0,22	0,22
40	0,20	0,22	0,24	0,26	0,27	0,11	0,14	0,16	0,17	0,17

- **Внешние диаметры шестерни и колеса** вычисляются по формулам, приведённым ниже (точность вычисления рекомендуется для делительных диаметров колес до 0,01 мм):

делительный шестерни $d_{e1}=m_e z_1$; (87)

делительный колеса $d_{e2}=m_e z_2$;

вершин зубьев шестерни $d_{ae1}=d_{e1} + 2(1 + x_{e1})m_e\cos\delta_1$;

вершин зубьев колеса $d_{ae2}=d_{e2} + 2(1 - x_{e1})m_e\cos\delta_2$;

впадин зубьев шестерни $d_{fe2}=d_{e1} - 2(1,2 - x_{e1})m_e\cos\delta_1$;

впадин зубьев колеса $d_{fe2}=d_{e2} - 2(1,2 + x_{e1})m_e\cos\delta_2$.

- **Средние делительные** диаметры шестерни d_1 и колеса d_2 определяются по формулам:

$$d_{m1} \approx 0.857 d_{e1}; \quad (88)$$

$$d_{m2} \approx 0.857 d_{e2}. \quad (89)$$

Значения d_1 и d_2 до целого числа не округлять, записать до сотых долей мм.

7. КОНСТРУИРОВАНИЕ ЗУБЧАТЫХ КОЛЁС

Форма зубчатого колеса может быть плоской или со ступицей, выступающей с одной стороны. Значительно реже (в одноступенчатых редукторах) колеса делают со ступицей, выступающей в обе стороны [6].

При небольших диаметрах колес их изготовляют из прутка, а при больших получают заготовки свободной ковкой с последующей токарной обработкой. Конструкция колеса показана на рис. 25.

Ширину ступицы $l_{СТ}$ колеса желательно принимать равной или больше ширины b_2 зубчатого венца ($l_{СТ} \geq b_2$). Принятую длину ступицы согласуют с расчетной и с диаметром посадочного отверстия d: $l_{СТ} = (0{,}8...1{,}5)d$, обычно $l_{СТ} = (1{,}0...1{,}2)d$.

Диаметр $d_{СТ}$ назначают в зависимости от материала ступицы: для стали - $d_{СТ} = (1{,}5...1{,}55)d$; для чугуна – $d_{СТ} = (1{,}55...1{,}6)d$; для легких сплавов – $d_{СТ} = (1{,}6...1{,}7)d$. Меньшие значения используют для шлицевого соединения колеса с валом, большие – для шпоночного соединения и соединения с натягом.

Толщину обода колеса S принимают:

$$S = 2{,}2m + 0{,}05b_2, \quad (90)$$

где m – модуль зацепления, мм.

На торцах зубчатого венца (зубьях и кромках обода) выполняют фаски, величину которых находят по соотношению

$$f = (0{,}5...0{,}6)m \quad (91)$$

с округлением до стандартного значения.

На прямозубых зубчатых колесах фаску выполняют под углом $\alpha_Ф = 45°$, на косозубых колесах при твердости рабочих поверхностей менее 350HB – под углом $\alpha_Ф = 45°$, а при более высокой твердости – $\alpha_Ф = 15...20°$.

Острые кромки торцов ступицы также притупляют фасками, размеры которых принимают по табл. 13.

При серийном производстве заготовки колес получают из прутка свободной ковкой, а также ковкой в штампах. При годовом объеме выпуска колес более 50 шт. экономически оправдана ковка в простейших односторонних подкладных штампах.

Таблица 13

Размеры фасок на торцах ступицы колеса

d, мм	40…50	50…80	80…120	120… …150	150… …250	250… …500
f, мм	1,6	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0

При готовом объеме выпуска более 100 шт. применяют двусторонние штампы. Для свободной выемки заготовок из штампа принимают значения штамповочных уклонов $\gamma \geq 7°$ и радиусов закруглений $R \geq 6$ мм.

Толщина диска

$$C \approx 0{,}5(S + S_{CT}) \geq 0{,}25b_2, \qquad (92)$$

где $S_{CT} = 0{,}5(d_{CT} - d)$.

В диске обычно выполняют 4…6 технологических отверстий диаметром 18…22 мм.

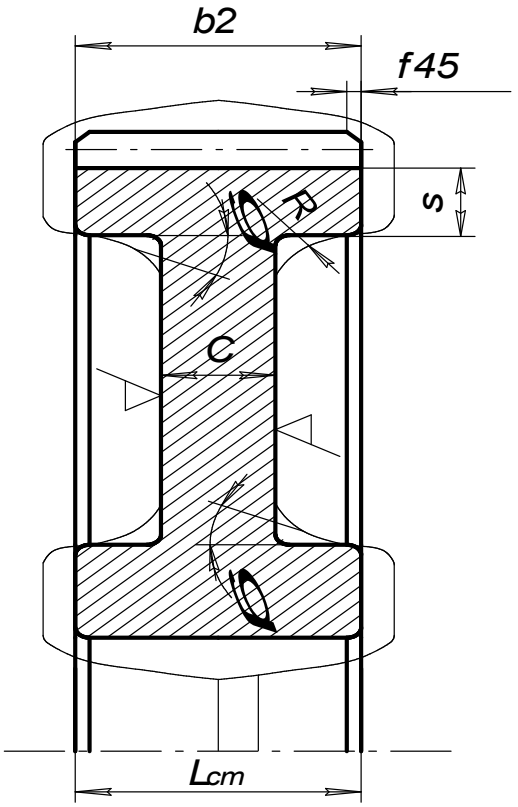


Рис. 27. Конструкция колеса

Для уменьшения влияния термической обработки на точность геометрической формы зубчатые колеса при *HB* >350 делают массивными:

$$C = (0{,}35...0{,}4)b_2. \qquad (93)$$

Нормализованные и улучшенные колеса делают с более тонким диском (

$C = 0{,}25b_2$).

Зубчатые колеса, вращающиеся с относительно высокой частотой ($n \geq 1000 мин^{-1}$), обрабатывают кругом и балансируют путем высверливания отверстий на торцах обода.

Базовыми поверхностями при нарезании зубьев являются поверхность центрального отверстия и торцы зубчатого венца. Производительность возрастает при нарезании зубьев в «пакете» из двух колес и более.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАКЛЁПОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Задача № 1

Две пластины соединены внахлест; силы, приложенные на растяжение равны 220 кН. В наличии имеются заклепки диаметром 19 мм, диаметр отверстий d_0 по ГОСТ=20 мм, толщина пластины 10 мм. Материал заклепок Ст 2 ($[\tau_{ср}]$=140 Н/мм^2). Определить необходимое число заклепок.

Ответ: 5 шт.

Задача № 2

Определить напряжение смятия в заклепочном соединении при толщине косынки, равной толщине полосы $\delta_к=\delta$=10 мм, и допускаемое напряжение на смятие $[\sigma_{см}]$=320 Н/мм^2, если приложенная сила равна 220 кН, число заклепок 5 и диаметр сверлений под них 20 мм.

Ответ: 220 МПа.

Задача № 3

Определить требуемый диаметр заклепок из материала Ст 2, если известно, что этих заклепок необходимо установить 5 шт, и действующая сила в соединении F =220 кН.

Ответ: 20 мм.

Задача № 4

Определить напряжение среза заклепок при растягивающей силе F=120·10^3 Н соединения внахлест двух пластин толщиной d/2 каждая, если диаметр заклёпок d=20 мм. Число заклепок 5.

Ответ: 76,4 МПа.

Задача № 5

Определить, какое усилие может воспринимать заклепочные соединения при креплении двух пластин равной толщины d_0/2, где d_0 – диаметр сверлений под заклепки равный 20 мм. Материал заклепки сталь Ст 2 $[\sigma_{см}]$=320 Н/мм^2; $[\tau_{ср}]$=140 Н/мм^2 . Число заклепок 5.

Ответ: 220 кН.

СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Задача № 6

Две полосы из стали Ст 5 ($\sigma_т$=235 МПа) сечением 150 мм на 8 мм соединены встык ручной сваркой. Определить допустимое максимальное усилие, если $[\sigma_р']$=141 МПа.

Ответ: 169 кН.

Задача № 7

Определить длину комбинированного сварного шва, если действует усилие *F*=120 кН, катет шва k=5 мм, $[\sigma'_р]$=160 МПа, $[\tau'_{ср}]$=96 МПа.

Ответ: 0,358 м.

Задача № 8

Две полосы соединены внахлест фланговым швом ручной сваркой электродами Э–50, катет шва *k*=4 мм, $[\sigma_р']$=180 МПа, $[\tau'_{ср}]$=108 МПа, длина шва *l*=15 см. Определить допустимое максимальное усилие.

Ответ: 90,7 кН.

Задача № 9

Две полосы из стали Ст 5 ($\sigma_т$=235 кН) соединены встык ручной сваркой электродами Э-42. Определить допустимое напряжение сварного шва.

Ответ: 141 МПа.

Задача № 10

Определить катет сварного шва любого типа при соединении внахлест двух полос ручной сваркой, если длина шва *l*=20 см, сила действующая на полосы *F*=135 кН, $[\tau'_{ср}]$=100 МПа.

Ответ: 10 мм.

Задача № 11

Определить длину фланговых сварных швов в соединении внахлест уголка № 10 (*b*=100 мм, z_0 =2,83 см) с косынкой, если суммарная длина сварного шва *l*=60 см.

Ответ: 170 и 430 мм.

Задача № 12

Определить суммарную длину фланговых сварных швов в соединении внахлест уголка № 10 (*b*=100 мм, z_0 =2,83 см) с косынкой, если *F*=400 кН, катет шва 10 мм и допускаемое напряжение сварного шва $[\tau'_{ср}]$=120 МПа.

Ответ: 476 мм.

Задача № 13

Определить напряжения в сварном шве, соединяющем два стальных листа встык шириной 200 мм и толщиной 10 мм, если растягивающее усилие *F* =180 кН и допускаемое напряжение в сварном шве 140 МПа. Материал – сталь 5 ($\sigma_т = 235$ МПа).

Ответ: 90 МПа.

ШПОНКИ

Задача № 14

Для шпонки с закруглёнными концами определить момент, который она может передать в соединении вала с зубчатым колесом. Диаметр вала *d*=70 мм; размеры шпонки $l_{раб}$=80 мм; *h*=12 мм; *в*=20 мм; и допускаемое напряжение

$[\sigma_{см}]$=85 МПа.

Ответ: 1428 Нм

Задача № 15

Для призматической шпонки сечением 14х 9 и длиной l=100 мм определить рабочую длину $l_{раб}$., если известно b=14 мм; h=9 мм.

Ответ: 86 мм.

Задача № 16

Зубчатое колесо соединено с валом призматической шпонкой и рассчитано для передачи крутящего момента T=450 Нм. Определить диаметр вала, если допускаемое напряжение на кручение $[\tau_{кр}]$=16 МПа.

Ответ: 52 мм.

Задача № 17

Проверить соединение шпонки с валом диаметром 38 мм на смятие. Крутящий момент 274 Нм; размеры шпонки заданы: l=32 мм, h=13 мм, $в$=10 мм и допускаемое напряжение на смятие $[\sigma_{см}]$=200 МПа.

Ответ: 100,8 МПа.

Задача № 18

По заданным размерам призматической шпонки проверить шпонку на срез: $l_{раб}$=28 мм; $в$=10 мм. Диаметр вала 38 мм, передаваемый крутящий момент 275 Нм, допускаемое напряжение на срез 60 МПа.

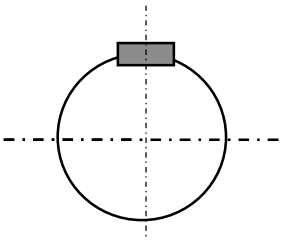
Ответ: 51,7 МПа.

Задача № 19

Проверить шпонку на смятие, если крутящий момент 500 Н. Размеры шпонки по ГОСТ 23360-78 выбраны $16 \times 10 \times 50$ мм. Диаметр вала d = 50 мм. Допускаемое напряжение на смятие $[\sigma_{см}]$= 100 МПа.

Ответ: 118 МПа.

Задача № 20



Передаваемый валом крутящий момент Т=1000 Нм, диаметр вала 50мм, сечение шпонки bх h= 14х9 мм, допускаемое напряжение на смятие $[\sigma_{см}]$= 100 МПа. Рассчитать необходимую длину шпонки согласно ГОСТ 23360-78 .

Ответ: 110 мм.

РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Задача № 21

Стержень винта нагружен только внешней растягивающейся силой, равной 100 Н. Определить напряжение растяжения в стержне, если его диаметр (внутренний диаметр резьбы) d_1=0,01 м.

Ответ 1,27 МПа.

Задача № 22

Соединение при помощи болта и гайки, установленном без зазора болта в отверстие детали, нагружено поперечными усилиями. Определить прочность болта на срез, если внешний диаметр болта 10 мм, сила деформации 8 кН. Толщину пластин принять $\delta_1=\delta_2=20$ мм.

Ответ: 102 МПа.

Задача № 23

Соединение при помощи болта и гайки нагружено поперечными усилиями. Болт установлен в отверстие детали без зазора. Определить диаметр болта, если сила деформации $6\cdot10^3$ Н, а предельно допустимое напряжение на срез $[\tau_{ср}]=120$ МПа.

Ответ: 8 мм.

Задача № 24

Соединение при помощи болта и гайки нагружено поперечными усилиями. Болт установлен в отверстие детали без зазора. Определить максимальную величину этих усилий деформации, если установлен болт М10х1,5. Предельно допустимое напряжение на срез $[\tau_{ср}]=80$ МПа.

Ответ: 6280 Н.

Задача № 25

Стержень винта нагружен только внешней растягивающейся силой – определить ее максимальное значение, если предельно допустимое напряжение растяжения $[\sigma]=144$ МПа в стержне, а его диаметры $d=12$ мм, $d_1=10{,}106$ мм, $d_2=10{,}863$ мм и шаг 1,75 мм.

Ответ: 115450 Н.

ВАЛЫ

Задача № 26

Найти вращающий момент на ведущем валу (на тихоходном валу редуктора) Нм, если известна частота вращения вала 400 об/мин и передаваемая мощность – 4 кВт.

Ответ: 95,5 Нм.

Задача № 27

Рассчитать крутящий момент на выходном валу, если известно, что передаваемая мощность 4,5 кВт, а частота его вращения $n=960$ об/мин.

Ответ: 44,8 Нм.

Задача № 28

Определить крутящий момент на валу, передаваемый зубчатым колесом, соединённым с валом призматической шпонкой, если окружное усилие на зубчатом колесе равно 12 кН. Диаметр вала 60 мм, делительный диаметр колеса 150 мм.

Ответ: 900 Нм.

ПЕРЕДАЧИ

Задача № 29

Рассчитать максимальное значение удельной нагрузки, распределенной по линии контакта зубьев если известны нормальная сила в зацеплении 0,95 кН, коэффициент расчетной нагрузки 1,5 и суммарная длина линии контакта зубьев 400 мм.

Ответ 3563 Н/м.

Задача № 30

Найти делительные окружности зубчатых колес (ведущего и ведомого) в прямозубой зубчатой передаче, если известен модуль 4мм и количество зубьев первого колеса 21 шт и второго 85 шт.

Ответ 84 мм и 340 мм.

Задача № 31

Найти межосевое расстояние в прямозубой зубчатой передаче, если известен модуль 4 мм и количество зубьев первого колеса 21 шт и второго 85 шт.

Ответ 212 мм

Задача № 32

Прямозубая передача имеет следующие параметры: $a=300$ мм, $d_1=100$ мм, $d_{a1}=150$ мм, $m=4$. Определить z_1; z_2.

Ответ 25 и 125 шт.

Задача №33

Определить диаметр ведомого шкива в ремённой передаче, если диаметр ведущего шкива $d_1=200$ мм, а скорость вращения $n_1=750$ об/мин. Скорость вращения ведомого шкива $n_2=300$ об/мин. Трением скольжения пренебречь. Ответ 500 мм.

Задача № 34

Определить радиальное усилие F_r в прямозубой зубчатой передаче, если диаметр вала $d_1=40$ мм, крутящий момент $T=44,8$ Нм.

Ответ 2240 Н.

Задача №35

Определить диаметр ведущего шкива клиноременной передачи, если передаваемая мощность 6 кВт и частота вращения шкива $n_1=750$ об/мин. Принять $K_d=40$.

Ответ 170 мм.

Задача №36

Определить количество клиновых ремней для передачи мощности $P_{ном}=72$ кВт. Допускаемая передаваемая мощность одного ремня $[P_н]=18$ кВт.

Ответ 4 шт.

Задача № 37

Определить окружную силу, передаваемую клиновыми ремнями, если передаваемая ими мощность $P_н$=7,3 кВт, а угловая скорость ведущего шкива диаметром d_1=200 мм равняется 16 $с^{-1}$.
Ответ 4563 Н.

Задача № 38

Рассчитать радиальное усилие, действующее в прямозубой передаче, если известны крутящий момент 200 Нм, делительный диаметр зубчатого колеса 145 мм и угол зацепления 20º.
Ответ 1004 Н.

Задача № 39

Найти делительные диаметры двух цилиндрических колес в прямозубой зубчатой передаче, если известны m=2,5 мм, U=3,15 мм, z_1=27 мм.
Ответ d_1=67,5мм; d_2=212,5мм.

Задача № 40

Рассчитать нормальное усилие действующее в прямозубой цилиндрической передаче, если известны крутящий момент 200 Нм, делительный диаметр зубчатого колеса 145 мм и угол зацепления 20º.
Ответ 2936 Н.

Задача № 41

Рассчитать удельную нагрузку действующую на колесо, если известно F_t=2900 Н, l=0,2 мм, Кн=1, α=20º
Ответ 15431 Н/м.

УКАЗАНИЯ К ВЫБОРУ НОМЕРА И КОЛИЧЕСТВА ЗАДАНИЙ

Количество задач, входящих в контрольную работу различное для разных специальностей.

Студенты, изучающие дисциплину "Прикладная механика", выполняют следующие задачи контрольной работы:

1. задачи по расчету сварных соединений (С);
2. задачи по расчету резьбовых соединений (Р);
3. расчет зубчатой передачи (З).

Номера задач выбираются по таблице, в соответствии с последней цифрой шифра в зачетной книжке.

Задача	Последняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
С	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
Р	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3
З	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Номер варианта каждой задачи выбирается по предпоследней цифре шифра.

Задачи по расчету сварных соединений (С)

С.1. Рассчитать сварное соединение уголка № 10 (100х100х10) с косынкой при действии силы 2*F* (рис.С.1) по данным табл.С.1.

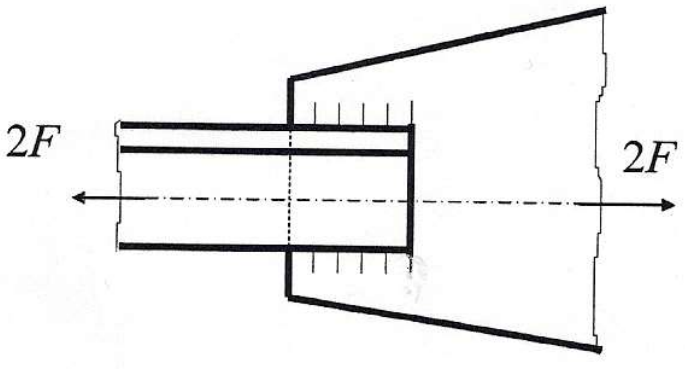


Рис.С.1. Соединение уголка с косынкой

С.2 .Рассчитать сварное соединение, состоящее из серьги, блока и швеллера (рис.С.2) по данным табл.С.2. Толщина серьги δ. Материал электрода и метод сварки выбрать самостоятельно.

Таблица С.1

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2F, кН	50	55	65	70	75	80	85	90	95	100
Электроды	Э42А	Э42А	Э42А	Э42А	Э42	Э42	Э42	Э50	Э50	Э50
Метод сварки	Автоматическая под слоем флюса			Автоматическая				Ручная		

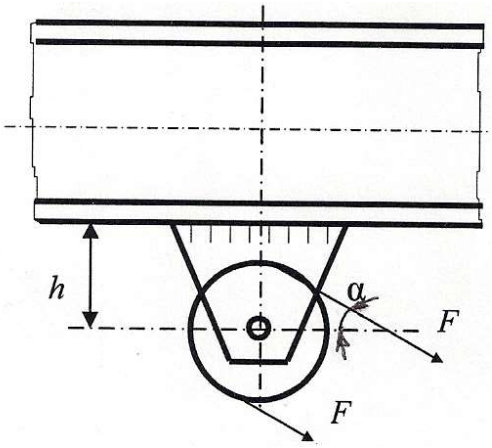


Рис.С.2. Сварное соединение блока, серьги и швеллера

Таблица С.2

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F, кН	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
h, мм	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380
δ, мм	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16
α, рад	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4

С.3. Рассчитать сварное соединение, крепящее опорный швеллер №16а к стальной плите (рис.С.3). Электрод Э50. Сварка ручная. Данные для расчета приведены в табл.С.3.

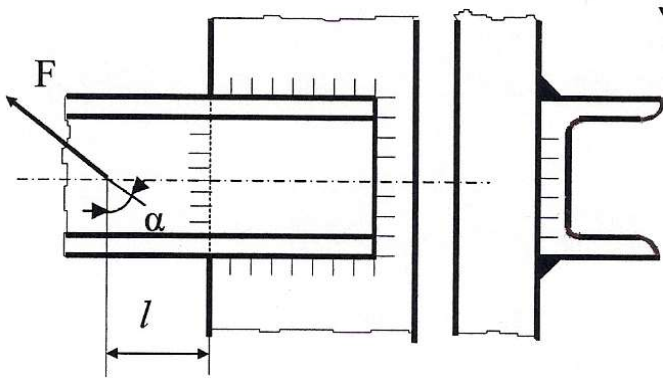


Рис.С.3. Сварное соединение швеллера с плитой

Таблица С.3

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F, кН	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12
l, мм	600	650	700	750	800	850	900	1000	1050	1100
α, рад	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6

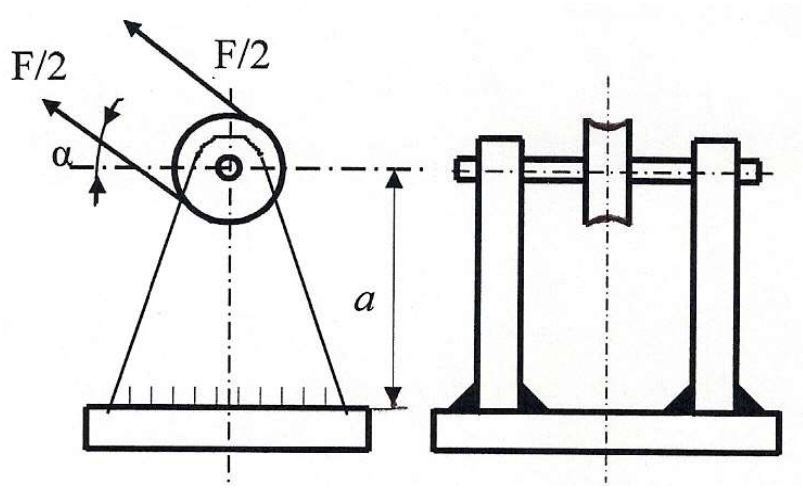


Рис.С.4. Блок монтажного устройства

С.4. Рассчитать сварное соединение, крепящее неподвижный блок монтажного устройства к плите (рис.С.4), по данным табл.С.4. Материал электрода и метод сварки выбрать самостоятельно.

Таблица С.4

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F, кН	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
a, мм	600	620	640	660	680	700	680	660	640	620
α, рад	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6	П/4

С.5. Проверить прочность сварных швов, соединяющих диск с зубчатым ободом и диск со ступицей (Рис.С.5). Мощность, передаваемая колесом – *P*, угловая скорость его – ω , толщина швов k_1 и k_2 и диаметры d_c, D_c, d заданы в табл.С.5. Сварка ручная. Диск – Ст3, ступица и обод – сталь 40.

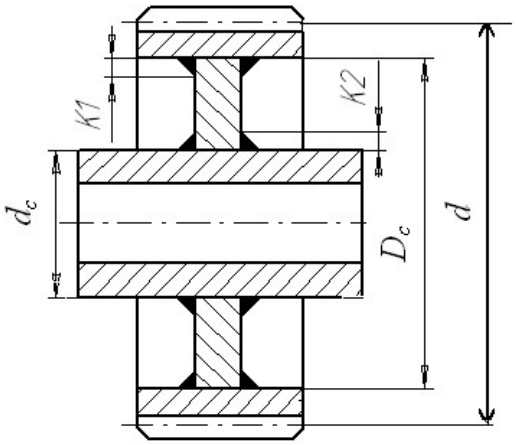


Рис.С.5. Сварное зубчатое колесо

Таблица С.5

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P, кВт	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
ω, рад/с	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_c, мм	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145
D_c , мм	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625
d , мм	500	525	550	575	600	625	650	675	750	800
k_1, мм	4	4	4	6	6	6	8	8	8	8
k_2 , мм	6	6	6	8	8	8	10	10	10	10

С.6. Рассчитать сварное соединение листа 1 с уголком 2 (рис.С.6) по данным табл С.6.

Таблица С.6

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F , кН	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a , см	15	15	20	20	25	25	30	30	35	35
b , см	5	5	8	8	10	10	12	12	15	15
α, рад	П/3	П/4	П/6	П/6	П/3	П/4	П/6	П/6	П/3	П/4

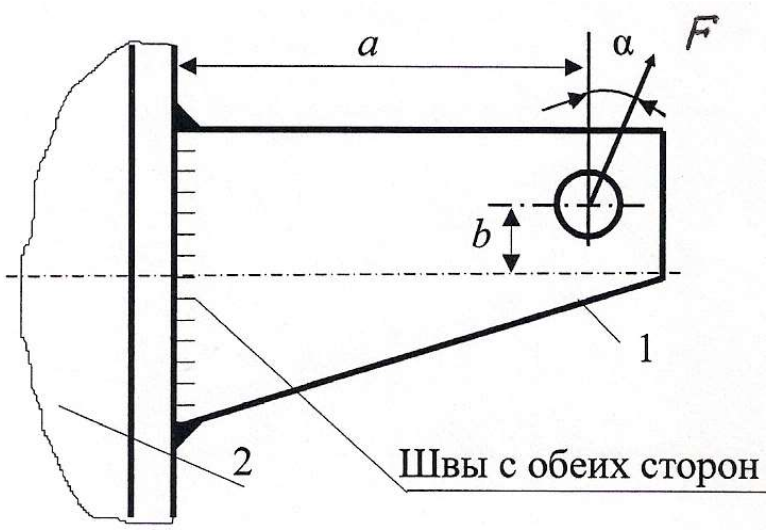


Рис.С.6. Сварное соединение листа с уголком

Вторая группа задач

Задача Р.1.Определить диаметр болтов фланцевого соединения верхней части автоклава с его корпусом (рис.Р.1). Давление жидкости внутри автоклава по манометру p , внутренний диаметр верхней части автоклава D и количество болтов z заданы в табл.Р.1.

Таблица Р.1

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
p, МПа	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,3	1,1	1,0	0,9
D , мм	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
Z	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8

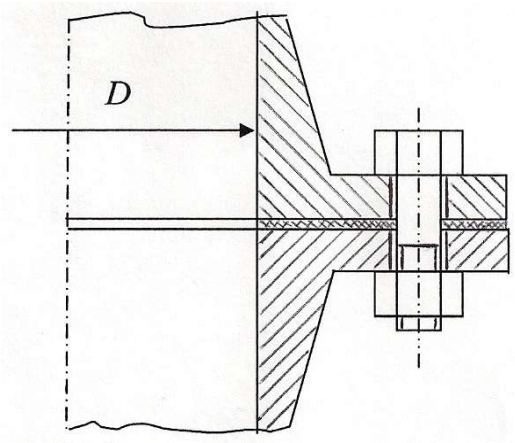


Рис.Р.1. Часть автоклава

Задача Р.2. Рассчитать болты, скрепляющие зубчатое колесо с барабаном лебедки (рис.Р.2). Расчет вести в двух вариантах: а) болты поставлен с зазором; б) болты поставлены без зазора. Грузоподъёмность лебедки F и диаметры D_1 и D_2 заданы в табл.Р.2. Число болтов равно 6.

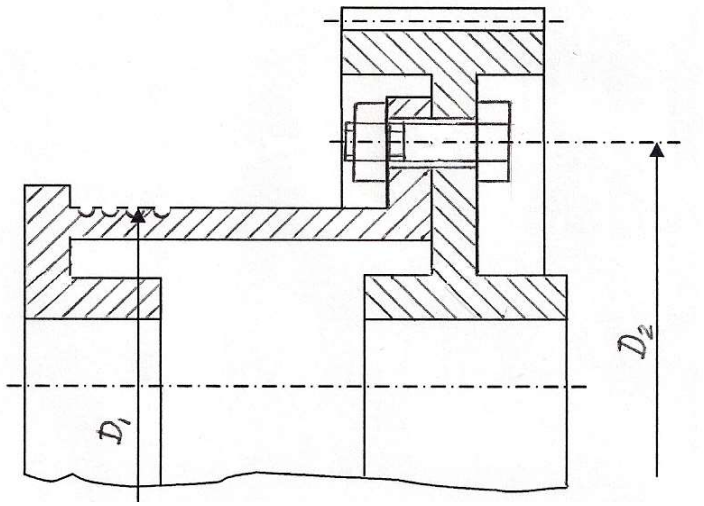


Рис.Р.2. Барабан лебёдки в соединении с зубчатым колесом

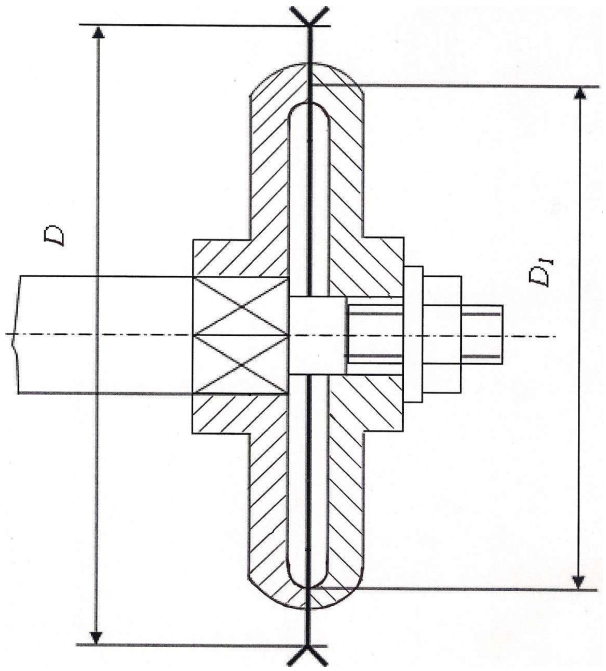
Таблица Р.2

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F , кН	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
D_1 , мм	250	250	300	300	350	350	400	400	450	450
D_2 , мм	400	400	450	450	500	500	550	550	600	600

Задача Р.3. Определить диаметр нарезной части дисковой пилы, которая удерживается между двумя шайбами посредством сил трения, возникающих при затяжке гайки на конце вала (рис.Р.3). Пила преодолевает сопротивление резанию силу F. Данные для расчета приведены в табл.Р.3.

Таблица Р.3

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F , Н	600	625	650	675	700	725	750	775	800	825
D, мм	700	700	650	650	600	600	550	550	500	500
D_1, мм	400	400	350	350	300	300	250	250	200	200



Задача Р.4. Определить диаметр фундаментных болтов, крепящих стойку к бетонному основанию (рис.Р.4). Коэффициент трения основания стойки о бетон f=0,4. Болты принять с метрической резьбой по ГОСТ. Данные для расчета приведены в табл.Р.4.

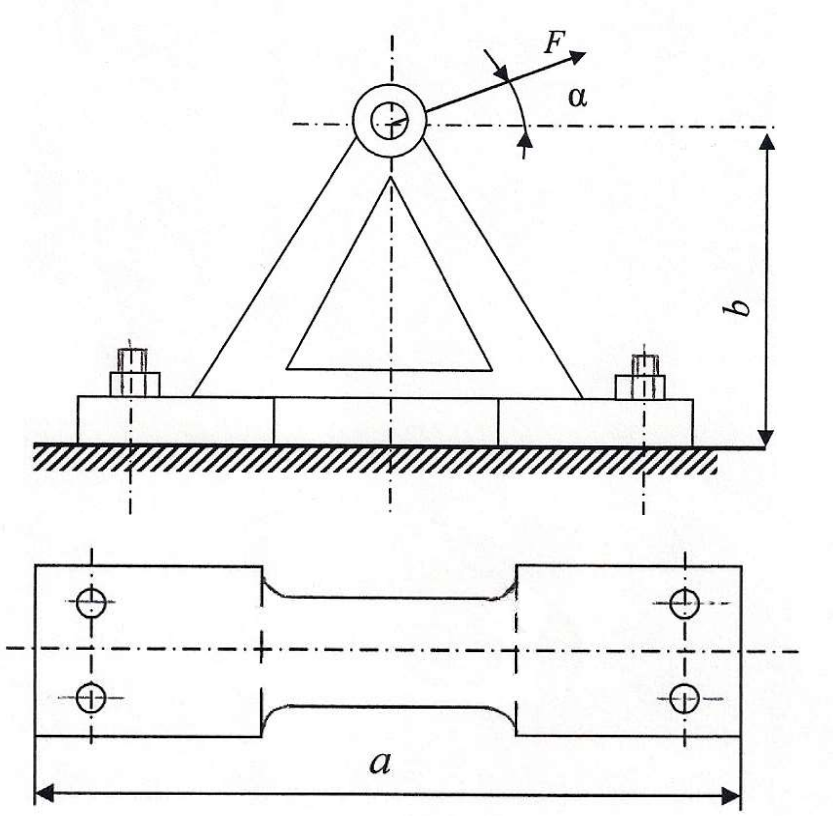


Рис.Р.4. Стойка

Таблица Р.4

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F, кН	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
α, рад	П/6	П/4	П/3	П/4	П/6	П/3	П/6	П/4	П/3	П/6
a , мм	600	600	650	650	700	700	750	750	800	800
b , мм	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850

Задача Р.5. Рассчитать клеммовое болтовое соединение, обеспечивающее передачу крутящего момента с рычага в результате приложения на его конце силы *F*, на вал диаметром *d* (рис.Р.5) по данным табл.Р.5.

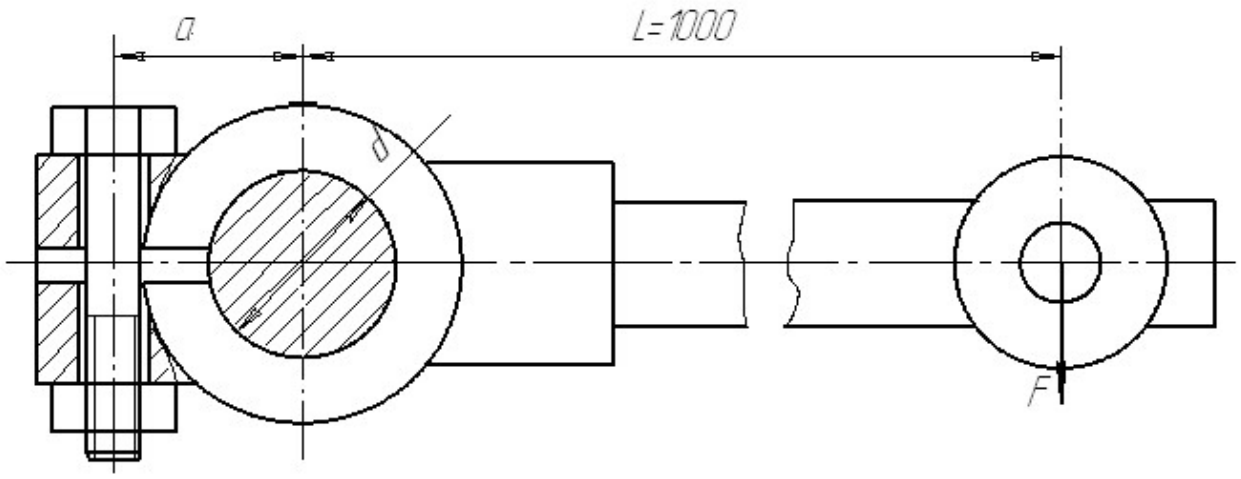


Рис.Р.5. Клеммовое соединение

Таблица Р.5

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
d , мм	40	42	45	48	50	52	55	58	60	63
Коэффициент трения скольжения	0,2	0,2	0,2	0,2	0,18	0,18	0,18	0,15	0,15	0,15
F, кН	5	5	5	5	5,5	5,5	5,5	6	6	6
a , мм	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580

Задача Р.6. Рассчитать болты фланцевой муфты, передающей мощность P при частоте вращения n, диаметр окружности осей болтов D_0. Число болтов равно z. Расчет произвести для двух вариантов:

а) болты поставлены без зазора;

б) болты установлены с зазором, коэффициент трения между торцами полумуфт $f = 0{,}15$.

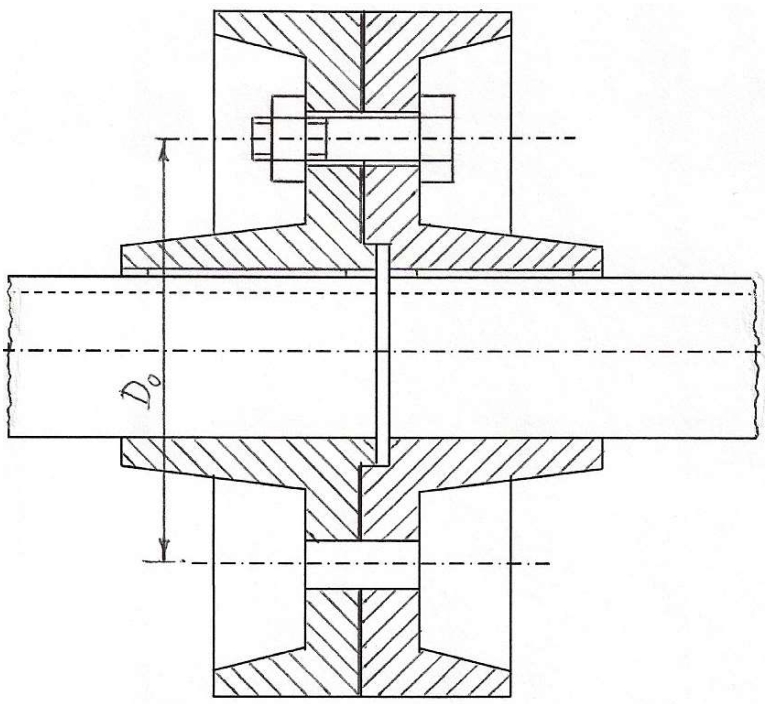


Рис.Р.6

Таблица Р.6

Величины	В А Р И А Н Т Ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P , кВт	50	55	60	65	75	80	85	90	95	100
n ,об/мин	250	250	300	300	350	350	400	400	450	450
D_0, мм	220	220	220	230	230	230	240	240	250	250
z	6	7	8	9	6	7	8	9	6	7

Приложение 1

ПРИЗМАТИЧЕСКАЯ ШПОНКА (ГОСТ 23360-78)

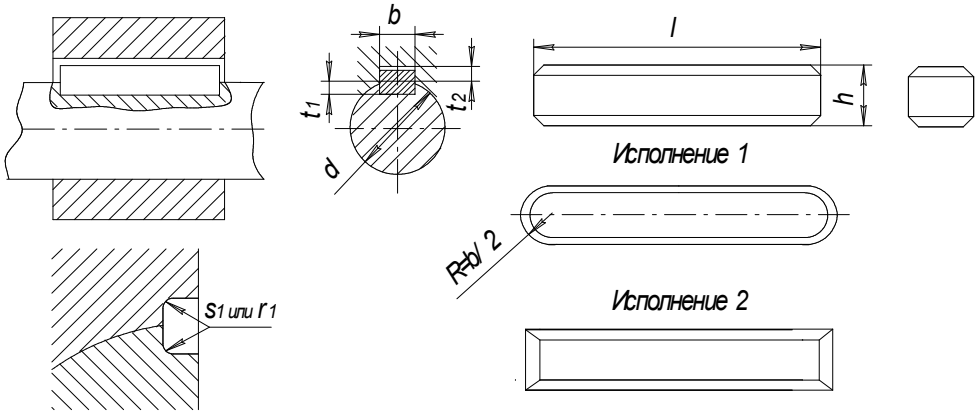


Таблица П.1

d	b	h	t_1	t_2	l		s_1 или r_1	s или r
					от	до		
Свыше 12 до 17	5	5	3	2,3	–	–	–	–
Свыше 17 до 22	6	6	3,5	2,8	–	–	–	–
Свыше 22 до 30	8	7	4,0	3,3	–	–	–	–
Свыше 30 до 38	10	9	5,5	3,8	22	110	0,25 …0,4	0,4… 0,6
Свыше 38 до 44	12	11	7	4,4	28	140		
Свыше 44 до 50	14	12	7,5	4,9	38	160		
Свыше 50 до 58	16	14	9	5,4	45	180		
Свыше 58 до 65	18	16	10	6,5	50	200		
Свыше 65 до 75	20	18	11	7,4	56	220	0,4… 0,6	0,6… 0,8
Свыше 75 до 85	22	20	12	8,4	63	250		
Свыше 85 до 95	25	22	13	9,4	70	280		
Свыше 95 до 110	28	25	15	10,4	80	320		
Свыше 110 до 130	32	28	17	11,4	90	360		
Свыше 130 до 150	36	32	20	12,4	100	400	0,7… 1,0	1,0… 1,2
Свыше 150 до 170	40	36	22	14,4				
Свыше 170 до 200	45	40	25	15,4	110	450		
Свыше 200 до 230	50	45	28	17,4	125	500		
Свыше 230 до 260	56	50	31	19,5	140	500	1,2… 1,6	1,6… 2,0
Свыше 260 до 290	63	60	36	24,5	160			
Свыше 290 до 330	70	65	39	26,5	180			
Свыше 330 до 380	80	75	44	31,5	200		2,0… 2,5	2,5… 3,0
Свыше 380 до 440	90	85	49	36,5	220			
Свыше 440 до 500	100	95	54	41,5	250			

Примечания: 1. Допускается в отдельных обоснованных случаях применять меньшие размеры сечений шпонок на валах больших диаметров, за исключением выходных концов валов.

2. Стандартные длины шпонок: 6; 8; 10; 12; 14; 16;20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250 мм.

Приложение 2

СЕГМЕНТНАЯ ШПОНКА (ГОСТ 24071-80)

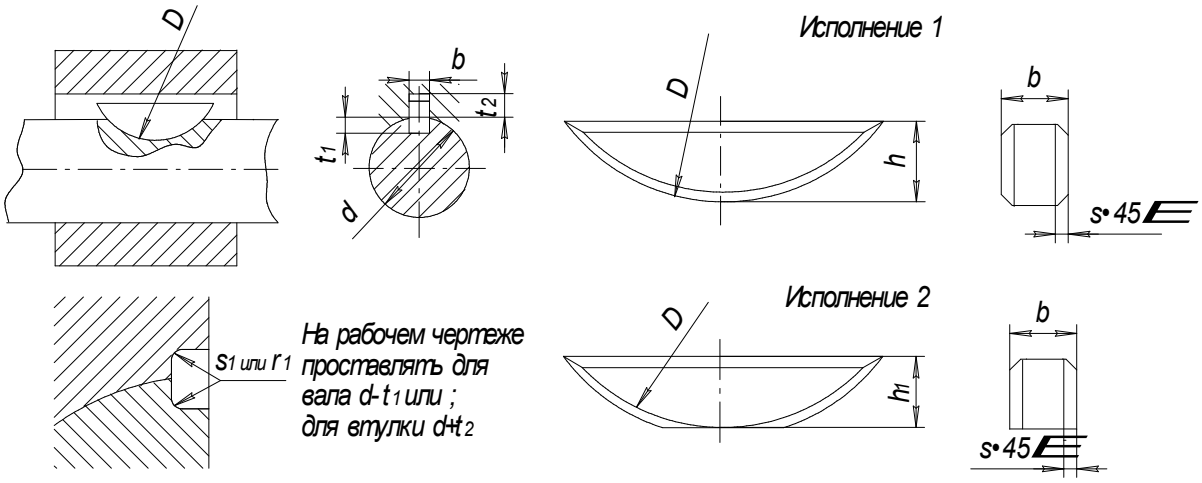


Таблица - П2

d для шпонок		Размеры шпонок $b \times h \times D$	t_1	t_2	s_1 или r_1	s или r
Передающих крутящий момент	Фиксирующих элементов					
От 3 до 4	От 3 до 4	$1 \times 1{,}4 \times 4$	1,0	0,6		
Свыше 4 до 5	Свыше 4 до 6	$1{,}5 \times 2{,}6 \times 7$	2,0	0,8		
Свыше 5 до 6	Свыше 6 до 8	$2 \times 2{,}6 \times 7$	1,8	1,0	0,08	0,16
Свыше 6 до 7	Свыше 8 до 10	$2 \times 3{,}7 \times 10$	2,9	1,0	…	…
Свыше 7 до 8	Свыше 10 до 12	$2{,}5 \times 3{,}7 \times 10$	2,7	1,2	0,16	0,25
Свыше 8 до 10	Свыше 12 до 15	$3 \times 5 \times 13$	3,8	1,4		
Свыше 10 до 12	Свыше 15 до 18	$3 \times 6{,}5 \times 16$	5,3	1,4		
Свыше 12 до 14	Свыше 18 до 20	$4 \times 6{,}5 \times 16$	5,0	1,8		
Свыше 14 до 16	Свыше 20 до 22	$4 \times 7{,}5 \times 19$	6,0	1,8		
Свыше 16 до 18	Свыше 22 до 25	$5 \times 6{,}5 \times 16$	4,5	2,3		Св. 0,25 до 0,4
Свыше 18 до 20	Свыше 25 до 28	$5 \times 7{,}5 \times 19$	5,5	2,3	0,16	
Свыше 20 до 22	Свыше 28 до 32	$5 \times 9 \times 22$	7,0	2,3	…	
Свыше 22 до 25	Свыше 32 до 36	$6 \times 9 \times 22$	6,5	2,8	0,25	
Свыше 25 до 28	Свыше 36 до 40	$6 \times 10 \times 25$	7,5	2,8		0,4… 0,6
Свыше 28 до 32	до 40	$8 \times 11 \times 28$	8,0	3,3		
Свыше 32 до 38	до 40	$10 \times 13 \times 32$	10	3,3		

Пример условного обозначения сегментной шпонки

исполнения 1 $b \times h = 5 \times 6{,}5$ мм:

Шпонка 1 $5 \times 6{,}5$ ГОСТ 24071 - 80

То же, исполнение 2 сечение $b \times h_1 = 5 \times 5{,}2$ мм:

Шпонка 2 $5 \times 5{,}2$ ГОСТ 24071 - 80

Приложение 3

СОЕДИНЕНИЯ ШЛИЦЕВЫЕ ПРЯМОБОЧНЫЕ (ГОСТ 1139 - 80)

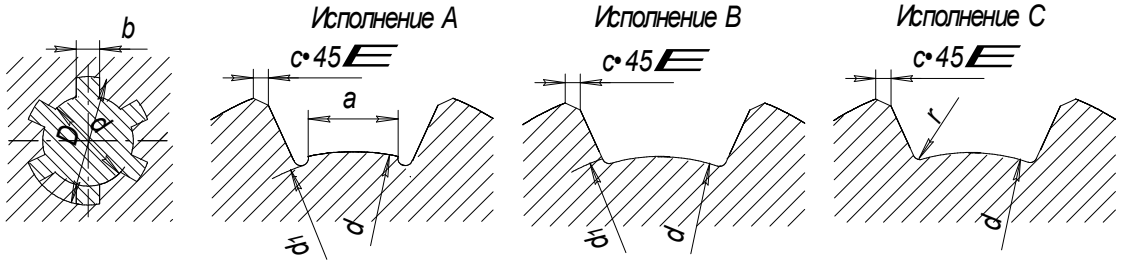


Таблица П.3

РАЗМЕРЫ ЛЕГКОЙ СЕРИИ, ММ

$z \times d \times D$	b	d_1	a	c		r
		Не менее		Номинальный размер	Предельные отклонения	
$6 \times 23 \times 26$	6	22,1	3,54	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 26 \times 30$	6	24,6	3,85			
$6 \times 28 \times 32$	7	26,7	4,03			
$8 \times 32 \times 36$	6	30,4	2,71	0,4		0,3
$8 \times 36 \times 40$	7	34,5	3,46			
$8 \times 42 \times 46$	8	40,4	5,03			
$8 \times 46 \times 50$	9	44,6	5,73			
$8 \times 52 \times 58$	10	49,7	4,89	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 56 \times 62$	10	53,6	6,38			
$8 \times 62 \times 68$	12	59,8	7,31			
$10 \times 72 \times 78$	12	69,6	5,45			
$10 \times 82 \times 88$	12	79,3	8,62			
$10 \times 92 \times 98$	14	89,4	10,08			
$10 \times 102 \times 108$	16	99,9	11,49			
$10 \times 112 \times 120$	18	108,8	10,72			

Продолжение табл. П. 3

РАЗМЕРЫ СРЕДНЕЙ СЕРИИ, ММ

$z \times d \times D$	b	d_1	a	c		r
		Не менее		Номинальный размер	Предельные отклонения	
6×11×14	3	9,9	–	0,3	+0,2	0,2
6×13×16	3.5	12,0	–			
6×16×20	4	14,5	–			
6×18×22	5	16,7	–			
6×21×25	5	19,5	1,95			
6×23×28	6	21,3	1,34			
6×26×32	6	23,4	1,65	0,4		0,3
6×28×34	7	25,9	1,7			
8×32×38	6	29,4	-			
8×36×42	7	33,5	1,02			
8×42×48	8	39,5	2,57			
8×46×54	9	42,7	–	0,5	+0,3	0,5
8×52×60	10	48,7	2,44			
8×56×65	10	52,2	2,5			
8×62×72	12	57,8	2,4			
10×72×82	12	67,4	–			
10×82×92	12	77,1	3,0			
10×92×102	14	87,3	4,5			
10×102×112	16	97,7	6,3			
10×112×125	18	106,3	4,4			

Продолжение табл. П. 3

РАЗМЕРЫ ТЯЖЕЛОЙ СЕРИИ, ММ

$z \times d \times D$	b	d_1	a	c		r
		Не менее		Номинальный размер	Предельные отклонения	
$6 \times 11 \times 14$	3	9,9	–	0,3	+0,2	0,2
$6 \times 13 \times 16$	3.5	12,0	–			
$6 \times 16 \times 20$	4	14,5	–			
$6 \times 18 \times 22$	5	16,7	–			
$6 \times 21 \times 25$	5	19,5	1,95			
$6 \times 23 \times 28$	6	21,3	1,34			
$6 \times 26 \times 32$	6	23,4	1,65	0,4		0,3
$6 \times 28 \times 34$	7	25,9	1,7			
$8 \times 32 \times 38$	6	29,4	–			
$8 \times 36 \times 42$	7	33,5	1,02			
$8 \times 42 \times 48$	8	39,5	2,57			
$8 \times 46 \times 54$	9	42,7	–	0,5	+0,3	0,5
$8 \times 52 \times 60$	10	48,7	2.44			
$8 \times 56 \times 65$	10	52,2	2,5			
$8 \times 62 \times 72$	12	57,8	2,4			
$10 \times 72 \times 82$	12	67,4	–			
$10 \times 82 \times 92$	12	77,1	3,0			
$10 \times 92 \times 102$	14	87,3	4,5			
$10 \times 102 \times 112$	16	97,7	6,3			
$10 \times 112 \times 125$	18	106,3	4,4			

Примечание.
Шлицевые валы исполнений А и С изготавливаются при центрировании по внутреннему диаметру, исполнения В – при центрировании по наружному диаметру и боковым сторонам зубьев.

Приложение 4

РЕЗЬБА МЕТРИЧЕСКАЯ (ГОСТ 9150–80)

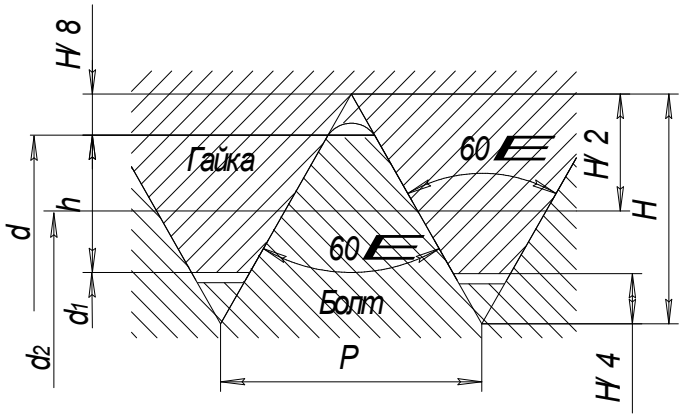


Таблица П. 4

Диаметр наружный, d, мм			Шаг, P, мм	Диаметр, мм			Площадь расчетного сечения	Угол подъема резьбы
Ряд 1	Ряд 2	Ряд 3		средний резьбы $d_2 = D_2$	внурен. гайки $d_1 = D_1$	расчетный винта d_p	$A_{ср}$, мм^2	ψ
5	–	–	0,8 0,5	4,480 4,675	4,134 4,459	4,25 4,53	14 16	3°15′ 1°67′
-	-	5,5	0,5	5,175	4,959	5,03	20	1°56′
6	–	–	1 0,75 0,5	5,350 5,513 5,675	4,918 5,188 5,459	5,06 5,30 5,53	20 22 24	3°24′ 2°29′ 1°36′
–	–	7	1 0,75 0,5	6,350 6,513 6,675	5,918 6,188 6,459	6,06 6,30 6,53	29 31 33	2°52′ 2°6′ 1°22′
8	–	–	1,25 1 0,75 0,5	7,188 7,350 7,513 7,675	6,647 6,918 7,188 7,459	6,83 7,06 7,30 7,53	37 39 42 44	3°10′ 2°29′ 1°49′ 1°11′
–	–	9	1,25 1 0,75 0,5	8,188 8,350 8,513 8,675	7,647 7,918 8,188 8,459	7,83 8,06 8,30 8,53	48 51 54 57	2°47′ 2°11′ 1°36′ 1°3′

продолжение табл. П.4

Диаметр наружный d, мм			**Шаг P, мм**	**Диаметр, мм**			$A_{ср}$, мм^2	**ψ**
Ряд 1	**Ряд 2**	**Ряд 3**		**средний резьбы $d_2 = D_2$**	**внутрен. гайки $d_1 = D_1$**	**расчетн. винта d_p**		
10	–	–	1,5 1,25 1 0,75 0,5	9,026 9,188 9,350 9,513 9,675	8,376 8,647 8,918 9,188 9,459	8,59 8,83 9,06 9,30 9,53	58 61 64 68 71	3°2′ 2°29′ 1°57′ 1°26′ 1°22′
–	–	11	(1,5) 1 0,75 0,5	10,026 10,188 10,350 10,513	9,376 9,918 10,188 10,459	9,59 10,06 10,30 10,53	72 79 83 87	2°29′ 1°46′ 1°18′ 0°51′
12	–	–	1,75 1,5 1,25 1 0,75 0,5	10,863 11,026 11,180 11,350 11,513 11,675	10,106 10,376 10,647 10,918 11,188 11,495	10,36 10,59 10,83 10,06 11,30 11,53	84 88 92 96 100 104	2°56′ 2°29′ 2°2′ 1°36′ 1°11′ 0°47′
–	14	–	2 1,5 1,25 1 0,75 0,5	12,701 13,026 13,180 13,350 13,513 13,675	11,835 12,376 12,647 12,918 13,188 13,495	12,12 12,59 12,83 13,06 13,30 13,53	115 124 129 134 139 144	2°52′ 2°6′ 1°44′ 1°22′ 1°1′ 0°40′
–	–	15	1,5 (1)	14,026 14,350	13,376 13,918	13,59 14,06	145 155	1°57′ 1°16′
16	–	–	2 1,5 1 0,75 0,5	14,701 15,026 15,350 15,513 15,675	13,835 14,376 14,918 15,188 15,495	14,12 14,59 15,06 15,30 15,53	156 167 178 184 189	2°29′ 1°49′ 1°11′ 0°53′ 0°35′

продолжение табл. П. 4

Диаметр Наружный, d, мм			**Шаг, P, мм**	**Диаметр, мм**			$A_{ср}$, $мм^2$	ψ
Ряд 1	**Ряд 2**	**Ряд 3**		**средний резьбы** $d_2 = D_2$	**внутр ен. гайки** $d_1 = D_1$	**расчетн. винта** d_p		
–	–	17	1,5	16,026	15,376	15,59	191	1°42′
			(1)	16,350	15,918	16,06	203	1°7′
–	18	–	2,5	16.376	15.294	15.65	192	2°47′
			2	16.701	15.835	16.12	204	2°11′
			1,5	17.026	16.376	16.59	216	1°36′
			1	17.350	18.918	17.06	228	1°3′
			0,75	17.513	17.188	17.30	235	0°47′
			0,5	17.675	17.495	17.53	241	0°31′
20	–	–	2.5	18.376	17.294	17.65	245	2°29′
			2	18.701	17.835	18.12	258	1°57′
			1.5	19.026	18.376	18.59	271	1°26′
			1	19.350	18.918	19.06	285	1°22′
			0.75	19.513	19.188	19.30	292	0°42′
			0.5	19.675	19.495	19.53	300	0°28′
–	–	22	2.5	20.376	19.294	19.65	303	2°18′
			2	20.701	19.835	20.12	318	1°46′
			1.5	21.026	20.376	20.59	333	1°18′
			1	21.350	20.918	21.06	348	0°51′
			0.75	21.513	21.188	21.30	356	0°38′
			0.5	21.675	21.495	21.53	364	0°25′
24	–	–	3	22.051	20.752	21.18	352	2°29′
			2	22.701	21.835	22.12	384	1°36′
			1.5	23.026	22.376	22.59	401	1°11′
			1	23.350	22.918	23.06	418	0°47′
			0.75	23.513	23.188	23.30	426	0°35′
–	–	25	2	23.701	22.835	23.12	420	1°33′
			1.5	24.026	23.376	23.59	437	1°8′
			0.75	24.350	23.918	24.06	455	0°45′

продолжение табл. П. 4

Диаметр наружный d, мм			**Шаг P, мм**	**Диаметр, мм**			$A_{ср}$, $мм^2$	ψ
Ряд 1	**Ряд 2**	**Ряд 3**		**средний резьбы** $d_2 = D_2$	**внутрен. гайки** $d_1 = D_1$	**расчетн. винта** d_p		
–	–	(26)	1.5	25.026	24.376	24.59	475	1°6′
–	27	–	3	25.051	23.752	24.18	459	2°11'
			2	25.701	24.835	25.12	496	1°25′
			1.5	26.026	25.376	25.59	514	1°3′
			1	26.350	25.918	26.06	533	0°42′
			0.75	26.513	26.188	26.30	543	0°31′
–	–	(28)	2	26.701	25.835	26.12	536	1°22′
			1.5	27.026	26.376	26.59	555	1°1′
			1	27.350	26.918	27.06	575	0°40′
30	–	–	3.5	27.727	26.211	26.72	561	2°18′
			(3)	28.051	26.752	27.18	580	1°57′
			2	28.701	27.835	28.12	621	1°16′
			1.5	29.026	28.376	28.59	642	0°57′
			1	29.350	28.918	29.06	663	0°37′
			0.75	29.513	29.188	29.30	674	0°28′
–	–	(32)	2	30.701	29.835	30.12	712	1°1′
			1.5	31.026	30.376	30.59	735	0°53′
–	33	–	3.5	30.727	29.211	29.72	694	2°5′
			(3)	31.051	29.752	30.18	715	1°46′
			2	31.701	30.835	31.12	761	1°9′
			1.5	32.026	31.376	31.59	784	0°51′
			1	32.350	31.918	32.06	807	0°34′
			0.75	32.613	32.188	32.30	819	0°25′

Приложение 5

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ

СОРТАМЕНТ

Условные обозначения к рисунку 1 и таблице 1:
b - ширина полки;
t - толщина полки;
R - радиус внутреннего закругления;
r - радиус закругления полок;
F- площадь поперечного сечения;
I - момент инерции;
x_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
I_{xy} - центробежный момент инерции;

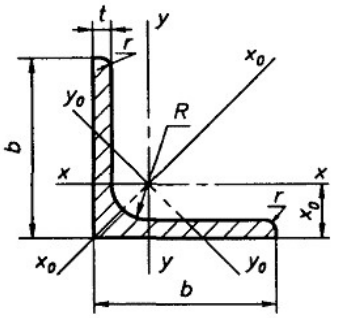


Рисунок 1

ВЫДЕРЖКИ из ГОСТ 8509-93 Таблица П.5

Номер уголка	*b*	*t*	*R*	*r*	*F*, см^2	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - x			$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			I_{xy}, см^4	x_0, см	
	мм					*Ix*, см^4	*Wx*, см^3	i_x, см	I_{x0} *max*, см^4	i_{x0} *max*, см	I_{y0} *min*, см^4	W_{y0}, см^3	i_{y0} *min*, см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73

Номер уголка	b	t	R	r	F, см^2	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - x			x_0 - x_0		y_0 - y_0			I_{xy}, см^4	x_0, см	
	мм					Ix, см^4	Wx, см^3	i_x, см	I_{x0} max, см^4	i_{x0} max, см	I_{y0} min, см^4	W_{y0}, см^3	i_{y0} min, см			
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
		8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
		8	12,0	4,0	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63

Номер уголка	*b*	*t*	*R*	*r*	*F*, см^2	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - *x*			*x*$_0$ - *x*$_0$		*y*$_0$ - *y*$_0$			*I*$_{xy}$, см^4	*x*$_0$, см	
	мм					*Ix*, см^4	*Wx*, см^3	*i*$_x$, см	*I*$_{x0}$ *max*, см^4	*i*$_{x0}$ *max*, см	*I*$_{y0}$ *min*, см^4	*W*$_{y0}$, см^3	*i*$_{y0}$ *min*, см			
		16	12,0	4,0	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47
		12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02

Номер уголка	*b*	*t*	*R*	*r*	*F*, см^2	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x - *x*			x_0 - x_0		y_0 - y_0			I_{xy}, см^4	x_0, см	
	мм					*Ix*, см^4	*Wx*, см^3	i_x, см	I_{x0} *max*, см^4	i_{x0} *max*, см	I_{y0} *min*, см^4	W_{y0}, см^3	i_{y0} *min*, см			
		30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83

Примечания:

1 Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. Плотность стали - 7,85 г/см^3.

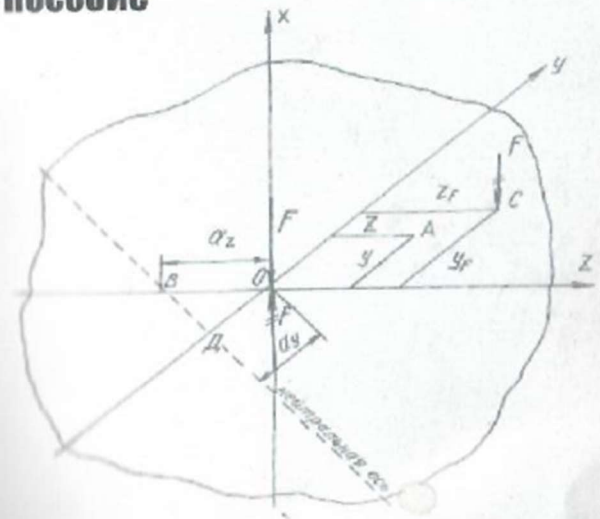
2 Радиусы закругления, указанные на рисунке 1 и в таблице 1, даны для построения калибра и на профиле не контролируются.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 23360-78. Призматическая шпонка.
2. ГОСТ 24071-80. Сегментная шпонка.
3. ГОСТ 1139-80. Соединения шлицевые прямобочные.
4. ГОСТ 9150-80. Метрическая резьба.
5. Иванов М.Н., Финогенов В.А. Детали машин: Учеб. для студентов высш. техн. учеб. заведений. – 12-е изд., переработ. – М.: Высш. шк., 2008. –408 с.: ил.
6. Дунаев П.Ф., Леликов О.П. Конструирование узлов и деталей машин. Учебн.пособие для студ. техн. спец. вузов. 11 изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 496 с.
7. Леликов О.П. Валы и опоры с подшипниками качения. Конструирование и расчёт. Справочник. – М.: Машиностроение, 2006. – 640 с.
8. Шейнблинт А.Е. Курсовое проектирование деталей машин. – Калининград: изд. «Янтарный сказ», 2004,-454 с.
9. Ахлюстина Н.В. Расчёт соединений деталей машин. Учебное пособие и задания по разделу дисциплины “Детали машин и основы конструирования” для студентов очного и заочного обучения направления 651600 - «Технологические машины и оборудование». Екатеринбург; издание УГГГА, 2008. - 3,5 п.л.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие



Екатеринбург - 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом
Уральского государственного горного университета
в качестве учебного пособия

Издание второе, исправленное и дополненное

Екатеринбург – 2012

УДК 620.10
М 74

Рецензенты: Таугер В. М., профессор кафедры мехатроника УрГУПС, канд. техн. наук, доцент; Раевская Л. Т., зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики УГЛТУ, канд. техн. наук, доцент.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

М 74 **Сопротивление материалов в примерах и задачах:** учебное пособие / 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург Н. В. Мокрушин, С. А. Ляпцев, Л. Д. Чучманова, К. В. Середа; Уральский гос. горный университет.– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012.– 184 с.
ISBN 978-5-8019-0185-5

Учебное пособие отражает опыт проведения практических занятий по дисциплине «Сопротивление материалов» в Уральском государственном горном университете. В пособии приведены примеры расчетов стержней, валов, балок, испытывающих простые и сложные виды деформаций. Для самостоятельной работы представлены задания по основным темам дисциплины.

Учебное пособие предназначено для студентов очного и заочного обучения.

Рис. 42. Табл. 22. Библ. 21 наим.

УДК 620.10

ISBN 978-5-8019-0185-5

© Уральский государственный
горный университет, 2008, 2012
© Мокрушин Н. В., Ляпцев С. А.,
Чучманова Л. Д., Середа К. В., 2008, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Введение в учебную программу высших технических учебных заведений новых дисциплин, отражающих современное состояние науки и техники, при ограниченных сроках обучения привело к существенному сокращению количества лекционных часов по курсу сопротивления материалов.

Восполнение появившихся в результате этого пробелов в знании студентами вузов сопротивления материалов может быть достигнуто в известной мере за счет самостоятельного изучения ими необходимых разделов этого важного для будущего инженера курса. Данное учебное пособие составлено в соответствии с программой курса по сопротивлению материалов. По каждой теме предмета в пособии даны краткие теоретические сведения и основные формулы. Приведены примеры расчетов стержней на растяжение и сжатие (глава 1), примеры по определению главных моментов инерции поперечных сечений различного профиля (глава 2), рассмотрены примеры расчета вала на кручение (глава 3). В главе 4 рассмотрены примеры расчетов балок, испытывающих деформацию поперечного изгиба, на прочность и жесткость. С применением метода сил в главе 5 приведены примеры расчетов статически неопределимых неразрезных балок и плоских статически неопределимых рам. Виды сложного сопротивления (косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением) рассмотрены в главе 6. Рассмотрение деформации продольного изгиба и расчеты на устойчивость гибких стержней приведены в главе 7.

Более подробное изложение теоретического материала приведено в работах [1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 18].

Для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ по каждой теме составлены задания с необходимыми рисунками и таблицами. Для расчетов рекомендуется следующая литература [2, 8, 11, 14, 15, 16].

При выполнении практических расчетов используются следующие основные характеристики материалов [17]:

модули продольной упругости: стали $E_{\text{с}} = 2 \cdot 10^{11}$ Па; дюраля (и алюминия) $E_{\text{д}} = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па; меди $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^{11}$ Па; чугуна $E_{\text{ч}} = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па; дерева $E_{\text{д}} = 1 \cdot 10^{10}$ Па;

модуль сдвига стали: $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па;

коэффициенты теплового линейного расширения: стали $\alpha_{\text{с}} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град; дюраля $\alpha_{\text{д}} = 2,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град; меди $\alpha_{\text{м}} = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/град;

коэффициент Пуассона для стали: $\nu = 0,30$.

Глава 1

ПРОДОЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

Растяжением называют такой вид деформации, при котором в каждом его поперечном сечении возникают только продольные внутренние усилия.

Продольное усилие F в любом поперечном сечении численно равно алгебраической сумме проекций на ось стержня внешних сил, приложенных к части стержня, расположенной по одну сторону от сечения. Усилие считается положительным, если вызывает растяжение рассматриваемого участка.

При растяжении (сжатии) в сечении возникают только нормальные напряжения, которые определяются по формуле (1.1):

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{1.1}$$

где F – продольное усилие, кН; A – площадь поперечного сечения, м^2.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} \le \sigma_{adm}, \tag{1.2}$$

где σ_{adm} – допускаемое нормальное напряжение материала стержня, МПа.

Абсолютная деформация Δl однородного участка (постоянные сечение и материал) определяется **по закону Гука**:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}\ , \tag{1.3}$$

где l – длина участка, м; E – модуль продольной упругости материала (модуль Юнга), Па.

Для наглядного представления строятся эпюры. Эпюрами продольных сил и нормальных напряжений называют графики, показывающие законы изменения сил и напряжений в поперечных сечениях по длине стержня. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений строятся в выбранном масштабе с учетом знаков.

Пример 1.1.

К узлу C кронштейна ABC (рис. 1.1, *а*) приложена сила F = 100 кН. Стержень AC – стальной, круглого сечения диаметром d = 30 мм; стержень BC – дюралюминиевый, квадратного сечения со стороной a = 40 мм. Определить напряжения в стержнях, а также горизонтальное, вертикальное и полное перемещения узла C.

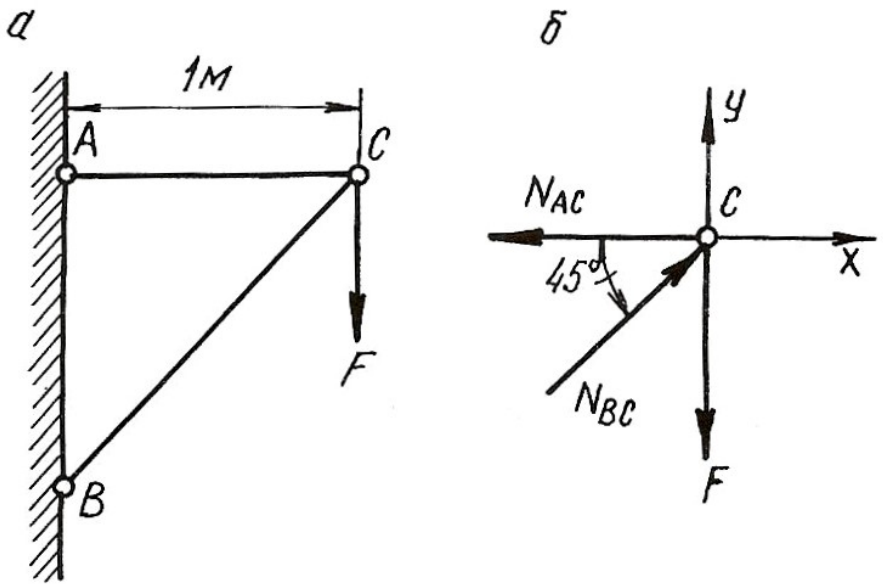


Рис. 1.1.

Решение.

Для определения продольных сил в стержнях AC и BC условно вырезаем узел C, заменяем действие стержней на узел усилиями и составляем уравнение равновесия для узла C (рис. 1.1, *б*)

$$\sum X = 0; \quad -N_{AC} + N_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{BC} \cdot \sin 45^\circ - F = 0.$$

Откуда

$$N_{BC} = \frac{F}{\sin 45^\circ} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,707} = 141 \cdot 10^3 \text{ Н} = 141 \text{ кН},$$

$$N_{AC} = N_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 141 \cdot 10^3 \cdot 0,707 = 100 \cdot 10^3 \text{ Н} = 100 \text{ кН}.$$

Стержень AC растянут, а стержень BC сжат. Определяем площади поперечных сечений стержней

$$A_{AC} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (30 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 706 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$A_{BC} = a^2 = (40 \cdot 10^{-3})^2 = 1600 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержней AC и BC

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{100 \cdot 10^3}{706 \cdot 10^{-6}} = 141 \cdot 10^6 \text{ Па} = 141 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC} = -\frac{N_{BC}}{A_{BC}} = -\frac{141 \cdot 10^3}{1600 \cdot 10^{-6}} = -88 \cdot 10^6 \text{ Па} = -88 \text{ МПа}.$$

Знак минус указывает на то, что в стержне BC возникает деформация сжатия.

Находим удлинения стержней:

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E_{\text{ст}} \cdot A_{AC}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 706 \cdot 10^{-6}} = 0,71 \cdot 10^{-3} \text{м} = 0,71 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{BC} = -\frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E_{\text{дюр}} \cdot A_{BC}} = -\frac{141 \cdot 10^3 \cdot 1,41}{7 \cdot 10^{10} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}} = -1,77 \cdot 10^{-3} \text{м} = -1,77 \text{ мм},$$

где $l_{BC} = \frac{l_{AC}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{0,707} = 1,41$ м; $E_{\text{ст}}$, $E_{\text{дюр}}$ – модули продольной упругости стального и дюралюминиевого стержней, Па.

Для определения перемещения точки C мысленно разъединим стержни в этом шарнире и отметим их новые длины AC_1 и BC_2 (рис. 1.2, *а*). Для того, чтобы найти новое положение точки C, необходимо деформированные стержни свести вместе путем их вращения вокруг шарниров A и B. Точки C_1 и C_2 будут перемещаться по дугам, которые вследствие их малости могут быть приняты за прямые C_1C_3 и C_2C_3, перпендикулярные к стержням AC и BC. Точка пересечения этих перпендикуляров (точка C_3) и даст положение узла C после деформации. На рис. 1.2, *б* изображена диаграмма перемещений в большом масштабе.

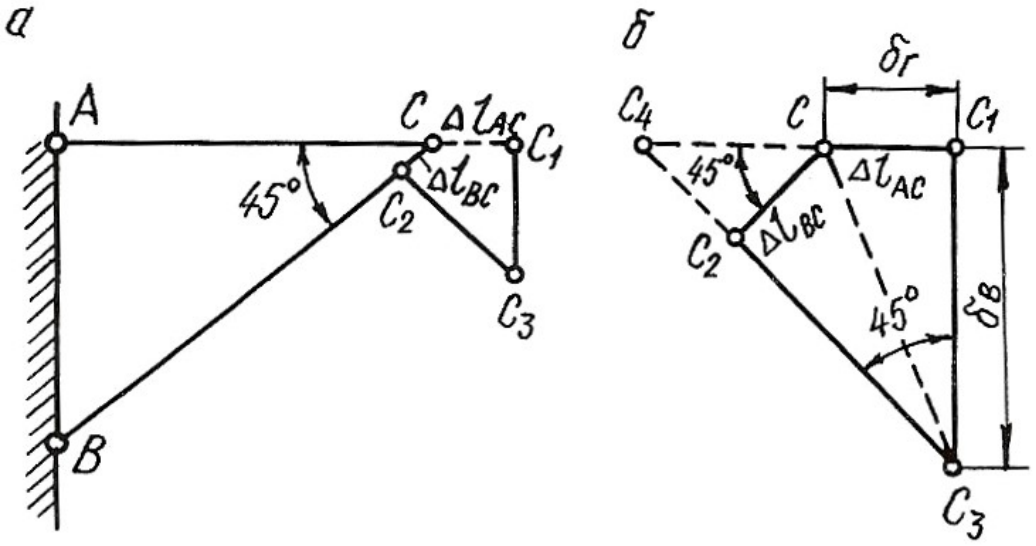


Рис. 1.2.

Горизонтальное перемещение узла C равно $\delta_{\text{г}} = \Delta l_{\text{AC}} = 0,71$ мм.

Для удобства определения вертикального перемещения произведем дополнительное построение. Продолжим линии C_1C и C_3C_2 до их пересечения в точке C_4.

Вертикальное перемещение узла C

$$\delta_в = C_1C_3 = \frac{C_1C_4}{\text{tg}45^o} = C_1C_4 = C_1C + CC_4 = \Delta l_{AC} + \frac{\Delta l_{BC}}{\cos 45^o};$$

$$\delta_в = 0,71 + \frac{1,77}{0,707} = 3,21 \text{ мм}.$$

Полное перемещение узла C

$$\delta = CC_3 = \sqrt{\delta_г^2 + \delta_в^2} = \sqrt{0,71^2 + 3,21^2} = 3,29 \text{ мм}.$$

1.1. Влияние собственного веса на напряжения и перемещения

Если ось в стержне вертикальна, то его собственный вес вызывает центральное растяжение или сжатие. Если вертикальный брус закреплен верхним концом, то от собственного веса он растягивается, а при закреплении нижнего конца – сжимается. Собственный вес вертикального бруса можно рассматривать как продольную (осевую) внешнюю нагрузку, распределенную вдоль оси бруса.

Рассмотрим брус постоянного сечения, закрепленный верхним концом. Продольная сила от собственного веса в поперечном сечении бруса на расстоянии x от его нижнего конца равна весу нижележащей части бруса

$$N_x = \rho g A x, \tag{1.4}$$

где N_x – продольная сила от собственного веса, Н; ρ – плотность материала, кг/м^3; g – ускорение свободного падения, м/с^2; A – площадь поперечного сечения бруса, м^2; x – расстояние от нижнего конца стержня, м.

Напряжение от собственного веса определяется по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \rho g x. \tag{1.5}$$

По формулам (1.4) и (1.5) строятся эпюры N и σ с учетом знаков. Если на стержень действует дополнительная сила F, то продольная сила и нормальное напряжение определяются по формулам:

$$N_x = F + \rho g A x; \tag{1.6}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \rho g x. \tag{1.7}$$

Полное удлинение (укорочение) стержня постоянного сечения от собственного веса определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}, \tag{1.8}$$

где l – длина стержня, м; E – модуль продольной упругости материала, Па.

При действии внешней силы F и собственного веса удлинение стержня определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E}. \qquad (1.9)$$

В формулах (1.7) и (1.9) физический смысл первого слагаемого – напряжение и удлинение от внешней силы, второго – напряжение и удлинение от собственного веса.

Перемещение любого поперечного сечения бруса, закрепленного верхним концом, равно удлинению части бруса, лежащей над сечением, и равно сумме удлинений под действием собственного веса верхней части, нижней части бруса и внешней силы.

Рассмотрим подробнее решение типовой задачи.

Пример 1.2.

Для стального бруса переменного сечения (рис. 1.3, *а*) с учетом собственного веса и при продольной нагрузке F требуется:

1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса.
2. Найти полное удлинение (укорочение) бруса.
3. Определить перемещение сечения I-I.

Исходные данные: $A = 20$ см^2; $a = 1{,}0$ м; $b = 1{,}5$ м; $c = 1{,}0$ м; $F = 40$ кН.

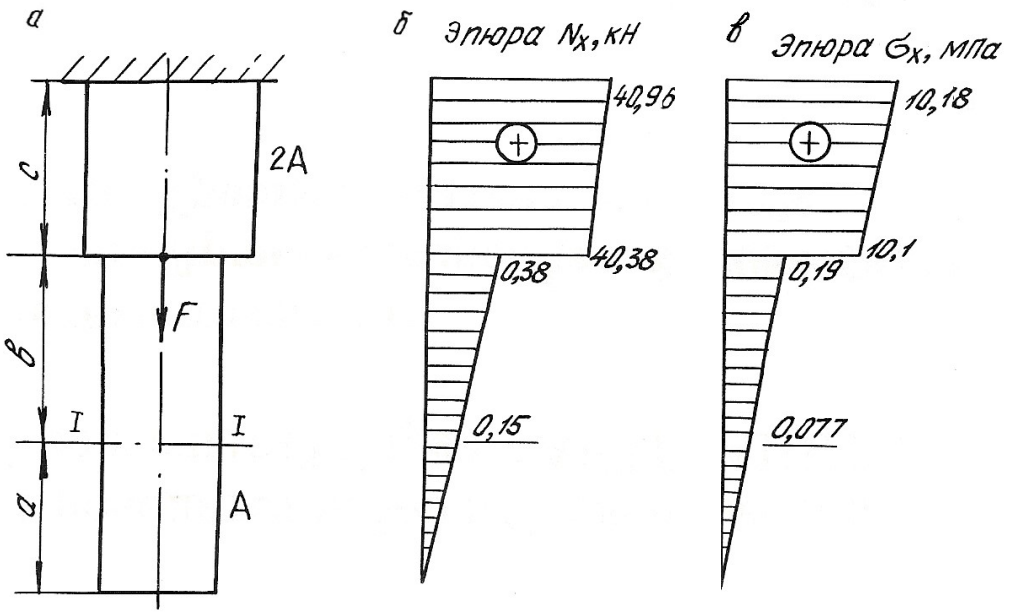


Рис. 1.3.

Решение.

Определим продольную силу и нормальное напряжение в поперечном сечении по формулам (1.6) и (1.7):

а) на участке длиной a (нижний участок): $0 \le x \le 1{,}0$ м;

$$N_x = \rho g A x;$$

$$\sigma_x = \rho g x.$$

При $x = 0$ $\quad N_x = 0,$

$\sigma_x = 0.$

При $x = 1$ м $\quad N_x = 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 150$ Н $= 0{,}15$ кН;

$\sigma_x = 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 80000$ Па $= 0{,}08$ МПа.

б) на участке длиной b (средний участок): $1{,}0 \le x \le 2{,}5$ м;

$$N_x = Q_a + \rho g A (x - a);$$

$$\sigma_x = \frac{Q_a}{A} + \rho g (x - a);$$

где $Q_a = \rho g A a = 0{,}15$ кН – вес нижнего участка бруса; для среднего участка он играет роль внешней силы.

При $x = 1{,}0$ м; $\quad N_x = Q_a = 0{,}15$ кН;

$\sigma_x = 0{,}08$ МПа.

При $x = 2{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}38$ кН;

$\sigma_x = 0{,}08 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}19$ МПа.

в) на участке длиной c (верхний участок): $2{,}5 \le x \le 3{,}5$ м;

$$N_x = Q_a + Q_b + F + \rho g 2A (x - a - b);$$

$$\sigma_x = \frac{Q_a + Q_b + F}{2A} + \rho g (x - a - b),$$

где $Q_b = \rho g A b = 0{,}23$ кН – вес среднего участка бруса.

При $x = 2{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 0{,}23 + 40 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 10^{-7} = 40{,}38$ кН;

$\sigma_x = 10{,}1$ МПа.

При $x = 3{,}5$ м; $\quad N_x = 0{,}15 + 0{,}23 + 40 + 7850 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-7} = 40{,}96$ кН;

$\sigma_x = 10{,}18$ МПа.

Строим эпюры $\boldsymbol{N}_x$ (рис. 1.3, *б*) и σ_x (рис. 1.3, *в*).

Определим полное удлинение стержня по формуле (1.9). Полное удлинение складывается из удлинений каждого участка бруса под действием внешних сил и собственного веса.

$$\Delta l = \Delta a + \Delta b + \Delta c \ ;$$

где $\Delta a = \dfrac{\rho g a^2}{2E} = \dfrac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0{,}19 \cdot 10^{-6}$ м;

$$\Delta b = \frac{Q_a \cdot b}{EA} + \frac{\rho g b^2}{2E} = \frac{0{,}15 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} =$$

$$= 0{,}56 \cdot 10^{-6} + 0{,}43 \cdot 10^{-6} = 0{,}99 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta c = \frac{(Q_a + Q_b + F)c}{E \cdot 2A} + \frac{\rho g c^2}{2E} = \frac{(0{,}15 + 0{,}23 + 40) \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{7850 \cdot 9{,}81 \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} =$$

$$= 50{,}48 \cdot 10^{-6} + 0{,}19 \cdot 10^{-6} = 50{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l = 0{,}19 \cdot 10^{-6} + 0{,}99 \cdot 10^{-6} + 50{,}67 \cdot 10^{-6} = 51{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Перемещение сечения I-I равно удлинению лежащей над сечением части бруса, т. е.

$$\delta_{\text{I-I}} = \Delta c + \Delta b = 0{,}99 \cdot 10^{-6} + 50{,}67 \cdot 10^{-6} = 51{,}66 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

1.2. Напряженное состояние материала в точке

Напряженным состоянием называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через данную точку. В различных точках тела напряженное состояние неоднородно и определить все значения возникающих напряжений затруднительно. В связи с этим в сопротивлении материалов точку рассматривают в виде элементарного параллелепипеда с гранями $dx \cdot dy \cdot dz$. При этом считается, что возникающие напряжения на гранях и в наклонных сечениях распределяются равномерно. Нормальные напряжения на гранях обозначаются: σ_x, σ_y, σ_z, а касательные: τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{zy}, τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{zx}. Двойной индекс при касательных напряжениях указывает на направление и плоскость, где они действуют. Например, индексы при напряжении τ_{xy} означают, что x – направление действия этого напряжения по оси x; y – это напряжение возникает в плоскости, нормаль к которой параллельна оси y.

Во взаимно перпендикулярных сечениях касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Это свойство касательных напряжений называется **законом парности касательных напряжений**

$$-\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Рассматриваемый параллелепипед в теле стержня можно сориентировать таким образом, что по его граням будут действовать только нормальные напряжения, а касательные будут равны нулю. В этом случае грани будут называться главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения – главными напряжениями. По количеству главных напряжений, возникающих одновременно на главных площадках, различают три вида напряженного состояния точки упругого тела: линейное, плоское и объемное. Главные напряжения обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Принято считать, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Наиболее часто встречается плоское напряженное состояние материала.

Для правильной оценки опасности, угрожающей прочности стержня, необходимо знать полностью его напряженное состояние. Это требует умение вычислять напряжения не только по сечениям, перпендикулярным оси стержня, но и по наклонным сечениям.

Напряжения в наклонных сечениях, нормаль к которым с осью x составляет угол α, определяются по следующим формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \qquad (1.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha, \qquad (1.11)$$

Для сечений, проходящих под углом $\beta = \alpha + 90^\circ$, возникающие напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha; \qquad (1.12)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha, \qquad (1.13)$$

Угол α положительный, если он отсчитан в направлении от оси x к оси y по кратчайшему угловому пути, против хода часовой стрелки.

Нормальное напряжение σ_α считается положительным, если его направление совпадает с направлением внешней нормали к наклонной площадке. Положительное направление τ_α образовано поворотом внешней нормали к наклонной площадке на угол 90° по ходу часовой стрелки.

Противоположные направления σ_α и τ_α следует считать отрицательными.

Площадки, где действуют экстремальные нормальные напряжения и нет касательных напряжений, называются главными площадками, а напряжения, действующие на главных площадках – главными напряжениями. Они обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ и определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \right]; \qquad (1.14)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \right]. \qquad (1.15)$$

Положение главных площадок определяется углом наклона α_0

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad (1.16)$$

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках под углом 45°

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\ . \qquad (1.17)$$

Пример 1.3.

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние: $\sigma_x = 80$ МПа; $\alpha = 30^o$; $\tau_{xy} = 10$ МПа (рис. 1.4). Требуется найти:

1. Главные напряжения и положение главных площадок.
2. Максимальные касательные напряжения.
3. Определить аналитически величины нормальных σ_α и касательных τ_α напряжений, действующих на площадках, нормаль, к которой составляет угол α с горизонтальной осью x. Показать на чертеже заданный элемент и направление соответствующих напряжений.

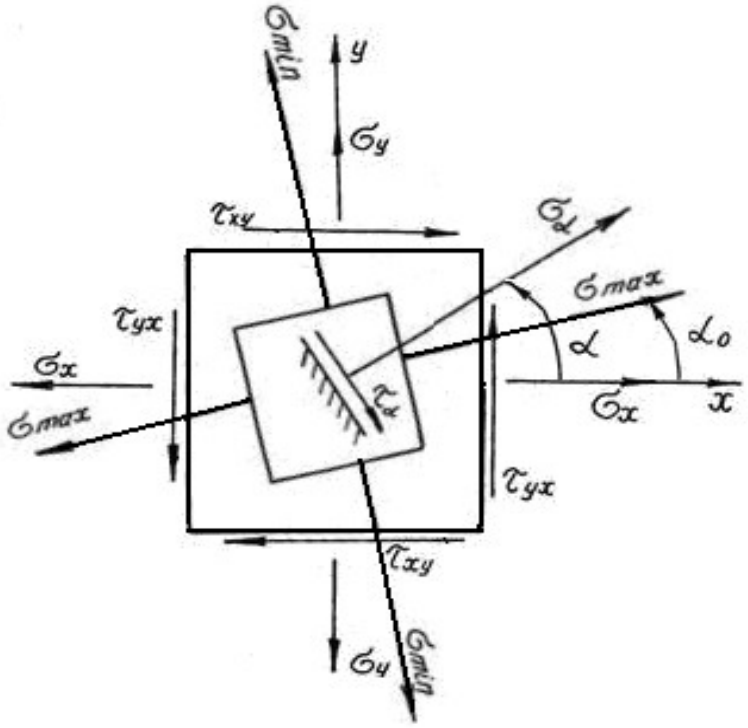


Рис. 1.4.

Решение.

Определим главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(80+20) + \sqrt{(80-20)^2 + 4\cdot 10^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[100 + 63,6\right] = 81,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(80+20) - \sqrt{(80-20)^2 + 4\cdot 10^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[100 - 63,6\right] = 18,2 \text{ МПа}.$$

Найдем положение главных площадок

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\cdot(-10)}{80-20} = 0,333; \qquad 2\alpha_0 = 18^o 24'; \qquad \alpha_0 = 9^o 12'.$$

Определим аналитически величины σ_α и τ_α, действующие на площадке, нормаль к которой составляет угол 30° с горизонтальной осью (см. рис. 1.4.)

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx}\sin 2\alpha = 80\cdot 0,866^2 + 20\cdot 0,5^2 - (-10)\cdot 0,866 =$$

$$= 73,65 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{yx}\cos 2\alpha = \frac{80-20}{2}0,866 + (-10)\cdot 0,5 = 20,98 \text{ МПа}.$$

Вектор максимальных главных напряжений σ_{max} всегда проходит через те четверти осей координат, в которых стрелки касательных напряжений сходятся.

1.3. Статически неопределимые стержневые системы

Статически неопределимыми системами называют такие системы, у которых реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях их элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений равновесия статики.

Равновесие плоской стержневой системы обеспечивается тремя опорными направлениями. Всякое закрепление сверх трех опорных направлений является «лишним» с точки зрения равновесия системы, что делает ее *статически неопределимой*. Термин «лишние» является условным. Постановка дополнительных опорных закреплений производится с целью уменьшения деформации, веса конструкции или с целью увеличения ее грузоподъемности.

Расчет статически неопределимой системы начинается с определения степени статической неопределимости системы, которая равна числу «лишних» связей (число неизвестных сил минус три – число уравнений статики для плоской системы).

Определение усилий в статически неопределимой системе связано с необходимостью составления дополнительных уравнений – уравнений совместности деформаций. Число этих уравнений должно быть равно степени статической неопределимости стержневой системы.

Уравнения совместности деформаций устанавливают геометрические зависимости между упругими перемещениями отдельных элементов при соблюдении равновесия всей системы в целом.

Геометрическая схема деформаций должна рассматриваться не с точки зрения обычной геометрии, а на основе кинематики малых перемещений, с учетом того, что траектории отдельных точек элементов являются прямыми линиями.

Решение статически неопределимых систем необходимо производить в следующей последовательности:

1. Заданную систему освободить от наложенных на нее связей, действие которых заменяется реакциями, и составить уравнения статики;
2. Определить степень статической неопределимости системы;
3. По числу «лишних» неизвестных составить дополнительные уравнения из условия совместности деформаций. В уравнениях упругие деформации выразить через усилия по закону Гука в развернутом виде по формуле (1.3);
4. Решить совместно уравнения равновесия статики и дополнительные уравнения, определяя усилия в элементах конструкций;
5. Исходя из условия задачи и на основании условия прочности, определить поперечные размеры стержней.

Рассмотрим подробнее пример расчета статически неопределимой системы.

Пример 1.4.

Для статически неопределимой системы (рис. 1.5), состоящей из жесткой невесомой балки AB и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно, требуется:

1. Определить усилия, возникающие в стержне от действия силы F.
2. Подобрать сечение стержней из двух равнобоких уголков, каждое при $A_2 : A_1 = 2$; $F = 180$ кН; $a = 2{,}0$ м; $b = 1{,}0$ м; $h = 2{,}0$ м.

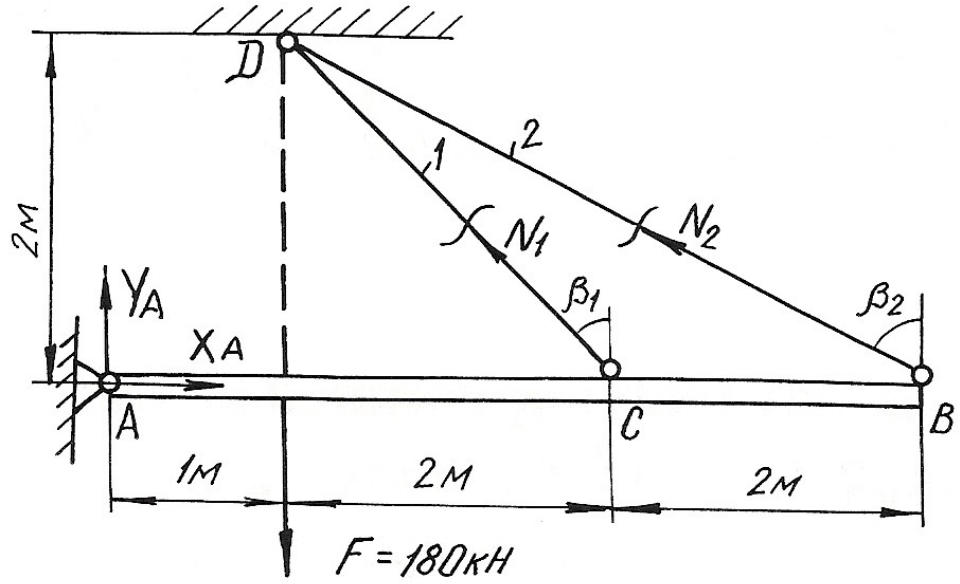


Рис. 1.5.

Решение.

Перед началом решения по приведенному плану определяем геометрические параметры системы

$$l_1 = DC = \sqrt{4+4} = 2{,}83 \text{ м}; \quad \beta_1 = 45°;$$

$$l_2 = DB = \sqrt{4+16} = 4{,}47 \text{ м}; \quad \sin\beta_2 = \frac{4}{4{,}47} = 0{,}89;$$

Далее освобождаем брус AB от наложенных связей, заменяя их действие реакциями X_A, Y_A, N_1, N_2. Так как на балку AB действуют четыре неизвестные силы, то одна связь «лишняя», т. е. задача является однажды статически неопределимой.

Из трех уравнений равновесия достаточно записать только одно уравнение, не содержащее X_A, Y_A, определение которых не ставится в задаче,

$$\sum M_A = 0; \qquad -F \cdot 1 + N_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot 3 + N_2 \cdot \cos\beta_2 \cdot 5 = 0;$$

$$-180 + N_1 \cdot 0{,}707 \cdot 3 + N_2 \cdot 0{,}45 \cdot 5 = 0 \qquad (1.18)$$

В уравнении статики два неизвестных, поэтому нужно записать еще одно дополнительное уравнение из условия совместности деформаций стержней DB и DC. Рассматривая геометрическую схему деформаций этих стержней, считаем перемещение точек B и C балки вертикальными (рис. 1.6). Из подобия треугольников ACC_1 и ABB_1 имеем:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{3}{5}.$$

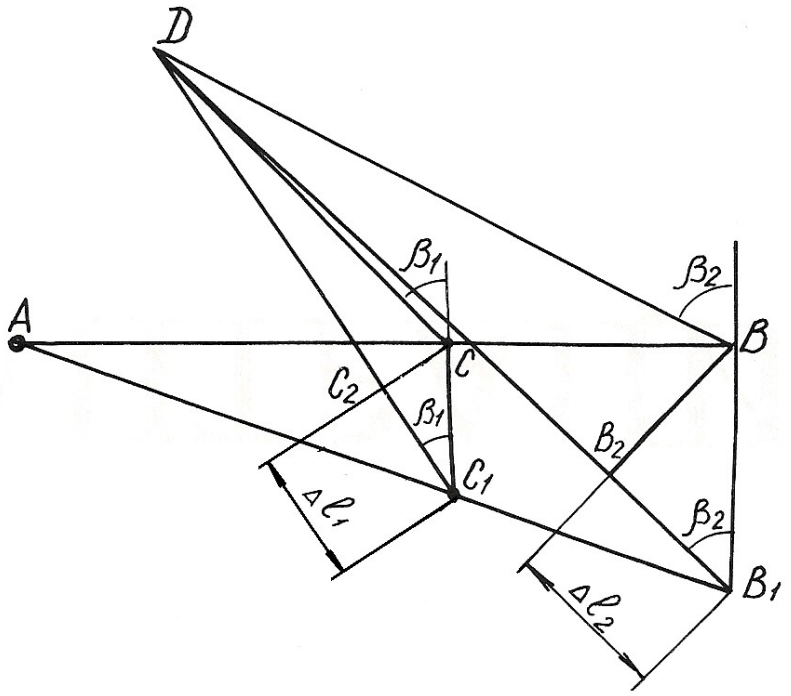


Рис. 1.6.

Учитывая, что $\begin{cases} CC_1 = \dfrac{CC_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1}; \\ BB_1 = \dfrac{B_1B_2}{\cos\beta_2} = \dfrac{\Delta l_2}{\cos\beta_2}, \end{cases}$

получим $\dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\Delta l_2}{\cos\beta_2}$; откуда

$$\Delta l_1 = 0{,}94 \cdot \Delta l_2 . \qquad (1.19)$$

Равенство (1.19) и есть условие совместности деформации стержней 1 и 2. Выразим деформации через усилия по закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 2{,}83}{EA_1}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 4{,}74}{E \cdot 2A_1}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (1.19)

$$\frac{N_1 \cdot 2{,}83}{EA_1} = 0{,}94 \frac{N_2 \cdot 4{,}74}{E \cdot 2A_1}.$$

Отсюда получим

$$2{,}83 \cdot N_1 - 2{,}10 \cdot N_2 = 0. \qquad (1.20)$$

Теперь можно определить усилия N_1 и N_2, решая совместно систему уравнений (1.18) и (1.20),

$$\begin{cases} 2{,}12 \cdot N_1 + 2{,}25 \cdot N_2 - 180 = 0; \\ 2{,}83 \cdot N_1 - 2{,}10 \cdot N_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем $N_1 = 34{,}94$ кН; $N_2 = 47{,}08$ кН.

Подбираем сечение стержней из условий прочности:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{\sigma_{adm}} = \frac{34{,}94 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2{,}18 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 2{,}18\ \text{см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{\sigma_{adm}} = \frac{47{,}08 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2{,}94 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 2{,}94\ \text{см}^2.$$

Для площадей задано условие $A_2{:}A_1 = 2$. Если принять $A_1 = 2{,}18$ см^2, тогда $A_2 = 4{,}36$ см^2. Условие $A_2 \geq 2{,}94$ см^2 выполняется.

Сечение подбираем из двух равнобоких уголков по ГОСТ 8509-93 (табл. П. 3).

Для первого стержня подбираем два уголка №2 (20х20х3 мм) с площадью сечения 1,13 см^2. Для второго стержня принимаем два уголка №4 (40х40х3 мм) с площадью сечения 2,35 см^2.

Полные площади сечений будут равны $A_1 = 2{,}26$ см^2; $A_2 = 4{,}70$ см^2.

Проверим отношение площадей:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4{,}70}{2{,}26} = 2{,}08.$$

Отклонение $\delta = \dfrac{2{,}08 - 2}{2} 100\ \% = 3{,}98\ \%.$

Погрешность допустимая.

Пример 1.5. Монтажная задача

Для статически неопределимой системы (рис. 1.7), состоящей из жесткой невесомой балки AB и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно, требуется определить дополнительные усилия в стержнях конструкции, если стержень 2 изготовлен короче проектного размера на $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м при $A_2 : A_1 = 2$; a =2,0 м; $b = 1{,}0$ м; $h = 2{,}0$ м.

При сборке стержни деформируются: стержень 2 – растянется, стержень 1 – сожмется. В соответствии с этим покажем направления дополнительных усилий N_1' и N_2' (см. рис. 1.7), возникающих после сборки конструкции.

Для определения усилий воспользуемся уравнением статики

$$\sum \text{M}_A = 0; \qquad -N_1' \cdot \cos\beta_1 \cdot 3 + N_2' \cdot \cos\beta_2 \cdot 5 = 0;$$

$$-2{,}12 N_1' + 2{,}25 N_2' = 0. \qquad (1.21)$$

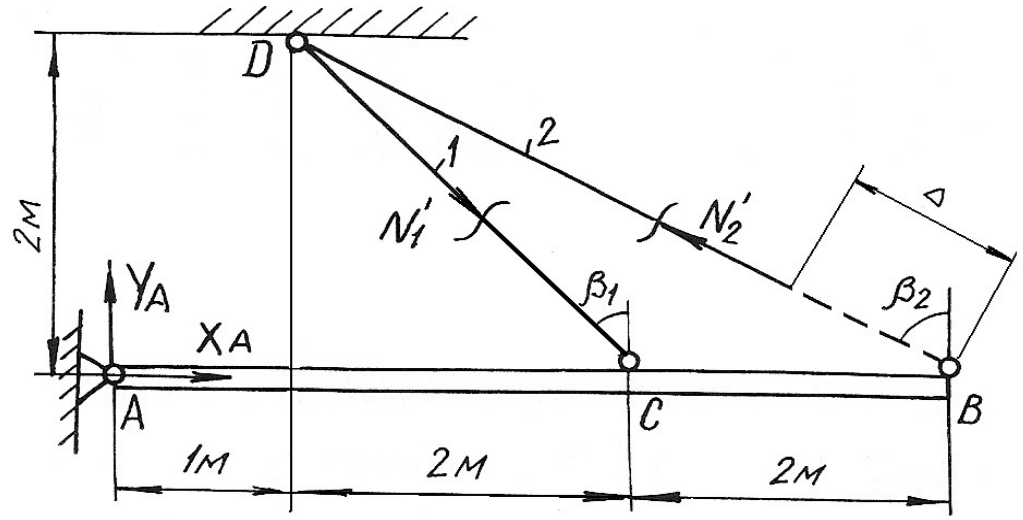


Рис. 1.7.

Уравнение одно, неизвестных два, следовательно, система один раз статически неопределима. Запишем дополнительно условие совместности деформаций. Рассмотрим картину деформаций стержней (см. рис. 1.8). Из подобия треугольников AC_1C и AB_1B получим $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{C_1C}{B_1B}=\dfrac{3}{5}$.

Учитывая соотношение $C_1C=\dfrac{CC_2}{\cos\beta_1}=\dfrac{\Delta l_1}{\cos\beta_1}$; $B_1B=\dfrac{B_2B}{\cos\beta_2}=\dfrac{\Delta-\Delta l_2}{\cos\beta_2}$,

получаем $\dfrac{\Delta l_1}{0{,}707}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\Delta-\Delta l_2}{0{,}45}$; $\Delta l_1=0{,}94(\Delta-\Delta l_2)$. (1.22)

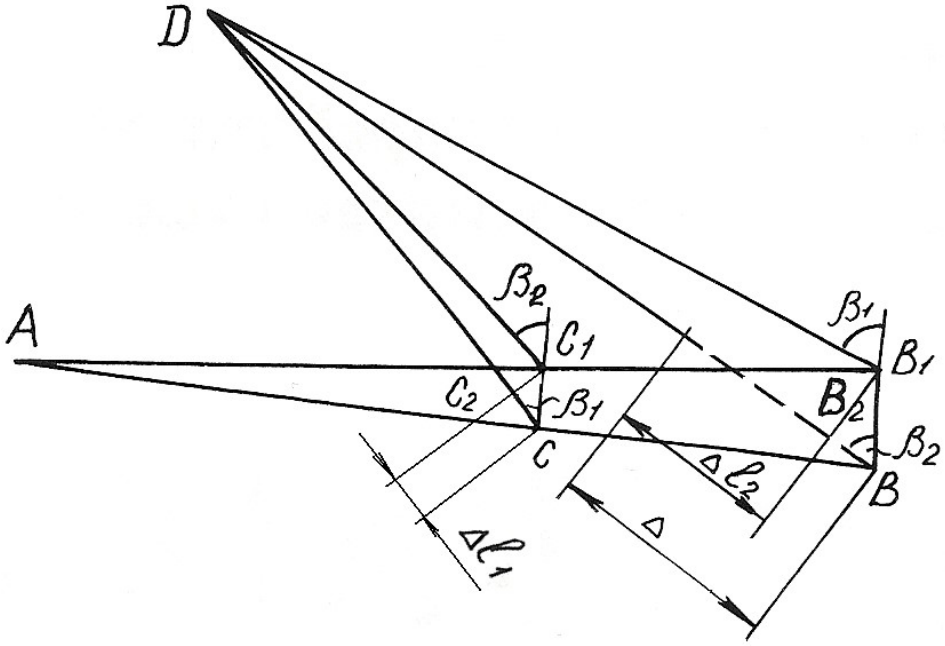


Рис. 1.8.

Выражение (1.22) – условие совместности деформаций стержней 1 и 2. Выражая деформацию через усилия по закону Гука, получим

$$\frac{N_1' l_1}{EA_1} + \frac{0{,}94 \cdot N_2' l_2}{EA_2} = 0{,}94 \cdot \Delta$$

или

$$1{,}25 \cdot N_1' + 0{,}894 \cdot N_2' = 94 \qquad (1.23)$$

Решая совместно систему уравнений (1.21) и (1.23), определяем усилия N_1' и N_2'

$$N_1' = 42{,}75 \text{ кН}; \; N_2' = 45{,}36 \text{ кН}.$$

Пример 1.6.

Стержень длиной l = 800 мм, защемленный обоими концами, подвергается действию двух сосредоточенных сил F_1=100 кН и F_2=150 кН (рис. 1.9, *а*). Определить напряжения, возникающие в различных сечениях стержня, и проверить его прочность, если допускаемое напряжение σ_{adm}=140 МПа. Площадь поперечного сечения A = 10 см^2, l_1 = 200 мм и l_2 = 600 мм.

Решение.

Обозначим реакции в заделках стержня через R_A и R_B. На стержень действует система сил, направленных вдоль одной прямой. Для такой системы статика дает одно уравнение равновесия

$$\sum Y = 0; \quad R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0,$$

откуда $R_A + R_B = F_1 + F_2$. (1.24)

Для составления уравнения совместности деформаций мысленно отбросим нижнюю заделку и заменим ее действие на стержень реакцией R_B, т. е. приложим к сечению B (к нижнему торцовому сечению) такую силу, которая оказывает на стержень воздействие, полностью аналогичное воздействию заделки. Таким образом, изображенная система эквивалентна заданной системе и, поскольку в заданной системе перемещение сечения B равно нулю, то и для второй системы (рис.1.9, *б*) должно соблюдаться то же условие

$$\delta_B = 0. \qquad (1.25)$$

Для определения вида левой части записанного равенства используем принцип независимости действия сил, т. е. вычислим перемещение сечения B как сумму перемещений, вызванных каждой силой F_1, F_2 и R_B в отдельности

$$\delta_B = \delta_{F_1} + \delta_{F_2} + \delta_{R_B}.$$

Под действием одной лишь силы F_1 деформируется только верхняя часть стержня, нижняя и средняя части перемещаются как твердое тело. Таким образом, перемещение сечения B, вызванное силой F_1, равно удлинению верхней части стержня

$$\delta_{F_1} = \frac{F_1 l_1}{EA}.$$

Аналогично установим, что перемещение сечения B от действия силы F_2, равно удлинению верней и средней частей

$$\delta_{F_2} = \frac{F_2 l_2}{EA}.$$

Наконец, перемещение сечения B от действия силы R_B равно укорочению всего стержня

$$\delta_{R_B} = \frac{R_B l}{EA}.$$

Суммируя полученные величины и приравнивая сумму нулю согласно равенству (1.25), получим уравнение совместности деформаций,

$$\frac{F_1 l_1}{EA} + \frac{F_2 l_2}{EA} - \frac{R_B l}{EA} = 0,$$

откуда $R_B = \dfrac{F_1 l_1 + F_2 l_2}{l} = \dfrac{100 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,6}{0,8} = 137,5$ кН.

Подставив значение реакции R_B в уравнение равновесия (1.24), определим значение реакции в точке A:

$$R_A = F_1 + F_2 - R_B = F_1 + F_2 - \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2}{l} = \frac{(F_1 + F_2) l - (F_1 l_1 + F_2 l_2)}{l} =$$

$$= \frac{(100 + 150) \cdot 0,8 - (100 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,6)}{0,8} = 112,5 \text{ кН}.$$

На рис. 1.9, *в* приведена эпюра продольных сил, в соответствии с которой определяем напряжения на различных участках стержня.

В поперечных сечениях верхней части стержня

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{112,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 112,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112,5 \text{ МПа};$$

в поперечных сечениях средней части

$$\sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа},$$

а в нижней части

$$\sigma^{(3)} = \frac{N_3}{A} = -\frac{137,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -137,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -137,5 \text{ МПа}.$$

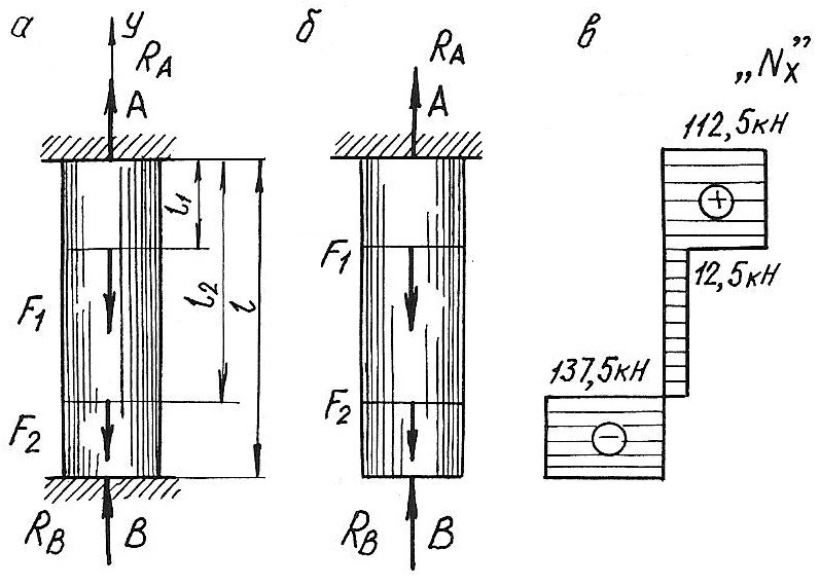


Рис. 1.9.

Наиболее напряженными, как видно из расчетов, являются поперечные сечения нижней части стержня. Это напряжение используем для проверки стержня на прочность:

$$\left|\sigma^{(3)}\right| = 137{,}5 \text{ МПа} < \sigma_{adm} = 140 \text{ МПа},$$

т. е. условие прочности выполняется.

Пример 1.7. Температурная задача

Определить допускаемое повышение температуры составного стержня (рис. 1.10.) из условия, чтобы напряжения сжатия не превышали в стальной части $\sigma_c = 120$ МПа, в медной $\sigma_м = 60$ МПа и в алюминиевой $\sigma_a = 70$ МПа. (линейные размеры на рисунке приведены в мм).

Решение.

Площади поперечных сечений ступеней стержня

$$A_м = \frac{\pi(50\cdot10^{-3})^2}{4} = 1963\cdot10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_a = \frac{\pi(40\cdot10^{-3})^2}{4} = 1257\cdot10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$A_c = \frac{\pi(30\cdot10^{-3})^2}{4} = 707\cdot10^{-6} \text{ м}^2.$$

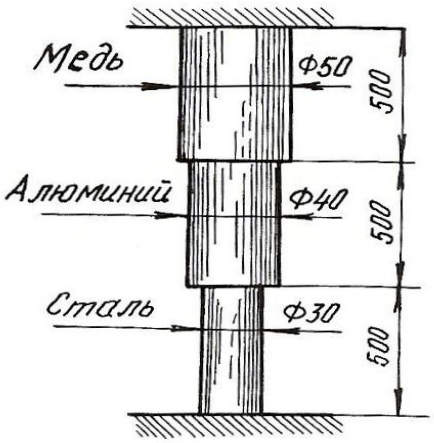


Рис. 1.10.

Продольные силы, при которых напряжения в ступенях будут равны заданным величинам, должны быть следующими:

$$N_{\text{м}} = A_{\text{м}} \cdot \sigma_{\text{м}} = 1963 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{6} = 118000 \text{ Н} = 118 \text{ кН};$$

$$N_{\text{а}} = A_{\text{а}} \cdot \sigma_{\text{а}} = 1257 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^{6} = 88000 \text{ Н} = 88 \text{ кН};$$

$$N_{\text{с}} = A_{\text{с}} \cdot \sigma_{\text{с}} = 707 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{6} = 84800 \text{ Н} = 84{,}8 \text{ кН}.$$

Величина продольной силы не одинакова для всего стержня, следовательно, в качестве допускаемой продольной силы должно быть принято меньшее из трех полученных значений, а именно $N = N_{\text{с}} = 84{,}8$ кН.

Длина стержня в результате защемления обоих концов остается при изменении температуры неизменной. Следовательно, удлинение стержня в результате повышения температуры должно равняться полученному упругому укорочению

$$\Delta l_t = \Delta l = l_{\text{м}} \alpha_{\text{м}} \Delta t + l_{\text{а}} \alpha_{\text{а}} \Delta t + l_{\text{с}} \alpha_{\text{с}} \Delta t = l(\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}) \Delta t,$$

где $\alpha_{\text{м}}$, $\alpha_{\text{а}}$, $\alpha_{\text{с}}$ – соответствующие коэффициенты теплового линейного расширения.

$$\Delta l = \Delta l_{\text{м}} = \Delta l_{\text{а}} = \Delta l_{\text{с}} = \frac{N l_{\text{м}}}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{N l_{\text{а}}}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{N l_{\text{с}}}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}} = Nl\left(\frac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right);$$

$$l(\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}) \Delta t = Nl\left(\frac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \frac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \frac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right),$$

откуда $\Delta t = \dfrac{N\left(\dfrac{1}{E_{\text{м}} A_{\text{м}}} + \dfrac{1}{E_{\text{а}} A_{\text{а}}} + \dfrac{1}{E_{\text{с}} A_{\text{с}}}\right)}{\alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{а}} + \alpha_{\text{с}}}.$

Подставим численные значения величин и произведем вычисления

$$\Delta t = \frac{84800\left[\dfrac{1}{1 \cdot 10^{11} \cdot 1963 \cdot 10^{-6}} + \dfrac{1}{0{,}7 \cdot 10^{11} \cdot 1257 \cdot 10^{-6}} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 707 \cdot 10^{-6}}\right]}{16{,}5 \cdot 10^{-6} + 25 \cdot 10^{-6} + 12{,}5 \cdot 10^{-6}} = 36^{\circ}.$$

Далее определим напряжения в поперечных сечениях стержня при повышении температуры на 36°

$$\sigma_{\text{м}} = -\frac{N}{A_{\text{м}}} = -\frac{84800}{1963 \cdot 10^{-6}} = -43 \cdot 10^{6} \text{ Па} = -43 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{а}} = -\frac{N}{A_{\text{а}}} = -\frac{84800}{1257 \cdot 10^{-6}} = -67{,}5 \cdot 10^{6} \text{ Па} = -67{,}5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{с}} = -120 \text{ МПа}.$$

1.4. Задания для расчетов стержней с учетом собственного веса

Для стального бруса с учетом собственного веса и при продольной нагрузке F (табл. 1.1.) требуется по указанной схеме (табл. 1.2.):

1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине бруса.

2. Найти полное удлинение (укорочение) бруса для геометрических размеров, приведенных в табл. 1.1. Плотность стали ρ=7850 кг/см^3; ускорение силы тяжести g = 9,81 м/с^2, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

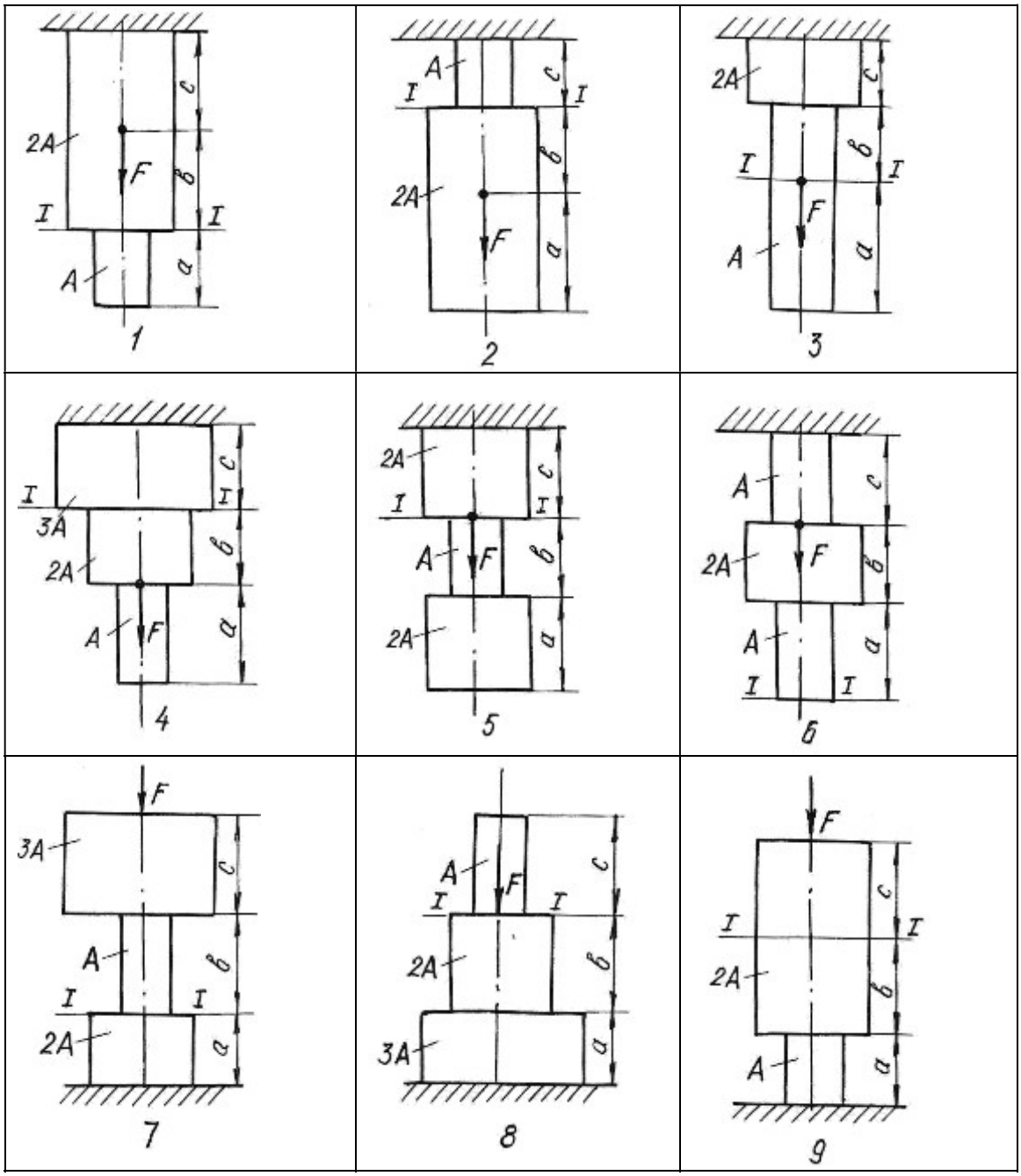
3. Определить перемещение сечений I-I.

Таблица 1.1

Номер варианта	a, м	b, м	c, м	F, кН	A, см²
1	1,5	1,0	2,0	30	20
2	1,0	1,5	2,0	40	30
3	2,0	1,0	2,0	50	40
4	2,0	1,0	1,5	60	18
5	2,0	1,5	1,5	20	24
6	1,5	1,0	2,0	40	28
7	1,5	1,0	1,0	50	30
8	1,0	1,5	2,0	50	32
9	1,5	1,0	1,5	60	12
10	2,0	1,0	1,5	70	14
11	1,0	2,0	1,0	20	15
12	2,0	2,0	1,0	40	18
13	1,0	1,5	1,0	30	20
14	1,4	1,0	1,0	40	24
15	1,0	3,0	1,0	50	28
16	1,0	2,0	1,0	40	30
17	1,2	1,0	2,4	70	32
18	2,0	1,5	2,0	60	20
19	2,6	1,0	1,7	60	18
20	2,0	1,0	1,5	50	22
21	1,5	1,8	1,4	40	15
22	2,0	1,0	1,4	30	16
23	1,2	1,2	1,2	20	20
24	1,5	1,0	2,0	10	16
25	1,4	2,0	1,0	40	18

Таблица 1.2

Расчетные схемы бруса



1.5. Задания для определения напряжений при плоском напряженном состоянии

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (рис. 1.11.). Показать на рисунке элемент и направления напряжений в соответствии с вариантом задания.

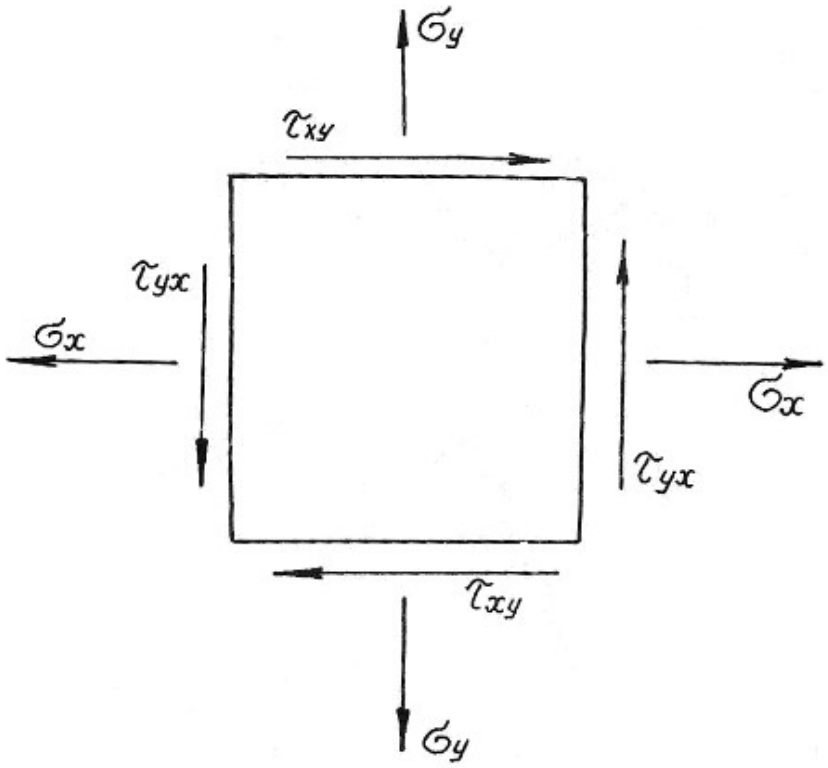


Рис. 1.11.

Требуется найти:

1. Главные напряжения и положение главных площадок.
2. Максимальные касательные напряжения.
3. Определить аналитически величины нормальных σ_α и касательных напряжений τ_α, действующих на площадках, нормаль к которым составляет угол α с горизонтальной осью x.

Данные приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Номер варианта	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа	α, град
1	40,0	-20,0	-10,0	30
2	12,0	10,0	-80,0	-45
3	-10,0	-14,0	-12,0	15
4	15,0	12,0	90,0	30
5	20,0	-40,0	80,0	15
6	-12,0	10,0	-80,0	45
7	20,0	-2,0	10,0	-30
8	80,0	10,0	-60,0	45
9	12,0	14,0	10,0	30
10	-14,0	-10,0	50,0	15
11	20,0	10,0	-80,0	-45
12	30,0	-50,0	-10,0	60
13	-25,0	10,0	50,0	15
14	16,0	80,0	10,0	30
15	18,0	-10,0	10,0	-30
16	22,0	12,0	-90,0	45
17	-16,0	-12,0	10,0	20
18	10,0	80,0	-60,0	-20
19	25,0	-25,0	10,0	30
20	-10,0	10,0	60,0	60
21	12,0	10,0	-60,0	20
22	18,0	-10,0	-12,0	45
23	-40,0	30,0	20,0	30
24	50,0	-60,0	10,0	-30
25	45,0	35,0	15,0	-45

1.6. Задания для расчета статически неопределимых стержневых систем

Для статически неопределимой системы, состоящей из жесткой невесомой балки и стальных стержней 1 и 2, соединенных с ней шарнирно (табл.1.4), требуется:

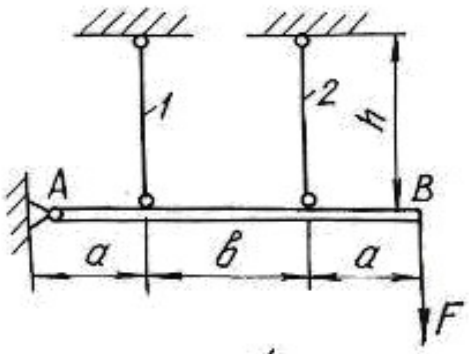
1. Определить усилия, возникающие в стержнях от действия нагрузки F;
2. Подобрать сечение стержней из двух равнобоких уголков каждое по ГОСТ 8509-93 (см. табл. П. 3).
3. Определить дополнительные усилия в стержнях конструкции, если стержень 2 изготовлен короче проектного размера на $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

При расчетах принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; σ_{adm}=160 МПа, остальные данные приведены в табл. 1.4. Расчетные схемы приведены в табл. 1.5.

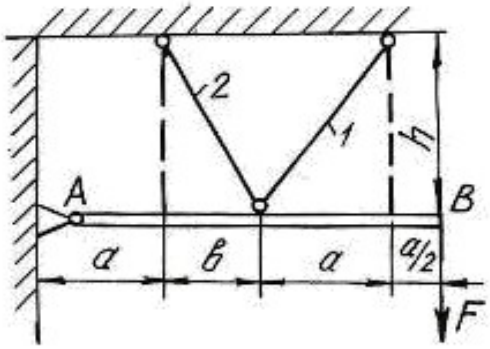
Таблица 1.4

Номер варианта	a, м	b, м	h, м	$A_2 : A_1$	F, кН
1	2,0	1,4	1,8	2,0	80
2	2,2	1,6	2,0	1,5	120
3	2,6	1,8	2,2	1,2	150
4	2,5	1,1	1,5	1,0	180
5	1,8	1,0	1,2	1,5	100
6	2,0	1,0	1,5	2,0	240
7	2,4	1,4	1,6	1,8	140
8	2,8	1,6	2,	2,0	120
9	1,6	1,2	1,5	1,5	100
10	2,4	1,4	1,6	1,8	180
11	3,0	2,0	2,0	1,5	260
12	2,4	1,8	2,2	2,0	320
13	1,8	1,4	1,2	1,5	400
14	2,0	1,5	1,3	1,2	360
15	1,5	1,5	2,0	1,5	400
16	1,0	0,9	1,5	1,1	340
17	1,1	1,3	1,8	1,8	250
18	1,5	1,2	2,0	2,0	120
19	0,9	0,6	3,0	1,4	170
20	0,8	0,7	2,3	1,6	210
21	1,2	1,7	1,3	1,3	200
22	1,3	1,4	0,8	1,7	90
23	2,0	2,0	2,0	0,9	110
24	2,0	1,1	1,0	0,8	130
25	1,5	1,6	0,8	0,7	280

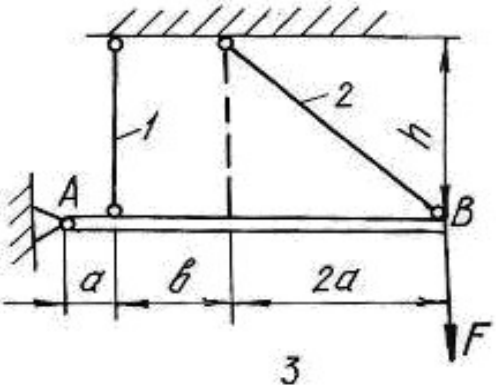
Таблица 1.5



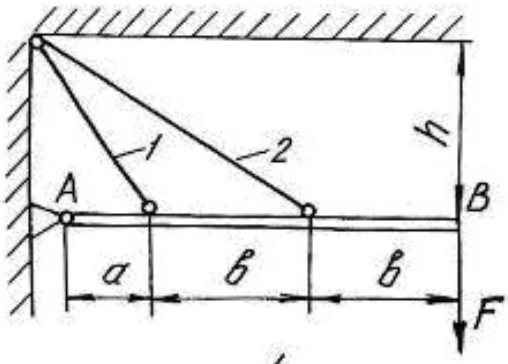
1



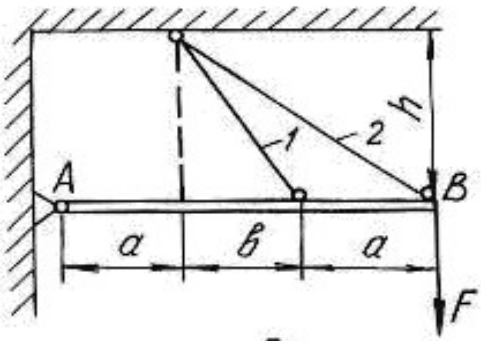
2



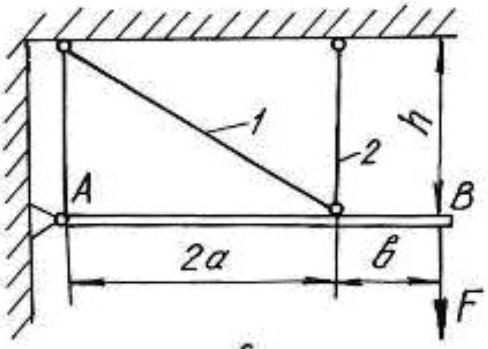
3



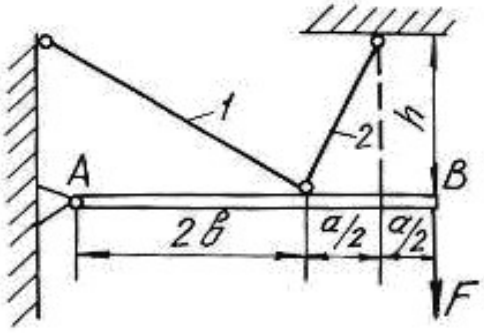
4



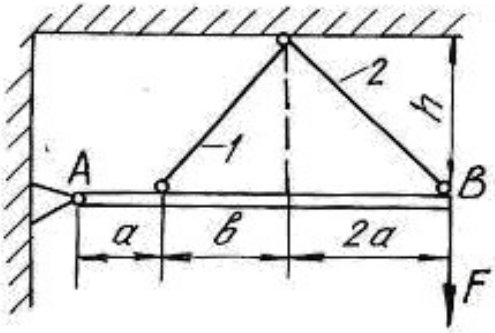
5



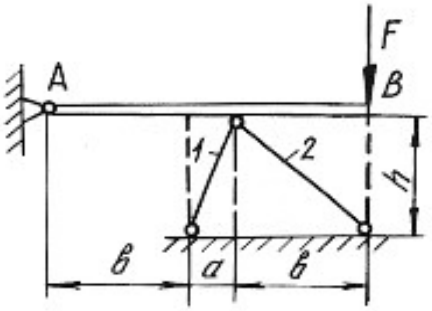
6



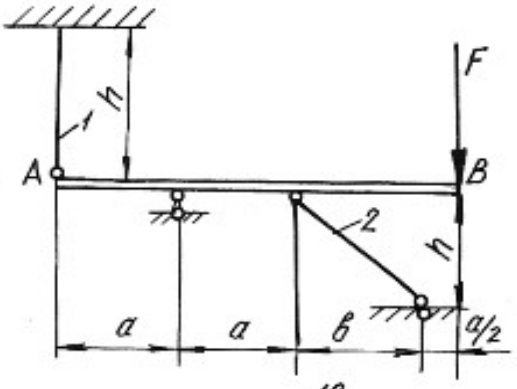
7



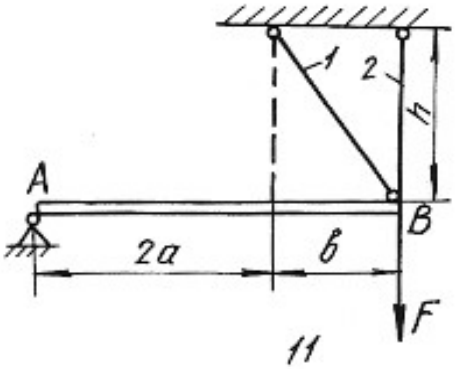
8



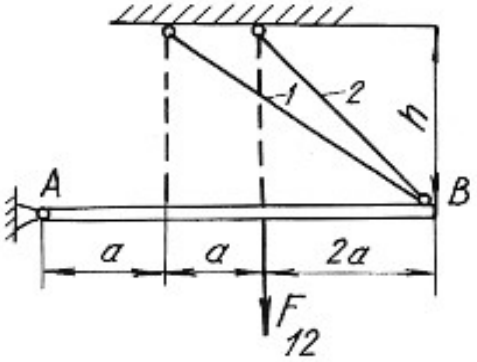
9



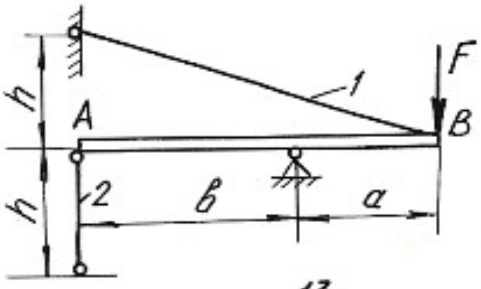
10



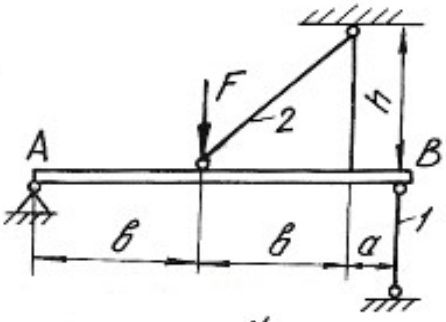
11



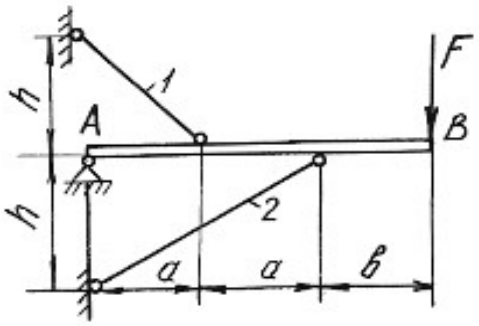
12



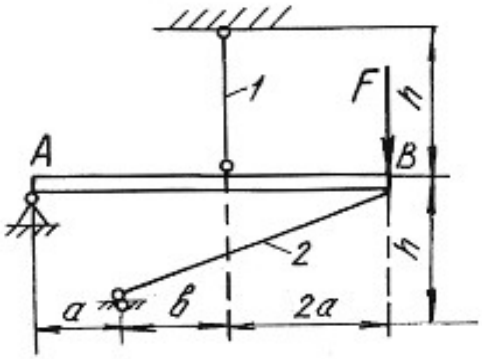
13



14



15



16

Глава 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Моментами инерции являются геометрические характеристики, отражающие заполнение веществом плоского поперечного сечения балки. Значения моментов инерции для стандартных поперечных сечений можно найти в любой литературе, список которой приведен в конце настоящего пособия. Моменты инерции относительно собственных осей простых фигур определяются по известным формулам.

Для прямоугольника

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \qquad J_y = \frac{hb^3}{12}; \qquad J_{xy} = 0, \tag{2.1}$$

где x, y – горизонтальная и вертикальная оси, проходящие через центр тяжести прямоугольника; b – ширина; h – высота прямоугольника.

Для круга

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}; \qquad J_{xy} = 0. \tag{2.2}$$

Для треугольника

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \qquad J_y = \frac{hb^3}{36}; \qquad J_{xy} = \pm\frac{b^2h^2}{72}. \tag{2.3}$$

При этом знак центробежного момента определяется следующим образом. Треугольник вычерчивается в масштабе, через его центр проводятся оси, которые делят треугольник на четыре четверти. В первой и третьей четвертях площадь положительна, в остальных – отрицательна. Если суммарная положительная площадь будет по размеру больше отрицательной, то знак центробежного момента будет тоже положительный и наоборот.

Осевые моменты инерции прокатных профилей выписываются из таблицы (сортамента проката) в соответствии с номером профиля. Для равнополочных уголков центробежный момент относительно горизонтальной и вертикальной осей определяется по формуле:

$$J_{xy} = \left(J_{x_0} - J_{y_0}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} + J_{x_0y_0}\cos 2\alpha, \tag{2.4}$$

где x_0, y_0 – оси, проходящие через центр тяжести уголка под углом 45° к горизонтальной и вертикальной осям уголка.

При этом нужно помнить, что угол поворота осей *xy* относительно осей x_0y_0 будет отрицательным. Если уголок неравнополочный, то его условно разбивают на два прямоугольника, находят их центры тяжести, и центробежный

момент относительно собственных осей всего уголка определяют по формуле центробежных моментов инерции относительно параллельных осей.

Для составного сечения необходимо определять положение центра тяжести, разбив его на простейшие части (прямоугольник, круг, треугольник, двутавр, швеллер, уголок). Формулы для определения центра тяжести имеют вид:

$$x_c = \frac{\sum S_{x_{\text{вр}}}}{\sum A} = \frac{\left(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots, + A_n x_n\right)}{\left(A_1 + A_2 + \ldots, + A_n\right)};$$
$$y_c = \frac{\sum S_{y_{\text{вр}}}}{\sum A} = \frac{\left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots, + A_n y_n\right)}{\left(A_1 + A_2 + \ldots, + A_n\right)}, \qquad (2.5)$$

где $S_{y_{\text{вр}}}, S_{x_{\text{вр}}}$ – статические моменты площадей простых фигур относительно временных осей; A_1, A_2,…, A_n – площади простых фигур; x_n, y_n – координаты центров тяжести простых фигур во временных осях.

Главными моментами инерции плоской фигуры (сечения) называют моменты инерции, определяемые относительно главных центральных осей сечения. Такие оси должны отвечать следующим требованиям:

1) они проходят через центр тяжести сечения;

2) относительно этих осей наблюдаются экстремальные значения моментов инерции (главные моменты инерции);

3) центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю.

В формулы напряжений, содержащие моменты инерции, необходимо всегда подставлять значения главных моментов инерции. Определение главных моментов инерции проводится в следующем порядке.

1. Заданное поперечное сечение сложной конфигурации вычерчивается в выбранном масштабе с указанием всех размеров.

2. Сечение условно разбивается на простейшие фигуры (прямоугольник, круг, треугольник, двутавр, швеллер, уголок).

3. Определяется положение центра тяжести площадки каждой простой фигуры и из этих центров проводятся собственные оси координат.

4. Для всей фигуры сечения проводятся временные (вспомогательные) оси координат $(x_{\text{вр}}, y_{\text{вр}})$ параллельно собственным осям отдельных фигур (желательно, чтобы временные оси проходили через центры тяжести простых фигур, что ведет к уменьшению объема вычислений).

5. Определяются координаты центра тяжести площади всего сечения по формулам (2.5).

6. Центр тяжести сечения наносится на чертеж, и из него проводятся опорные оси координат (x_c, y_c) параллельно временным осям.

7. Определяются осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно опорных осей. При этом используют формулы для определения моментов инерции относительно параллельных осей:

$$J_{x_c} = \left(J_{x_1} + A_1 a_1^2\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_2} + A_2 a_2^2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{x_n} + A_n a_n^2\right)^{n};$$

$$J_{y_c} = \left(J_{y_1} + A_1 b_1^2\right)^{\text{I}} + \left(J_{y_2} + A_2 b_2^2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{y_n} + A_n b_n^2\right)^{n}; \qquad (2.6)$$

$$J_{x_c y_c} = \left(J_{x_1 y_1} + A_1 a_1 b_1\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_2 y_2} + A_2 a_2 b_2\right)^{\text{II}} + \ldots + \left(J_{x_n y_n} + A_n a_n b_n\right)^{n},$$

где $J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_n}$ и $J_{y_1}, J_{y_2}, \ldots, J_{y_n}$ – моменты инерции простых фигур относительно собственных осей; $J_{x_1 y_1}, J_{x_2 y_2}, \ldots, J_{x_n y_n}$ – центробежные моменты инерции простых фигур относительно собственных осей; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – расстояния между собственными осями $x_1, x_2 \ldots, x_n$ простых фигур и центральной осью x_c; $b_1, b_2 \ldots, b_n$ – расстояния между собственными осями $y_1, y_2 \ldots, y_n$ простых фигур и центральной осью y_c (с учетом знаков).

8. Определяется положение главных осей инерции по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}. \qquad (2.7)$$

Положительным считается угол α_0, откладываемый против хода часовой стрелки.

9. Проводятся главные оси на чертеже под углом α_0 по отношению к центральным осям.

10. Определяются главные моменты инерции по формулам:

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \\ J_{y_0} &= J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

или

$$J_{\max/\min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)^2 + 4 \cdot J_{x_c y_c}^2}. \qquad (2.9)$$

11. Проводится проверка правильности решения задачи в двух вариантах:

а) суммы главных моментов инерции и моментов инерции относительно центральных осей должны быть равны

$$J_{x_0} + J_{y_0} = \left(J_{x_c} + J_{y_c}\right) \pm 5\ \%; \qquad (2.10)$$

б) центробежный момент инерции относительно главных осей должен быть равен нулю

$$J_{x_0y_0} = \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{x_cy_c}\cos 2\alpha_0 = 0\,. \qquad (2.11)$$

Пример 2.1.

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнополочного уголка (рис. 2.1), требуется:

1) определить положение центра тяжести;

2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести;

3) определить направления главных центральных осей x_0 и y_0;

4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;

5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

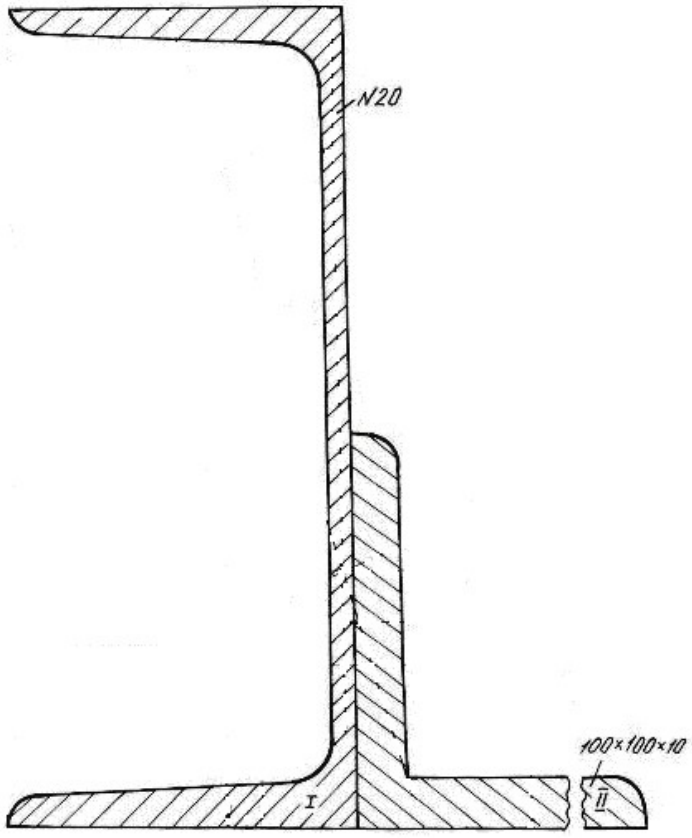


Рис. 2.1.

Решение.

1. Проводим временные оси $x_{вр}$ и $y_{вр}$ через левый нижний угол сечения (рис. 2.2) и разбиваем сечение на две фигуры: швеллер I и уголок II.

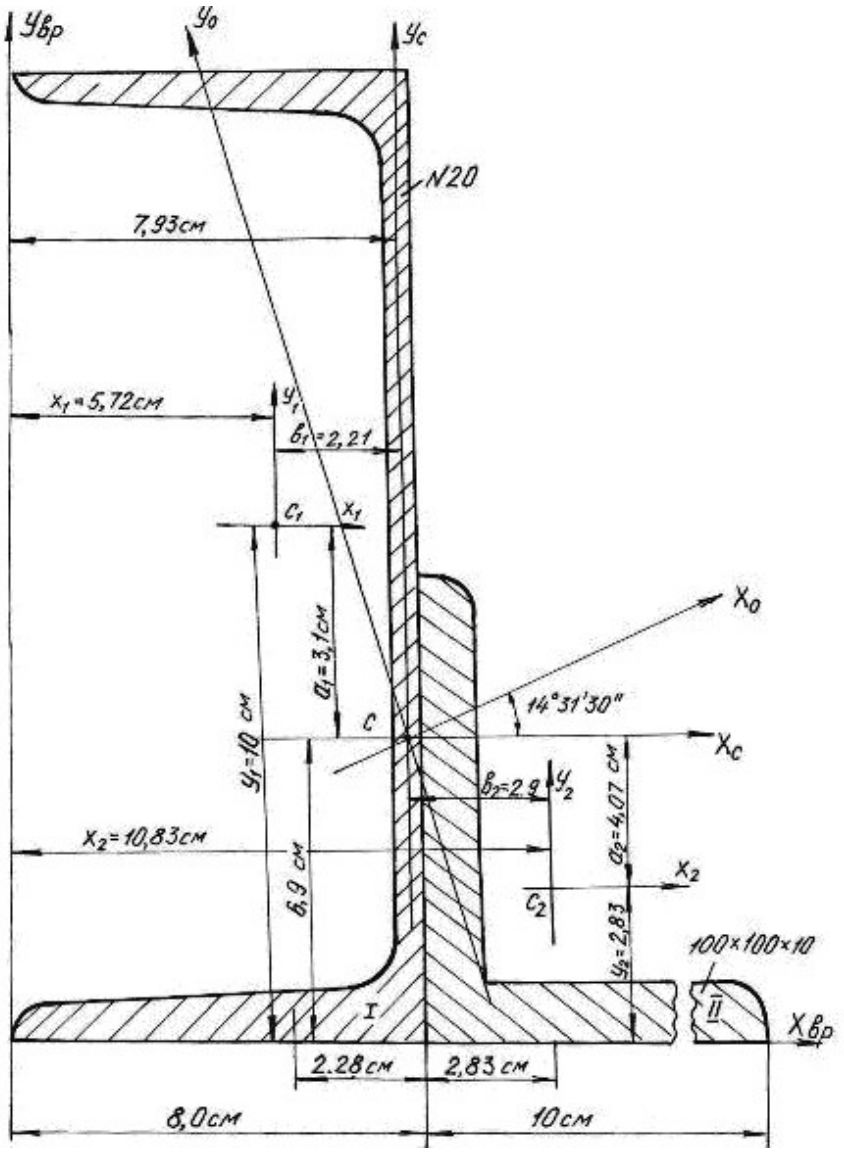


Рис. 2.2.

Основные данные фигур выписываем из таблиц сортамента проката.

Швеллер № 20а: $A_1 = 25{,}2$ см^2, $Z_0 = 2{,}28$ см, $J_{x_1} = 1670$ см^4, $J_{y_1} = 139$ см^4.

Уголок 100×100×10 мм: $A_2 = 19{,}2$ см^2, $Z_0 = 2{,}83$ см, $J_{x_0} = 284$ см^4, $J_{y_0} = 74{,}1$ см^4, $J_{x_2} = J_{y_2} = 179$ см^4 (рис. 2.3).

Координаты центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{(A_1 x_1 + A_2 x_2)}{(A_1 + A_2)} = \frac{25{,}2 \cdot 5{,}72 + 19{,}2 \cdot 10{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 7{,}93 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\left(A_1 y_1 + A_2 y_2\right)}{\left(A_1 + A_2\right)} = \frac{25{,}2 \cdot 10 + 19{,}2 \cdot 2{,}83}{25{,}2 + 19{,}2} = 6{,}9 \text{ см};$$

где A_1, A_2 – площади поперечного сечения первой и второй фигур; x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты центров тяжести фигур относительно временных осей.

По значениям координат центра тяжести фигуры наносим точку C (см. рис. 2.2.) и проводим центральные оси x_c и y_c параллельно временным осям.

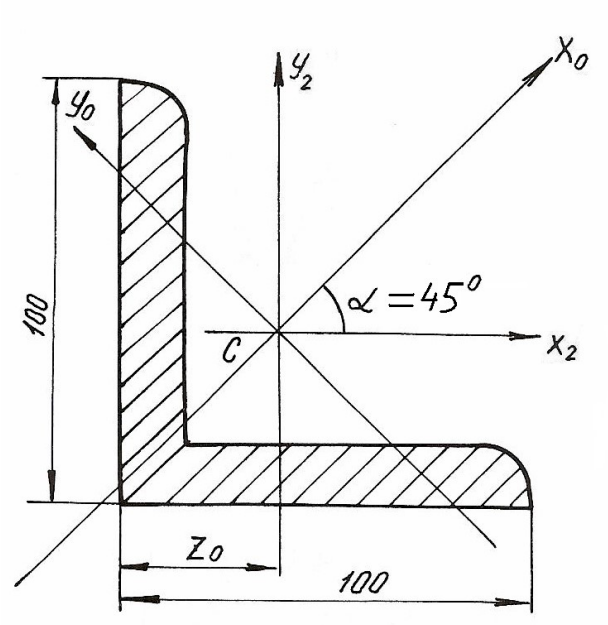


Рис. 2.3.

2. Вычисляем осевые моменты инерции относительно центральных опорных осей

$$J_{x_C} = \left(J_{x_C}\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_C}\right)^{\text{II}} = \left(J_{x_1} + A_1 a_1^2\right) + \left(J_{x_2} + A_2 a_2^2\right) =$$

$$= \left[1670 + 25{,}2\left(3{,}1\right)^2\right] + \left[179 + 19{,}2\left(-4{,}07\right)^2\right] = 2409 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = \left(J_{y_C}\right)^{\text{I}} + \left(J_{y_C}\right)^{\text{II}} = \left(J_{y_1} + A_1 b_1^2\right) + \left(J_{y_2} + A_2 b_2^2\right) =$$

$$= \left[139 + 25{,}2\left(\text{-}2{,}21\right)^2\right] + \left[179 + 19{,}2\left(2{,}9\right)^2\right] = 603 \text{ см}^4.$$

3. Вычисляем центробежный момент инерции сечения относительно осей x_c и y_c. Центробежный момент швеллера относительно собственных осей равен 0, так как его оси проходят через центр тяжести и одна из них является осью симметрии.

Для уголка собственные центральные оси, т. е. оси x_2 и y_2 не являются главными, поэтому центробежный момент уголка в этой системе координат не равен 0. Вычислим его.

Из таблиц сортамента

$$J_{x_0} = 284 \text{ см}^4; \quad J_{y_0} = 74{,}1 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2y_2} = \frac{\left(J_{x_0} - J_{y_0}\right)}{2}\sin 2\alpha + J_{x_0y_0}\cos 2\alpha = \frac{284 - 74{,}1}{2}(-1) + 0 = -104{,}95 \text{ см}^4.$$

Угол α отрицателен, так как поворот осей x_0, y_0 направлен по ходу часовой стрелки.

$$J_{x_cy_c} = \left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{I}} + \left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{II}} = (J_{x_1y_1} + A_1a_1b_1) + (J_{x_2y_2} + A_2a_2b_2) =$$

$$= [0 + 25{,}2(3{,}1)(-2{,}21)] + [-104{,}95 + 19{,}2(-4{,}07)(2{,}90)] =$$

$$= -172{,}0 - 104{,}95 - 225 = -501{,}95 \text{ см}^4.$$

Угол поворота главных осей инерции

$$\text{tg}2\alpha_0 = \frac{2J_{x_cy_c}}{\left(J_{y_c} - J_{x_c}\right)} = \frac{2(-501{,}95)}{(603 - 2409)} = 0{,}555, \quad 2\alpha_0 = 29^{\text{o}}03', \quad \alpha_0 = 14^{\text{o}}31'30''.$$

4. Откладываем полученный угол против хода часовой стрелки от центральных осей x_c, y_c и проводим главные оси инерции x_0, y_0 (см. рис. 2.2).

5. Определяем главные моменты инерции

$$J_{x_0} = J_{x_c}\cos^2\alpha_0 + J_{y_c}\sin^2\alpha_0 - J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0 = 2536 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_{x_c}\sin^2\alpha_0 + J_{y_c}\cos^2\alpha_0 + J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0 = 476 \text{ см}^4.$$

Так как $J_{x_c} > J_{y_c}$, то $J_{\max}$ будет относительно оси x_0, а $J_{\min}$ будет относительно оси y_0.

Проверка.

а) Согласно формуле (2.10)

$$J_{x_c} + J_{y_c} = \left(J_{x_0} + J_{y_0}\right) \pm 5\ \%;$$

$$(2409 + 603)\cdot 10^{-8} = (2536 + 476)\cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$3012\cdot 10^{-8} \text{ см}^4 = 3012\cdot 10^{-8} \text{ см}^4.$$

б) Согласно формуле (2.11)

$$J_{x_0y_0} = \frac{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{x_cy_c}\cos 2\alpha_0 = 0;$$

$$J_{x_0y_0} = \frac{(2409-603)}{2}\sin 2\left(14^\circ 31' 30''\right) - 501{,}95 \cdot \cos 2\left(14^\circ 31' 30''\right) = 0;$$
$$J_{x_0y_0} = 438 - 438 = 0.$$

Проверка показывает, что главные моменты инерции определены правильно.

6. Вычерчиваем поперечное сечение в масштабе 1:2 с указанием всех осей и размеров.

Пример 2.2.

Для заданного поперечного сечения (рис. 2.4) определить положение центра тяжести, найти положение главных осей инерции и значения главных моментов инерции.

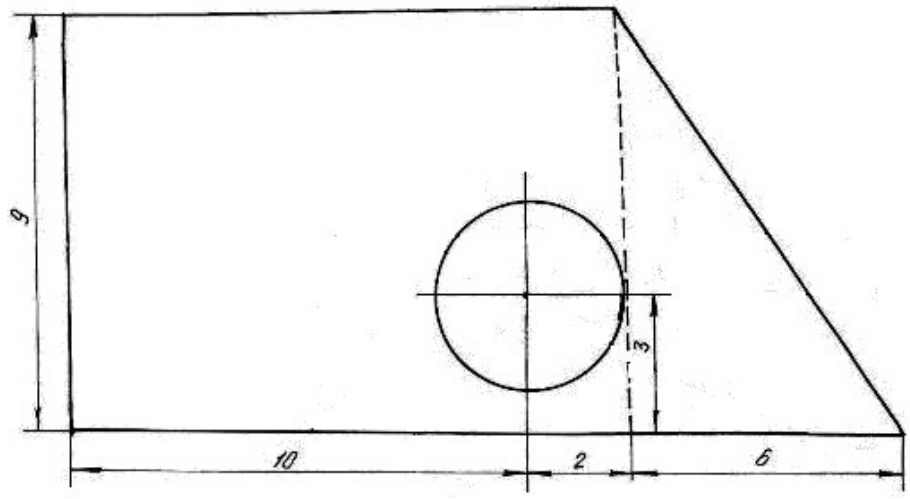


Рис. 2.4.

Решение.

1. Чертим поперечное сечение в масштабе 1:1;

2. Разбиваем сечение на простейшие фигуры: I – прямоугольник, II – прямоугольный треугольник, III – круг;

3. Проводим временные оси $x_{вр}$ и $y_{вр}$ через левый нижний угол заданного сечения (рис. 2.5).

4. Обозначив на рисунке центры тяжести простейших фигур, находим их координаты относительно временных осей и определяем площади фигур

$$C_1\begin{cases} x_1 = 6 \text{ см}; \\ y_1 = 4{,}5 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_2\begin{cases} x_2 = 14 \text{ см}; \\ y_2 = 3 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_3\begin{cases} x_3 = 10 \text{ см}; \\ y_3 = 3 \text{ см}. \end{cases}$$

$$A_1 = 108 \text{ см}^2, \qquad A_2 = 27 \text{ см}^2, \qquad A_3 = 12{,}56 \text{ см}^2.$$

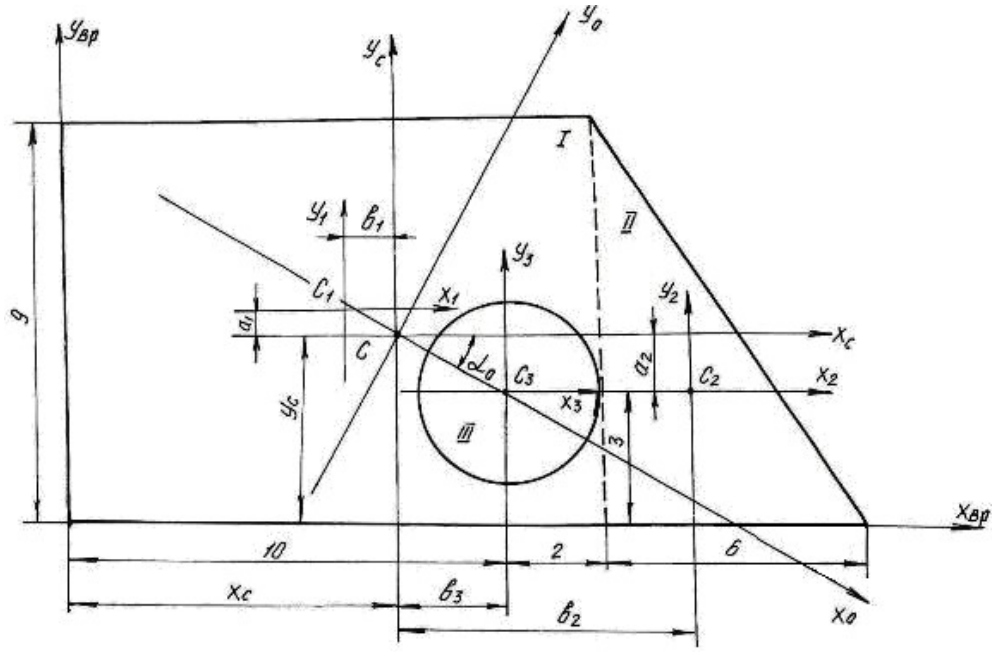


Рис. 2.5.

5. Определим координаты центра тяжести сечения

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{6 \cdot 108 + 14 \cdot 27 - 10 \cdot 12{,}56}{108 + 27 - 12{,}56} = 7{,}35 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{4{,}5 \cdot 108 + 3 \cdot 27 - 3 \cdot 12{,}56}{108 + 27 - 12{,}56} = 4{,}32 \text{ см}.$$

Обозначим на рис. 2.5 положение центра тяжести C (x_c =7,35 см; y_c =4,32 см) и проведем центральные оси x_c и y_c параллельно временным осям.

6. Определим координаты центров тяжести простейших фигур $(C_1,\ C_2,\ C_3)$ относительно центральных осей x_c и y_c

$$C_1 \begin{cases} b_1 = x_1 - x_C = 1{,}35 \text{ см} \\ a_1 = y_1 - y_C = 0{,}18 \text{ см} \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} b_2 = x_2 - x_C = 6{,}65 \text{ см} \\ a_2 = y_2 - y_C = -1{,}32 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} b_3 = x_3 - x_C = 2{,}65 \text{ см} \\ a_3 = y_3 - y_C = -1{,}32 \text{ см}. \end{cases}$$

7. Определим моменты инерции простейших фигур относительно их центральных осей

Для прямоугольника:

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 9^3}{12} = 729 \text{ см}^4;\ J_{y_1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{12^3 \cdot 9}{12} = 1296 \text{ см}^4;\ J_{x_1 y_1} = 0.$$

Для треугольника:

$$J_{x_2}=\frac{bh^3}{36}=\frac{6\cdot 9^3}{36}=121{,}5\text{ см}^4;\qquad J_{y_2}=\frac{b^3h}{36}=\frac{6^3\cdot 9}{36}=54\text{ см}^4;$$

$$J_{x_2y_2}=-\frac{b^2h^2}{72}=-\frac{6^2\cdot 9^2}{72}=-40{,}5\text{ см}^4,$$

знак минус указывает на преобладание суммарной отрицательной части площади поперечного сечения.

Для круга:

$$J_{x_3}=J_{y_3}=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{3{,}14\cdot 4^4}{64}=12{,}56\text{ см}^4;\qquad J_{x_3y_3}=0.$$

8. Определим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей x_c и y_c, используя формулы моментов инерции относительно параллельных осей

$$J_{x_c}=\left(J_{x_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{x_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{x_c}\right)^{\text{III}}=\left(J_{x_1}+A_1a_1^2\right)+\left(J_{x_2}+A_2a_2^2\right)-\left(J_{x_3}+A_3a_3^2\right)=$$

$$=\left(729+0{,}18^2\cdot 108\right)+\left(121{,}5+(-1{,}32)^2\cdot 27\right)-\left(12{,}56+(-1{,}32)^2\cdot 12{,}56\right)=866{,}6\text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}=\left(J_{y_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{y_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{y_c}\right)^{\text{III}}=\left(J_{y_1}+A_1b_1^2\right)+\left(J_{y_2}+A_2b_2^2\right)-\left(J_{y_3}+A_3b_3^2\right)=$$

$$=\left(1296+(-1{,}35)^2\cdot 108\right)++\left(54+6{,}65^2\cdot 27\right)-\left(12{,}56+2{,}65^2\cdot 12{,}56\right)=1093{,}32\text{ см}^4;$$

$$J_{x_cy_c}=\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{I}}+\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{II}}-\left(J_{x_cy_c}\right)^{\text{III}}=$$

$$=\left(J_{x_1y_1}+a_1b_1A_1\right)+\left(J_{x_2y_2}+a_2b_2A_2\right)-\left(J_{x_3y_3}+a_3b_3A_3\right)=$$

$$=\left(0+0{,}18\cdot(-1{,}35)\cdot 108\right)+\left(-40{,}5+(-1{,}32)\cdot 6{,}65\cdot 27\right)-\left(0+(-1{,}32)\cdot 2{,}56\cdot 12{,}56\right)=$$

$$=-259{,}82\text{ см}^4.$$

Получили, что центробежный момент сечения $J_{x_cy_c}\neq 0$, следовательно, оси x_c и y_c не являются главными осями инерции.

9. Найдём положение главных осей инерции по формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha_0=\frac{-2\cdot J_{x_cy_c}}{J_{x_c}-J_{y_c}}=-2{,}29;\text{ откуда }\ 2\cdot\alpha_0=-66^{\text{o}}20';\ \ \alpha_0=-33^{\text{o}}10'.$$

10. Проводим главные оси инерции x_0, y_0 под углом α_0 относительно центральных осей и определяем значение главных моментов инерции

$$J_{x_0}=J_{x_c}\cos^2\alpha_0+J_{y_c}\sin^2\alpha_0-J_{x_cy_c}\sin 2\alpha_0=696{,}48\text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_{x_c}\sin^2\alpha_0 + J_{y_c}\cos^2\alpha_0 + J_{x_c y_c}\sin 2\alpha_0 = 1263{,}42 \text{ см}^4.$$

$$J_{\min} = J_{x_0} = 696{,}48 \text{ см}^4; \qquad J_{\max} = J_{y_0} = 1263{,}42 \text{ см}^4.$$

Проверка.

а) Согласно формуле (2.10)

$$J_{x_c} + J_{y_c} = \left(J_{x_0} + J_{y_0}\right) \pm 5\%;$$

$$\left(866{,}6 + 1093{,}32\right)\cdot 10^{-8} = \left(696{,}48 + 1263{,}42\right)\cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$1959{,}9\cdot 10^{-8}\text{см}^4 = 1959{,}9\cdot 10^{-8}\text{см}^4.$$

б) Согласно формуле (2.11)

$$J_{x_0 y_0} = \frac{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{x_c y_c}\cos 2\alpha_0 = 0;$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{\left(866{,}6 - 1093{,}32\right)}{2}\sin 2\left(-33^{\circ}10'\right) + \left(-259{,}82\right)\cos 2\left(-33^{\circ}10'\right) = 0;$$

$$J_{x_0 y_0} = 104 - 104 = 0.$$

Проверка показывает, что главные моменты инерции определены правильно.

2.1. Задания для определения главных моментов инерции

а) Для заданного поперечного сечения (табл. 2.1), состоящего из швеллера и равнополочного уголка или из швеллера и двутавра (табл. 2.2), требуется:

1. Определить положение центра тяжести;
2. Найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x_C и y_C, проходящих через центр тяжести сечения;
3. Определить положение главных осей инерции x_0 и y_0;
4. Найти главные моменты инерции относительно главных осей x_0 и y_0;
5. Вычертить сечение в выбранном масштабе и указать на нем все размеры в числах и все оси;
6. Сделать проверочные расчеты.

б) Для заданного поперечного сечения (табл. 2.3) требуется:

1. Определить положение центра тяжести;
2. Найти осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x_C и y_C, проходящих через центр тяжести сечения;
3. Определить положение главных осей инерции x_0 и y_0;

4. Найти главные моменты инерции относительно главных осей x_0 и y_0;

5. Сделать проверочные расчеты.

Таблица 2.1

Номер варианта	Тип сечения	Швеллер №	Равнобокий уголок, мм	Двутавр №
1	I	14	80×80×8	12
2	II	16	80×80×6	14
3	III	18	90×90×8	16
4	IV	20	90×90×7	18
5	V	22	90×90×6	20а
6	VI	24	100×100×8	20
7	VII	27	100×100×10	22а
8	VIII	30	100×100×12	22
9	IX	33	125×125×10	24а
10	X	36	125×125×12	24

Таблица 2.2

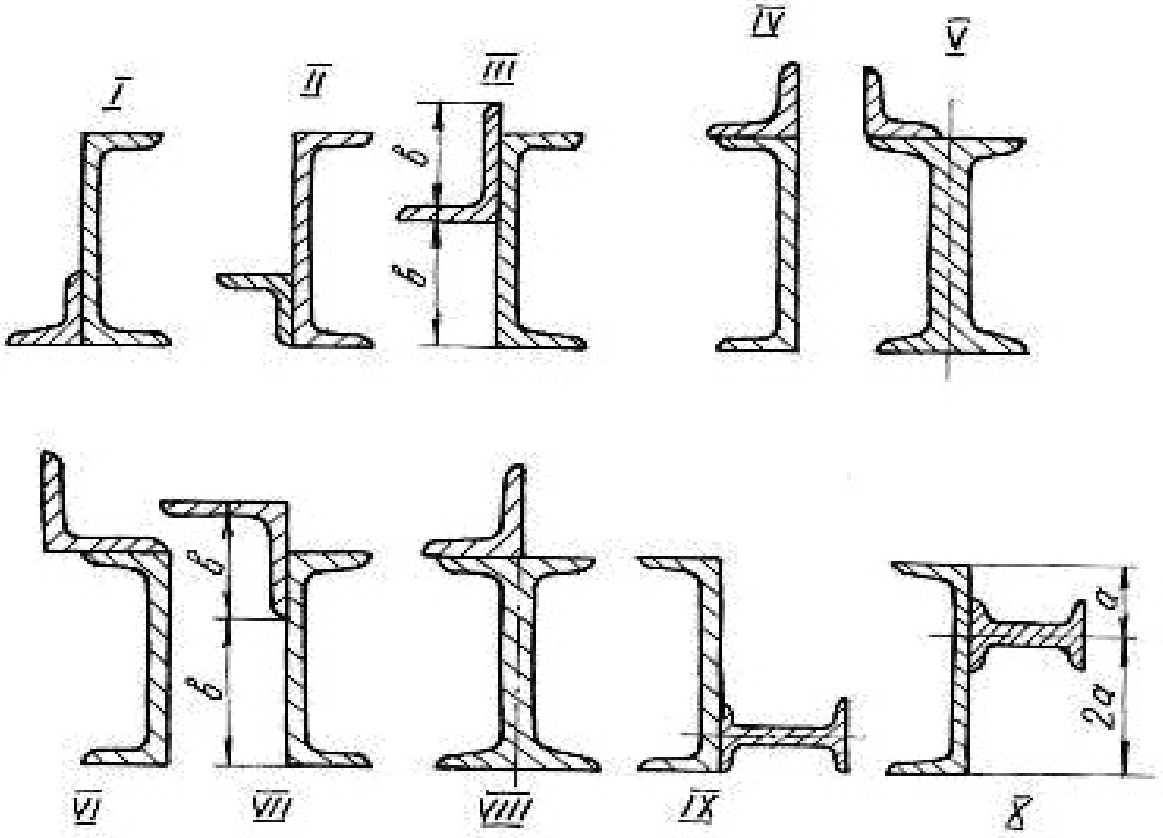
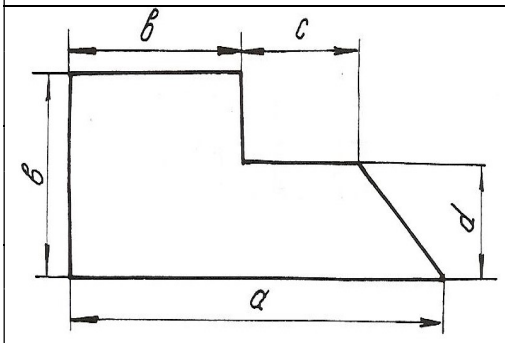
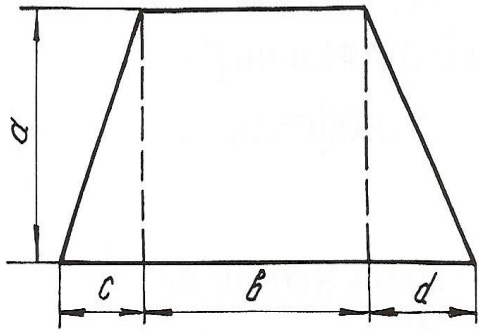
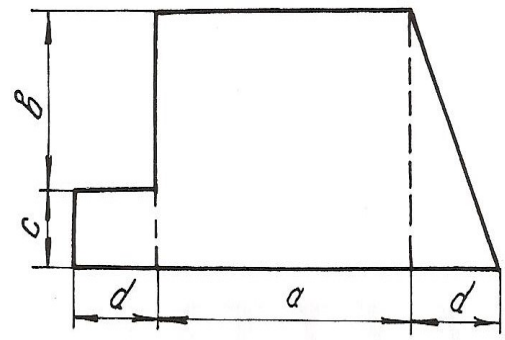
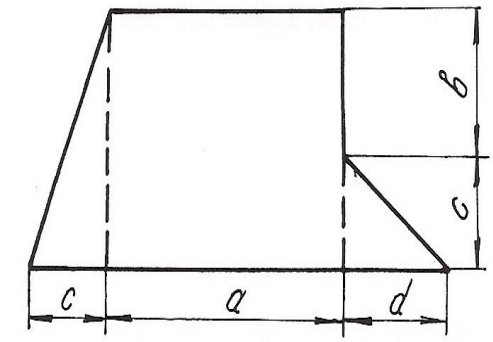
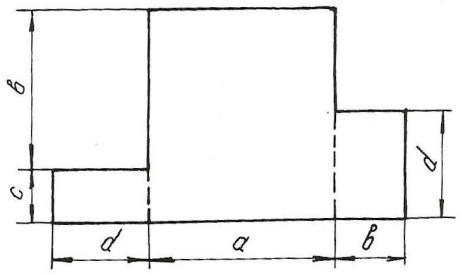
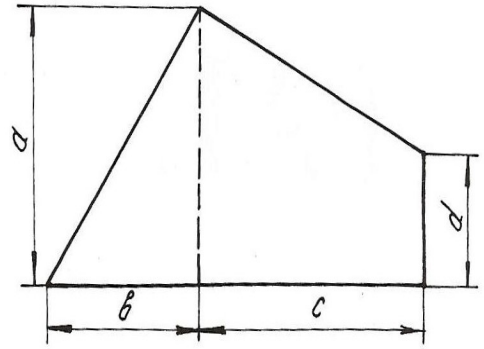
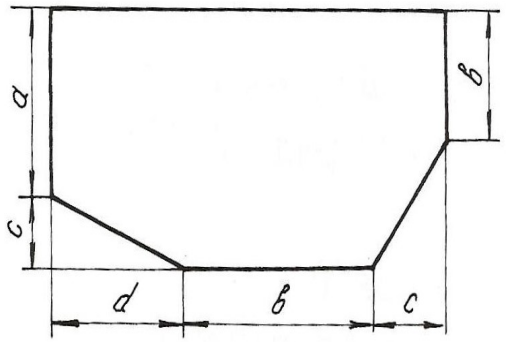
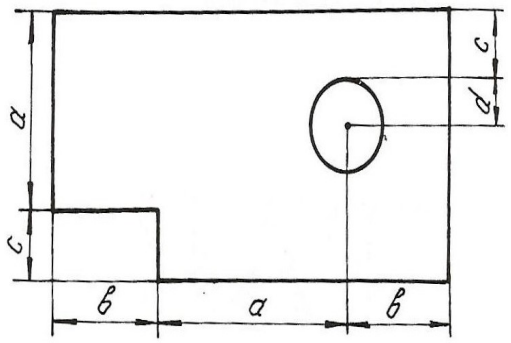


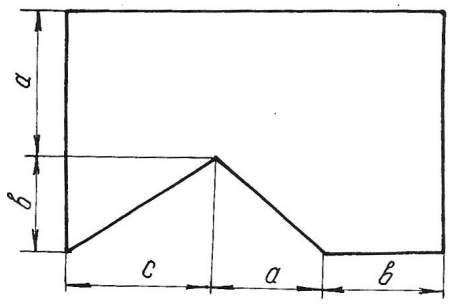
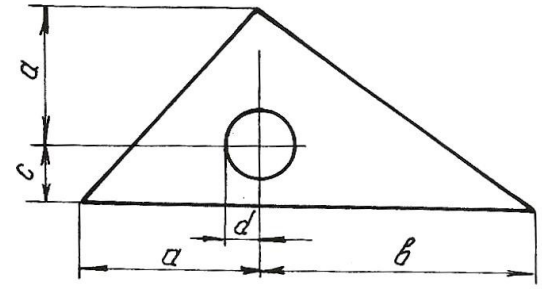
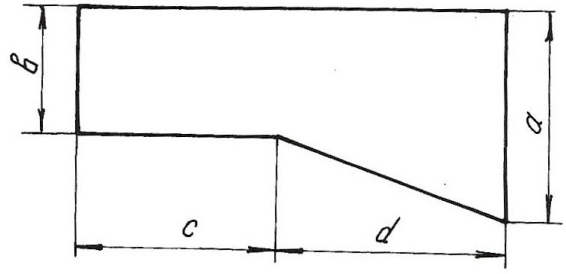
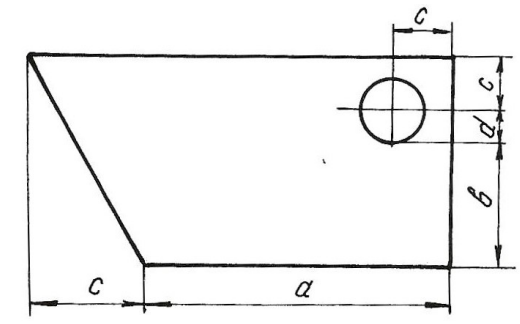
Таблица 2.3

Вид поперечного сечения	Номер варианта	*a*, см	*в*, см	*c*, см	*d*, см
	1	12	6	4	2
	2	16	10	2	6
	3	9	6	1	3
	4	6	9	3	5
	5	7	8	6	9
	6	8	6	4	6
	7	9	5	2	3
	8	6	4	3	4
	9	5	2	4	4
	10	4	3	2	5
	11	7	5	3	2
	12	9	4	4	6
	13	7	5	3	3
	14	6	3	6	4
	15	4	2	5	6

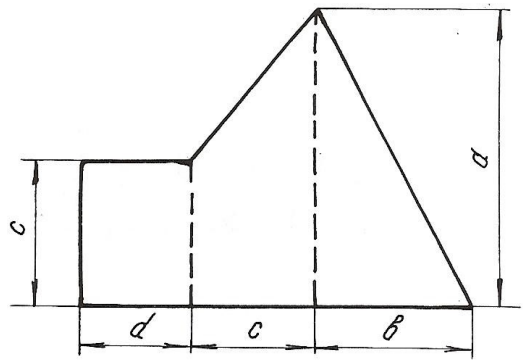
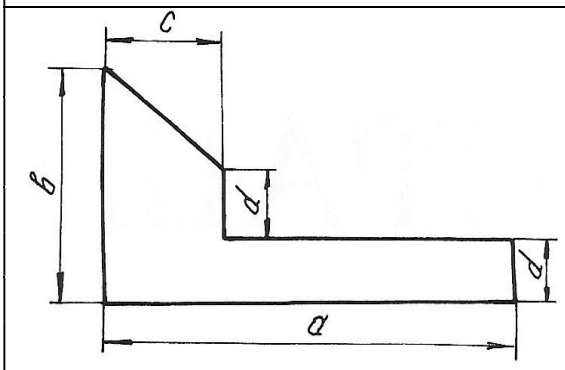
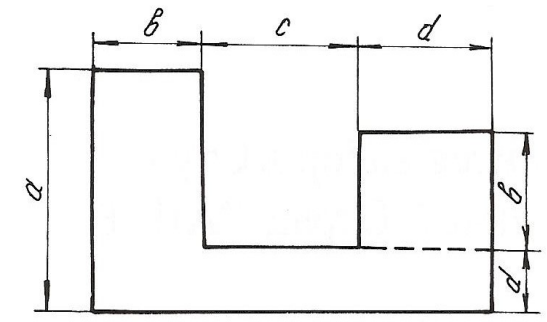
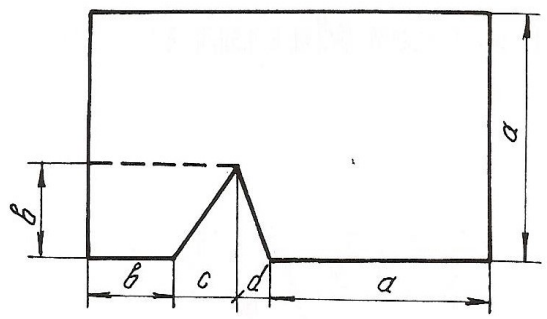
Продолжение табл. 2.3

Вид поперечного сечения	Номер варианта	*a*, см	*в*, см	*c*, см	*d*, см
	16	12	9	4	6
	17	18	12	5	8
	18	14	6	6	7
	19	15	19	3	4
	20	12	10	6	6
	21	16	8	9	4
	22	20	9	8	12
	23	14	14	12	6
	24	24	20	10	4
	25	10	8	4	3
	26	11	9	6	6
	27	13	12	5	9
	28	15	10	5	6
	29	8	4	8	12
	30	8	5	2	2
	31	9	4	1	2
	32	6	9	3	3
	33	10	6	4	1
	34	12	8	5	1

Продолжение табл. 2.3

Вид поперечного сечения	Номер варианта	*a*, см	*в*, см	*c*, см	*d*, см
	35	6	6	3	4
	36	9	4	6	5
	37	10	6	12	9
	38	12	9	10	6
	39	12	10	3	1
	40	10	12	3	2
	41	9	12	3	1
	42	8	10	3	2
	43	20	12	4	4
	44	18	10	3	5
	45	12	9	5	6
	46	15	12	6	4
	47	10	4	3	1
	48	12	6	4	2
	49	14	5	5	3
	50	16	6	4	1

Окончание табл. 2.3

Вид поперечного сечения	Номер варианта	*a*, см	*в*, см	*c*, см	*d*, см
	51	12	10	6	3
	52	18	12	4	9
	53	20	14	8	6
	54	22	16	10	4
	55	30	12	12	4
	56	24	14	10	6
	57	18	16	9	5
	58	12	10	8	3
	59	9	6	2	4
	60	6	5	4	2
	61	10	8	3	8
	62	12	9	4	1
	63	20	10	6	3
	64	12	6	4	3
	65	15	9	3	6
	66	18	10	9	6

Глава 3
ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ ВАЛА

Деформация кручения возникает при действии на вал пар сил, действующих в плоскостях, перпендикулярных к его продольной оси. При расчетах вала на кручение выполняются следующие условия прочности и жесткости:

$$\tau_{max} \le \tau_{adm}, \quad \varphi_{max} \le \varphi_{adm},$$

где τ_{max} – максимальное касательное напряжение, φ_{max} – максимальный угол закручивания вала.

Для определения максимального касательного напряжения и максимального угла закручивания необходимо иметь представление о том, как изменяется величина крутящего момента по длине вала. Текущие значения крутящих моментов определяются графиками их изменения, называемыми эпюрами. Вал по длине делится на участки вертикальными линиями, проведенными через те сечения, где приложены моменты пар сил. На каждом участке крутящий момент имеет постоянное значение и равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси, приложенных слева от сечения, проведенного условно на данном участке, или же приложенных справа от этого сечения.

Правило знаков: момент в сечении считается положительным, если, смотря на торцевое крайнее правое сечение вала, момент направлен по ходу часовой стрелки. Параллельно продольной оси вала проводится нулевая линия, от которой положительные моменты откладываются вверх, отрицательные – вниз в выбранном масштабе. Эпюра штрихуется вертикальными линиями. Диаметр сечения вала определяется из условия прочности

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \le \tau_{adm}, \tag{3.1}$$

где T_{max} – максимальный крутящий момент из эпюры T; $W_p = \dfrac{J_p}{d/2} = \dfrac{\left(\pi d^4/32\right)}{\left(d/2\right)} = \dfrac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления кручению поперечного сечения.

Исходя из условия прочности $\dfrac{\pi d^3}{16} \ge \dfrac{T_{max}}{\tau_{adm}}$, можно определить диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T_{max}}{\left(\pi\tau_{adm}\right)}} \quad . \tag{3.2}$$

Углы закручивания вала на отдельных участках определяются по формуле:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p}, \tag{3.3}$$

где T − крутящий момент на рассматриваемом участке вала, взятый из эпюры моментов; l - длина участка вала; GJ_p − жесткость вала при кручении; G − модуль сдвига; $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ − полярный момент инерции поперечного сечения вала.

При построении эпюры углов закручивания вала необходимо помнить, что полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания вала на отдельных участках. Значения углов закручивания в промежуточных сечениях определяются по формуле:

$$\alpha_{\text{прав}} = \alpha_{\text{лев}} + \varphi, \tag{3.4}$$

где $\alpha_{\text{лев}}$ − суммарный угол закручивания всех участков, которые находятся слева от рассматриваемого участка; φ − угол закручивания на данном участке.

Для определения максимального относительного угла закручивания определяют углы для каждого участка по формуле:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}, \tag{3.5}$$

где l − длина рассматриваемого участка.

Пример 3.1.

К стальному валу приложены три известных момента: T_1=1100 Н·м, T_2=1400 Н·м, T_3= 1800 Н·м, a = 1,1 м, b = 1,4 м, c = 1,8 м (рис. 3.1).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента X угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении τ_{adm} определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшего большого, соответственно равного 30, 35,40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания.

5. Найти наибольший относительный угол закручивания и проверить вал на жесткость при $\theta_{\text{adm}} = 1{,}5\,\text{град}/\text{м}$.

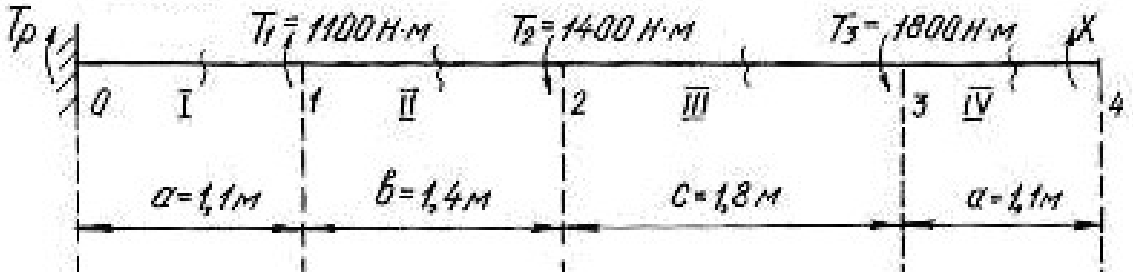


Рис. 3.1.

Решение.

1. Задача является статически неопределимой, так как невозможно определить из одного уравнения равновесия два неизвестных момента T_p и X. Для решения составим одно уравнение статики и одно уравнение совместности деформации. Уравнение статики представляем в виде уравнения моментов относительно продольной оси вала

$$\sum T = T_p + T_1 - T_2 - T_3 + X = 0 .$$

Угол закручивания правого концевого сечения может быть выражен как алгебраическая сумма взаимных углов закручивания сечений отдельных участков под действием каждого из моментов в отдельности

$$\sum \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 ,$$

где φ_1 – угол закручивания вала на участке 0-1 под действием момента T_1; φ_2 – угол закручивания вала на участке под действием момента T_2; φ_3 – угол закручивания вала на участке под действием момента T_3; φ_4 – угол закручивания вала на участке 3-4 под действием неизвестного момента *X*.

При этом

$$\varphi_1 = \frac{T_1 a}{GJ_p}; \quad \varphi_2 = -\frac{T_2 (a+b)}{GJ_p}; \quad \varphi_3 = -\frac{T_3 (a+b+c)}{GJ_p}; \quad \varphi_4 = \frac{X(2a+b+c)}{GJ_p}.$$

$$\sum \varphi = \frac{T_1 a}{GJ_p} - \frac{T_2 (a+b)}{GJ_p} - \frac{T_3 (a+b+c)}{GJ_p} + \frac{X(2a+b+c)}{GJ_p} =$$

$$= T_1 a - T_2 (a+b) - T_3 (a+b+c) + X(2a+b+c) = 0.$$

Подставив данные, получим

$$1100 \cdot 1{,}1 - 1400 \cdot 2{,}5 - 1800 \cdot 4{,}3 + X \cdot 5{,}4 = 0 ;$$

откуда $X = \dfrac{-1210 + 3500 + 7740}{5{,}4} = 1857$ Н·м.

Реактивный момент находим из уравнения статики:

$$T_p = -T_1 + T_2 + T_3 - X;$$

$$T_p = -1100 + 1400 + 1800 - 1857 = 243 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Для построения эпюры моментов (рис. 3.2) определяем значения мо-

ментов методом сечений.

В сечении IV-IV $T_{IV} = 1857$ Н·м.

В сечении III-III $T_{III} = 1857 - 1800 = 57$ Н·м.

В сечении II-II $T_{II} = 1857 - 1800 - 1400 = -1343$ Н·м.

В сечении I-I $T_{I} = 1857 - 1800 - 1400 + 1100 = -243$ Н·м.

3. Найдем полярный момент инерции сечения

$$W_P \geq \frac{|T_{max}|}{\tau_{adm}} \geq \frac{1857}{60 \cdot 10^6} \geq 30{,}95 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где $\tau_{adm} = 60$ МПа; $T_{max} = 1857$ Нм.

Из соотношения $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ найдем диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 30{,}95 \cdot 10^{-6}}{3{,}14}} = 5{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 55 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала равным 60 мм.

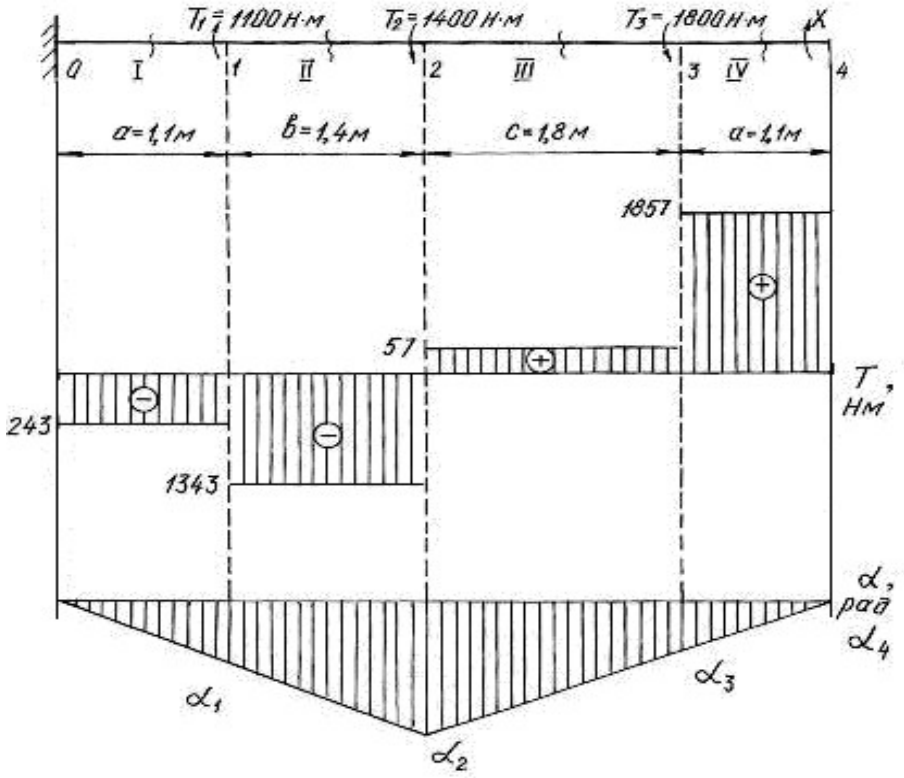


Рис. 3.2.

4. Углы закручивания вала на участках находим по формуле (3.3). Для этого сначала найдем J_p

$$J_p = \frac{3{,}14 \cdot 6^4}{32} = 127{,}2 \text{ см}^4 = 127{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$\varphi_{\text{I}} = \frac{T_{\text{I}} a}{G J_p} = -\frac{243 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}1}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0026 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{II}} = \frac{T_{\text{II}} b}{G J_p} = -\frac{-1343 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}4}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0185 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{III}} = \frac{T_{\text{III}} c}{G J_p} = \frac{57 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}8}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0010 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\text{IV}} = \frac{T_{\text{IV}} a}{G J_p} = \frac{1857 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}1}{8 \cdot 10^4 \cdot 127{,}2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0200 \text{ рад}.$$

В месте жёсткой заделки в сечении 0 вал неподвижен. По формуле (3.4), находим угол закручивания вала в сечениях 1, 2, 3, 4:

$\alpha_1 = \alpha_0 + \varphi_{\text{I}} = 0 - 0{,}0026$ рад;

$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi_{\text{II}} = -0{,}0026 - 0{,}0185 = -0{,}0211$ рад;

$\alpha_3 = \alpha_2 + \varphi_{\text{III}} = -0{,}0211 + 0{,}001 = -0{,}0201$ рад;

$\alpha_4 = \alpha_3 + \varphi_{\text{IV}} = -0{,}0201 + 0{,}02 = -0{,}0001 \approx 0$ рад.

Строим эпюру углов закручивания (см. рис.3.2). Относительный угол закручивания на каждом участке можно определить по формуле (3.5):

$$\theta_{\text{I}} = \frac{\varphi_{\text{I}}}{1{,}1} = -\frac{0{,}0026}{1{,}1} = -0{,}0023 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{II}} = \frac{\varphi_{\text{II}}}{1{,}4} = -\frac{0{,}0185}{1{,}4} = -0{,}0132 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{III}} = \frac{\varphi_{\text{III}}}{1{,}8} = \frac{0{,}0010}{1{,}8} = 0{,}0006 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{\text{IV}} = \frac{\varphi_{\text{IV}}}{1{,}1} = \frac{0{,}0200}{1{,}1} = 0{,}0182 \text{ рад/м}.$$

5. Наибольшим является относительный угол закручивания на участке 3-4

$$\theta_{\max} = 0{,}0182 \text{ рад/м} = 0{,}0182 \frac{180^\circ}{\pi} = 1{,}04 \text{ град/м}.$$

Таким образом, $\theta_{\max} = 1{,}04$ град/м $< \theta_{\text{adm}} = 1{,}5$ град/м, т. е. условие жесткости выполняется.

Пример 3.2.

Шкив двухколодочного тормоза крана, имеющий диаметр $D = 300$ мм, жестко крепится на стальном валу диаметром $d = 30$ мм (рис. 3.3). Определить наибольшие напряжения кручения в сечении вала, если сила нажатия на колодки тормозного шкива Q = 820 Н, коэффициент трения скольжения между колодками и шкивом $f = 0{,}4$. Определить угол закручивания вала, если $l = 400$ мм.

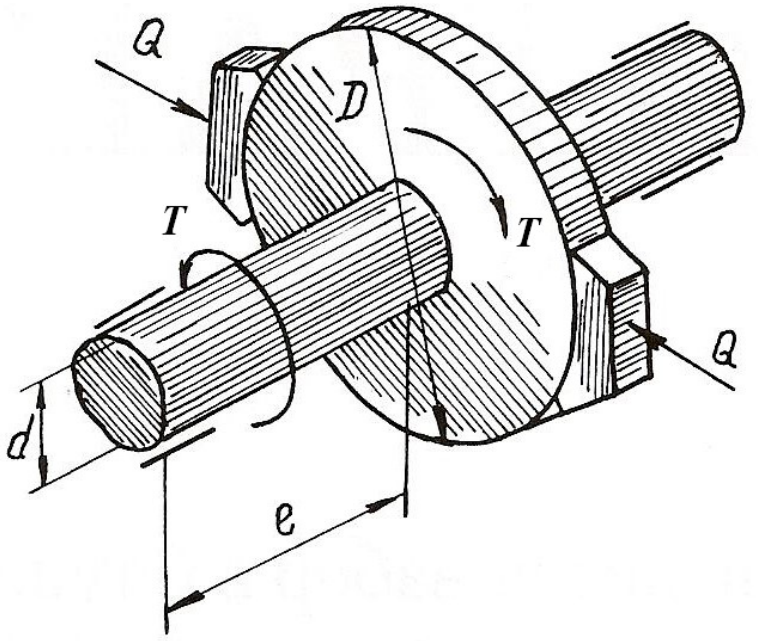


Рис. 3.3.

Решение.

Окружное усилие на тормозном шкиве равно силе трения, возникающей между колодками и шкивом

$$F = Qf = 820 \cdot 0{,}4 = 328 \text{ Н}.$$

Крутящий момент на тормозном шкиве

$$T = FD = 328 \cdot 30 \cdot 10^{-2} = 98{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции сечения вала равны

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16}\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^3 = 5{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32}\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^4 = 7{,}96 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Наибольшее касательное напряжение в сечении определяем по формуле (3.1)

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_P} = \frac{98,4}{5,3 \cdot 10^{-6}} = 18,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,5 \text{ МПа}.$$

Угол закручивания вала тормозного шкива

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{98,4 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{-10} \cdot 7,96 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,36^\circ,$$

следовательно $\varphi = 22'$.

Пример 3.3.

К стальному валу, оба конца которого защемлены (рис. 3.4, *а*), приложен крутящий момент $T = 440$ Н·м. Определить реактивные моменты в опорах A и B и построить эпюру крутящих моментов при $l_1 = 0,2$ м, $l = 0,8$ м.

Решение.

Обозначим реактивные моменты в защемлении через T_A и T_B. Из статики знаем уравнение равновесия

$$-T_A + T - T_B = 0 \text{ или } T_A + T_B = T$$

Далее составим уравнение совместности деформаций. Для этого отбросим (мысленно) защемление правого конца вала и заменим его действием на вал неизвестным реактивным моментом T_B (рис. 3.4, *б*).

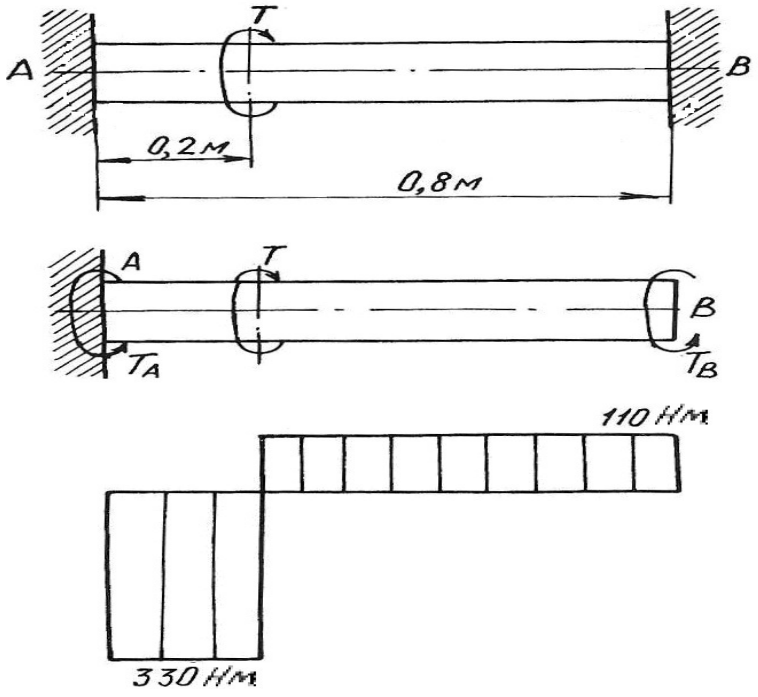


Рис. 3.4.

Величину момента T_B определим из условия, что угол закручивания правого крайнего сечения от действия моментов T и T_A равен нулю, так как это сечение вследствие защемления неподвижно. Угол закручивания правого освобожденного сечения вала на основе принципа независимости действия сил можно определить как сумму двух слагаемых

$$\varphi = \varphi' + \varphi'',$$

где φ' и φ'' – углы закручивания правого освобожденного сечения вала, найденные отдельно от моментов T и T_B, при этом $\varphi' = \dfrac{Tl_1}{GJ_p}$; $\varphi'' = -\dfrac{T_B l}{GJ_p}$.

Знак минус в выражении φ'' взят потому, что моменты T и T_B противоположны по направлению.

Полный угол закручивания правого сечения равен нулю, поэтому

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{Tl_1}{GJ_p} - \frac{T_B l}{GJ_p} = 0,$$

откуда $T_B = \dfrac{Tl_1}{l} = \dfrac{440 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = 110$ Н·м.

Из уравнения статики определим момент T_A

$$T_A = T - T_B = 440 - 110 = 330 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 3.4, *в*.

3.1. Задания для расчета валов на кручение

К стальному валу приложены три известных момента $T_1,\ T_2,\ T_3$.

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента X угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении τ_{adm} определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания, найти наибольший относительный угол закручивания и проверить вал на жесткость при $\theta_{adm} = 1{,}5$ град/м.

Данные для расчета приведены на рис. 3.5 и в табл. 3.1.

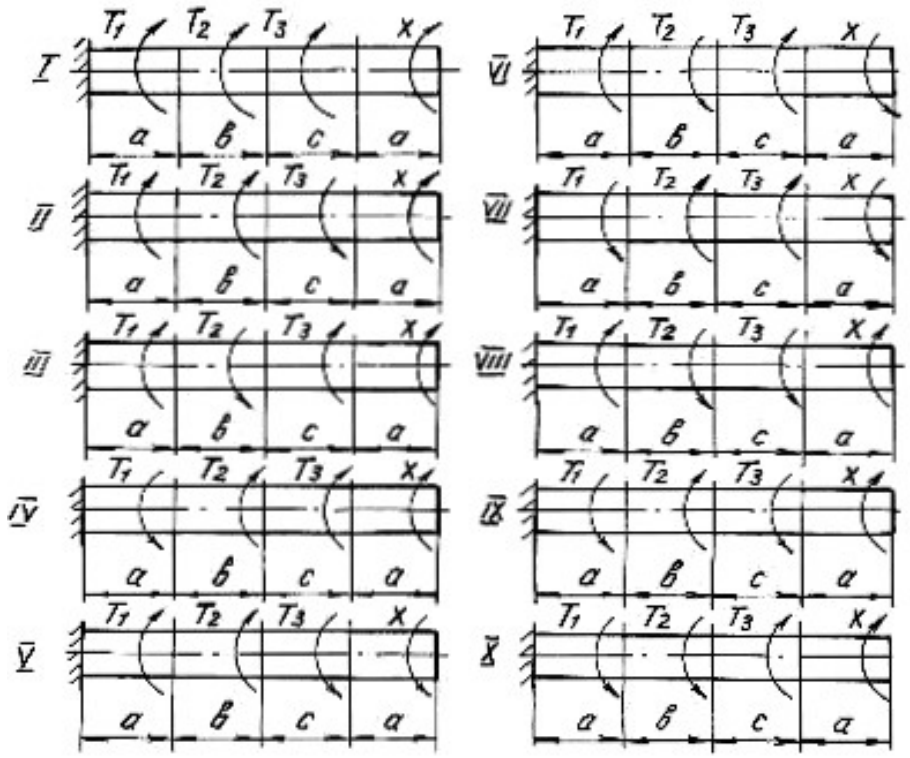


Рис. 3.5.

Таблица 3.1

Номер варианта	Номер схемы	Расстояние, м			Момент, Н·м			τ_{adm}, МПа
		a	*b*	*c*	T_1	T_2	T_3	
1	I	1,1	1,2	1,1	1100	1000	1200	35
2	II	1,2	1,3	1,2	1200	1100	1000	40
3	III	1,3	1,4	1,3	1300	1200	1100	45
4	IV	1,4	1,5	1,4	1400	1300	1200	50
5	V	1,5	1,6	1,5	1500	1400	1300	55
6	VI	1,6	1,7	1,6	1600	600	1500	60
7	VII	1,7	1,8	1,7	1700	700	1600	65
8	VIII	1,8	1,9	1,8	1800	800	1700	70
9	IX	1,9	2,0	1,9	1900	900	1800	75
10	X	2,0	2,1	2,0	2000	1000	2100	80

Глава 4
ДЕФОРМАЦИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА БАЛОК

Деформация поперечного изгиба может возникнуть от любых нагрузок, если линии действия этих нагрузок находятся в плоскости, проходящей через продольную ось балки. Если в такой плоскости располагается одна из главных осей инерции поперечного сечения, то возникает деформация плоского изгиба. От действия внешних нагрузок в поперечных сечениях балок возникают внутренние силовые факторы – поперечные силы и изгибающие моменты. Для их нахождения пользуемся методом сечений и, изучая равновесие сил, приводим внешние нагрузки к центру тяжести поперечного сечения.

Поперечная сила Q_x в любом сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения, на ось, перпендикулярную к продольной оси балки.

Изгибающий момент M_x в любом сечении равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих с одной стороны от рассматриваемого сечения балки, относительно центра тяжести сечения.

Правило знаков для Q_x и M_x:

1) поперечная сила считается положительной, если она сдвигает левую часть балки от сечения вверх, а правую часть балки вниз;

2) изгибающий момент в сечении считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз; при изгибе балки выпуклостью вверх изгибающий момент считается отрицательным.

Уравновесить момент внешних сил может только момент внутренних сил упругости, который образован силами, направленными нормально к сечению балки. Поперечная сила может быть уравновешена силой, которая является равнодействующей внутренних сил упругости, расположенных в плоскости сечения балки.

Таким образом, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях балок, зависят от величины изгибающих моментов в этих сечениях, а касательные напряжения – от величины поперечных сил в этих сечениях. Эту зависимость в общем виде можно записать

$$\sigma = f_1(M_x); \quad \tau = f_2(Q_x)$$

Таким образом, для того, чтобы определить напряжения в поперечных сечениях, необходимо знать законы изменения Q_x и M_x по длине балок. Для этого строят два графика, называемых эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов.

Порядок построения эпюр сводится к следующему:

1. Заданная балка вычерчивается в выбранном масштабе с указанием размеров и нагрузок;

2. С помощью уравнений равновесия статики определяются реакции опор с обязательной последующей проверкой;

3. Балка разбивается на отдельные участки. Каждый участок имеет свой закон изменения нагрузки;

4. Для каждого участка записываются уравнения для определения Q_x и M_x;

5. Вычисляют ординаты Q_x и M_x по составленным для отдельных участков уравнениям;

6. Строят в принятом масштабе эпюры Q_x и M_x.

Положительные значения найденных величин откладываются выше нулевой линии эпюры, а отрицательные − ниже ее.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов можно выполнить, применяя следующие контрольные правила для построения эпюр:

1. На концевых шарнирных опорах Q_x равны реакциям, а M_x равны нулю, если на опорах не приложены пары с моментами *M.*

2. На участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

3. На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра Q_x изменяется по закону прямой наклонной линии, а эпюра M_x − по закону квадратичной параболы. В том сечении, где эпюра Q_x пересекается с нулевой линией, на эпюре M_x наблюдается экстремальное значение момента (вершина параболы).

4. На участках, где приложена нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника, эпюра Q_x изменяется по закону квадратичной параболы, а эпюра M_x − по закону кубической параболы.

5. В тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы (включая и реакции), на эпюре Q_x наблюдаются скачки (перепады) на величину этих сил, а на эпюре M_x − переломы смежных линий.

6. В тех сечениях, где приложены пары с моментами *M*, на эпюре M_x наблюдаются скачки на величину этих моментов.

7. На свободном конце консольной балки поперечная сила Q_x равна нулю, если в этом месте не приложена сосредоточенная сила; и изгибающий момент M_x равен нулю, если в этом месте не приложена пара с моментом *M.*

8. В жесткой заделке консольной балки Q_x равна реакции, а изгибающий момент M_x равен моменту заделки.

Нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_{\text{н.о.}}} y, \qquad (4.1)$$

где M_x − изгибающий момент в сечении; $J_{\text{н.о.}}$ − момент инерции сечения относительно нейтральной оси поперечного сечения (нейтральная ось – это ось, в любой точке которой нормальные напряжения всегда равны нулю); y − расстояние до рассматриваемого волокна от нейтральной оси.

Касательные напряжения при изгибе могут быть определены по формуле Д. И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}}{J_{\text{н.о.}} b}, \tag{4.2}$$

где Q_x − поперечная сила в сечении; $S_{\text{н.о.}}$ − статический момент площади отсеченной части поперечного сечения выше уровня, на котором определяются касательные напряжения относительно нейтральной оси; b − ширина сечения на уровне, для которого определяются напряжения.

Подбор поперечного сечения балки производится на основании следующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{\text{adm}}, \tag{4.3}$$

откуда

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}}, \tag{4.4}$$

где $M_{\max}$ − максимальный изгибающий момент, взятый из эпюры M_x; $W_{\text{н.о.}}$ − момент сопротивления поперечного сечения балки изгибу относительно нейтральной оси; σ_{adm} − допускаемое нормальное напряжение для материала балки.

После подбора поперечного сечения производится полная проверка балки на прочность по следующим напряжениям:

а) по рабочим нормальным напряжениям

$$\sigma_{\text{раб.}} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{\text{adm}},$$

где $W_{\text{н.о.}}$ − момент сопротивления выбранного поперечного сечения.

б) по максимальным касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{н.о.}}}{J_{\text{н.о.}} b} \le \tau_{\text{adm}},$$

где $Q_{\max}$ − наибольшая поперечная сила, взятая из эпюры Q_x; $S_{\text{н.о.}}$ − статический момент части площади выбранного поперечного сечения, находящейся выше или ниже нейтральной оси, относительно этой оси; b − ширина сечения на уровне нейтральной оси; $J_{\text{н.о.}}$ − момент инерции выбранного сечения относительно нейтральной оси.

в) по главным напряжениям:

проверка проводится для балок, ширина сечений которых не постоянна. При этой проверке на основании эпюр выбирается опасное сечение балки, в котором одновременно значения Q_x и M_x большие. По формулам (4.1) и (4.2) для этого сечения строят эпюры нормальных и касательных напряжений, а затем определяют главные напряжения для характерных волокон сечения по его высоте, пользуясь формулой:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \tag{4.5}$$

Для стальных балок определяют расчётное (эквивалентное) напряжение для верхних (нижних), средних, переходных волокон (где резко изменяется ширина сечения) по III или IV теориям прочности.

Проверка прочности сводится к рассмотрению выполнения следующих условий прочности:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_{adm}, \tag{4.6}$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le \sigma_{adm}. \tag{4.7}$$

4.1. Расчет балки на прочность

Пример 4.1.

Для расчетной схемы с указанными размерами и нагрузками (рис. 4.1.) построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Подобрать поперечное сечение балки в двух вариантах:

а) прямоугольного профиля, полагая, что балка деревянная при $\sigma_{adm} = 10$ МПа; соотношение между размерами сечения принять равным $b:h = 1:2$;

б) двутаврового профиля (см. табл. П.1), материал сталь при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $\tau_{adm} = 96$ МПа.

в) провести полную проверку стальной балки на прочность.

Решение.

Определение опорных реакций.

Расчёт балки следует начинать с расстановки и определения величины опорных реакций. Величина и направление опорных реакций и реактивных моментов могут быть определены из решения уравнений равновесия. Для плоской

системы параллельных сил (поперечный плоский изгиб) условия равновесия описываются двумя уравнениями статики: $\sum M_A = 0;\ \sum M_B = 0$.

Рассматриваемая балка (см. рис. 4.1) имеет две шарнирные опоры. В опоре *A* (шарнирно-подвижной) возникает одна реакция R_A , в опоре *B* (шарнирно-неподвижной) направление реакции в общем случае неизвестно, поэтому разложим её на две составляющие: H_B − горизонтальную и R_B − вертикальную. Все нагрузки действуют перпендикулярно продольной оси балки, поэтому из уравнения проекций на горизонтальную ось *x* получается, что составляющая $H_B = 0$. Запишем уравнения моментов сил относительно опоры *B*

$$\sum M_B = 0, \qquad M_1 - R_A \cdot 5 + F \cdot 3 - M_2 + q \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 0 .$$

Решаем уравнение относительно R_A

$$R_A = \frac{M_1 + F \cdot 3 - M_2 + q \cdot 3 \cdot 0{,}5}{5} = \frac{30 + 60 \cdot 3 - 50 + 20 \cdot 1{,}5}{5} = 38 \text{ кН} .$$

Запишем уравнения моментов сил относительно опоры *A*

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 4{,}5 - M_2 - F \cdot 2 + M_1 = 0 .$$

Решаем уравнение относительно R_B

$$R_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 4{,}5 + M_2 + F \cdot 2 - M_1}{5} = \frac{20 \cdot 3 \cdot 4{,}5 + 50 + 60 \cdot 2 - 30}{5} = \frac{410}{5} = 82 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности вычисления опорных реакций составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось *y*:

$$\sum y = 0, \quad R_A - F - q \cdot 3 + R_B = 0; \quad 38 - 60 - 60 + 82 = 0, \ \ 120 - 120 = 0 .$$

Последнее уравнение обращается в тождество, следовательно, величина реакций и их направление определены правильно.

Если в результате решения уравнения реакция имеет отрицательное значение, то следует изменить направление реакции на противоположное и в дальнейших расчётах считать её положительной.

После определения опорных реакций можно перейти к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, предварительно разбив балку по длине на участки, в пределах которых закон изменения внешних нагрузок остаётся постоянным.

Границы участков располагаются в местах приложения моментов пар сил, сосредоточенных сил, начала или конца распределенной нагрузки.

Участки нумеруются слева или справа от концевых сечений балки. Рассчитываемая балка имеет пять участков I - V.

При составлении аналитических выражений для Q_x и M_x в пределах I-го участка проведём сечение с абсциссой x_1 и рассмотрим равновесие левой части консоли. На эту часть балки действует пара сил с моментом $M_1 = 30$ кН · м, поэтому поперечная сила $Q_\text{I} = 0$, а изгибающий момент в любом сечении будет постоянным $M_\text{I} = -M_1 = -30$ кН · м.

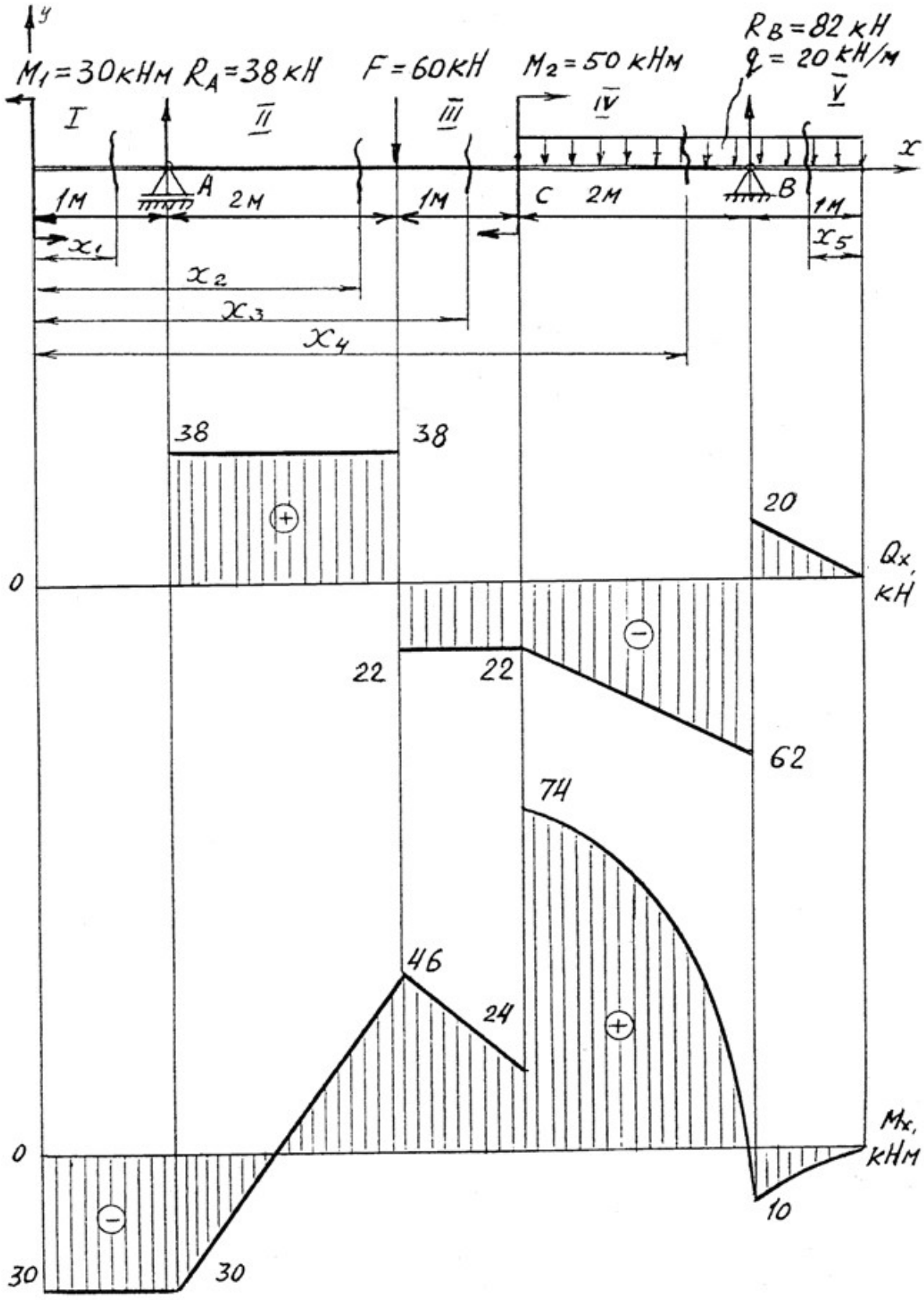

y
M1 = 30кНм
RA = 38 кН
F = 60кН
M2 = 50 кНм
RB = 82 кН
q = 20 кН/м
I
II
III
IV
V
x
A
B
C
1м
2м
1м
2м
1м
x1
x2
x3
x4
x5
38
38
20
0
Qx, кН
22
22
62
74
46
24
0
Mx, кНм
30
30
10

Рис. 4.1.

Для составления аналитических выражений Q_x и M_x в пределах II-го участка проводим сечение с абсциссой x_2 и рассматриваем равновесие левой части балки.

$Q_{\text{II}} = R_A = 38$ кН − поперечная сила в пределах II-го участка постоянна.

$M_{\text{II}} = -M + R_A(x_2 - 1)$.

Это уравнение прямой линии, для её построения достаточно определить ординаты изгибающего момента в двух точках (на концах участка):

при $x_2 = 1$ м $\quad M_{\text{II}} = -M_1 = -30$ кН·м;

при $x_2 = 3$ м $\quad M_{\text{II}} = -M_1 + R_A \cdot 2 = -30 + 76 = 46$ кН·м.

Для III-го участка (сечение с абсциссой x_3)

$Q_{\text{III}} = R_A - F = 38 - 60 = -22$ кН.

На этом участке поперечная сила не зависит от x_3 и поэтому на протяжении всего участка она не меняет своего значения.

$M_{\text{III}} = -M_1 + R_A(x_3 - 1) - F(x_3 - 3)$.

Это уравнение прямой линии.

Вычислим моменты при следующих значениях x_3:

при $x_3 = 3$ м $\quad M_{\text{III}} = -30 + 38 \cdot 2 = 46$ кН·м;

при $x_3 = 4$ м $\quad M_{\text{III}} = -30 + 38 \cdot 3 - 60 = 24$ кН·м.

Для IV-го участка (сечение с абсциссой x_4) поперечная сила равна:

$Q_{\text{IV}} = R_A - F - q(x_4 - 4)$.

Это уравнение прямой линии.

Вычислим ординаты в начале и в конце участка:

при $x_4 = 4$ м $\quad Q_{\text{IV}} = 38 - 60 = -22$ кН;

при $x_4 = 6$ м $\quad Q_{\text{IV}} = 38 - 60 - 40 = -62$ кН.

Уравнение изгибающих моментов для IV-го участка имеет вид

$$M_{\text{IV}} = -M_1 + R_A(x_4 - 1) - F(x_4 - 3) + M_2 - q\frac{(x_4 - 4)^2}{2}.$$

Это уравнение параболы.

Для её построения определяем моменты:

при $x_4 = 4$ м $\quad M_{\text{IV}} = -30 + 114 - 60 + 50 - 20 \cdot 0 = 74$ кН;

при $x_4 = 6$ м $\quad M_{\text{IV}} = -30 + 38 \cdot 5 - 60 \cdot 3 + 50 - 20 \cdot (4/2) = -10$ кН.

Прежде, чем составлять выражение поперечной силы и изгибающего момента для V-го участка, заметим, что их можно найти как из равновесия левой части, так и из равновесия отсеченной правой части. Каждый раз к выбору решения нужно подходить с точки зрения возможной простоты и наименьшего количества вычислений.

Для V-го участка (сечение с абсциссой x_5) поперечная сила равна

$Q_{\text{V}} = q x_5$.

Вычислим значения ординат:

при $x_5 = 0$ $\quad Q_{\text{V}} = 0$;

при $x_5 = 1$ м $\quad Q_{\text{V}} = 20$ кН.

Составим уравнение изгибающего момента для V-го участка:

$$M_{\text{V}} = -qx_5 \frac{x_5}{2} = -\frac{qx_5^2}{2}.$$

Получили уравнение параболы. Для её построения вычислим ординаты:

при $x_5 = 0$, $\quad M_{\text{V}} = 0$;

при $x_5 = 1$, $\quad M_{\text{V}} = -10$ кН·м.

При построении эпюр Q_x и M_x выбираем масштаб и откладываем положительные значения ординат эпюр от нулевой линии вверх, а отрицательные вниз (см. рис. 4.1). После построения эпюр устанавливаем наибольшие значения поперечной силы $Q_{\max} = 62$ кН и изгибающего момента $M_{\max} = 74$ кН·м.

Сечение *C* является опасным, в нем $Q_x = 22$ кН, $M_x = 74$ кН$\cdot$м.

Подбор поперечного сечения балки проводим в соответствии с условием задания в двух вариантах:

а) подбор сечения прямоугольного профиля деревянной балки

$$W_{\text{н.о.}} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 7{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 7400 \text{ см}^3.$$

Для прямоугольного сечения $W_{\text{н.о.}} = \dfrac{J_{\text{н.о.}}}{y_{\max}} = \dfrac{(bh)^3/12}{h/2} = \dfrac{bh^2}{6}$.

При $h = 2b$, $\quad W_{\text{н.о.}} = (2/3)b^3 \geq 7400$ см^3, $\quad$ отсюда $\quad b \geq \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 7400}{2}} = 22{,}3$ см;

$h = 2 \cdot 22{,}3 = 44{,}6$ см.

После округления размеров в большую сторону принимаем: $h = 46$ см, $b = 23$ см.

б) подбор сечения двутаврового профиля

$$W_{\text{н.о.}} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 4{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 462 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента проката этому значению соответствует двутавр № 30, для которого $W_{\text{н.о.}} = W_x^{\text{табл.}} = 472$ см^3.

Основные размеры и геометрические характеристики профиля:

высота $h = 0{,}3$ м; ширина полки $b = 0{,}135$ м; толщина полки $t = 0{,}01$ м; толщина стенки $d = 0{,}65 \cdot 10^{-2}$ м; площадь сечения $A = 46{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2; момент инерции сечения относительно нейтральной оси $J_{\text{н.о.}} = J_x^{\text{табл.}} = 0{,}708 \cdot 10^{-4}$ м^4; статический момент половины площади сечения относительно нейтральной оси $S_{\text{н.о.}}^{\max.} = S_x^{\text{табл.}} = 2{,}68 \cdot 10^{-4}$ м^3.

Полная проверка стальной балки на прочность:

а) проверка по рабочим нормальным напряжениям

$$\sigma_{\text{раб.}} = \frac{M_{\max}}{W_x^{\text{табл.}}} = \frac{74 \cdot 10^3}{4,72 \cdot 10^{-4}} = 157 \cdot 10^6 \text{ Па} = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{раб.}} = 157 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа},$$

т. е. условие прочности выполняется.

б) проверка по максимальным касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{табл.}}}{J_x^{\text{табл.}} d} = \frac{62 \cdot 2,68 \cdot 10^{-4}}{0,708 \cdot 10^{-4} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 36,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 36,2 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 96 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условие прочности выполняется.

в) проверка по главным напряжениям в опасном сечении *C*, в котором $Q_x = 22$ кН, $M_x = 74$ кН·м.

Строим эпюру нормальных напряжений для этого сечения по уровням (рис. 4.2):

$$\sigma_{1-1} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} y_{1-1} = -\frac{74 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 10^{-4}} 0,15 = -157 \cdot 10^6 \text{ Па} = -157 \text{ МПа}.$$

Знак «минус» при напряжении для верхних волокон указывает на то, что при положительной эпюре M_x в этом сечении верхняя часть волокон испытывает деформацию осевого сжатия.

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{1-1} = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2-2} = \sigma_{3-3} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} y_{2-2} = -\frac{M_x}{J_x^{\text{табл.}}} \left(\frac{h}{2} - t\right) = -\frac{74 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 10^{-4}} (0,15 - 0,01) =$$

$$= -147 \cdot 10^6 \text{ Па} = -147 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{4-4} = 0, \text{ так как } y_{4-4} = 0.$$

Эпюра касательных напряжений также строится по значениям, определяемым для различных уровней (волокон) сечения

$$\tau_{1-1} = \tau_{7-7} = 0,$$

так как $S_{\text{н.о.}}^{1-1} = 0,$ т. е. статический момент площади сечения, находящейся выше или ниже уровня 1-1 относительно нейтральной оси, равен нулю.

Напряжения в волокнах уровня 2-2 и 6-6 можно не определять, так как они обычно очень малы.

В переходных волокнах 3-3 и 5-5 напряжения будут равны

$$\tau_{3-3} = \tau_{5-5} = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}^{3-3}}{J_x^{\text{табл.}} b_{3-3}} = \frac{Q_x bt(h/2 - t/2)}{J_x^{\text{табл.}} d} =$$

$$= \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 0{,}135 \cdot 0{,}01 \cdot (0{,}15 - 0{,}005)}{0{,}708 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-2}} = 9{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9{,}7 \text{ МПа}.$$

Для волокон нейтрального слоя

$$\tau_{4-4} = \frac{Q_x S_{\text{н.о.}}^{4-4}}{J_x^{\text{табл.}} b_{4-4}} = \frac{Q_x S_x^{\text{табл.}}}{J_x^{\text{табл.}} d} = \frac{22 \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-4}}{0{,}708 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-2}} = 12{,}8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12{,}8 \text{ МПа}.$$

Эпюры σ и τ строятся в масштабе (см. рис. 4.2).

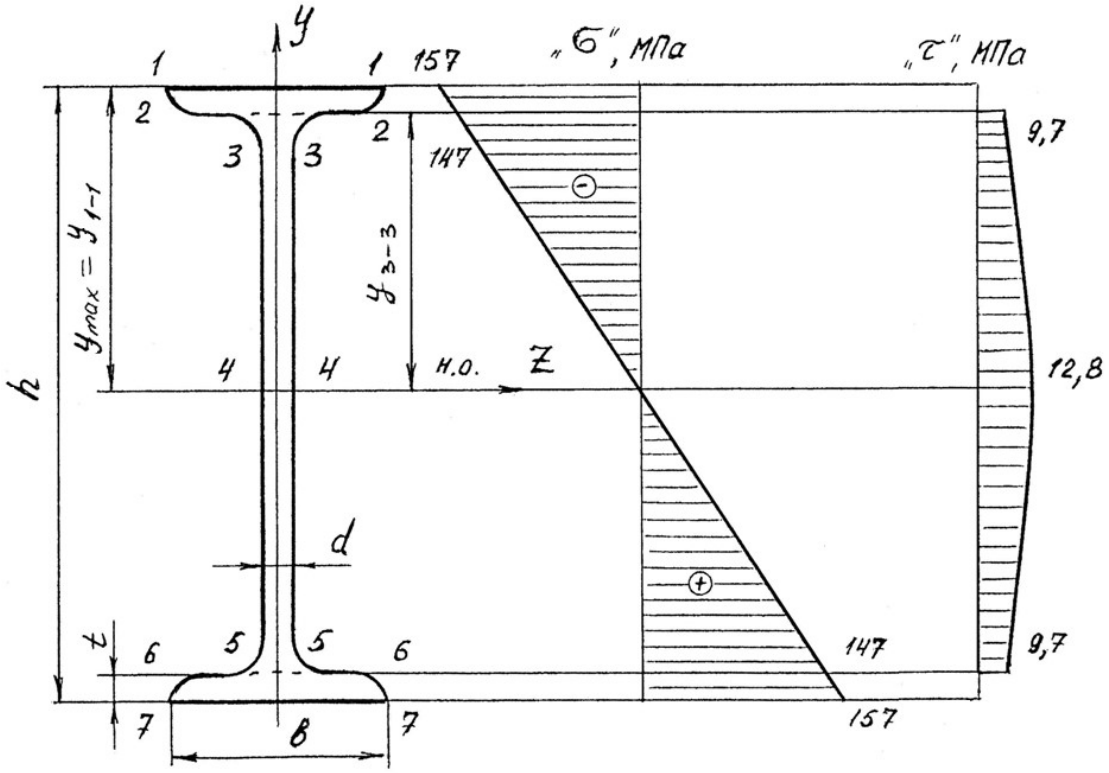


Рис. 4.2.

На основании эпюр напряжений определяют главные напряжения для верхних, переходных и средних волокон

$$\sigma_1^{1-1} = 1/2(\sigma_{1-1} + \sqrt{\sigma_{1-1}^2 + 4\tau_{1-1}^2}) = 1/2(-157 + \sqrt{157^2 + 4 \cdot 0^2}) = 0;$$

$$\sigma_2^{1-1} = 1/2(-157 - \sqrt{157^2 + 4 \cdot 0^2}) = -157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1^{3-3} = 1/2(-147 + \sqrt{147^2 + 4 \cdot 9{,}7^2}) = 0{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^{3-3} = 1/2(-147 - \sqrt{147^2 + 4 \cdot 9{,}7^2}) = -147{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1^{4-4} = 1/2(0 + \sqrt{0^2 + 4 \cdot 12{,}8^2}) = 12{,}8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2^{4-4} = -12{,}8 \text{ МПа}.$$

Определим величины расчётных напряжений по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{p}}^{1-1} = \sigma_1^{1-1} - \sigma_2^{1-1} = 0 - (-157) = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{p}}^{3-3} = \sigma_1^{3-3} - \sigma_2^{3-3} = 0{,}5 - (-147{,}5) = 148 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{p}}^{4-4} = \sigma_1^{4-4} - \sigma_2^{4-4} = 12{,}8 - (-12{,}8) = 25{,}6 \text{ МПа},$$

таким образом условие прочности $\sigma_{\text{p}}^{\text{III}} < \sigma_{\text{adm}}$ выполняется.

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{p}}^{1-1} = \sqrt{(\sigma_1^{1-1})^2 + (\sigma_2^{1-1})^2 - \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}} = \sqrt{0^2 + 157^2 - 0^2} = 157 \text{ МПа}.$$

Аналогично: $\sigma_{\text{p}}^{3-3} = 148$ МПа; $\sigma_{\text{p}}^{4-4} = 22{,}1$ МПа.

Таким образом, результаты по всем вариантам полной проверки прочности балки показывают, что все условия прочности выполняются, следовательно, к практическому применению принимается двутавр № 30.

Пример 4.2. Консольная балка, сложное сечение.

Для заданной схемы балки (рис. 4.3) построить эпюры поперечных сил Q_x и изгибающих моментов M_x, определить размеры сечения заданной формы из условия прочности, принимая $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

Решение.

Определим реакции опоры A из уравнений равновесия

1) $\sum M_A = 0; \quad -M_A + M - q \cdot 1 \cdot 2{,}5 + F \cdot 3 = 0;$

$M_A = M - q \cdot 1 \cdot 2{,}5 + F \cdot 3 = 6 - 10 + 24 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

2) $\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot 1 + F = 0$ (предварительное направление реакции R_A вверх);

$R_A = q \cdot 1 - F = 4 - 8 = -4$ кН (меняем направление реакции на противоположное).

Проверка

$\sum M_C = 0; \quad -M_A + R_A \cdot 3 + M + q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -20 + 12 + 6 + 2 = 0.$

Определим размеры поперечного сечения (см. рис. 4.3), для чего условно разбиваем это сечение на фигуры 1, 2, 3 и 4, площади которых равны: $A_1 = 5b \cdot 6b; \; A_2 = 2b \cdot 3b; \; A_3 = A_4 = b \cdot b.$

Для определения положения центра тяжести сечения проводим вспомогательную ось $x_{\text{вр}}$ и найдем координату y_C по известной формуле

$$y_c = \frac{S_{x_{\text{вр}}}}{A} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4}{A_1 - A_2 + \cdot A_3 + A_4} =$$

$$= \frac{6b \cdot 5b \cdot 2{,}5b - 2b \cdot 3b \cdot 1{,}5b + 2b \cdot b \cdot 0{,}5b}{6b \cdot 5b - 2b \cdot 3b + 2b \cdot b} = 2{,}58b,$$

где y_1, y_2, y_3, y_4 – расстояния от центров тяжести фигур 1, 2, 3, 4 до оси $x_{вр}$.

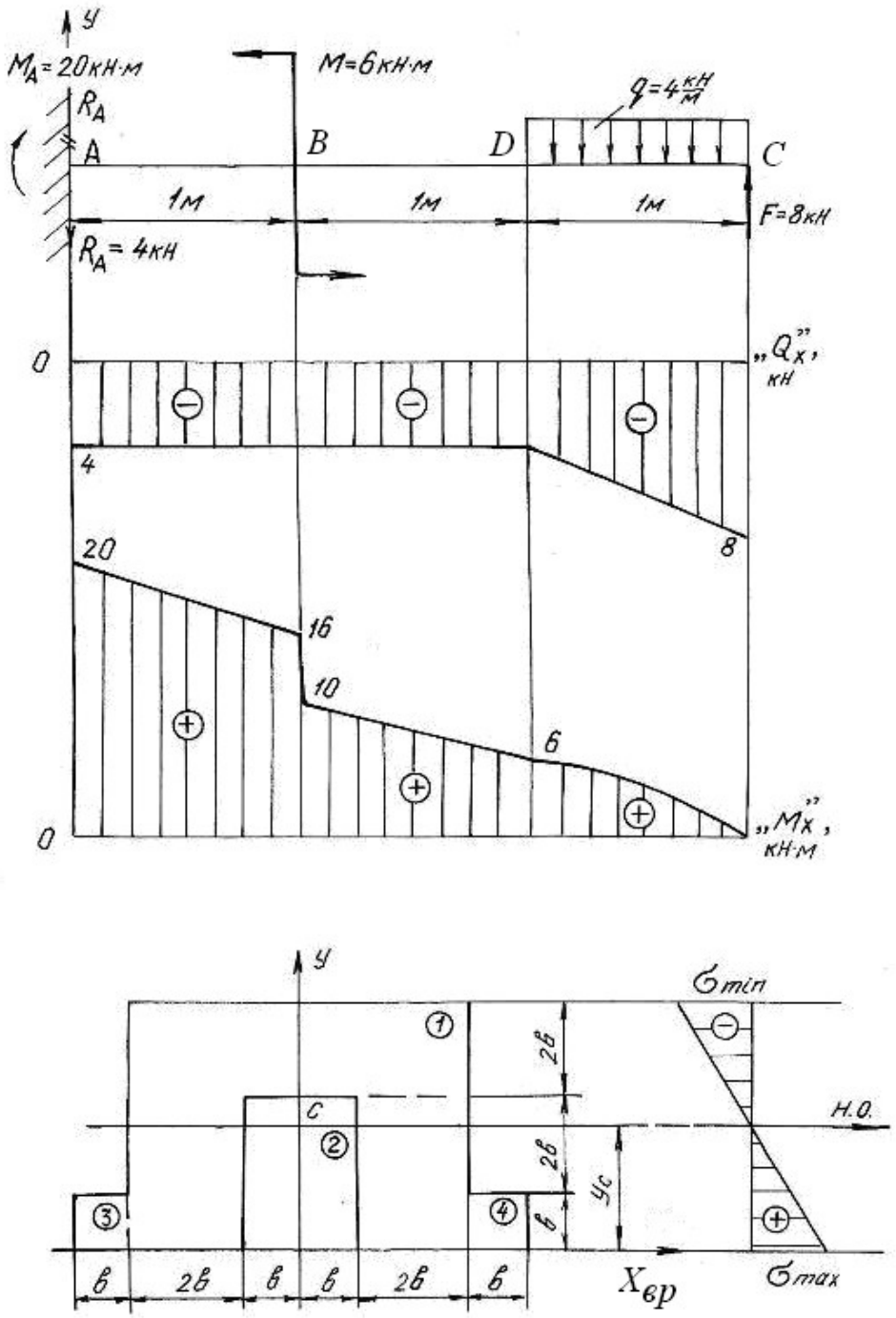


Рис. 4.3.

Так как сечение симметричное, то его центр тяжести лежит на оси симметрии y.

Проводим нейтральную ось через центр тяжести параллельно вспомогательной оси $x_{\text{вр}}$. Находим момент инерции относительно нейтральной оси

$$J_{\text{н.о.}} = \left(J_{\text{н.о.}}\right)^1 - \left(J_{\text{н.о.}}\right)^2 + 2\left(J_{\text{н.о.}}\right)^3 = \left[\frac{6b\cdot(5b)^3}{12} + 6b\cdot 5b\cdot(y_1 - y_c)^2\right] -$$

$$-\left[\frac{2b\cdot(3b)^3}{12} + 2b\cdot 3b\cdot(y_2 - y_c)^2\right] + 2\cdot\left[\frac{b\cdot b^3}{12} + b\cdot b\cdot(y_3 - y_c)^2\right] = 60\cdot b^4,$$

где $(y_n - y_C)$ – расстояние между собственной осью простой фигуры и нейтральной осью.

Строим эпюры поперечных сил Q_x и изгибающих моментов M_x, пользуясь контрольными правилами и начиная построения со свободного конца балки.

$Q_C = -F = -8$ кН; $Q_D = -F + q\cdot 1 = -8 + 4 = -4$ кН $= Q_B = Q_A$;

$M_C = 0$; $M_D = F\cdot 1 - q\cdot 1\cdot 0{,}5 = 8 - 2 = 6$ кН·м;

$M_B = F\cdot 2 - q\cdot 1\cdot 1{,}5 = 16 - 6 = 10$ кН·м.

В сечении B изгибающий момент возрастает на момент $M = 6$ кН·м, что на эпюре M_x отражается в виде скачка. Изгибающий момент в жесткой заделке равен моменту заделки M_A.

Максимальный изгибающий момент $M_{\max} = M_A = 20$ кН·м. Максимальные напряжения, возникающие в нижних волокнах этого сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y^{\text{н}}_{\max}}{J_{\text{н.о.}}} = \frac{20\cdot 2{,}58\cdot b}{60\cdot b^4} = \frac{0{,}83\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3}.$$

Максимальные напряжения, возникающие в верхних волокнах этого сечения

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\max} y^{\text{в}}_{\max}}{J_{\text{н.о.}}} = \frac{20\cdot 2{,}42\cdot b}{60\cdot b^4} = \frac{0{,}81\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3}.$$

Приравнивая наибольшее напряжение к допускаемому напряжению σ_{adm}, получим размер сечения b

$$\sigma_{\max} = \frac{0{,}83\ \text{кН}\cdot\text{м}}{b^3} \le \sigma_{\text{adm}} = 160\ \text{МПа};\ b^3 \ge \frac{0{,}83\cdot 10^3}{160\cdot 10^6},$$

$$b \ge \sqrt[3]{5{,}2\cdot 10^{-6}} = 1{,}73\cdot 10^{-2}\ \text{м};\ \ b = 18\ \text{мм}.$$

4.2. Задания для расчета балок на прочность

Для расчетной схемы балки необходимо:

1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

2. Подобрать поперечное сечение балки в двух вариантах:

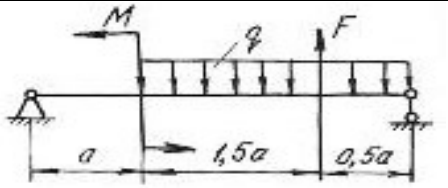
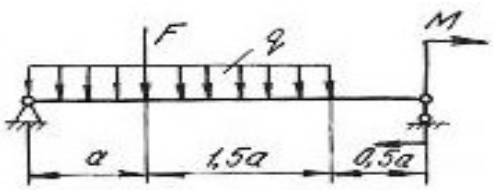
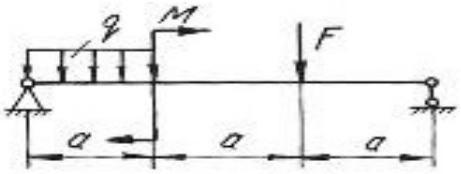
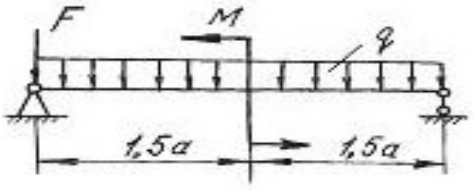
а) прямоугольного профиля, полагая, что балка деревянная при $\sigma_{adm} = 10$ МПа; соотношение между размерами сечения принять равными $b:h = 1:2$;

б) двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $\tau_{adm} = 96$ МПа.

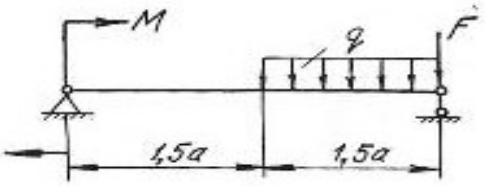
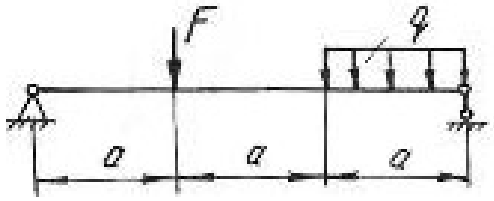
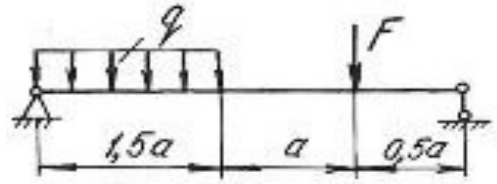
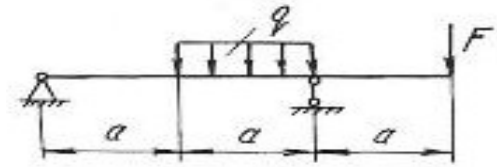
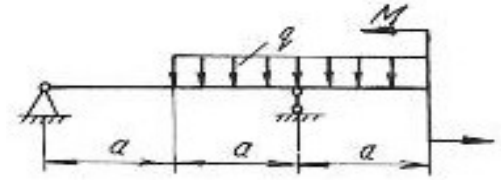
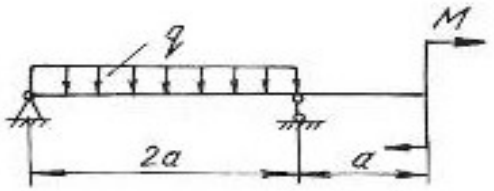
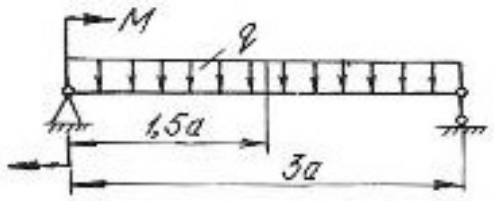
3. Провести полную проверку стальной двутавровой балки на прочность.

Данные для расчета приведены в табл. 4.1.

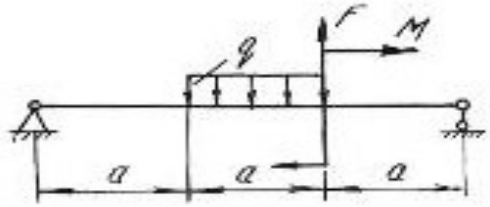
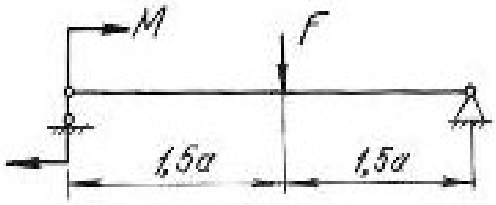
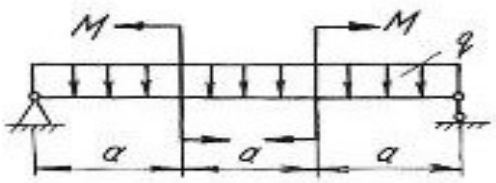
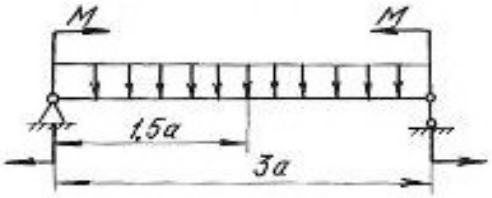
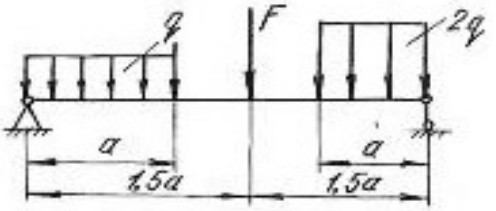
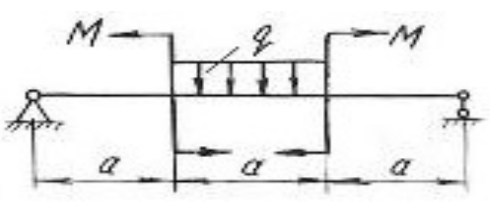
Таблица 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	1	2,0	19	20	20
	2	1,0	16	35	40
	3	1,2	10	30	40
	4	2,0	10	25	50
	5	2,2	30	50	40
	6	2,4	10	10	20
	7	1,0	10	65	20
	8	1,2	10	55	40
	9	2,0	20	45	15
	10	1,0	18	32	60
	11	2,2	10	35	50
	12	1,8	30	42	30
	13	2,0	12	26	20
	14	1,0	14	14	20
	15	2,0	15	25	30

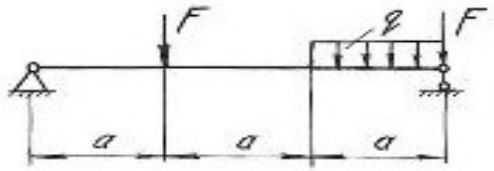
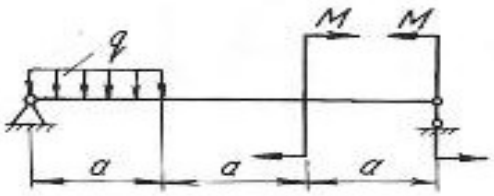
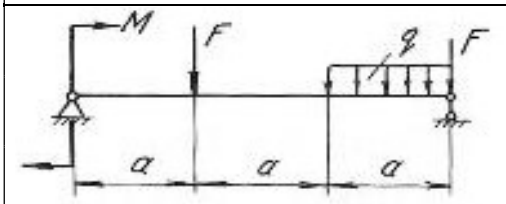
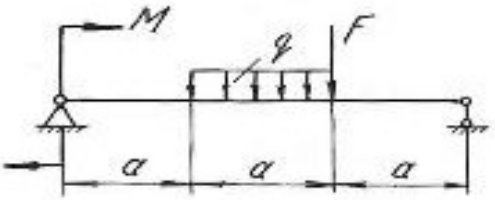
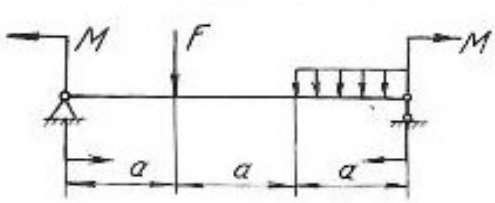
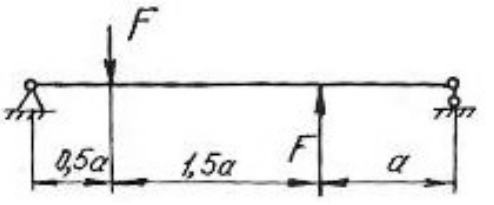
Продолжение табл. 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	16	1,0	10	32	40
	17	2,0	25	42	20
	18	1,6	30	50	30
	19	1,0	10	–	10
	20	2,0	11	–	30
	21	1,0	12	–	30
	22	1,2	13	–	60
	23	2,2	14	–	70
	24	3,0	15	–	40
	25	3,0	16	–	20
	26	1,2	17	–	70
	27	2,0	18	–	70
	28	3,0	20	10	–
	29	2,0	21	60	–
	30	2,0	22	10	–
	31	2,1	23	30	–
	32	2,0	24	30	–
	33	2,2	25	30	–
	34	2,0	26	40	–
	35	2,0	27	40	–
	36	2,0	28	40	–

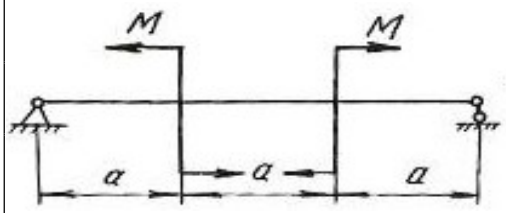
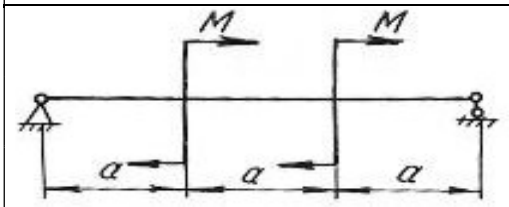
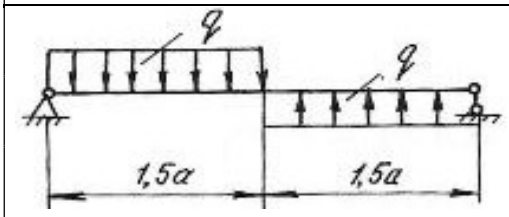
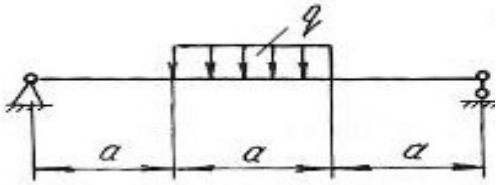
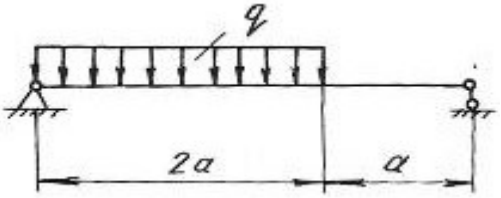
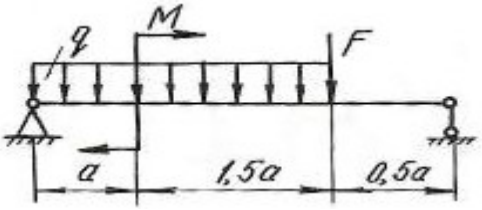
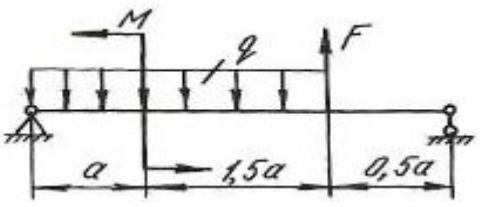
Продолжение табл. 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	37	1,2	10	30	15
	38	1,3	12	40	10
	39	1,4	15	45	12
	40	1,0	14	50	10
	41	2,0	13	60	20
	42	2,0	12	55	12
	43	1,1	16	–	20
	44	1,4	17	–	16
	45	1,5	20	–	15
	46	1,6	18	30	–
	47	1,2	11	20	–
	48	1,3	14	10	–
	49	0,8	15	40	–
	50	0,7	13	13	–
	51	1,1	17	22	–
	52	0,5	24	–	20
	53	0,6	28	–	30
	54	0,9	30	–	40
	55	1,1	10	30	–
	56	1,2	20	31	–
	57	1,3	30	32	–

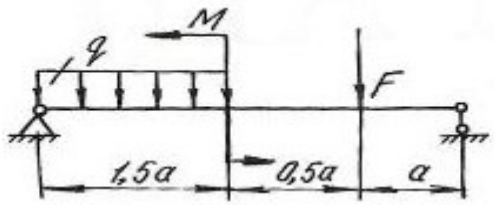
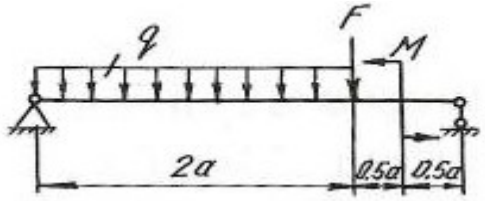
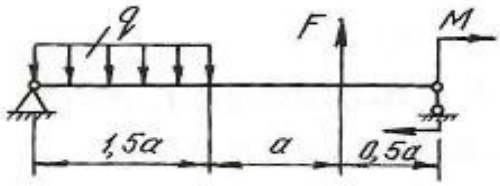
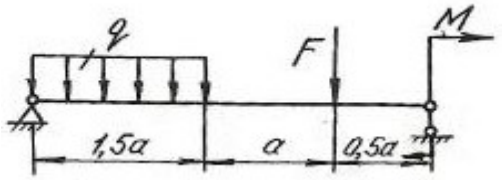
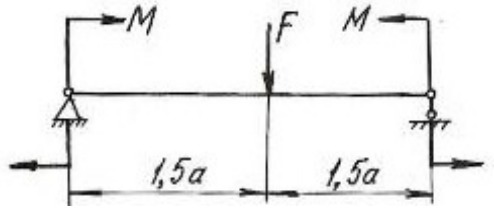
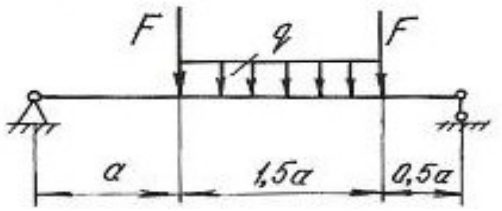
Продолжение табл. 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	58	1,4	40	–	40
	59	1,2	35	–	50
	60	2,0	28	–	80
	61	1,5	12	20	–
	62	1,7	14	30	–
	63	1,9	16	40	–
	64	2,1	18	20	20
	65	2,3	19	30	30
	66	2,5	20	25	40
	67	2,0	12	30	25
	68	2,4	10	35	30
	69	2,7	10	30	35
	70	1,0	12	10	40
	71	2,0	14	20	30
	72	2,0	16	30	40
	73	1,0	–	–	20
	74	2,0	–	–	30
	75	2,5	–	–	40

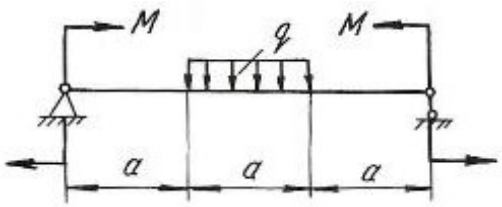
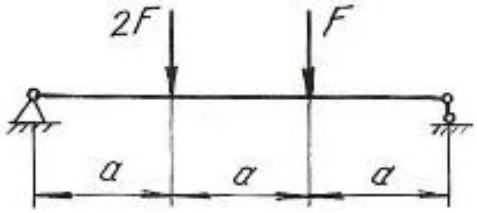
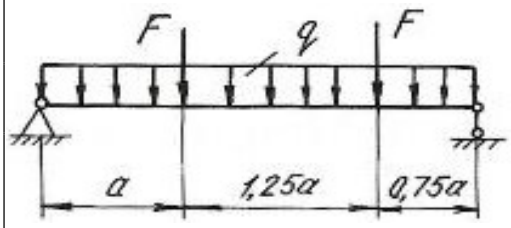
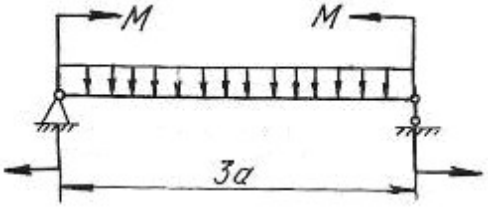
Продолжение табл. 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	76	1,5	–	30	–
	77	2,5	–	40	–
	78	1,2	–	50	–
	79	1,3	–	40	–
	80	1,4	–	25	–
	81	1,6	–	30	–
	82	1,7	10	–	–
	83	1,8	10	–	–
	84	1,9	10	–	–
	85	2,1	30	–	–
	86	2,2	20	–	–
	87	2,3	10	–	–
	88	2,0	25	–	–
	89	1,0	15	–	–
	90	2,3	10	–	–
	91	1,0	15	30	80
	92	2,0	20	40	90
	93	2,0	25	50	100
	94	1,2	10	45	25
	95	1,4	12	50	30
	96	1,6	15	60	35

Продолжение табл. 4. 1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	97	1,8	15	30	40
	98	1,0	18	20	45
	99	1,4	21	55	50
	100	1,0	10	30	55
	101	2,0	20	35	80
	102	1,0	30	60	40
	103	1,9	15	25	60
	104	1,7	13	50	40
	105	1,3	17	75	20
	106	1,0	18	20	35
	107	2,2	16	60	45
	108	2,3	14	40	55
	109	1,0	–	30	50
	110	0,6	–	40	50
	111	0,8	–	30	60
	112	1,0	2	–	70
	113	0,6	30	–	60
	114	1,2	40	–	50

Окончание табл. 4.1

Схема балки и нагрузки	Номер варианта	Числовые значения нагрузок и размеров			
		a, м	*q*, кН/м	*M*, кН·м	*F*, кН
	115	1,2	20	40	–
	116	1,3	10	20	–
	117	1,4	20	30	–
	118	1,5	–	–	40
	119	1,0	–	–	30
	120	1,3	–	–	20
	121	1,0	10	–	20
	122	1,0	20	–	40
	123	1,0	30	–	10
	124	1,2	10	20	–
	125	1,3	11	40	–
	126	1,5	12	50	–

4.3. Расчет балки на жесткость

После проверки балок на прочность они обычно проверяются на жесткость.

Проверка состоит в определении максимальных перемещений балки при изгибе и сравнении их с допускаемыми значениями для данного материала и типа балки. При этом должны выполняться следующие условия:

$$y_{\max} \le y_{\text{adm}}; \quad y_{\text{adm}} = (\frac{1}{20} \div \frac{1}{250})l; \qquad \theta_{\max} \le \theta_{\text{adm}},$$

где y_{adm} – допускаемый прогиб; θ_{adm} – допускаемый угол поворота; l – пролёт балки.

Для определения прогибов и углов поворота в статически определимых балках обычно применяют метод начальных параметров, который записывается в виде следующих универсальных уравнений:

$$EJ_Z\theta = EJ_Z\theta_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(x-b_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-c_i)^3}{3!}, \quad (4.8)$$

где n – количество нагрузок на рассматриваемых участках.

$$EJ_z y = EJ_Z y_0 + EJ_Z\theta_0 x + \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(x-b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x-c_i)^4}{4!}, \quad (4.9)$$

где θ – угол поворота в исследуемом сечении; y – прогиб в исследуемом сечении; y_0 – прогиб в начале координат; θ_0 – угол поворота в начале координат; x – расстояние от начала координат до сечения, в котором определяются перемещения; M, F, q – внешние нагрузки, включая и реакции; a – расстояния от начала координат до сечений, где приложены моменты; b – расстояния от начала координат до сечений, где приложены сосредоточенные силы; c – расстояния от начала координат до начала каждого участка, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой; EJ_Z – жесткость балки при поперечном изгибе.

Метод начальных параметров применяется при условии, что жесткость EJ_Z постоянна по всей длине балки.

Слагаемые, которые включают M, F, q, по знаку определяются в соответствии с правилами знаков, принятыми для определения M_x при расчете слева. При использовании метода начальных параметров необходимо выполнить следующие требования:

1. Начало координат принимается единым для всей балки (обычно в левом крайнем сечении балки);

2. Если равномерно распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, то ее необходимо продлить до этого сечения, а для сохранения равновесия приложить такую же по величине, но противоположного направления нагрузку. Эту контрнагрузку необходимо включить в уравнения.

Начальные параметры y_0 и θ_0 определяются следующим образом. Если начало координат находится не на опоре (рис. 4.4, *б*), то составляем два дополнительных уравнения прогибов для двух опор, где заранее известно, что прогибы на опорах равны нулю. Если начало координат находится на концевой шарнирной опоре (рис. 4.4, *в*), то составляем одно дополнительное уравнение прогибов для другой опоры. Если начало координат находится в жесткой заделке (рис. 4.4, *г*), то дополнительные уравнения составлять не нужно.

При решении задач необходимо иметь в виду, что положительное направление оси y принято вверх. При этом условии положительное значение угла поворота соответствует вращению сечения против хода часовой стрелки, положительный прогиб направлен вверх.

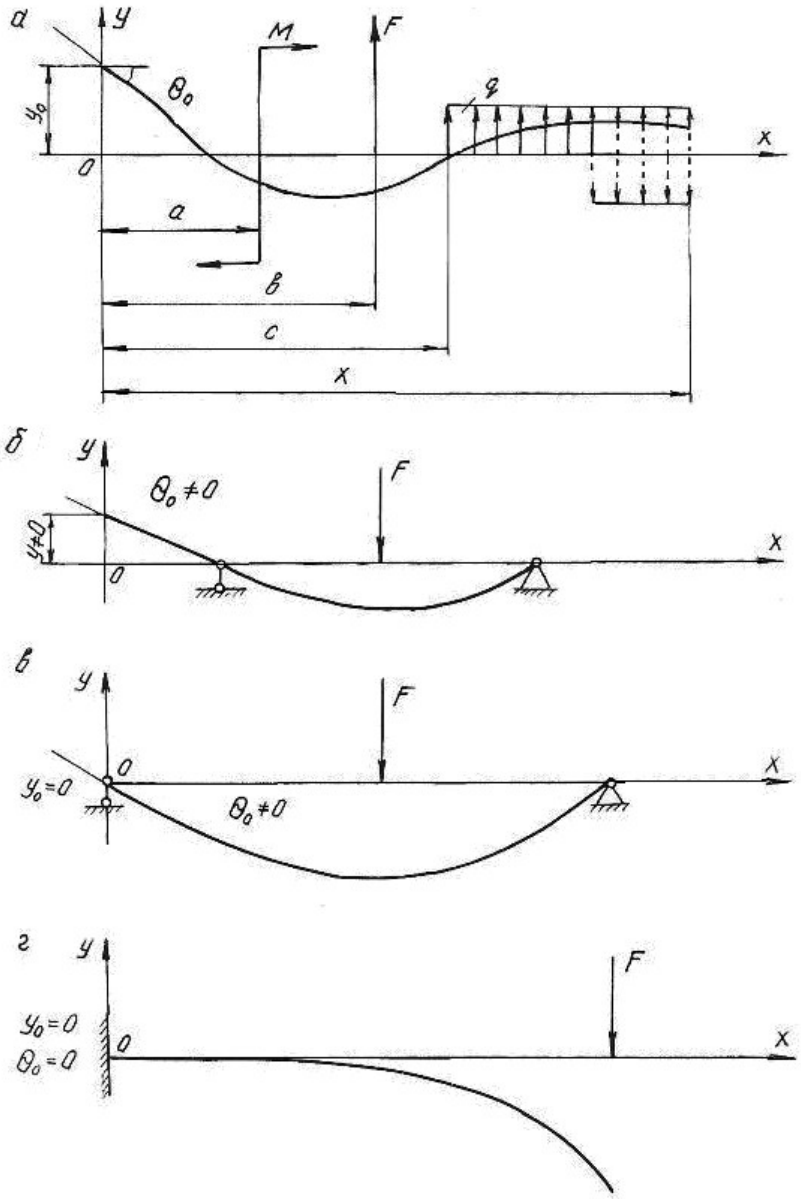


Рис. 4.4.

Пример 4.3.

Для балки, изображенной на рис. 4.5, построить эпюры Q_x и M_x, подобрать поперечное двутавровое сечение (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. По методу начальных параметров определить прогибы в сечениях C и D и угол поворота сечения B. Построить эпюру прогибов и провести проверку на жесткость при $y_{adm} = (1/200)l = (1/200)4 = 0,02$ м $= 2$ см, где l – пролет балки.

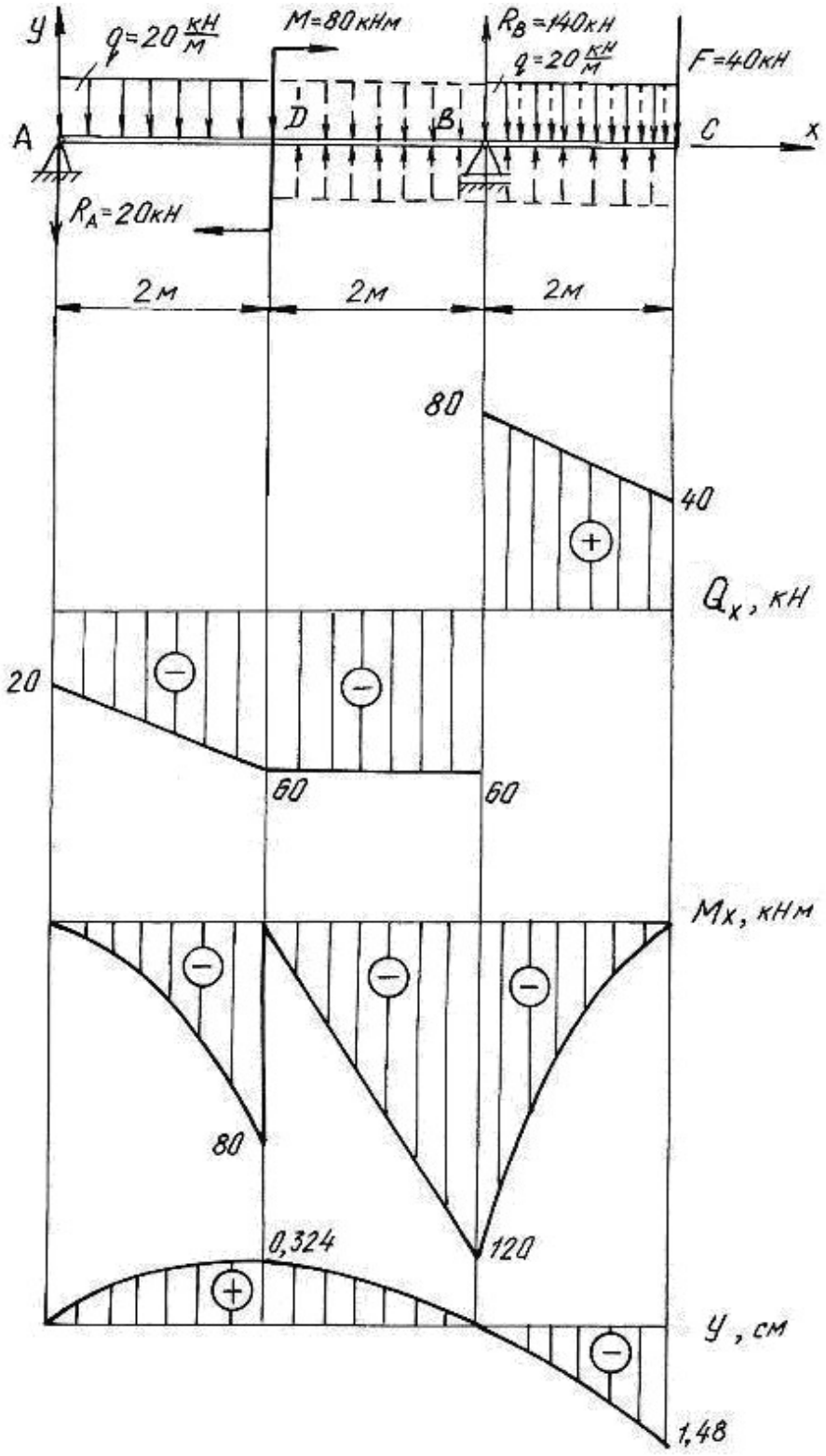

y
q=20 кН/м
M=80кНм
R_B=140кН
q=20 кН/м
F=40кН
A
D
B
C
x
R_A=20кН
2м
2м
2м
80
40
Q_x, кН
20
60
60
M_x, кНм
80
0,324
120
y, см
1,48

Рис. 4.5.

Решение.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_B = 0, \qquad R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 = 0;$$
$$R_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 3 - 80 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 40 \cdot 2 = 0; \quad R_A = 20 \text{ кН}.$$
$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 - M - q \cdot 2 \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$
$$R_B \cdot 4 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 80 - 20 \cdot 2 \cdot 5 - 40 \cdot 6 = 0; \qquad R_B = 140 \text{ кН}.$$

Проводим проверку

$$\sum Y = 0; \qquad -R_A + R_B - q \cdot 2 - F - q \cdot 2 = 0;$$
$$-20 + 140 - 20 \cdot 2 - 40 - 20 \cdot 2 = 0; \quad 0 = 0$$

По контрольным правилам строим эпюры Q_x и M_x, и подбираем поперечное сечение при $M_{\max} = 120$ кН.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 750 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента (см. табл. П.1) принимаем двутавр № 36:

$J_z = J_x^{\text{табл.}} = 13380 \text{ см}^4 = 13380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

Для определения перемещений помещаем начало координат на левой опоре (прогиб $y_0 = 0$, угол поворота $\theta_0 \neq 0$). Составляем дополнительное уравнение прогибов для сечения B (при $x_B = 4$ м), где заранее известно, что прогиб на опоре y_B равен нулю.

Распределенная нагрузка обрывается в сечении D. Продолжим её до сечения B, в котором определяем перемещение, но, чтобы не нарушить прежнее равновесие, вводим уравновешивающую нагрузку обратного направления на участке BD.

$$EJ_Z y_B = EJ_Z \theta_0 x_B + \frac{M(x-2)^2}{2} - \frac{R_A(x_B - 0)^3}{6} - \frac{q(x_B - 0)^4}{24} + \frac{q(x_B - 2)^4}{24};$$
$$0 = EJ_Z \theta_0 \cdot 4 + \frac{80(4-2)^2}{2} - \frac{20(4-0)^3}{6} - \frac{20(4-0)^4}{24} + \frac{20(4-2)^4}{24}.$$

Последний член уравнения учитывает компенсирующую нагрузку. Подставляя числовые значения, получим $EJ_Z \theta_0 = EJ_Z \theta_A = 63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Определим прогибы на границах заданных участков. При определении прогиба в сечении C равномерно распределенную нагрузку необходимо продлить до этого сечения и уравновесить её.

В сечении C ($x_C = 6$ м):

$$EJ_Z y_C = EJ_Z \theta_0 x_C + \frac{M(x_C-2)^2}{2} - \frac{R_A(x_C-0)^3}{6} + \frac{R_B(x_C-4)^3}{6} -$$
$$- \frac{q(x_C-0)^4}{24} + \frac{q(x_C-2)^4}{24} - \frac{q(x_C-4)^4}{24};$$

$$EJ_Z y_C = 63{,}3 \cdot 6 + \frac{80 \cdot (6-2)^2}{2} - \frac{20 \cdot (6-0)^3}{6} + \frac{140 \cdot (6-4)^3}{6} - \frac{20 \cdot (6-0)^4}{24} +$$
$$+ \frac{20(6-2)^4}{24} - \frac{20(6-4)^4}{24} = -393 \text{ кНм}^3;$$

$$y_C = \frac{-393 \cdot 10^3}{EJ_Z} = \frac{-393 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0148 \text{ м}; \; y_C = -1{,}480 \text{ см};$$

в сечении D ($x_D = 2$ м):

$$EJ_Z y_D = EJ_Z \theta_0 \cdot x_D - \frac{R_A(x_D-0)^3}{6} - \frac{q(x_D-0)^4}{24} = 63{,}3 \cdot 2 - \frac{20(2-0)^3}{6} - \frac{20(2-0)^4}{24} =$$

$$= 86{,}7 \text{ кНм}^3; \qquad y_D = \frac{86{,}7 \cdot 10^3}{EJ_Z} = \frac{86{,}7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0{,}00324 \text{ м} = 0{,}324 \text{ см}.$$

По полученным значениям прогибов строим изогнутую ось балки (см. рис. 4.5).

Определим угол поворота сечения B ($x_B = 4$ м), продлив и уравновесив распределенную нагрузку

$$EJ_Z \theta_B = EJ_Z \theta_0 + \frac{M(x-2)^1}{1} - \frac{R_A(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} + \frac{q(x-2)^3}{6} =$$

$$= 63{,}3 + \frac{80(4-2)^1}{1} - \frac{20(4-0)^2}{2} - \frac{20(4-0)^3}{6} + \frac{20(4-2)^3}{6} = -123 \text{ кНм}^2;$$

$$\theta_B = -\frac{123 \cdot 10^3}{EJ_Z} = -\frac{123 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -46 \cdot 10^{-4} \text{ рад} =$$
$$= -46 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180}{\pi} = -0{,}26^\circ = -0^\circ 15' 36''.$$

Максимальный прогиб балки $y_{\max} = y_C = 1{,}480$ см.

Таким образом, $y_{\max} = 1{,}480$ см $< y_{\text{adm}} = 2$ см, следовательно, условие жесткости выполняется.

4.4. Задания для расчета балок на жесткость

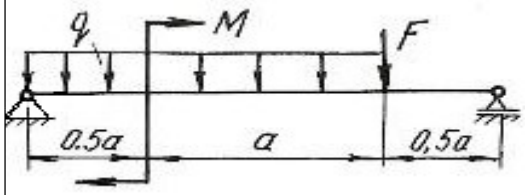
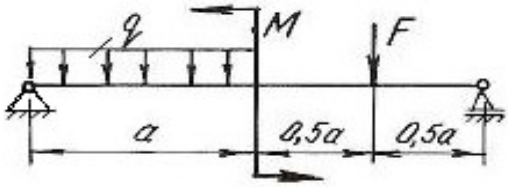
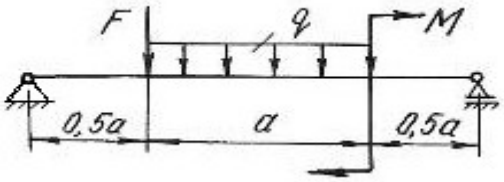
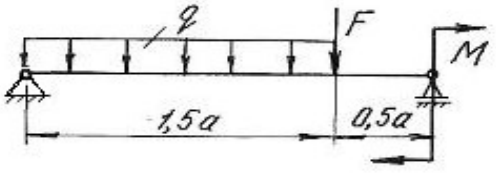
Для расчетной схемы (табл. 4.2) необходимо:

1. Построить по длине балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

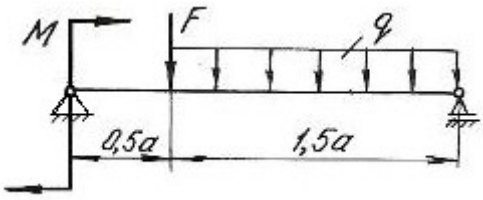
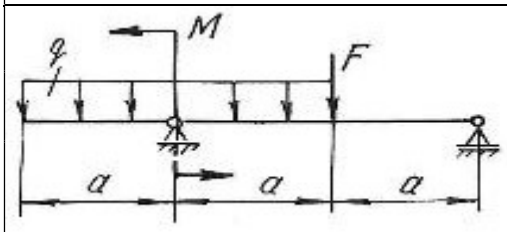
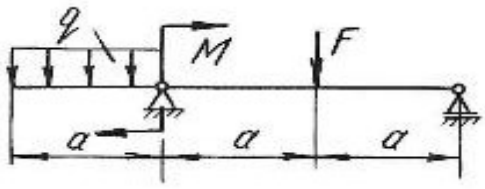
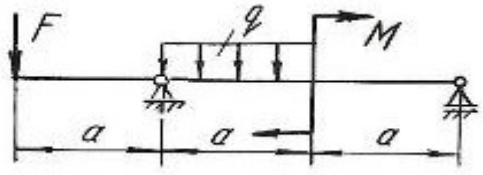
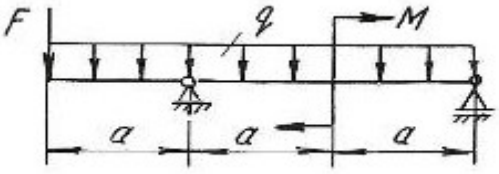
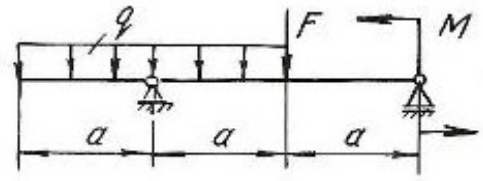
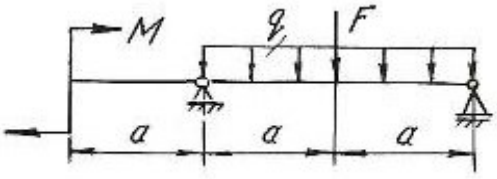
2. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля (см. табл. П. 1), материал – сталь при $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

3. Определить по методу начальных параметров величину прогибов балки в характерных сечениях и провести проверку балки на жесткость, приняв $y_{adm} = (1/100)l$.

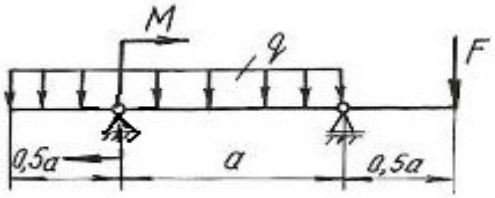
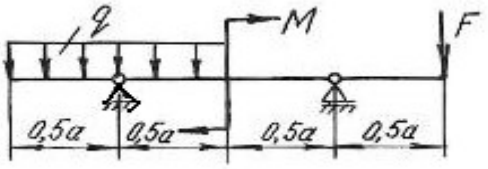
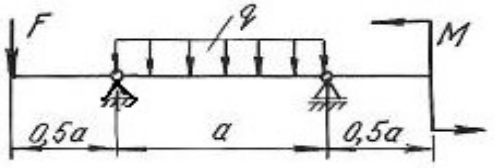
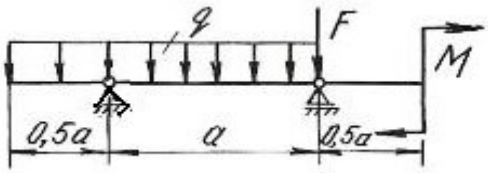
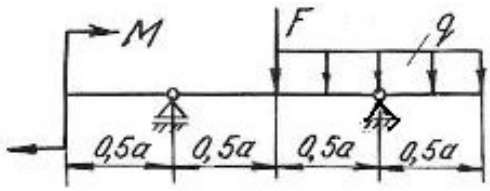
Таблица 4.2

Схема балки и нагрузки	Вариант	a, м	q, кН/м	M, кН·м	F, кН
	1	1	10	30	20
	2	0,5	20	25	30
	3	1	10	10	16
	4	2	20	30	10
	5	0,5	30	15	12
	6	1	12	36	24
	7	2	6	12	10
	8	1	4	12	8
	9	0,5	10	20	16
	10	2	4	12	10
	11	1	20	24	12
	12	1	12	12	10
	13	2	10	4	10
	14	1	8	20	30

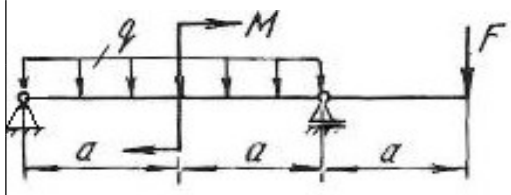
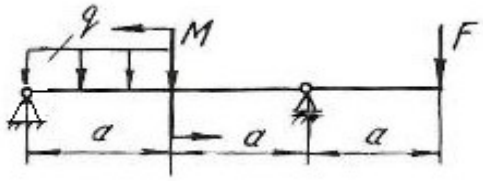
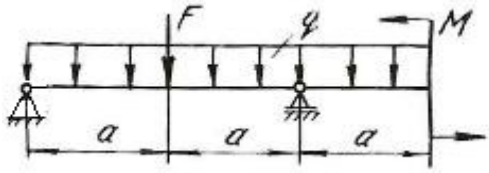
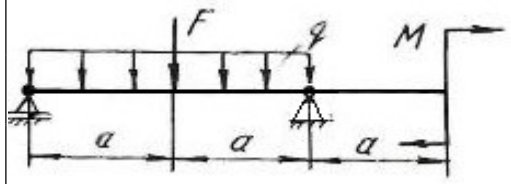
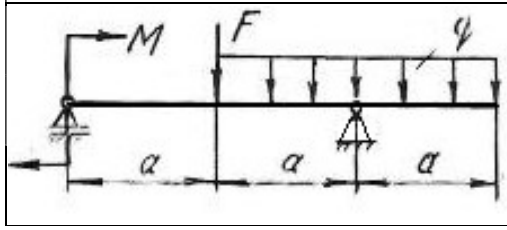
Продолжение табл. 4.2

Схема балки и нагрузки	Вариант	a, м	q, кН/м	M, кН·м	F, кН
	15	1	8	12	16
	16	1	12	14	10
	17	2	4	16	6
	18	1	10	18	24
	19	2	4	16	16
	20	0,5	20	32	24
	21	1	20	15	8
	22	2	8	14	4
	23	0,5	10	28	12
	24	1	24	10	10
	25	2	12	16	12
	26	0,5	4	18	24
	27	1	20	10	6
	28	2	10	8	16
	29	0,5	4	15	8
	30	1	2	6	4
	31	2	4	12	10
	32	0,5	8	12	18
	33	1	10	12	4
	34	2	12	18	12
	35	0,5	20	30	10

Продолжение табл. 4.2

Схема балки и нагрузки	Вариант	a, м	q, кН/м	M, кН·м	F, кН
	36	1	20	12	8
	37	2	12	16	16
	38	1	40	24	20
	39	1	10	20	12
	40	2	4	12	8
	41	1	8	4	12
	42	1	24	12	8
	43	2	8	10	4
	44	1	12	24	20
	45	1	36	12	24
	46	2	32	16	20
	47	1	16	8	8
	48	1	16	18	10
	49	2	12	20	12
	50	1	32	10	6
	51	1	24	20	4
	52	2	4	24	16
	53	1	8	30	10

Окончание табл. 4.2

Схема балки и нагрузки	Вариант	a, м	q, кН/м	M, кН·м	F, кН
	54	1	10	12	6
	55	2	4	10	8
	56	0,5	8	8	4
	57	1	20	12	6
	58	2	12	36	8
	59	1	24	16	12
	60	1	10	40	16
	61	0,5	12	18	10
	62	2	4	36	12
	63	1	10	20	10
	64	1	12	16	8
	65	2	4	16	12
	66	1	12	10	20
	67	2	8	32	16
	68	0,5	24	12	12
	69	1	10	18	12
	70	2	8	36	16
	71	0,5	20	42	8

Глава 5

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ НЕРАЗРЕЗНЫЕ МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ И ПЛОСКИЕ РАМЫ

5.1. Статически неопределимые балки

Цельная балка, лежащая на нескольких опорах, называется неразрезной. С промежуточными опорами такая балка обычно соединена шарнирно. Концевые опоры могут быть или шарнирными или защемленными.

Неразрезные балки представляют собой статически неопределимые системы, так как для их расчета уравнений статики недостаточно. Эти балки могут быть рассчитаны с помощью теоремы о трех моментах или методом сил.

В данном разделе рассматривается решение неразрезной балки по методу сил.

Способ расчета статически неопределимых систем, при котором за «лишние» неизвестные принимаются силы или моменты, называется **методом сил**. Для расчета статически неопределимой балки необходимо раскрыть ее статическую неопределимость, для чего эту балку освобождают сначала от «лишних» связей, превращая ее тем самым в статически определимую (геометрически неизменяемую) систему, называемую основной системой. Она может быть получена путем введения необходимого количества шарниров, балочных опор, путем разреза контура (чаще для рам) и др.

Дополнительные уравнения для нахождения «лишних» неизвестных составляются из условий, что взаимные перемещения основной системы в местах приложения «лишних» неизвестных равны нулю (условия совместности деформаций – условия неразрезности).

Степень статической неопределимости балки соответствует количеству «лишних» неизвестных. В качестве «лишних» неизвестных можно принимать реакции на опорах балки или опорные моменты. Для многопролетных неразрезных балок за «лишние» неизвестные удобнее принять опорные моменты. Опорными моментами называют суммарные моменты внутренних сил упругости, возникающих в поперечных сечениях над опорами.

На рис. 5.1, *а* показана дважды статически неопределимая балка. За «лишние» неизвестные приняты опорные моменты на первой и второй опорах. Моменты на нулевой и третьей опорах равны нулю (рис. 5.1, *б*).

Для определения «лишних» неизвестных воспользуемся условием:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0, \\ \Delta_2 &= 0, \end{aligned} \qquad (5.1)$$

где Δ_1 – суммарное возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от всех внешних нагрузок и от всех «лишних» неизвестных по направле-

нию действия первой «лишней» неизвестной X_1; Δ_2 – суммарное возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от всех внешних нагрузок и от всех «лишних» неизвестных по направлению действия второй «лишней» неизвестной X_2.

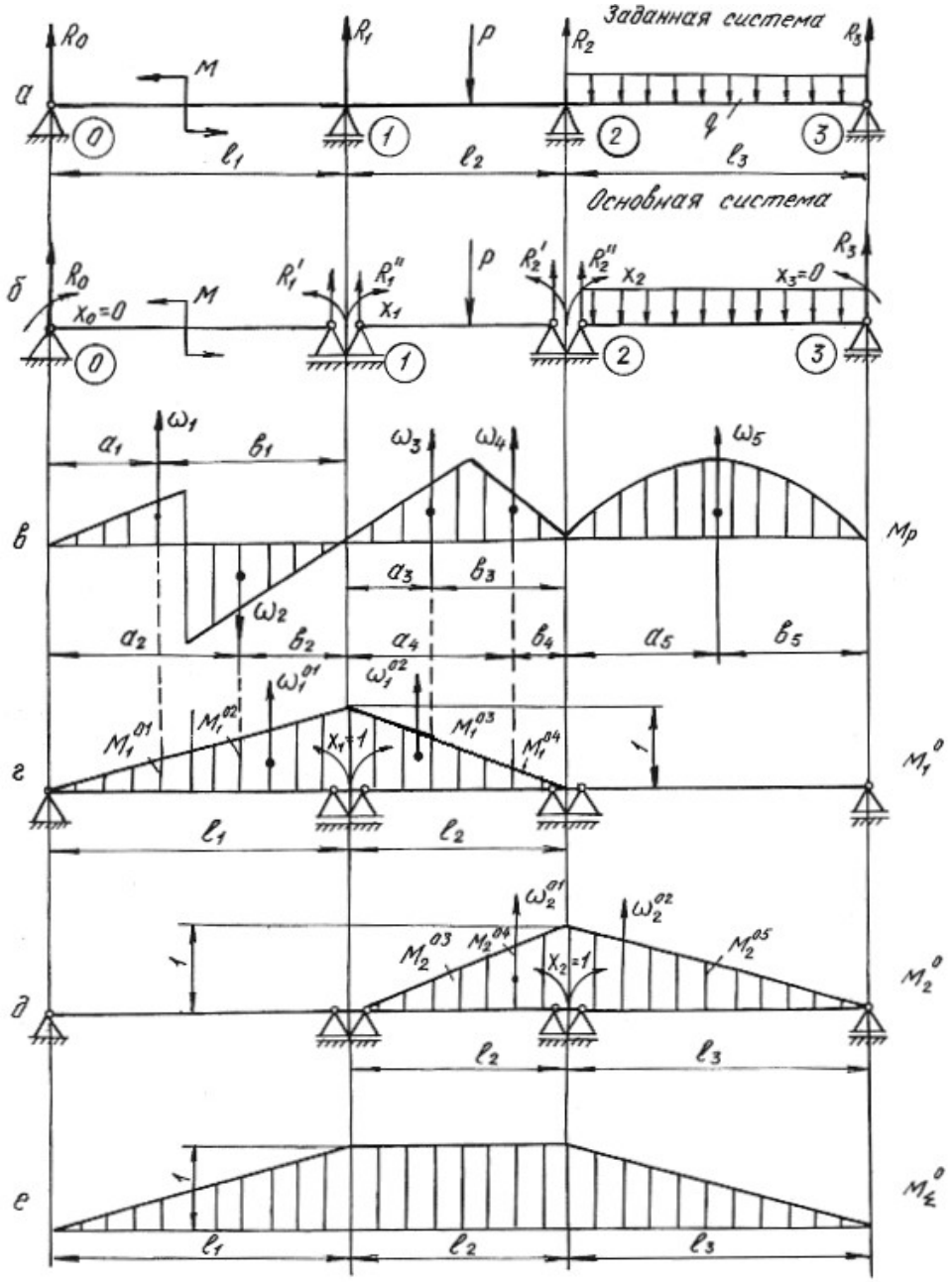


Рис. 5.1.

Эти перемещения в силу принципа независимости действия сил можно представить как сумму перемещений от каждой отдельной силы, приложенной к системе, т. е. от внешней нагрузки, обобщенно обозначаемой буквой *P,* и от неизвестных X_1, X_2, приложенных на опорах основной системы. Указанные пе-

ремещения выражаются через неизвестные X_1, X_2, нагрузку P и перемещения от единичных сил X_1=1, X_2=1.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Эти уравнения носят название канонических уравнений метода сил. Число их равно степени статической неопределимости системы. На примере первого уравнения рассмотрим обозначения:

δ_{11} – возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения от действия единичной силы $X_1 = 1$ по направлению действия первой «лишней» неизвестной X_1;

$\delta_{11}X_1$ – возможное перемещение, вызванное действием X_1 по ее направлению;

δ_{12} – возможное перемещение от единичной нагрузки $X_2 = 1$ по направлению X_1;

$\delta_{12}X_2$– возможное перемещение от второй «лишней» неизвестной X_2 по направлению X_1;

Δ_{1p} – возможное перемещение от всех внешних нагрузок по направлению «лишней» неизвестной X_1.

Коэффициенты канонических уравнений с одинаковыми числовыми индексами δ_{11}, δ_{22} называются *главными коэффициентами***.** Они всегда положительны. Коэффициенты с разными числовыми индексами δ_{21}, δ_{12} называются *побочными*. Они могут быть положительными или отрицательными. На основании теоремы о взаимности перемещений побочные коэффициенты $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Свободные члены канонических уравнений Δ_{1p}, и Δ_{2p} еще называют *грузовыми членами*, так как они представляют собой перемещения от внешних нагрузок.

Для вычисления коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений строим эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок (единичные эпюры) – рис. 5.1, *г*, *д* и эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок (грузовые эпюры) – рис. 5.1, *в*.

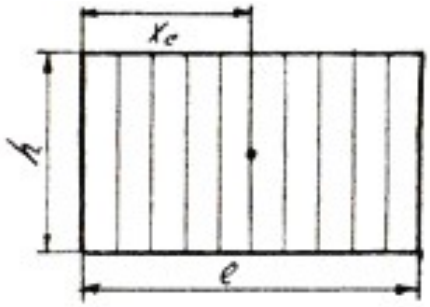
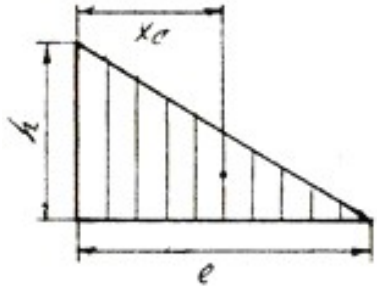
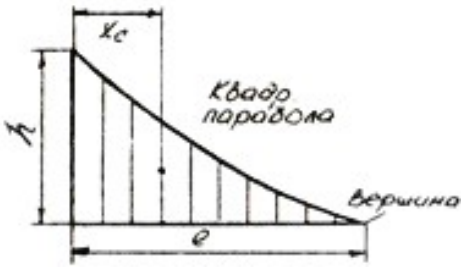
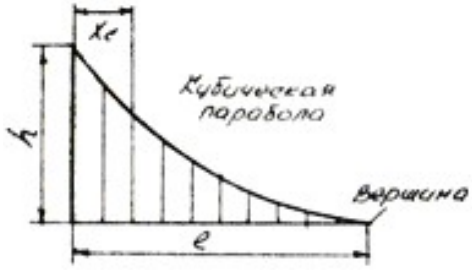
Коэффициенты уравнений и свободные члены находим путем перемножения эпюр по формуле Верещагина (или по формуле Симпсона)

$$\delta = \frac{1}{EJ}\sum \omega M_c^0, \tag{5.3}$$

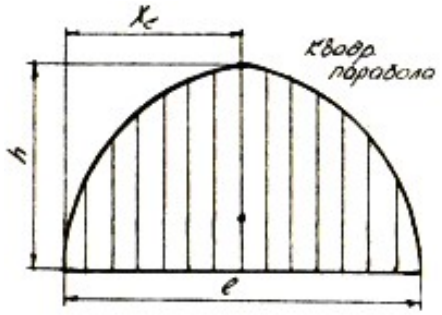
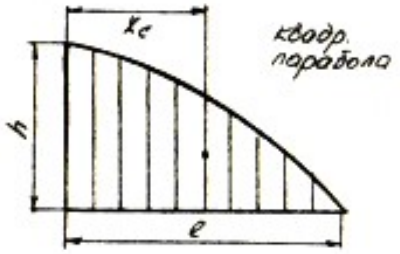
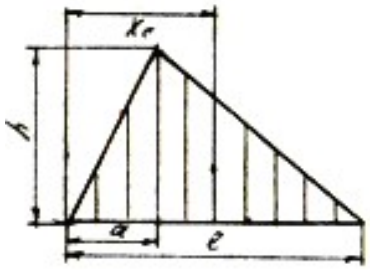
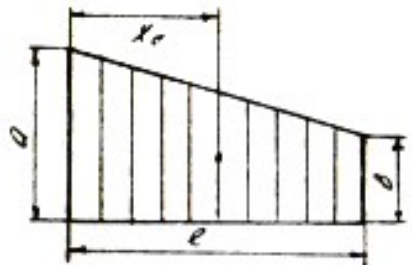
где ω – площадь эпюры изгибающих моментов; M_c^0 – ордината из единичной эпюры напротив центра тяжести грузовой эпюры; EJ – жесткость балки при изгибе.

Формулы для определения площадей и координат их центров тяжести приведены в табл. 5.1**.**

Таблица 5.1

Фигура	ω	x_c
	lh	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{1}{3}lh$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{1}{4}lh$	$\frac{1}{5}l$

Окончание табл. 5.1

Фигура	ω	x_c
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{a+l}{3}$
	$l\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a+2b)}{3(a+b)}l$

Главные коэффициенты δ_{11} и δ_{22} находим в результате перемножения единичных эпюр M_1^0, M_2^0 самих на себя

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_1^0 M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{3}\right);$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_2^0 M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_2}{3}+\frac{l_3}{3}\right);$$

Побочные коэффициенты находим путем взаимного перемножения указанных единичных эпюр.

Для определения коэффициента δ_{12} берется площадь эпюры M_2^0 на участке длиной l_2, которая умножается на ординату с эпюры M_1^0

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_2^0 M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\sum\omega_1^0 M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_2\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{l_2}{6\cdot EJ}.$$

Свободные члены уравнений находим путем умножения грузовых эпюр M_p на единичные M_1^0 и M_2^0

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_p M_{c1}^0=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1 M_1^{01}-\omega_2 M_1^{02}+\omega_3 M_1^{03}+\omega_4 M_1^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\frac{b_3}{l_2}+\omega_4\frac{b_4}{l_2}\right),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – площади грузовых эпюр; $M_1^{01}, M_1^{02}, M_1^{03}, M_1^{04}$ – ординаты, взятые из единичной эпюры M_1^0 напротив центров тяжести указанных площадей.

$$\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\sum\omega_p M_{c2}^0=\frac{1}{EJ}\left(\omega_3 M_2^{03}+\omega_4 M_2^{04}+\omega_5 M_2^{05}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\omega_3\frac{a_3}{l_2}+\omega_4\frac{a_4}{l_2}+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right).$$

После подстановки найденных перемещений в канонические уравнения получим

$$\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{3}\right)X_1+\frac{l_2}{6EJ}X_2+\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\frac{b_3}{l_2}+\omega_4\frac{b_4}{l_2}\right)=0;$$

$$\frac{l_2}{6EJ}X_1+\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_2}{3}+\frac{l_3}{3}\right)X_2+\frac{1}{EJ}\left(\omega_3\frac{a_3}{l_2}+\omega_4\frac{a_4}{l_2}+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right)=0.$$

Во избежание ошибок при определении «лишних» неизвестных необходимо проверить правильность определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для этого необходимо построить суммарную эпюру единичных моментов M_Σ^0.

При умножении по правилу Верещагина суммарной единичной эпюры M_{Σ}^{0} на единичную эпюру M_{1}^{0} должна получиться сумма коэффициентов первого канонического уравнения

$$\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+\frac{l_2}{2}\right).$$

При умножении суммарной эпюры M_{Σ}^{0} на эпюру M_{2}^{0} должна получиться сумма коэффициентов второго канонического уравнения

$$\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_3}{3}+\frac{l_2}{2}\right).$$

Эта проверка называется построчной.

Произведение суммарной единичной эпюры саму на себя должно быть равным сумме всех коэффициентов канонических уравнений

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_1\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(l_2\cdot 1\cdot 1\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l_3\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(\frac{l_1}{3}+l_2+\frac{l_3}{3}\right).$$

Эта проверка называется универсальной.

Правильность определения грузовых членов уравнений состоит в следующем: их сумма должна равняться произведению грузовой эпюры M_p на суммарную единичную эпюру M_{Σ}^{0}

$$\Delta_{1p}+\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1}-\omega_2\frac{a_2}{l_1}+\omega_3\cdot 1+\omega_4\cdot 1+\omega_5\frac{b_5}{l_3}\right).$$

Убедившись в правильности определения коэффициентов и свободных членов уравнений методом последовательного исключения, находим «лишние» неизвестные X_1 и X_2 из канонических уравнений. При правильном определении «лишних» неизвестных после их подстановки в канонические уравнения, последние должны обращаться в тождества.

Учитывая опорные моменты и внешние нагрузки, определяют по уравнениям статики опорные реакции, строят эпюру поперечных сил Q_x и эпюру изгибающих моментов M_x.

Порядок решения неразрезной балки методом сил сводится к следующему:

1. Определяют степень статической неопределимости балки;

2. Выбирают основную систему (тем самым выбираются «лишние» неизвестные);

3. По числу «лишних» неизвестных составляются канонические уравнения;

4. Строят эпюры изгибающих моментов от действующих на основную систему внешних нагрузок – грузовые эпюры;

5. В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладывают единичные моменты и строят эпюры изгибающих моментов от этих единичных моментов – единичные эпюры;

6. Вычисляют главные, побочные коэффициенты и свободные члены канонических уравнений и проверяют правильность их вычисления;

7. Методом последовательного исключения неизвестных решают канонические уравнения и определяют «лишние» неизвестные с последующей проверкой;

8. С помощью уравнений равновесия определяют опорные реакции заданной балки с последующей проверкой;

9. Строят эпюры поперечных сил Q_x и изгибающих моментов M_x;

10. Подбирают поперечное сечение балки заданного профиля;

11. Производят проверку на прочность и жесткость балки, если это требуется по условию задачи.

Пример 5.1.

Для заданной схемы стальной неразрезной балки (рис. 5.2, *а*) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
2. Подобрать поперечное сечение двутаврового профиля (см. табл. П. 1), если $\sigma_{adm} = 160\,\text{МПа}$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение.

Определяем степень статической неопределимости балки. Она равна двум (числу опор без двух плюс единица из-за наличия жесткой заделки) и выбираем основную систему.

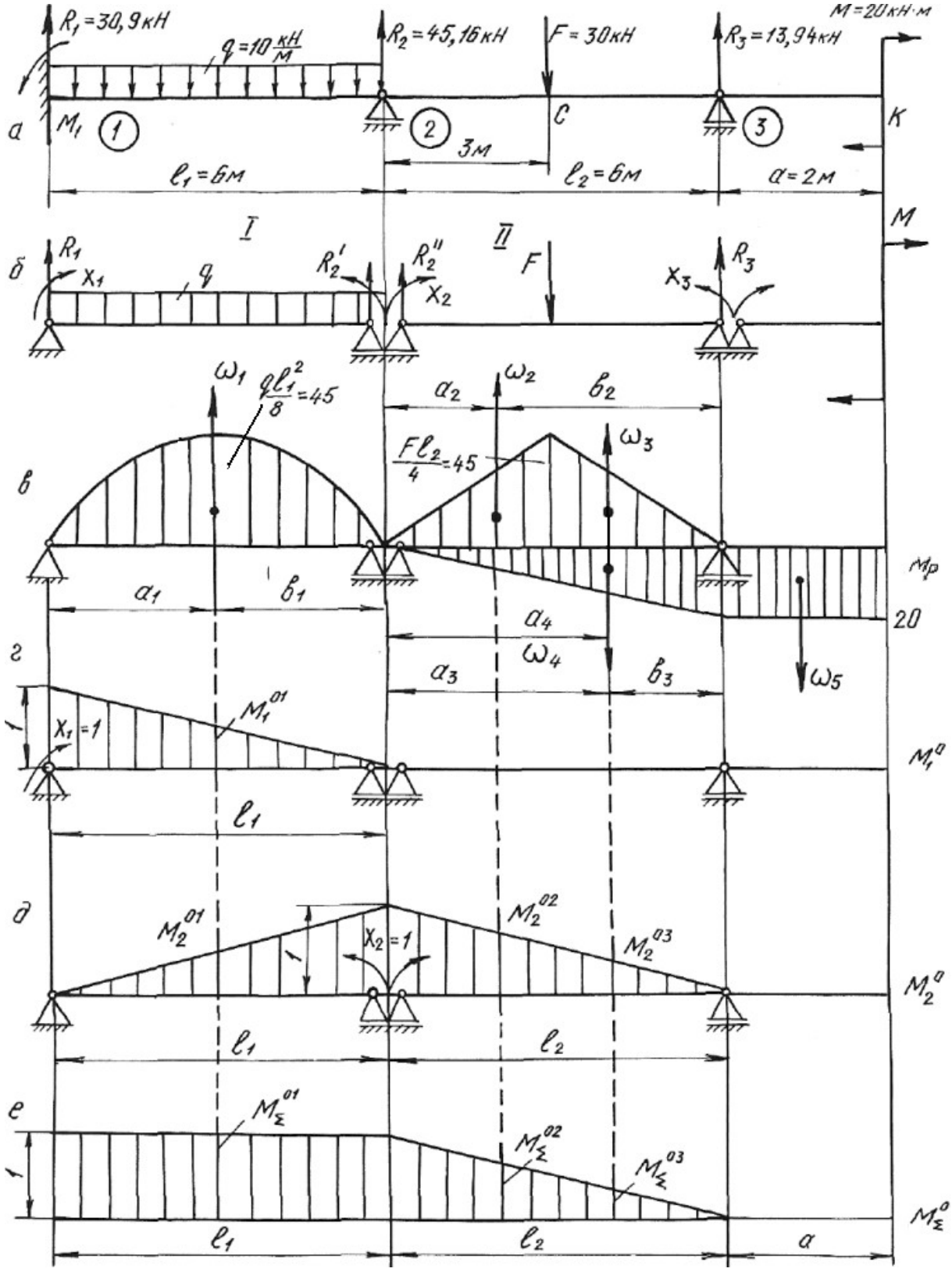
В качестве «лишних» неизвестных принимаются опорные моменты. Основная система показана на рис. 5.2, *б*.

Составляем канонические уравнения:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения главных, побочных коэффициентов и свободных членов уравнений строим единичные эпюры M_1^0 (рис. 5.2, *г*), M_2^0 (рис. 5.2, *д*) и суммарную единичную эпюру M_Σ^0 (рис. 5.2, *е*). Грузовые эпюры M_p представлены на рис. 5.2, *в*.



$R_1 = 30,9$ кН
$q = 10\ \frac{кН}{м}$
$R_2 = 45,16$ кН
$F = 30$ кН
$R_3 = 13,94$ кН
$M = 20$ кН·м
а
M_1
1
2
3
C
K
3м
$l_1 = 6$м
$l_2 = 6$м
$a = 2$м
I
II
M
б
R_1
X_1
q
R_2'
R_2''
X_2
F
X_3
R_3
ω_1
$\frac{ql_1^2}{8} = 45$
a_2
ω_2
b_2
$\frac{Fl_2}{4} = 45$
ω_3
в
M_p
a_1
b_1
a_4
20
ω_4
a_3
b_3
ω_5
г
$X_1 = 1$
M_1^{01}
M_1^0
l_1
д
M_2^{01}
$X_2 = 1$
M_2^{02}
M_2^{03}
M_2^0
l_1
l_2
е
M_Σ^{01}
M_Σ^{02}
M_Σ^{03}
M_Σ^0
l_1
l_2
a

Рис. 5.2.

Путем умножения эпюр M_1^0 и M_2^0 самих на себя, находим значения главных коэффициентов:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{2{,}0}{EJ};$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(2{,}0+2{,}0\right)=\frac{4{,}0}{EJ}.$$

Побочные коэффициенты определяем путем взаимного перемножения единичных эпюр M_1^0 и M_2^0

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_1\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}.$$

Находим свободные (грузовые) члены уравнений, перемножая эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок на единичные эпюры.

Площади грузовых эпюр:

$$\omega_1=\frac{2}{3}h_1l_1=\frac{2}{3}\cdot 4{,}5\cdot 10^4\cdot 6=18\cdot 10^4\ \text{Н}\cdot\text{м}^2;$$

$$\omega_2=\omega_3=\frac{1}{2}h_2\frac{l_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot 4{,}5\cdot 10^4\cdot 3=6{,}75\cdot 10^4\ \text{Н}\cdot\text{м}^2;$$

$$\omega_4=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^3\cdot 6=6\cdot 10^4\ \text{Н}\cdot\text{м}^2.$$

Расстояния $a_1=b_1=3$ м; $a_2=b_3=2$ м; $b_2=a_3=4$ м; $a_4=4$ м.

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1M_1^{01}\right)=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{9\cdot 10^4}{EJ},$$

где M_1^{01}– ордината единичной эпюры M_1^0 напротив центра тяжести площади грузовой эпюры ω:

$$\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1M_2^{01}+\omega_2M_2^{02}+\omega_3M_2^{03}-\omega_4M_2^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1-6\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{4}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}\right)=$$

$$=\frac{15{,}75\cdot 10^4}{EJ}-\frac{2\cdot 10^4}{EJ}=\frac{13{,}75\cdot 10^4}{EJ},$$

где M_2^{01}, M_2^{02}, M_2^{03}, M_2^{04}– ординаты единичной эпюры M_2^0 напротив центров тяжести площадей грузовых эпюр ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Производим проверку правильности определения коэффициентов и свободных членов уравнений, для чего строим суммарную единичную эпюру M_Σ^0.

Построчная проверка. Перемножая суммарную единичную эпюру M_{Σ}^{0} на единичную эпюру M_{1}^{0}, должны получить сумму коэффициентов первого канонического уравнения

$$\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+0\right)=\frac{3}{EJ}.$$

При перемножении эпюры M_{Σ}^{0} на единичную эпюру M_{2}^{0} должны получить сумму коэффициентов второго канонического уравнения:

$$\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{5{,}00}{EJ}.$$

Универсальная проверка. Умножаем суммарную единичную эпюру M_{Σ}^{0} саму на себя. Должны получить сумму всех коэффициентов канонических уравнений:

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot l_1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot l_2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{1}{EJ}\left(1\cdot 6\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{8{,}00}{EJ}.$$

Проводим проверку правильности определения грузовых членов уравнений.

Перемножением грузовой эпюры M_p на суммарную единичную эпюру M_{Σ}^{0} должны получить сумму свободных членов уравнений:

$$\Delta_{1p}+\Delta_{2p}=\frac{1}{EJ}\left(\omega_1 M_{\Sigma}^{01}+\omega_2 M_{\Sigma}^{02}+\omega_3 M_{\Sigma}^{03}-\omega_4 M_{\Sigma}^{04}\right)=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left(18\cdot 10^4\cdot 1+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{4}{6}+6{,}75\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}-6\cdot 10^4\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{22{,}75\cdot 10^4}{EJ}.$$

Подставляем коэффициенты и свободные члены в канонические уравнения:

$$\frac{2{,}00}{EJ}X_1+\frac{1{,}00}{EJ}X_2+\frac{9\cdot 10^4}{EJ}=0.$$

$$\frac{1{,}00}{EJ}X_1+\frac{4{,}0}{EJ}X_2+\frac{13{,}75\cdot 10^4}{EJ}=0.$$

После сокращения на жесткость получаем:

$$2{,}00X_1+1{,}00X_2+9\cdot 10^4=0.$$

$$1{,}00X_1+4{,}00X_2+13{,}75\cdot 10^4=0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$X_1=M_1=-3{,}18\cdot 10^4\ \text{Н·м}=-31{,}8\ \text{кН·м},$$

$$X_2 = M_2 = -2{,}64 \cdot 10^4 \text{ Нм} = -26{,}4 \text{ кН·м}.$$

На опоре № 3 (см. рис. 5.2, *а*) опорный момент будет равен моменту M со знаком минус:

$$X_3 = M_3 = -20 \text{ кН·м}.$$

Подставив найденные значения «лишних» неизвестных в канонические уравнения, убеждаемся в том, что эти уравнения превращаются в тождества.

Определяем опорные реакции заданной балки из уравнений статики:

$$\sum M_1^{\text{I}} = 0; \quad R_2^1 l_1 + M_2 - \frac{q l_1^2}{2} - M_1 = 0;$$

$$R_2^{'} = -\frac{M_2}{l_1} + \frac{q l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = \frac{26{,}4}{6} + \frac{10 \cdot 6}{2} - \frac{31{,}8}{6} = 29{,}1 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2^{\text{I}} = 0; \quad -R_1 l_1 - M_1 + \frac{q l_1^2}{2} + M_2 = 0;$$

$$R_1 = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{q l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1} = \frac{31{,}8}{6} + \frac{10 \cdot 6}{2} - \frac{26{,}4}{6} = 30{,}9 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2^{\text{II}} = 0; \quad M_3 + R_3 l_3 - F\frac{l_2}{2} - M_2 = 0;$$

$$R_3 = -\frac{M_3}{l_2} + \frac{F}{2} + \frac{M_2}{l_2} = \frac{20}{6} + \frac{30}{2} - \frac{26{,}4}{6} = 13{,}94 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3^{\text{II}} = 0; \quad -M_2 - R_2^2 l_2 + P\frac{l_2}{2} + M_3 = 0;$$

$$R_2^{''} = -\frac{M_2}{l_2} + \frac{F}{2} + \frac{M_3}{l_2} = \frac{26{,}4}{6} + \frac{30}{2} - \frac{20}{6} = 16{,}06 \text{ кН}.$$

Окончательно:

$$R_1 = 30{,}9 \text{ кН}; R_2 = R_2^{'} + R_2^{''} = 29{,}1 + 16{,}06 = 45{,}16 \text{ кН}; \; R_3 = 13{,}94 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad R_1 + R_2 + R_3 - F - q \cdot l_1 = 0; \quad 30{,}9 + 45{,}16 + 13{,}94 - 30 - 10 \cdot 6 = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил Q_x и эпюру изгибающих моментов M_x по правилам, принятым при построении эпюр для статически определимых балок (рис. 5.3**).**

$Q_1 = R_1 = 30{,}9$ кН;

$Q_2 = R_1 - q \cdot l_1 = 30{,}9 - 10 \cdot 6 = -29{,}1$ кН;

Затем скачок вверх на $R_2 = 45{,}16$ кН.

На участке от опоры 2 до сечения C: $Q_x = 16{,}06$ кН.

Затем скачок вниз в сечении C на силу F, $Q_C = 16{,}06 - 30 = -13{,}94$ кН.

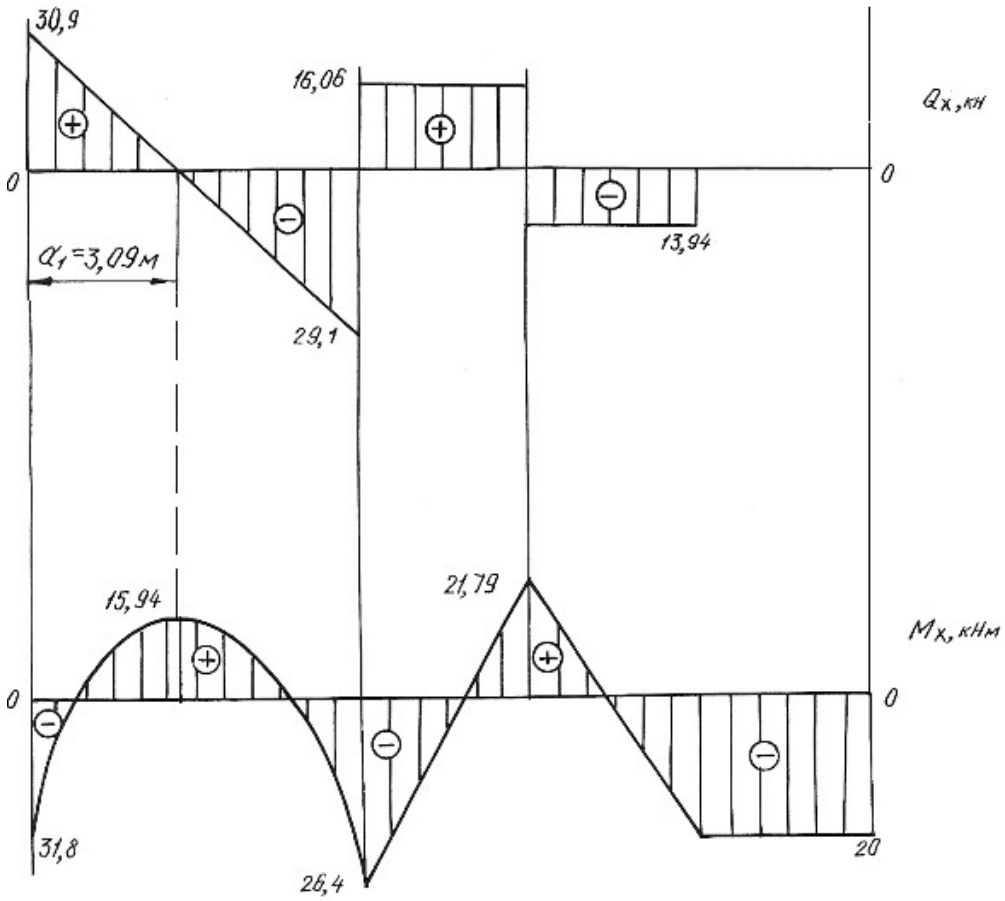


Рис. 5.3.

Находим расстояние *a*

$$\frac{30,9}{a_1}=\frac{29,1}{6-a_1},\ a_1=3,09\ \text{м}.$$

На участке от сечении *C* до опоры 3

$$Q_{C-3}=-13,94\ \text{кН}.$$

В левом крайнем сечении $M_x=-M_1=-31,8\ \text{кН}\cdot\text{м}$.

При $x=a_1=3,09\,\text{м}$

$$M_x=R_1a_1-\frac{qa_1^2}{2}-M_1=30,9\cdot3,09-\frac{10\cdot3,09^2}{2}-31,8=15,94\ \text{кН}\cdot\text{м}$$

В сечении над опорой 2

$$M_x=-M_1+R_1l_1-\frac{ql_1^2}{2}=-31,8+30,9\cdot6-\frac{10\cdot6^2}{2}=-26,4\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

До сечения *C* расчет производим справа:

$$M_k=-M=-20\ \text{кН}\cdot\text{м},$$

$$M_C=-M+R_3\cdot3=-20+13,93\cdot3=21,79\ \ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

На участке балки от сечения *K* до опоры 3: $M_x = -20$ кН·м.

По сортаменту проката в соответствии с ГОСТ 8239-89 подбираем поперечное сечение двутаврового профиля, используя условие прочности

$$M_{\max} \le \sigma_{adm} \cdot W_{н.о.},$$

откуда $W_{н.о.} \ge \dfrac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \dfrac{31{,}8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1{,}98 \cdot 10^{-4}$ м^3 $= 198$ см^3.

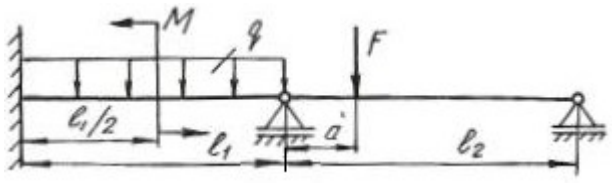
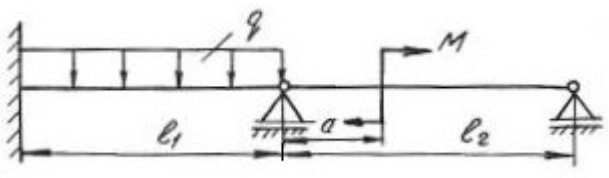
Принимаем двутавр № 20а, для которого $W_{н.о.} = W_x^{табл.} = 203$ см^3, $J_{н.о.} = J_x^{табл.} = 2030$ см^4, $A = 28{,}9$ см^2.

5.2. Задания для расчета статически неопределимых балок

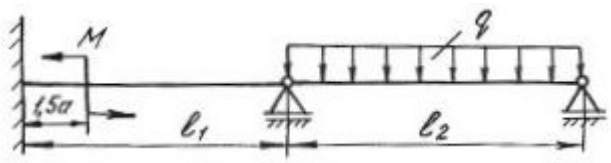
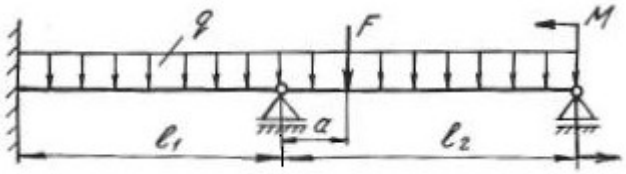
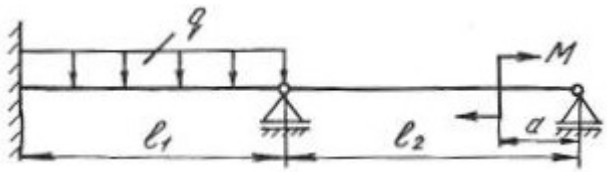
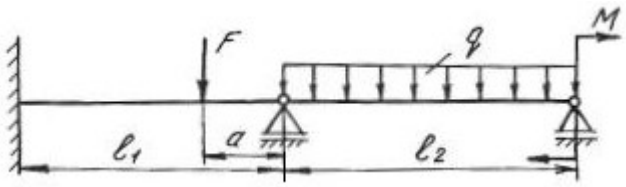
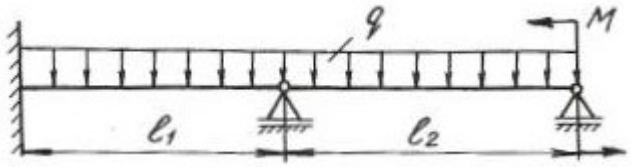
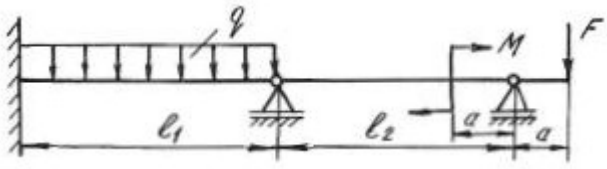
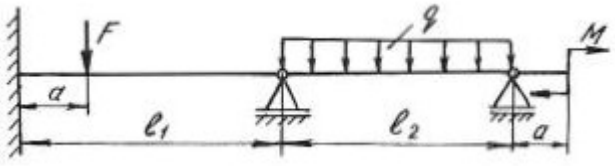
Для заданной схемы неразрезной балки при заданных значениях длин и нагрузок в соответствии с указанным номером варианта требуется:

1. Определить степень статической неопределимости балки, выбрать основную систему.
2. Составить канонические уравнения по методу сил.
3. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений. Проверить правильность их определения.
4. После определения неизвестных построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
5. Подобрать поперечное сечение балки двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа. Данные для расчета взять из табл. 5.2.

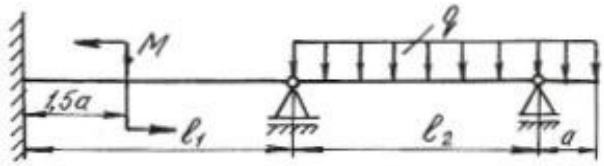
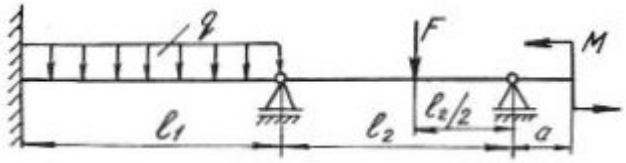
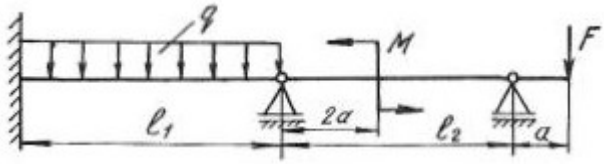
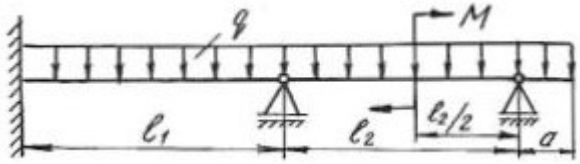
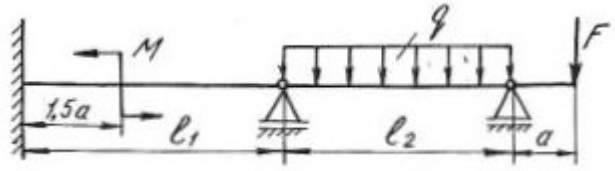
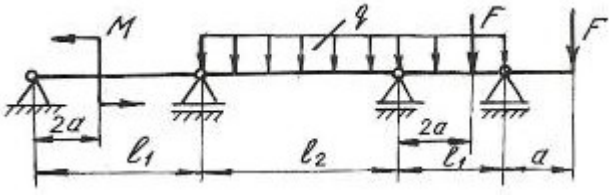
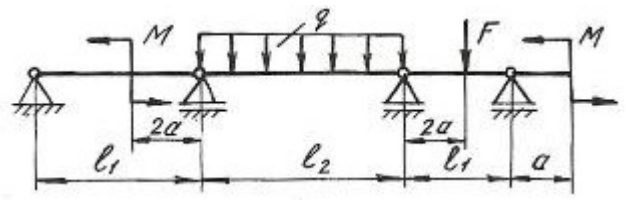
Таблица 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер варианта	*M*, кН·м	*F*, кН	*q*, кН/м	l_1, м	l_2, м	*a*, м
	1	10	10	15	3,5	5,0	0,5
	2	20	11	15	2,5	4,0	0,5
	3	30	12	15	4,0	4,0	0,5
	4	15	13	10	3,0	5,5	0,5
	5	20	14	10	3,5	5,0	0,5
	6	25	15	10	2,5	5,0	0,4

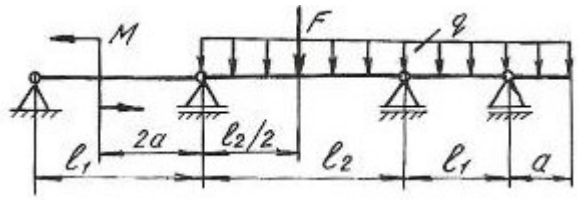
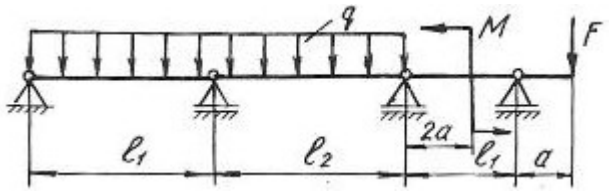
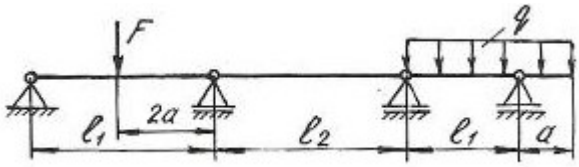
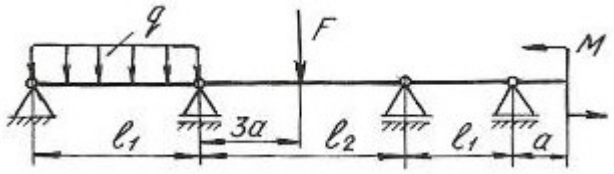
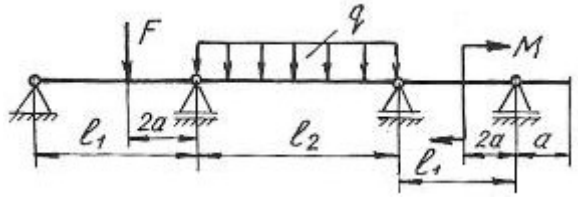
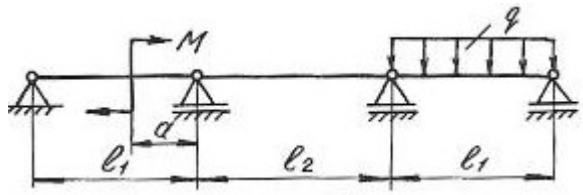
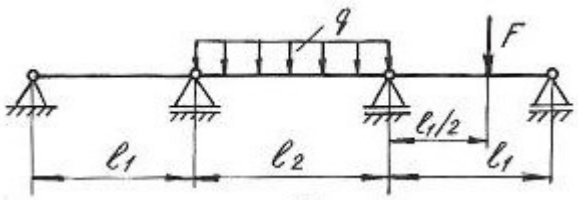
Продолжение табл. 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер вари-анта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	l_1, м	l_2, м	a, м
	7	10	10	10	5,0	5,0	0,4
	8	15	11	15	3,5	6,0	0,6
	9	20	12	20	3,5	5,0	0,4
	10	10	15	20	4,0	5,0	0,4
	11	20	20	10	2,0	5,0	0,5
	12	30	25	10	3,0	4,0	0,6
	13	30	11	15	2,0	5,0	0,4
	14	40	10	15	4,5	5,0	0,5
	15	20	12	15	3,5	5,5	0,6
	16	15	12	10	3,5	4,5	0,5
	17	20	10	10	2,6	5,2	0,4
	18	25	11	10	2,0	5,0	0,8
	19	25	20	20	3,5	6,0	0,5
	20	20	25	15	3,0	5,5	0,8
	21	15	10	10	3,5	3,5	0,8
	22	20	10	10	3	5	0,5
	23	30	11	10	4	6	0,4
	24	25	12	10	5	6	0,6
	25	20	15	10	2	3	0,4
	26	30	16	10	3	4	0,5
	27	40	20	10	4	5	0,6

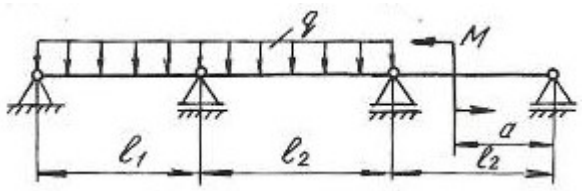
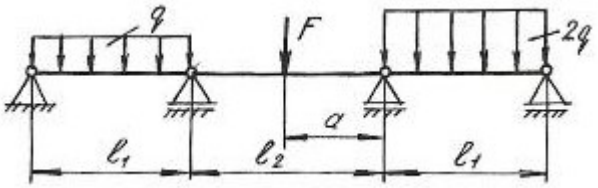
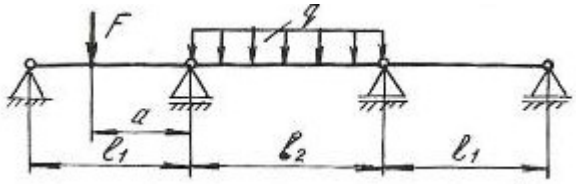
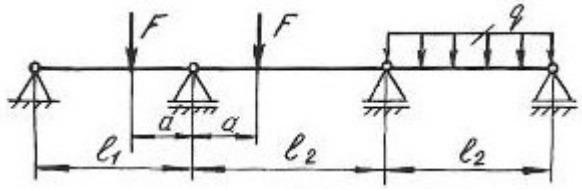
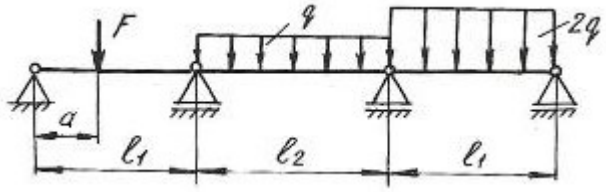
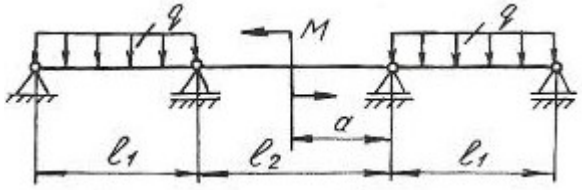
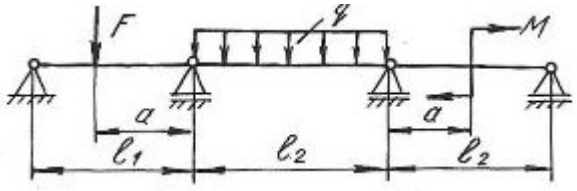
Продолжение табл. 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер вари-анта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	l_1, м	l_2, м	a, м
	28	15	10	15	3	5	0
	29	20	15	15	4	6	0,5
	30	25	20	15	5	6	0,4
	31	30	12	20	2	3	0,4
	32	35	14	15	3	4	0,5
	33	40	16	20	2,5	5	0,6
	34	10	20	10	3	5,5	0,4
	35	15	15	15	2,5	4	0,5
	36	20	10	20	5	6	0,6
	37	20	12	15	4	6	0,4
	38	15	14	20	3,5	4	0,6
	39	10	16	25	4	5	0,5
	40	10	10	30	2,5	4	0,4
	41	15	20	20	3	5	0,5
	42	20	30	10	4	6	0,6
	43	10	15	10	3	5	0,4
	44	20	25	12	4	5	0,5
	45	30	35	14	5	6	0,6
	46	40	10	10	2	5	0,5
	47	20	25	16	3	4	0,6
	48	10	30	10	4	6	0,4

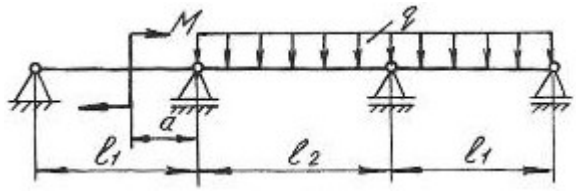
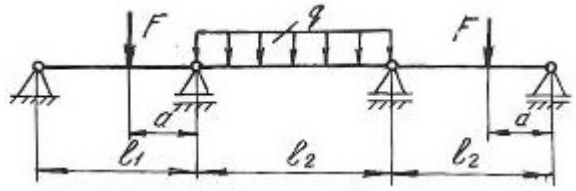
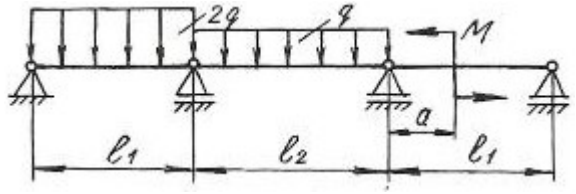
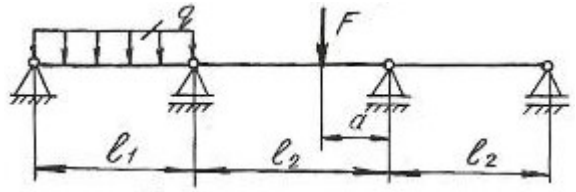
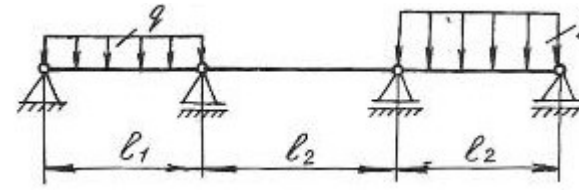
Продолжение табл. 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер вари-анта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	l_1, м	l_2, м	a, м
	49	30	25	12	5	6	0,5
	50	15	15	15	6	5	0,4
	51	10	20	20	2	4	0,6
	52	10	20	10	4	5	0,5
	53	20	15	12	5	6	0,5
	54	30	40	14	4	6	0,5
	55	25	20	16	3	4	0,4
	56	35	30	10	5	6	0,5
	57	40	15	12	4	5	0,6
	58	10	20	14	5	6	0,6
	59	15	30	16	2	4	0,5
	60	20	40	10	4	5	0,4
	61	25	10	12	3	5	0,3
	62	35	15	14	5	6	0,6
	63	40	20	16	6	4	0,5
	64	10	–	10	3	4	0,5
	65	20	–	15	4	5	0,6
	66	30	–	12	5	6	0,4
	67	–	12	40	2	3	0,6
	68	–	14	30	3	4	0,5
	69	–	16	25	4	5	0,4

Продолжение табл. 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер вари-анта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	l_1, м	l_2, м	a, м
	70	30	–	20	4	5	0,4
	71	20	–	15	3	4	0,6
	72	40	–	30	2	3	0,8
	73	–	20	20	3	3	0,5
	74	–	15	15	4	5	0,5
	75	–	16	30	5	6	0,5
	76	–	40	20	4	5	0,4
	77	–	30	10	3	5	0,5
	78	–	20	12	2	3	0,6
	79	–	10	20	2	3	0,6
	80	–	12	15	4	5	0,8
	81	–	15	10	6	6	0,5
	82	–	20	12	3	4	0,5
	83	–	10	15	4	5	0,6
	84	–	15	20	5	6	0,8
	85	20	–	12	3	5	0,5
	86	30	–	15	4	6	0,6
	87	40	–	20	5	6	0,8
	88	10	20	12	3	4	0,4
	89	15	30	14	4	6	0,6
	90	20	40	16	5	5	0,5

Окончание табл. 5.2

Схема закрепления и нагружения балки	Номер вари-анта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	l_1, м	l_2, м	a, м
	91	12	–	20	5	6	0,5
	92	15	–	30	4	5	0,5
	93	20	–	40	6	4	0,4
	94	–	20	12	5	6	0,5
	95	–	30	15	4	5	0,6
	96	–	40	16	6	4	0,4
	97	20	–	20	3	4	0,5
	98	30	–	30	4	5	0,5
	99	40	–	40	5	6	0,6
	100	–	12	10	6	4	0,4
	101	–	15	15	3	3	0,5
	102	–	20	20	4	5	0,6
	103	–	–	20	5	5	0,8
	104	–	–	30	6	6	0,6
	105	–	–	40	4	8	0,5

5.3. Статически неопределимые рамы

Плоской рамой называется геометрически неизменяемая система, состоящая из стержней, лежащих в одной плоскости и жестко соединенных между собой. Горизонтальные стержни рам называются *ригелями*, вертикальные – *стойками.*

Статически неопределимой рамой называется такая геометрически неизменяемая система, у которой реакции или все внутренние суммарные силовые факторы, возникающие в сечениях ее элементов при действии произвольной нагрузки, не могут быть определены из уравнений статики.

Расчет статически неопределимой рамы сводится к построению эпюр изгибающих моментов M_x, поперечных сил Q_x и нормальных сил N_x, на основании которых подбираются сечения, или проверяются напряжения в опасных сечениях различных элементов, или определяется несущая способность системы.

В пособии рассмотрено только построение эпюр M_x, Q_x, N_x, а также подбор поперечного сечения, так как это наиболее трудоемкая часть расчета.

Степень статической неопределимости плоской рамы определяется следующим образом:

1. Замкнутый контур (рама, оба конца которой жестко защемлены) имеет степень статической неопределимости, равную трем.

2. Наличие шарнира в раме понижает степень статической неопределимости на единицу.

3. Наличие подвижной опоры также понижает степень статической неопределимости на единицу.

Определение усилий в статически неопределимой раме связано с необходимостью составления дополнительных уравнений – уравнений совместности деформаций. Число этих уравнений должно быть равно степени статической неопределимости рамы.

Прежде, чем составлять уравнение деформаций, следует превратить заданную статически неопределимую раму в статически определимую, геометрически неизменяемую, устранив из нее «лишние» связи. Такая система называется *основной* системой.

Если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции устраненных связей, то деформации этой системы и возникающие в ней внутренние усилия, будут такими же, как и в заданной системе. То есть, обе системы будут эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющихся связей перемещений быть не может. Поэтому, в основной системе перемещения в направлении отброшенных связей должны быть равны нулю.

Способ расчета статически неопределимых систем, при котором за «лишние» неизвестные принимаются силы и моменты, называется *методом сил.*

Данный метод рассмотрен при расчете статически неопределимых неразрезных балок в начале этой главы. Определение коэффициентов уравнений и грузовых членов и их проверки рассмотрены также при расчете балок.

Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

При расчете рам на прочность в каждом поперечном сечении необходимо определять три силовых фактора: продольную силу N_x, поперечную силу Q_x, изгибающий момент M_x.

Продольная сила N_x равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону от сечения на продольную ось бруса. Если сила вызывает растяжение, она положительна, сжатие – отрицательна.

При построении эпюр продольных сил их значения откладываются симметрично от оси бруса в обе стороны с указанием знака.

Поперечная сила Q_x равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси бруса всех сил, действующих по одну сторону от сечения.

Если поперечная сила относительно сечения вращает часть бруса по часовой стрелке, то она положительна. Противоположное направление следует считать отрицательным. Условимся положительные ординаты откладывать снаружи контура, отрицательные – внутри.

При построении эпюр поперечных сил их значения откладываются по одну сторону от оси бруса с указанием знака.

Изгибающий момент M_x равен сумме моментов всех сил, взятых по одну сторону от сечения, относительно оси, проходящей через центр сечения перпендикулярно плоскости рамы. Условно принято построение эпюр изгибающих моментов со стороны растянутых волокон.

Общий порядок расчета статически неопределимых рам по методу сил сводится к следующему.

1. Определяют степень статической неопределимости рамы.
2. Удаляют «лишние» связи. Полученную таким образом основную систему загружают заданными силами и реакциями отброшенных связей.
3. В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладывают единичные силы и строят эпюры изгибающих моментов от единичных сил, а также суммарную единичную эпюру.
4. Строят эпюры изгибающих моментов от действующих на основную систему внешних нагрузок.
5. Вычисляют главные, побочные коэффициенты и свободные члены канонических уравнений и проверяют правильность их определения.
6. Составляют и решают канонические уравнения, определяя «лишние» неизвестные.
7. Определяют остальные реакции с помощью уравнений статики.

8. Вычисляют значения изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил и строят эпюры.

9. Подбирают поперечное сечение заданного профиля.

Пример 5.2.

Для заданной схемы статически неопределимой рамы (рис. 5.4, *а*), при заданных значениях длин и нагрузок, построить эпюры изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил. Жесткости стоек и ригеля одинаковы.

Решение.

Заданная система освобождается от наложенных на нее связей. Действия связей заменяются реакциями. Установим степень статической неопределимости рамы: 3(замкнутый контур) − 2(наличие двух шарниров) = 1, т. е. рама однажды статически неопределима.

За «лишнюю» неизвестную X_1 принимаем реакцию H_b. Нагружаем основную систему (рис. 5.4, *б*) заданными внешними силами и реакцией отброшенной связи. Выбирая основную систему, необходимо помнить, что она должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

В месте действия «лишней» неизвестной и по направлению ее действия прикладываем единичную силу $X_1 = 1$ и строим единичную эпюру.

Рассмотрим подробно построение этой эпюры. Покажем реакции опор (рис. 5.5), их три. Определим эти реакции по уравнениям статики:

$$\sum X = 0; \qquad H'_a - X_1 = 0; \qquad H'_a = 1;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -X_1 \cdot 3 + R'_b \cdot 4 = 0; \qquad R'_b = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -H'_a \cdot 3 + R'_a \cdot 4 = 0; \quad R'_a = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Проверка правильности вычисления реакций:

$$\sum Y = 0; \qquad -R'_a + R'_b = 0; \qquad 0 = 0.$$

Получили тождество, следовательно, реакции определены правильно.

Разбиваем раму на участки, граница участка там, где приложены сосредоточенные силы и для рамы граница участка, где жестко соединяется стойка с ригелем. Участков три, находим значения изгибающих моментов на границах участков. На всех участках эпюра изгибающих моментов очерчена наклонной прямой, эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5.4, *в*.

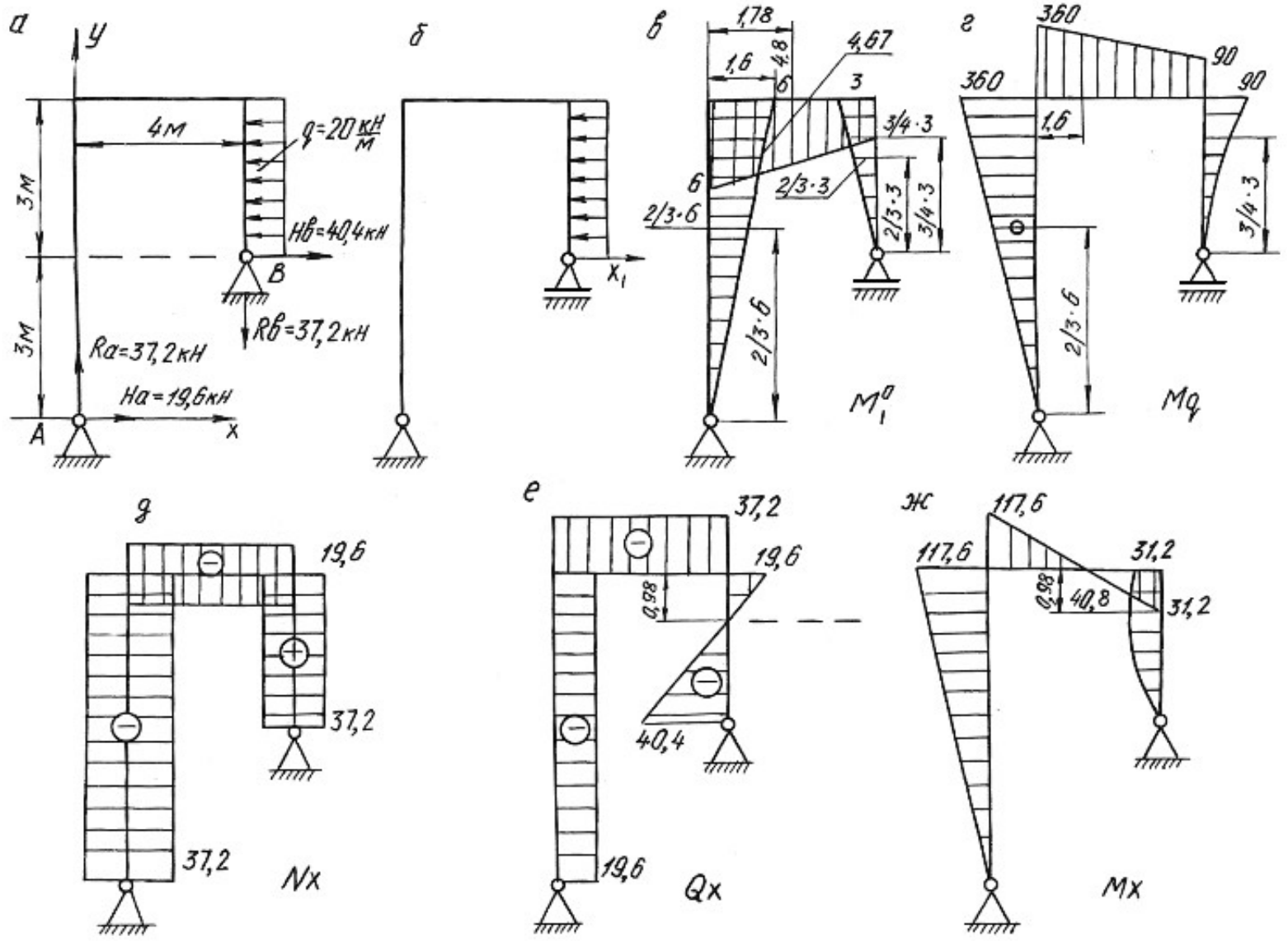

а
y
4м
q=20 кН/м
3м
HB=40,4кН
B
3м
RB=37,2кН
Ra=37,2кН
Ha=19,6кН
A
x
б
x1
в
1,78
1,6
4,8
4,67
6
3
3/4·3
6
2/3·3
2/3·6
2/3·3
3/4·3
2/3·6
M1q
г
360
90
360
90
1,6
3/4·3
2/3·6
Mq
д
19,6
37,2
37,2
Nx
е
37,2
19,6
0,98
40,4
19,6
Qx
ж
117,6
117,6
31,2
0,98
40,8
31,2
Mx

Рис. 5.4.

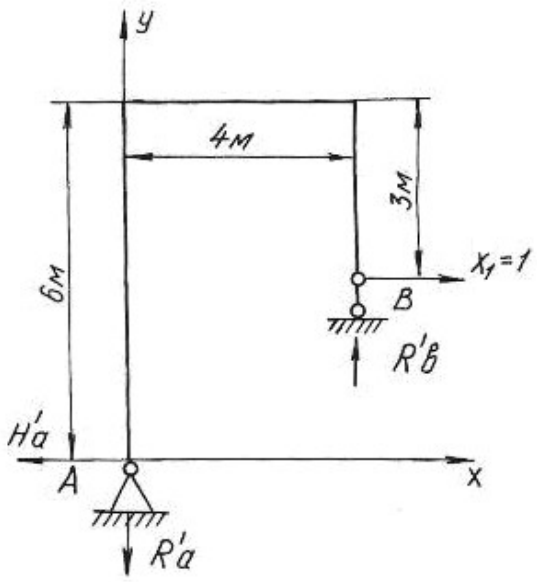


Рис. 5.5.

Строим эпюру изгибающих моментов от действия на основную систему внешней равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 5.4, *г*). По приведенной выше методике определяем реакции опор, разбиваем раму на участки, определяем значения изгибающих моментов на границах участков и по контрольным правилам строим эпюру изгибающих моментов.

По числу «лишних» неизвестных записываем канонические уравнения метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0\,.$$

Перемещение δ_{11} определяется перемножением единичной эпюры самой на себя

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ},$$

где ω_1^0 – площадь единичной эпюры; M_{c1}^0 – ордината единичной эпюры под ее центром тяжести.

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}6\cdot 6\right)\left[\frac{2}{3}\cdot 6\right] + \left(\frac{1}{2}3\cdot 3\right)\left[\frac{2}{3}\cdot 3\right] + \left(\frac{(3+6)}{2}4\right)[4{,}67]\right\} = \frac{165{,}06}{EJ}.$$

На участке по ригелю площадь эпюры изгибающих моментов представлена трапецией. Посмотрим подробнее как определить центр тяжести площади, площадь и ординату под ее центром тяжести (рис. 5.6).

$$C=\frac{4\left(2\cdot 3+6\right)}{3\left(3+6\right)}=1,78\text{ м};\quad \omega_0=\frac{1}{2}\left(3+6\right)\cdot 4=18\text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

где ω_0 –площадь трапеции.

$$M_c^0=\left(3+1,67\right)=4,67\text{ кН}\cdot\text{м},$$

где M_c^0 – ордината под центром тяжести трапеции.

Отрезок $1,67$ определяем из подобия треугольников $3:4=x:2,22$.

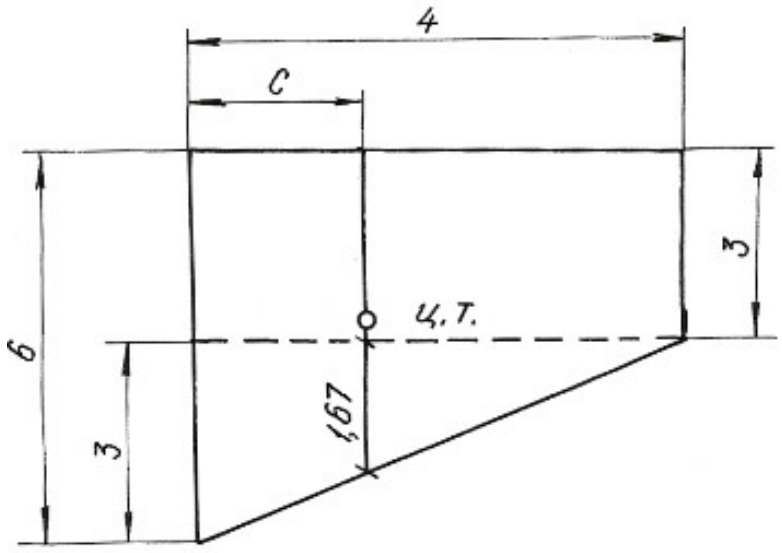


Рис. 5.6.

Перемещение Δ_{1p} получаем перемножением грузовой эпюры M_q на единичную M_1^0

$$\Delta_{1p}=\sum\frac{\omega_p M_{c1}^0}{EJ},$$

где ω_p – площадь грузовой эпюры; M_{c1}^0 – ордината с первой единичной эпюры под центром тяжести грузовой.

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{EJ}\left\{-\left(\frac{1}{2}360\cdot 6\right)\left[\frac{2}{3}6\right]-\left(\left(\frac{90+360}{2}\right)\cdot 4\right)[4,8]-\left(\frac{1}{3}90\cdot 3\right)\left[\frac{3}{4}3\right]\right\}=-\frac{6682,5}{EJ}.$$

Полученные значения δ_{11} и Δ_{1p} подставляем в уравнения, определяем X_1:

$$\frac{165{,}06 \cdot X_1}{EJ} - \frac{6682{,}5}{EJ} = 0, \quad X_1 = 40{,}4\,\text{кН}.$$

Зная реакцию $H_b = X_1$, по уравнениям статики определяем R_a, H_a, R_b:

$$\sum X = 0, \qquad H_b + H_a - q \cdot 3 = 0, \qquad H_a = 19{,}6 \text{ кН};$$

$$\sum M_a = 0, \quad H_b \cdot 3 + R_b \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 0, \qquad R_b = 37{,}2 \text{ кН};$$

$$\sum M_b = 0, \quad H_a \cdot 6 - R_a \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0, \qquad R_a = 37{,}2 \text{ кН}.$$

Проверка правильности вычисления реакций:

$$\sum Y = 0, \qquad R_a + R_b = 0.$$

Строим эпюры M_x, Q_x, N_x известным способом. Эпюры приведены на рисунке 5.4, *д*, *е*, *ж*.

Пример 5.3.

Для заданной схемы статически неопределимой рамы (рис. 5.7, *а*)**,** при заданных значениях длин и нагрузок, построить эпюры изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил. Подобрать поперечное сечение двутаврового профиля (см. табл. П. 1) при $\sigma_{adm} = 160$ МПа. Жесткости стойки и ригеля одинаковы.

Решение.

Заданная система освобождается от наложенных на нее связей. Действия связей заменяются реакциями. Установим степень статической неопределимости рамы: 3(замкнутый контур) – 1(наличие одного шарнира) = 2, т. е. рама дважды статически неопределима.

За «лишние» неизвестные принимаем $H_b = X_1$, $R_b = X_2$, тем самым выбираем основную систему. Нагружаем основную систему внешними силами (*q*, *M*) и реакциями отброшенных связей (X_1, X_2). Отбрасывая «лишние» связи, следует помнить, что основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

В местах действия «лишних» неизвестных и по направлению их действия прикладываем единичные силы $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ и строим эпюры изгибающих моментов от этих сил.

Строим эпюры изгибающих моментов от действия на основную систему внешних сил *q* и *M*.

Методика построения эпюр изгибающих моментов от единичных сил и внешних нагрузок, приложенных к основной системе, подробно рассмотрена при решении примера 5.1 и здесь не приводится.

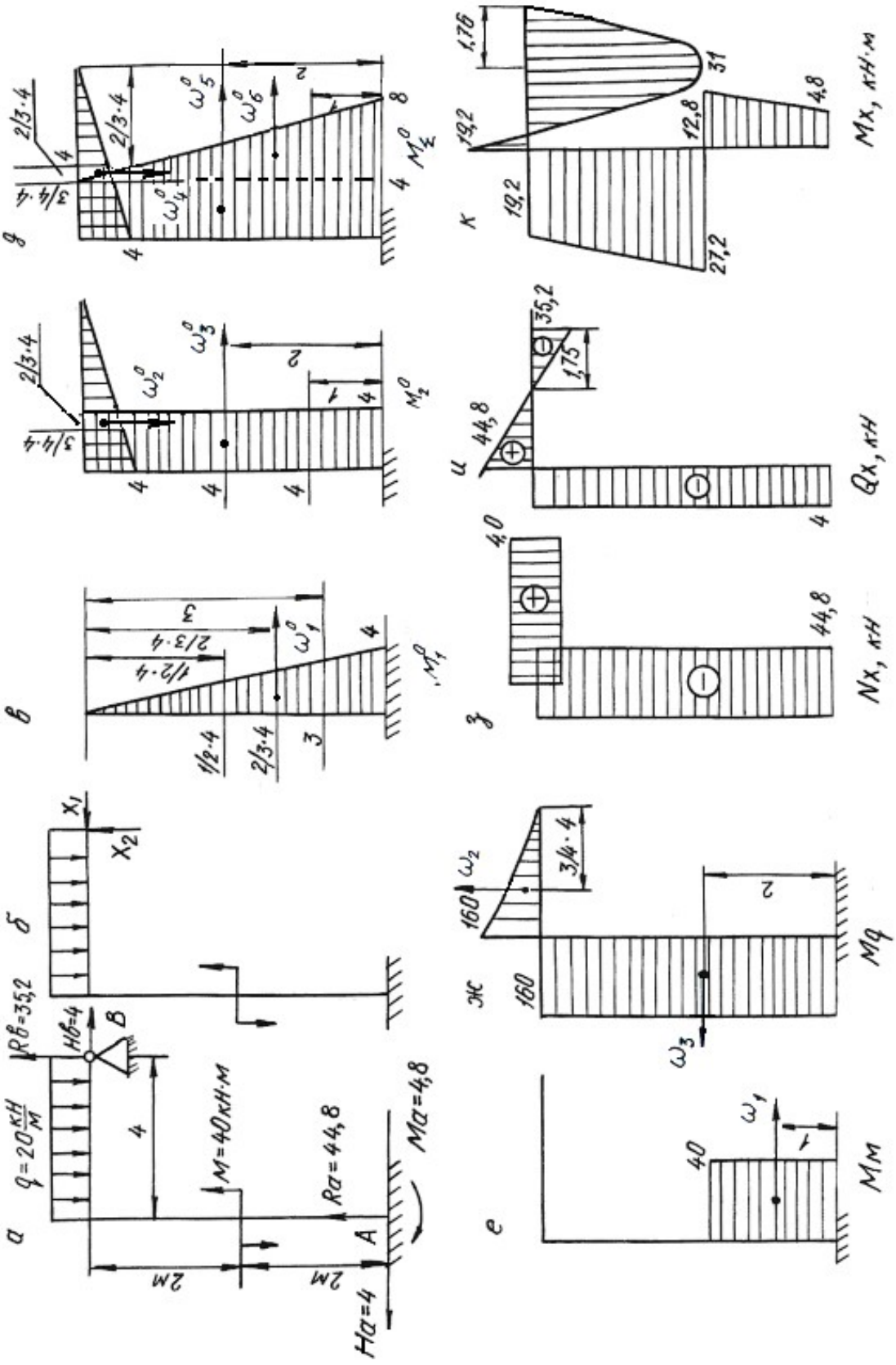


Рис. 5.7.

Составляем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\left[\frac{2}{3}4\right]\right\} = \frac{21{,}3}{EJ},$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\omega_2^0 M_{c2}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\cdot\left[\frac{2}{3}4\right] + (4\cdot 4)[4]\right\} = \frac{85{,}3}{EJ},$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \frac{\omega_2^0 M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\{(4\cdot 4)[2]\} = \frac{32}{EJ},$$

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\omega_p M_{c1}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\{(40\cdot 2)[3] - (160\cdot 4)[2]\} = -\frac{1040}{EJ},$$

$$\Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p \cdot M_{c2}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{(40\cdot 2)[4] - (160\cdot 4)[4] - \left(\frac{1}{3}160\cdot 4\right)\left[\frac{3}{4}4\right]\right\} = -\frac{2880}{EJ}.$$

Проверяем правильность вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для этого строим суммарную единичную эпюру M_Σ^0.

Для проверки правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений применяем универсальную проверку:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{21} = \sum \frac{\omega_\Sigma^0 M_{C\Sigma}^0}{EJ};$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\left\{\left(\frac{1}{2}(4+8)\cdot 4\right)[6{,}22] + \left(\frac{1}{2}4\cdot 4\right)\left[\frac{2}{3}4\right]\right\} = \frac{170{,}6}{EJ}.$$

Поверяем правильность вычисления грузовых членов

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \sum \frac{\omega_p M_{c\Sigma}^0}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left\{(40\cdot 2)[7] - (160\cdot 4)[6] - \left(\frac{1}{3}160\cdot 4\right)\left[\frac{3}{4}4\right]\right\} =$$
$$= -\frac{3920}{EJ}.$$

В обоих случаях получили тождества, значит коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определены правильно.

Подставляем вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения, определяем неизвестные X_1 и X_2:

$$\left.\begin{aligned} 21{,}3 \cdot X_1 + 32 \cdot X_2 - 1040 = 0 \\ 32 \cdot X_1 + 85{,}3 \cdot X_2 - 2880 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$X_1 = -4$ кН; $X_2 = 35{,}2$ кН.

Сила X_1 получилась со знаком «минус», это говорит о том, что направление реакции будет противоположно единичной силе.

Зная реакции H_b и R_b, по уравнениям статики определяем остальные реакции

$$\begin{aligned} &\sum X = 0, \quad H_b - H_a = 0, && H_a = 4 \text{ кН;} \\ &\sum M_a = 0, \quad M - M_a - q \cdot 4 \cdot 2 + R_b \cdot 4 - H_b \cdot 4 = 0, && M_a = 4{,}8 \text{ кН·м;} \\ &\sum M_в = 0, \quad M - M_a - H_a \cdot 4 - R_a \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, && R_a = 44{,}8 \text{ кН·м.} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0, \quad R_a + R_b - q \cdot 4 = 0, \quad 35{,}2 + 44{,}8 - 80 = 0.$$

Строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил по контрольным правилам. Эпюры приведены на рис. 5.7.

Выявляем опасное сечение рамы, где одновременно M_x и N_x имеют большие значения. Это сечение левой стойки, где $N_X = -44{,}8$ кН, $M_X = 27{,}2$ кН·м.

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \pm\frac{N_x}{A} \pm \frac{M_x}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

Выбираем сечение по моменту M_x

$$\frac{M_x}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}. \quad W_z \ge \frac{27{,}2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 170 \text{ см}^3.$$

По сортаменту проката выбираем двутавр № 20, $W_z = W_x^{\text{табл.}} = 184$ см^3, $A_{\text{табл.}} = 26{,}8$ см^2.

Производим проверку с учетом силы N_x:

$$\sigma_{\max} = -\frac{44{,}8 \cdot 10^3}{26{,}8 \cdot 10^{-4}} - \frac{27{,}2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = -1{,}67 \cdot 10^7 - 0{,}148 \cdot 10^9 \text{ Па} = 164{,}7 \text{ МПа},$$

$\sigma_{\max} = 164{,}7$ МПа> $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

Отклонение (перегруз) $\delta = \dfrac{164{,}7 - 160}{160} \cdot 100 = 2{,}93\,\% < 5\,\%$, что допустимо.

5.4. Задания для расчета плоских рам

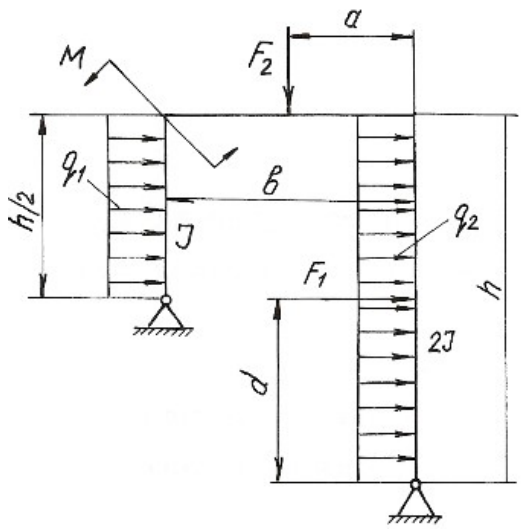
Для расчетной схемы статически неопределимой рамы при заданных значениях длин и нагрузок, определяемых в соответствии с указанным номером варианта, требуется:

1. Определить степень статической неопределимости рамы. Выбрать основную систему.
2. Составить канонические уравнения метода сил.
3. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений. Проверить правильность их вычисления.
4. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
5. Подобрать поперечное сечение элементов рамы в виде двутавра (см. табл. П. 1) при $\sigma_{\text{adm}} = 160$ МПа.

Данные для расчета взять из табл. 5.3.

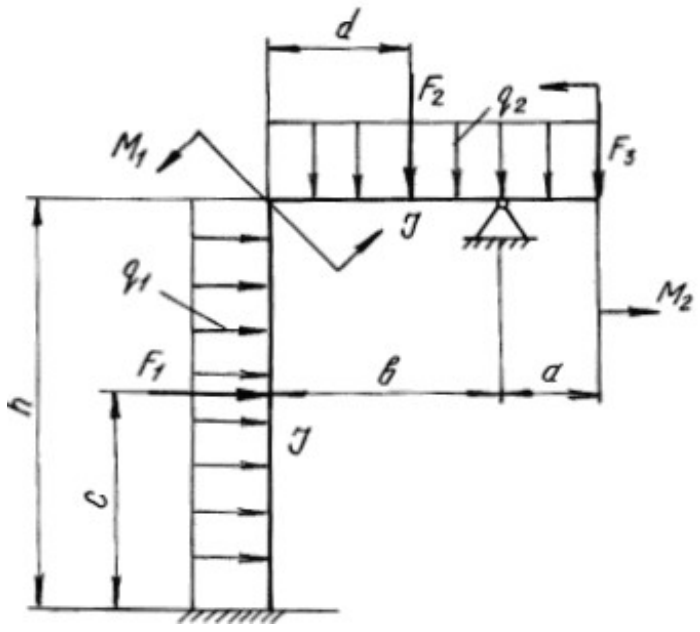
Таблица 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м
1	10	5	–	–	20	–	–	–	80
2	9	5	–	–	–	15	–	–	10
3	9	6	–	–	–	–	–	–	60
4	9	4	–	5	15	–	40	–	–
5	10	4	2	–	–	20	–	30	–
6	8	5	3	–	–	–	–	60	–
7	8	6	–	–	–	–	–	–	10
8	8	5	–	5	–	–	40	–	–
9	9	6	3	–	–	–	–	50	80
10	9	6	5	–	–	–	40	–	–



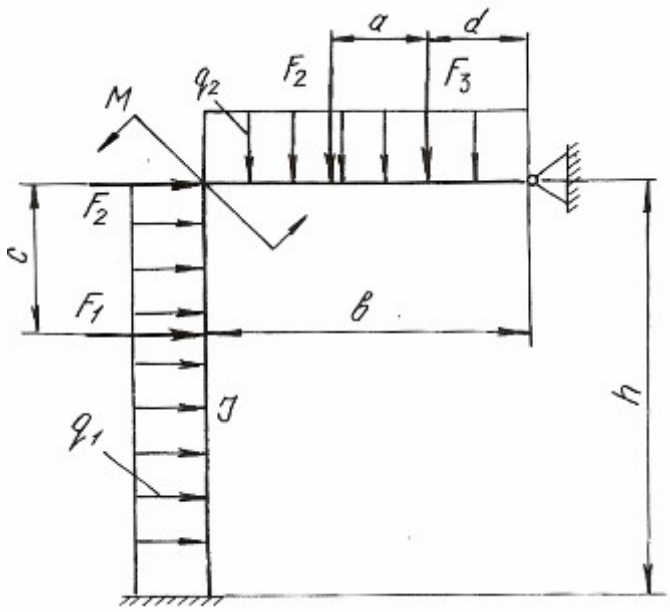
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M_1, кН·м	M_2, кН·м
11	10	5	0,5	6	–	20	–	40	–	–	–	–
12	11	6	0,4	6	–	–	20	40	–	–	–	–
13	11	5	0,3	4	–	–	–	30	–	–	–	10
14	9	4	0,6	–	–	–	25	–	–	–	–	12
15	9	5	0,4	–	4	30	–	–	60	–	–	–
16	8	4	0,3	–	3	–	–	–	30	20	–	–
17	8	4	0,3	–	–	–	–	–	–	30	10	–
18	6	3	0,2	–	–	25	–	–	–	–	15	80
19	7	4	0,6	–	3	–	–	–	30	20	12	–
20	10	6	0,6	–	–	–	30	–	–	–	10	–



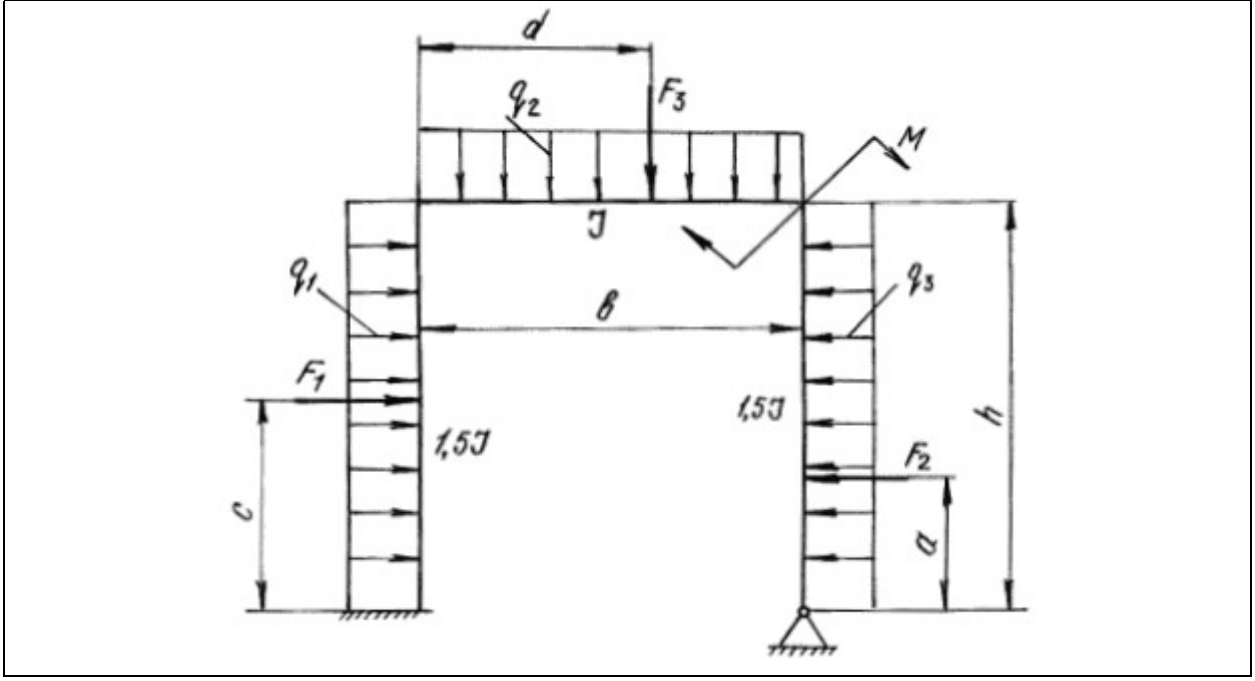
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M_1, кНм	M_2, кН·м
21	10	8	–	–	–	20	–	–	–	–	–	20
22	10	7	2	–	2	30	–	–	–	–	20	–
23	10	6	–	2	–	–	–	–	30	20	–	–
24	8	6	–	–	–	20	30	–	–	–	–	–
25	8	6	–	3	–	–	20	–	20	–	–	–
26	9	5	–	–	–	–	20	–	–	–	–	15
27	9	6	2	–	1	–	–	–	–	40	20	–
28	7	5	2	–	1	–	–	–	–	–	30	–
29	8	4	2	–	1	–	–	–	–	–	20	20
30	8	6	–	–	–	–	–	–	50	20	–	10



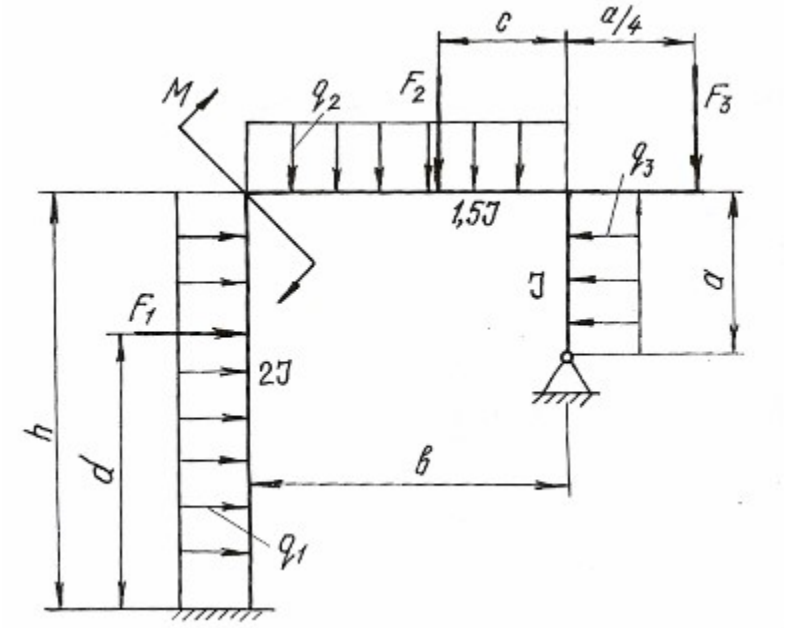
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M, кН·м
31	10	4	0,5	–	–	12	–	–	–	–	–	10
32	9	5	0,4	–	–	–	20	–	–	–	–	15
33	8	4	0,3	–	–	–	–	20	–	30	–	–
34	8	6	0,3	–	4	20	–	–	–	–	40	–
35	8	4	0,4	–	–	–	20	–	–	30	–	–
36	6	5	0,3	5	–	–	–	20	60	–	–	–
37	10	5	0,4	–	4	–	–	–	–	40	50	–
38	8	4	0,3	–	–	–	–	–	–	30	–	12
39	12	6	0,5	–	4	–	–	–	–	–	40	15
40	12	6	0,6	3	–	–	–	25	10	–	–	–



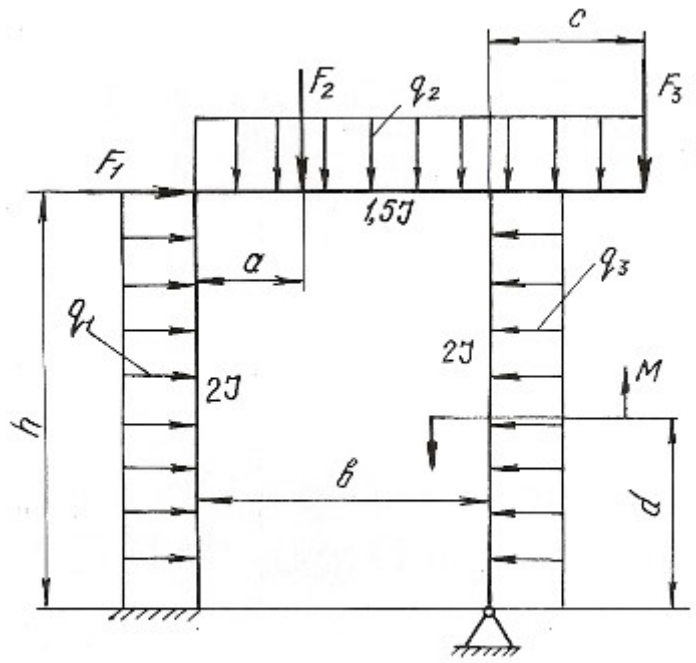
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	*h*, м	*b*, м	*a*, м	*c*, м	*d*, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	*M*, кН·м
41	10	5	4	–	–	20	–	–	–	–	–	50
42	9	6	4	–	–	–	15	–	–	–	–	10
43	8	6	5	–	–	–	–	20	–	–	30	–
44	8	5	6	–	2	15	–	–	30	–	–	–
45	8	4	5	2	–	–	20	–	–	40	–	–
46	9	6	3	–	5	–	–	15	40	–	–	–
47	9	8	4	2	–	–	–	–	–	10	–	60
48	9	6	6	–	–	–	–	–	–	–	40	10
49	10	8	5	3	–	–	–	–	–	20	40	–
50	10	6	4	1	4	–	–	–	10	25	–	–



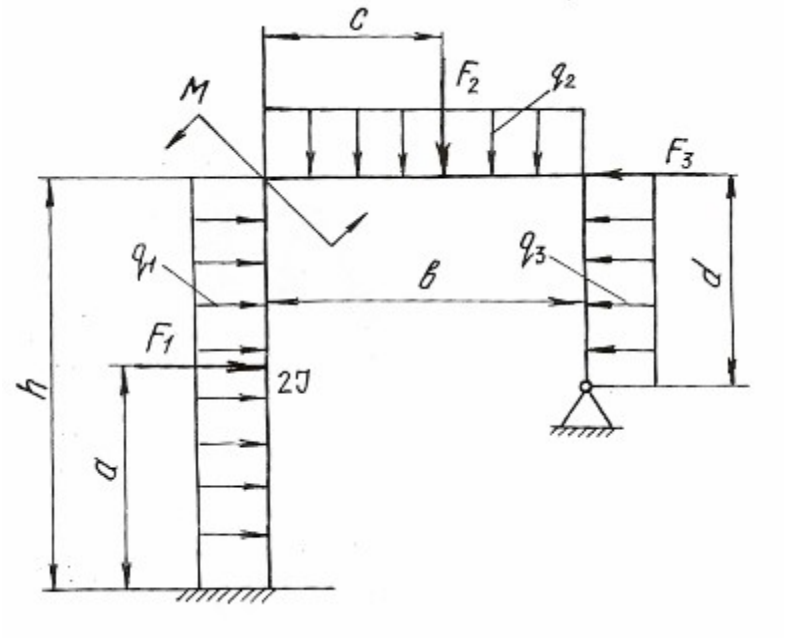
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M, кН·м
51	8	4	0,6	0,5	5	20	–	–	–	–	–	50
52	10	5	0,5	0,6	–	–	20	–	20	30	–	–
53	8	4	0,4	0,4	–	–	–	25	–	20	–	–
54	6	4	0,3	0,4	4	–	–	–	–	–	30	14
55	12	6	0,6	0,5	–	–	–	–	40	20	–	–
56	10	4	0,4	0,3	2	15	–	–	–	–	–	10
57	8	5	0,3	0,3	2	–	15	–	–	–	–	12
58	8	5	0,4	0,4	–	–	–	20	30	–	–	–
59	9	5	0,5	0,6	–	–	–	–	–	30	40	–
60	9	4	0,6	0,5	–	–	30	–	–	20	–	–



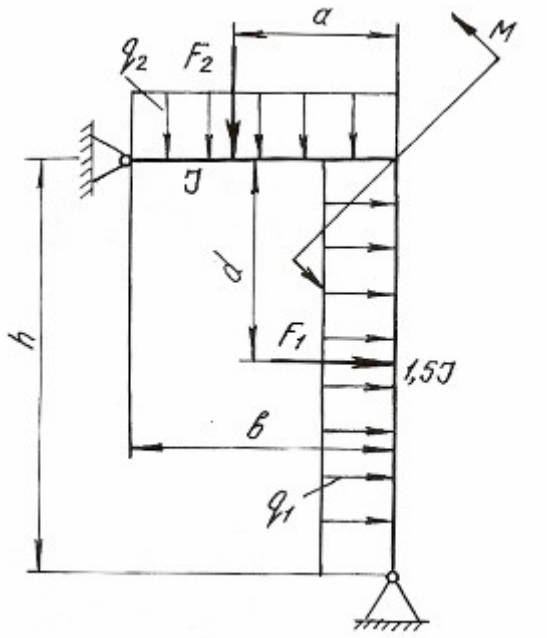
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M, кН·м
61	8	4	4	–	4	20	–	–	50	–	–	–
62	10	5	–	2,5	5	–	20	–	–	30	–	–
63	6	3	–	–	3	–	–	20	–	–	30	–
64	12	6	5	–	6	–	–	20	50	–	–	–
65	10	4	–	–	5	–	20	–	–	–	–	80
66	8	4	–	–	5	15	–	–	–	–	20	–
67	8	5	–	2	5	20	–	–	–	40	–	–
68	8	4	–	–	4	–	–	–	–	–	80	40
69	9	4	–	3	5	–	–	–	–	60	–	40
70	10	5	8	–	5	–	15	–	60	–	–	–



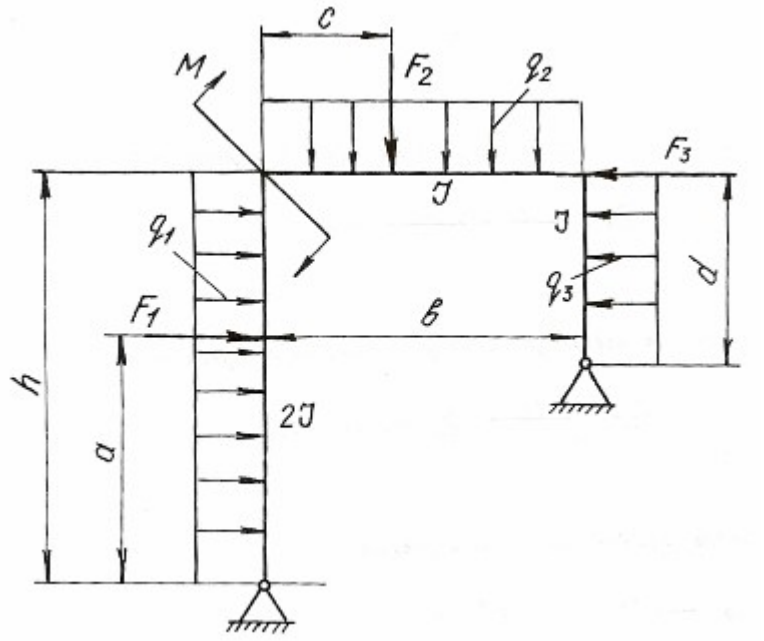
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м
71	10	5	2,5	–	20	–	–	80	–
72	10	6	–	–	–	15	–	–	–
73	10	4	2	–	–	–	–	–	–
74	10	5	–	–	15	–	–	80	–
75	9	5	–	–	–	20	–	–	–
76	9	6	–	–	–	–	–	–	60
77	9	4	2	–	–	–	–	10	–
78	8	6	3	–	–	–	–	80	10
79	8	6	3	4	–	–	40	60	–
80	8	5	–	4	–	–	30	–	–



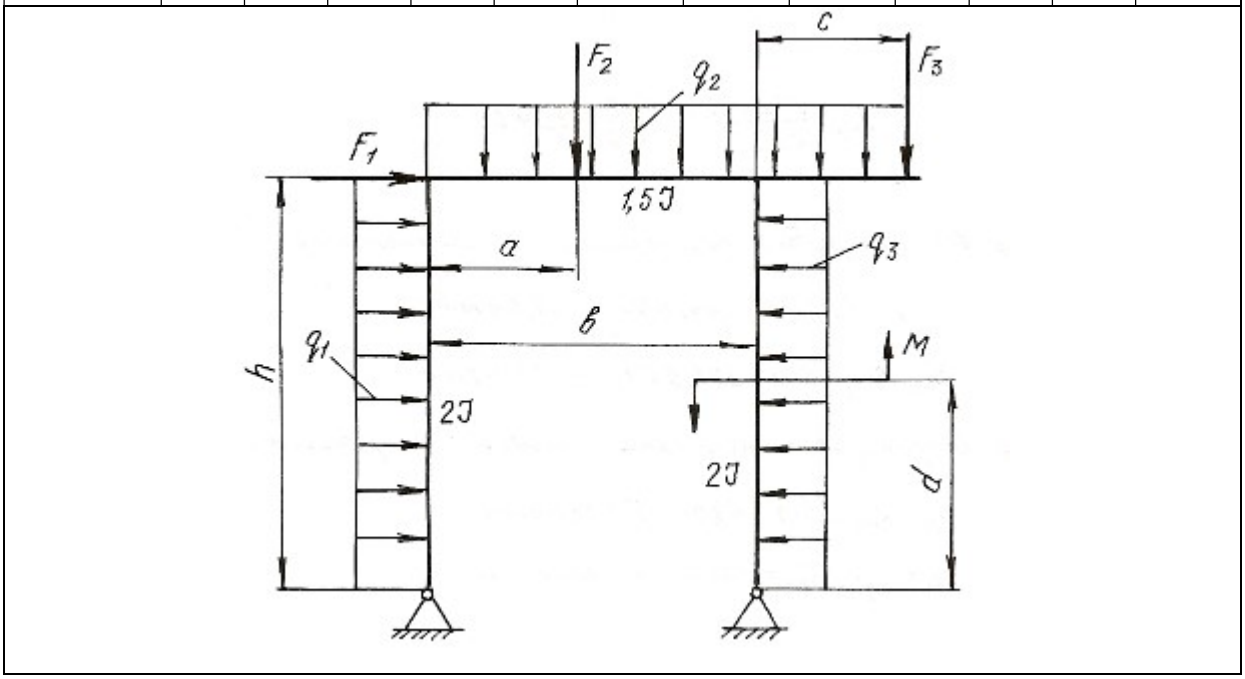
Продолжение табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M, кН·м
81	8	4	4	–	4	20	–	–	50	–	–	–
82	10	5	–	2,5	5	–	20	–	–	30	–	–
83	8	4	–	–	3	–	–	20	–	–	30	–
84	6	4	5	–	6	–	–	20	50	–	–	–
85	12	6	–	–	5	–	20	–	–	–	–	80
86	10	4	–	–	5	15	–	–	–	–	20	–
87	8	5	–	2	5	20	–	–	–	40	–	–
88	8	5	–	–	4	–	–	–	–	–	80	40
89	9	5	–	3	5	–	–	–	–	60	–	40
90	9	4	8	–	5	–	15	–	60	–	–	–



Окончание табл. 5.3

Номер варианта	h, м	b, м	a, м	c, м	d, м	q_1, кН/м	q_2, кН/м	q_3, кН/м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	M, кН·м
91	8	4	0,6	0,5	5	20	–	–	–	–	–	50
92	10	5	0,5	0,6	–	–	20	–	20	30	–	–
93	8	4	0,4	0,4	–	–	–	25	–	20	–	–
94	6	4	0,3	0,4	4	–	–	–	–	–	30	14
95	12	6	0,6	0,5	–	–	–	–	40	20	–	–
96	10	4	0,4	0,3	2	15	–	–	–	–	–	10
97	8	5	0,3	0,3	2	–	15	–	–	–	–	12
98	8	5	0,4	0,4	–	–	–	20	30	–	–	–
99	9	5	0,5	0,6	–	–	–	–	–	30	40	–
100	9	4	0,6	0,5	–	–	30	–	–	20	–	–



Глава 6
ВИДЫ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сочетание простейших видов деформаций называется сложным сопротивлением. При расчете элементов конструкций, испытывающих сложные сопротивления, используют принцип независимости действия сил, т. е. определяют деформации и напряжения для каждого простейшего вида сопротивления, а затем результаты суммируют алгебраически, геометрически или согласно одной из теорий прочности. При этом задача сводится к определению опасного сечения по длине бруса и опасной точки в этом сечении.

В данной главе приведены методики решения задач на косой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие, совместное действие изгиба с кручением.

6.1. Косой изгиб

Косой изгиб – вид сложного сопротивления, который возникает при действии внешних нагрузок, перпендикулярных продольной оси бруса, но расположенных вне главных плоскостей инерции. Поэтому косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях, разложив все силы по направлению главных центральных осей инерции поперечных сечений.

При косом изгибе балки нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения с координатами y и z определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M^{в}}{J_z} y + \frac{M^{г}}{J_y} z, \qquad (6.1)$$

где J_z и J_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки относительно осей z и y; $M^{в}$ и $M^{г}$ – изгибающие моменты в поперечном сечении в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Положение нейтральной оси поперечного сечения определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M^{г}}{M^{в}} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \qquad (6.2)$$

где α - угол наклона нейтральной оси к горизонтальной главной центральной оси инерции.

Максимальные и минимальные нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от обеих главных центральных осей инерции и для симметричных сечений определяются по формуле:

$$\sigma_{max} = \pm\frac{M^{г}}{W_y} \pm \frac{M^{в}}{W_z}, \qquad (6.3)$$

где W_z и W_y – моменты сопротивления поперечного сечения изгибу относительно осей z и y.

Если внешние нагрузки лежат в одной плоскости, то положение нейтральной оси определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{J_z}{J_y}, \qquad (6.4)$$

где φ – угол между силовой плоскостью, в которой действуют внешние нагрузки, и главной вертикальной осью инерции поперечного сечения балки.

Напряжения в этом случае определяются по формуле:

$$\sigma_{max/min} = \pm M\left(\frac{\cos\varphi}{W_z} \pm \frac{\sin\varphi}{W_y}\right), \qquad (6.5)$$

где M – результирующий момент, действующий в силовой плоскости.

Прогиб f и угол поворота θ сечения балки при косом изгибе определяются как геометрические суммы прогибов и углов поворота от составляющих изгибающего момента, действующих в главных плоскостях инерции балки

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \text{ и } \theta = \sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}, \qquad (6.6)$$

где f_z и f_y – прогибы в направлении осей z и y; θ_z и θ_y – углы поворота сечения вокруг осей z и y.

Пример 6.1.

Для балки (рис. 6.1) построить эпюры нормальных напряжений по сторонам поперечного сечения (см. табл. П. 1) в защемлении, определить наибольшее нормальное напряжение и полный прогиб свободного конца балки при $F = 2$ кН, $\varphi = 15^{o}$.

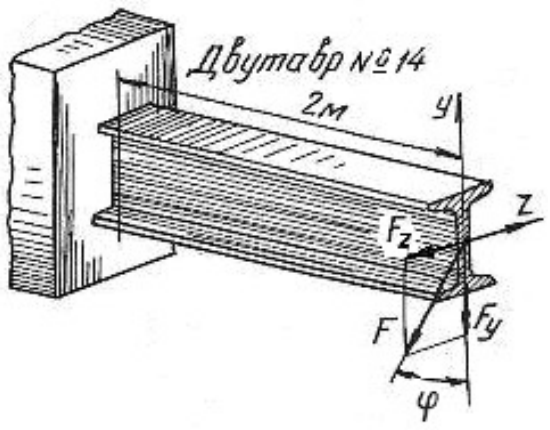


Рис. 6.1.

Решение.

Раскладываем силу F на ее составляющие, действующие в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$F_y = F \cdot \cos 15^\circ = 2000 \cdot 0,96 = 1920 \text{ Н};$$

$$F_z = F \cdot \sin 15^\circ = 2000 \cdot 0,26 = 520 \text{ Н}.$$

Максимальные изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях будут в защемленном сечении балки:

$$M^{\text{в}}_{\max} = F_y l = 1920 \cdot 2 = 3840 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M^{\text{г}}_{\max} = F_z l = 520 \cdot 2 = 1040 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По ГОСТ 8239-89 (см. табл. П. 1)для заданного профиля находим моменты инерции и моменты сопротивления сечения:

$$J_z = 572 \text{ см}^4; \quad J_y = 41,9 \text{ см}^4; \quad W_z = 81,7 \text{ см}^3; \quad W_y = 11,5 \text{ см}^3,$$

что при переводе в единицы СИ соответствует:

$$J_z = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \; J_y = 41,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \; W_z = 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3; \; W_y = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости:

$$\sigma^{\text{в}}_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} = \frac{3840}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа},$$

а наибольшие нормальные напряжения от изгиба в горизонтальной плоскости:

$$\sigma^{\text{г}}_{\max} = \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} = \frac{1040}{11,5 \cdot 10^{-6}} = 90,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,4 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений даны на рис. 6.2. Таким образом, наибольшие нормальные напряжение будут в крайних угловых точка поперечного сечения. Как видно по эпюрам нормальных напряжений

$$\sigma_{\max} = 47 + 90,4 = 137,4 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{\min} = -47 - 90,4 = -137,4 \text{ МПа}.$$

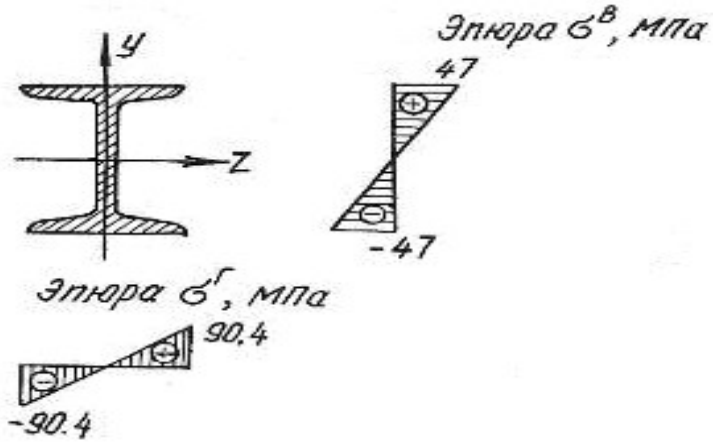


Рис. 6.2.

Прогиб свободного конца балки в вертикальной плоскости [10]

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EJ_z} = \frac{1920 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad \text{или} \quad f_y = 4{,}5 \text{ мм},$$

а величина прогиба в горизонтальной плоскости

$$f_z = \frac{F_z l^3}{3EJ_y} = \frac{520 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 41{,}9 \cdot 10^{-8}} = 16{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad \text{или} \quad f_z = 16{,}5 \text{ мм}.$$

Полный прогиб свободного конца балки

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 16{,}5^2} = 17{,}1 \text{ мм}.$$

Пример 6.2.

Для бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.3) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях; определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения, принимая σ_{adm}=160 МПа и отношение сторон $\frac{h}{b} = 2$;

2. Для опасного поперечного сечения построить эпюры нормальных напряжений от каждого из изгибающих моментов и суммарную эпюру нормальных напряжений.

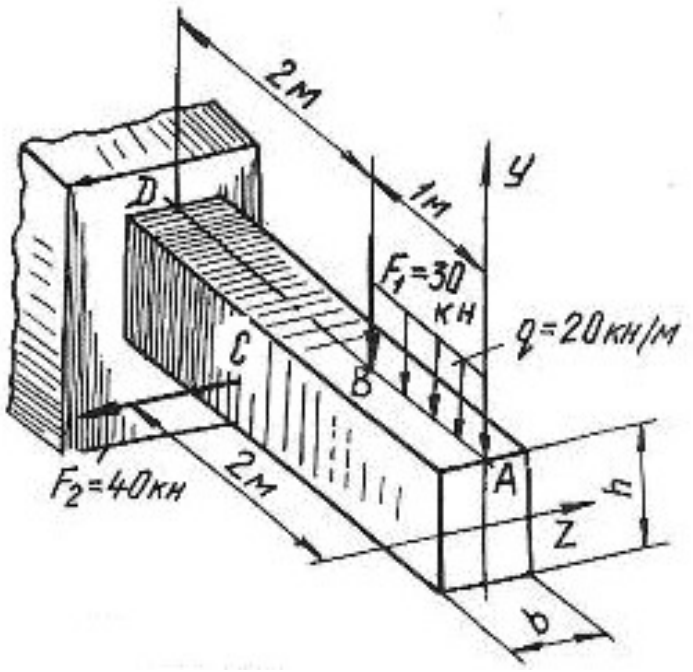


Рис. 6.3.

Решение.

Согласно принципу независимости действия сил рассмотрим отдельно действие сил, вызывающих изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Изгиб в вертикальной плоскости вызывается действием силы F_1 и равномерно распределенной нагрузкой. Определим величину изгибающих моментов в характерных точках:

$$M_A^{\text{в}} = 0;$$

$$M_B^{\text{в}} = -q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -10 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{\text{в}} = -q \cdot 1 \cdot 2{,}5 - F_1 \cdot 2 = -20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2{,}5 - 30 \cdot 10^3 \cdot 2 = -110 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = -110 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Изгиб в горизонтальной плоскости вызывается силой F_2. Определим величину изгибающих моментов в характерных точках:

$$M_A^{\text{г}} = 0; \quad M_B^{\text{г}} = 0; \quad M_C^{\text{г}} = 0;$$

$$M_D^{\text{г}} = F_2 \cdot 1 = 40 \cdot 10^3 \cdot 1 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 6.4, *а.* Максимальные изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях будут в сечении D:

$$M_{\max}^{\text{в}} = M_D^{\text{в}} = 110 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{\max}^{\text{г}} = M_D^{\text{г}} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

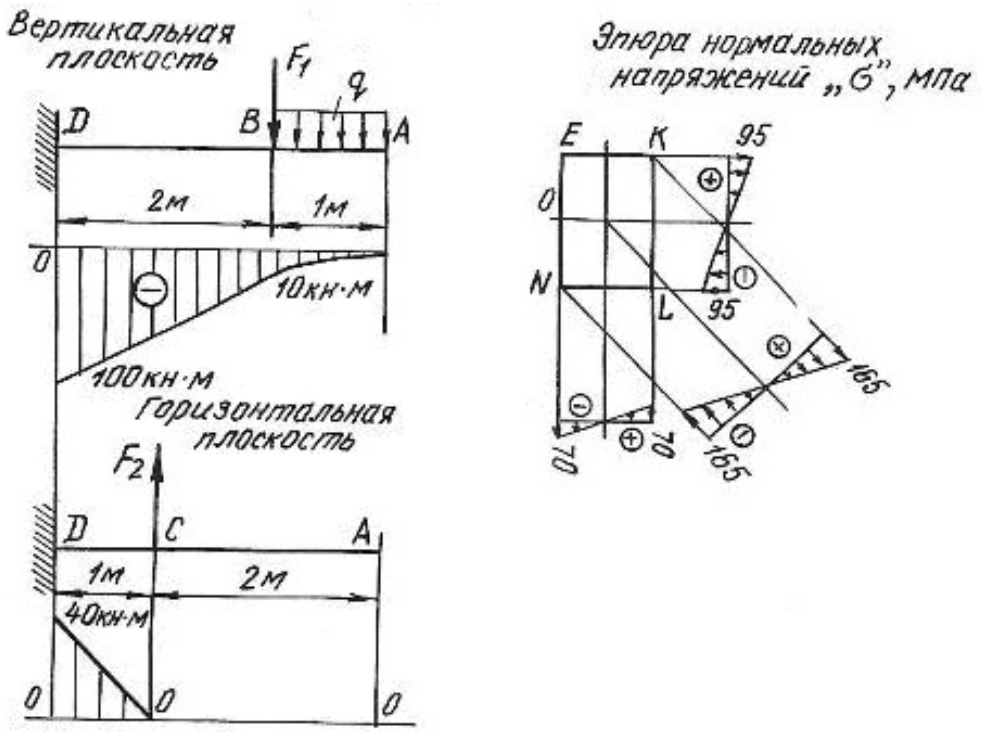


Рис. 6.4.

Опасное сечение балки будет в защемлении. Запишем условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} + \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

Для бруса прямоугольного сечения моменты сопротивления равны:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad \text{и} \quad W_y = \frac{b^2 h}{6};$$

при $h = 2 \cdot b$ получим

$$W_z = \frac{b(2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \quad \text{и} \quad W_y = \frac{b^2 \cdot 2 \cdot b}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Подставляя значение величин в условие прочности, получим

$$\sigma_{\max} = \frac{110 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot b^3} + \frac{40 \cdot 10^3}{\frac{1}{3} \cdot b^3} \le 160 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Решая уравнение относительно b, получим $b = 0{,}12$ м $= 120$ мм и $h = 2b = 240$ мм. Для построения эпюр нормальных напряжений определяем наибольшие напряжения, для чего вычислим моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 10^{-2} \cdot (24 \cdot 10^{-2})^2}{6} = 1152 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{b^2 h}{6} = \frac{(12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 24 \cdot 10^{-2}}{6} = 576 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости:

$$\sigma^{\text{в}}_{\max} = \frac{M^{\text{в}}_{\max}}{W_z} = \frac{110 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = 95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 95 \text{ МПа}.$$

Наибольшие нормальные напряжения от изгиба в горизонтальной плоскости:

$$\sigma^{\text{г}}_{\max} = \frac{M^{\text{г}}_{\max}}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^3}{576 \cdot 10^{-6}} = 70 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70 \text{ МПа}.$$

Наибольшие нормальные напряжения будут в точках K и N:

$$\sigma_K = 95 + 70 = 165 \text{ МПа};$$
$$\sigma_N = -95 - 70 = -165 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 6.4, *б*

6.2. Задания для расчета на косой изгиб

Для расчетной схемы балки при заданных значениях геометрических размеров и нагрузок необходимо:

1) определить положение нейтральной оси;

2) вычислить наибольшие и наименьшие напряжения в опасном сечении балки;

3) построить эпюры напряжений;

4) найти прогиб балки в середине пролета или на свободном конце консольной балки.

Данные для расчета взять из таблиц 6.1, 6.2, 6.3 и табл. П. 1.

Таблица 6.1

Схема балки	Схема сечения	Материал	Пролет *l*, м	Размеры сечения, см	Угол φ,град	Нагрузка		
						F, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м
1	А	дерево	1,5	*b*×*h*=12×20	60	–	4	–
	Б	Ст 3	1,4	двутавр № 24	30	–	3	–
	В	Ст 3	1,3	швеллер № 24	45	–	5	–
	Г	Ст 3	1,6	2 швеллера № 8	60	–	6	–
	Д	Ст 3	1,7	2 швеллера № 10	30	–	7	–
	Е	Ст 3	1,8	2 двутавра № 10	60	–	8	–
2	А	дерево	1,2	*b*×*h*=15×25	45	3	–	–
	Б	Ст 3	1,4	двутавр № 22	30	2	–	–
	В	Ст 3	1,5	швеллер № 27	60	4	–	–
	Г	Ст 3	1,6	2 швеллера № 18	30	8	–	–
	Д	Ст 3	1,8	2 швеллера № 20	60	10	–	–
	Е	Ст 3	1,7	2 двутавра № 12	45	9	–	–
3	А	дерево	1,2	*b*×*h*=14×28	30	–	–	4
	Б	Ст 3	1,3	двутавр № 24	60	–	–	3
	В	Ст 3	1,5	швеллер № 27	45	–	–	2
	Г	Ст 3	1,4	2 швеллера № 16	20	–	–	6
	Д	Ст 3	1,7	2 швеллера № 14	30	–	–	5
	Е	Ст 3	1,6	2 двутавра № 14	40	–	–	7

Продолжение табл. 6.1

Схема балки	Схема сечения	Материал	Пролет l,м	Размеры сечения, см	Угол φ, град	Нагрузка		
						F, кН	M, кН·м	q, кН/м
4	А	дерево	2,5	$b \times h$=12×30	30	–	6	–
	Б	Ст 3	4	двутавр № 55	40	–	5	–
	В	Ст 3	5	швеллер № 30	50	–	7	–
	Г	Ст 3	6	2 швеллера № 10	60	–	8	–
	Д	Ст 3	4	2 швеллера № 12	30	–	9	–
	Е	Ст 3	6	2 двутавра № 14	40	–	10	–
5	А	дерево	3	$b \times h$=18×30	40	6	–	–
	Б	Ст 3	4	двутавр № 36	60	2,5	–	–
	В	Ст 3	5	швеллер № 24	30	3	–	–
	Г	Ст 3	6	2 швеллера № 10	20	4	–	–
	Д	Ст 3	5,5	2 швеллера № 12	40	3	–	–
	Е	Ст 3	4,5	2 двутавра № 14	50	5	–	–
6	А	дерево	4	$b \times h$=16×28	60	–	–	2
	Б	Ст 3	6	двутавр № 20	50	–	–	4
	В	Ст 3	3	швеллер № 16	30	–	–	3
	Г	Ст 3	4	2 швеллера № 14	40	–	–	5
	Д	Ст 3	5	2 швеллера № 16	45	–	–	6
	Е	Ст 3	5,5	2 двутавра № 18	20	–	–	7
7	А	дерево	2	$b \times h$=16×24	–	1	–	–
	Б	Ст 3	2,5	двутавр № 28	–	3	–	–
	В	Ст 3	2,4	швеллер № 16	–	4	–	–
	Г	Ст 3	2,6	2 швеллера № 14	–	6	–	–
	Д	Ст 3	2,3	2 швеллера № 16	–	8	–	–
	Е	Ст 3	2,7	2 двутавра № 20	–	10	–	–
8	А	дерево	1,5	$b \times h$=15×25	–	2	3	–
	Б	Ст 3	1,8	двутавр № 18	–	3	4	–
	В	Ст 3	1,6	швеллер № 24	–	5	3	–
	Г	Ст 3	1,7	2 швеллера № 12	–	6	6	–
	Д	Ст 3	1,9	2 швеллера № 14	–	7	7	–
	Е	Ст 3	2	2 двутавра № 16	–	8	5	–

Продолжение табл. 6.1

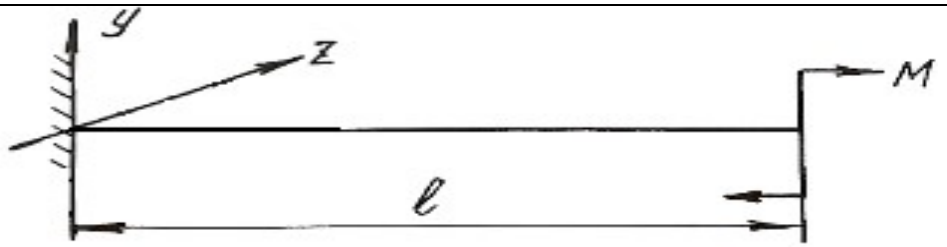
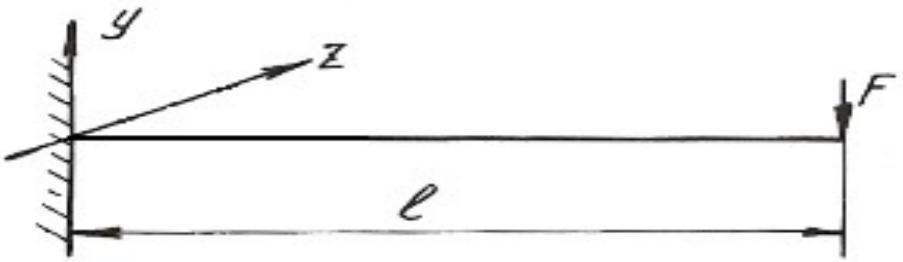
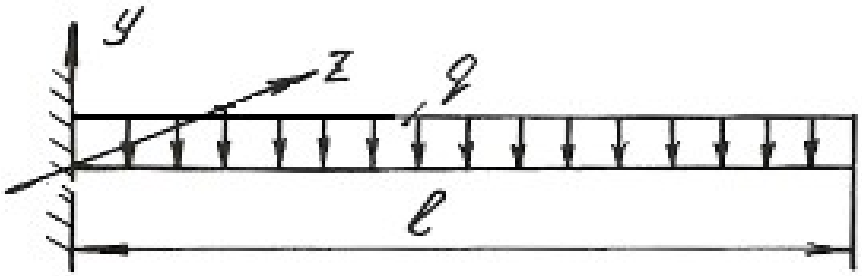
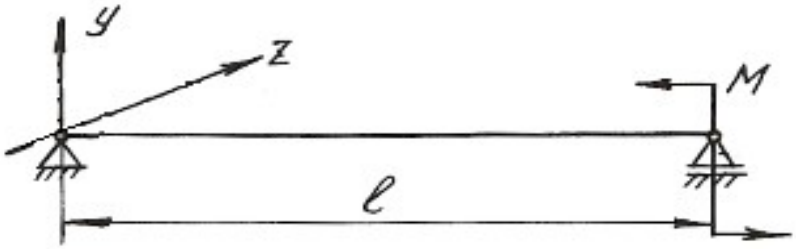
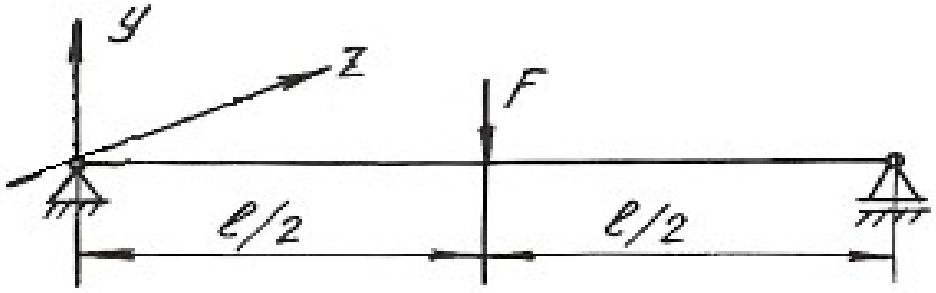
Схема балки	Схема сечения	Материал	Пролет l, м	Размеры сечения,см	Угол φ, град	Нагрузка		
						F, кН	M, кН·м	q, кН/м
9	А	дерево	2,5	$b \times h$=17×27	–	4	–	30
	Б	Ст 3	4	двутавр № 30	–	6	–	20
	В	Ст 3	3	швеллер № 27	–	5	–	40
	Г	Ст 3	5	2 швеллера № 14	–	7	–	50
	Д	Ст 3	6	2 швеллера № 16	–	8	–	60
	Е	Ст 3	4,6	2 двутавра № 18	–	9	–	70
10	А	дерево	1,6	$b \times h$=18×24	–	–	5	10
	Б	Ст 3	1,8	двутавр № 27	–	–	4	20
	В	Ст 3	1,9	швеллер № 20	–	–	3	30
	Г	Ст 3	2	2 швеллера № 14	–	–	6	40
	Д	Ст 3	2,1	2 швеллера № 16	–	–	7	50
	Е	Ст 3	2,2	2 двутавра № 20	–	–	8	60
11	А	дерево	1,5	$b \times h$=19×30	–	2	30	–
	Б	Ст 3	1,7	двутавр № 24	–	3	40	–
	В	Ст 3	1,9	швеллер № 24	–	5	60	–
	Г	Ст 3	1,8	2 швеллера № 18	–	7	80	–
	Д	Ст 3	2,3	2 швеллера № 20	–	6	70	–
	Е	Ст 3	2,4	2 двутавра № 14	–	4	50	–
12	А	дерево	1,2	$b \times h$=20×29	–	2	–	20
	Б	Ст 3	1,3	двутавр № 22	–	4	–	30
	В	Ст 3	1,4	швеллер № 24	–	5	–	40
	Г	Ст 3	1,5	2 швеллера № 22	–	7	–	50
	Д	Ст 3	1,6	2 швеллера № 20	–	6	–	60
	Е	Ст 3	1,7	2 двутавра № 20	–	7	–	70

Окончание табл. 6.1

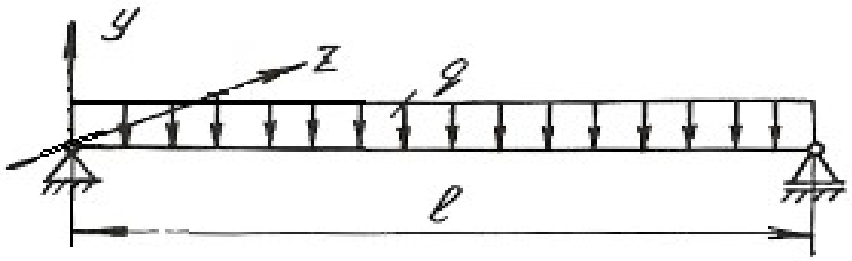
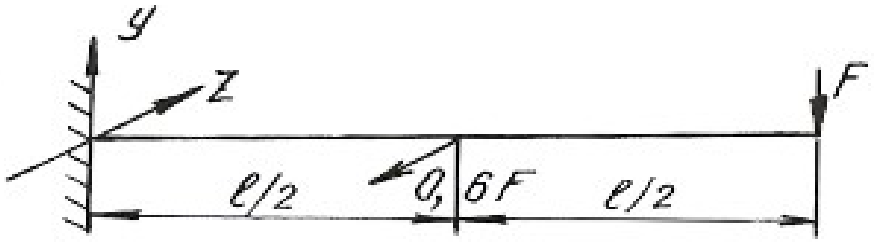
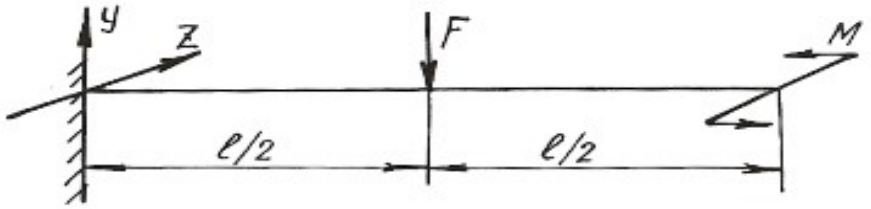
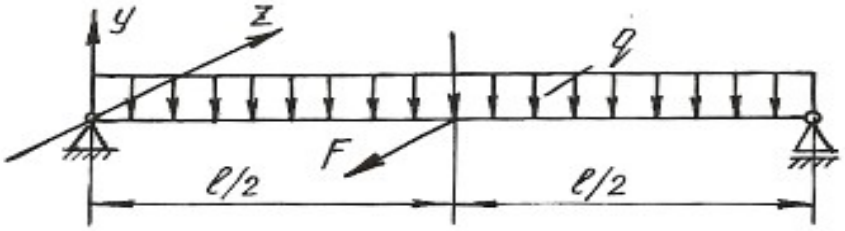
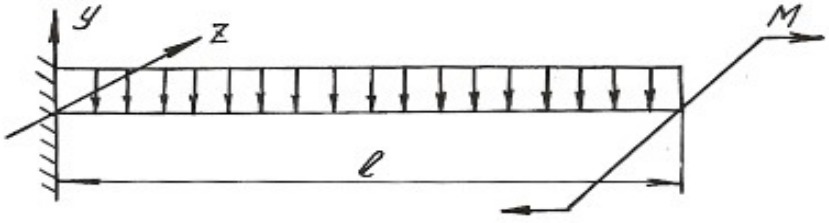
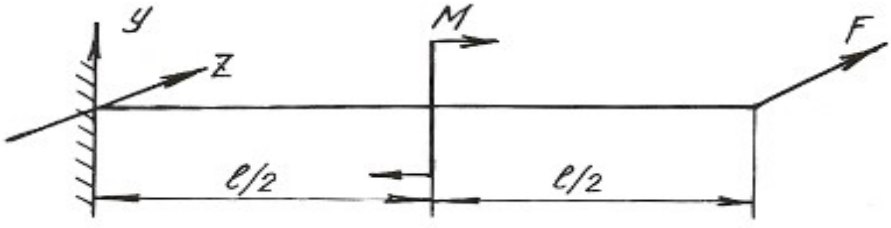
Схема балки	Схема сечения	Материал	Пролет l,м	Размеры сечения, см	Угол φ, град	Нагрузка		
						F, кН	M, кН·м	q, кН/м
13	А	дерево	1,5	$b \times h$=18×32	–	3	–	10
	Б	Ст 3	1,6	двутавр № 36	–	4	–	20
	В	Ст 3	1,7	швеллер № 36	–	5	–	30
	Г	Ст 3	1,8	2 швеллера № 18	–	6	–	40
	Д	Ст 3	1,9	2 швеллера № 20	–	7	–	50
	Е	Ст 3	2	2 двутавра № 24	–	8	–	60
14	А	дерево	1,3	$b \times h$=19×30	–	20	3	–
	Б	Ст 3	1,4	двутавр № 40	–	40	4	–
	В	Ст 3	1,5	швеллер № 30	–	60	5	–
	Г	Ст 3	1,6	2 швеллера № 16	–	50	6	–
	Д	Ст 3	1,7	2 швеллера № 20	–	60	7	–
	Е	Ст 3	1,8	2 двутавра № 18	–	70	8	–
15	А	дерево	1,4	$b \times h$=17×32	–	1	40	–
	Б	Ст 3	1,6	двутавр № 24	–	2	50	–
	В	Ст 3	1,8	швеллер № 20	–	3	60	–
	Г	Ст 3	1,9	2 швеллера № 22	–	4	70	–
	Д	Ст 3	2,1	2 швеллера № 18	–	5	80	–
	Е	Ст 3	2,2	2 двутавра № 20	–	6	60	–
16	А	дерево	1,6	$b \times h$=19×32	–	–	2	20
	Б	Ст 3	1,7	двутавр № 22	–	–	3	30
	В	Ст 3	1,9	швеллер № 27	–	–	4	40
	Г	Ст 3	1,8	2 швеллера № 16	–	–	5	50
	Д	Ст 3	2,3	2 швеллера № 20	–	–	6	40
	Е	Ст 3	2,4	2 двутавра № 22	–	–	7	50

Таблица 6.2

Схемы закрепления и нагружения балок

Номер схемы	Схема балки
1	
2	
3	
4	
5	

Продолжение табл. 6.2

Номер схемы	Схема балки
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Окончание табл. 6.2

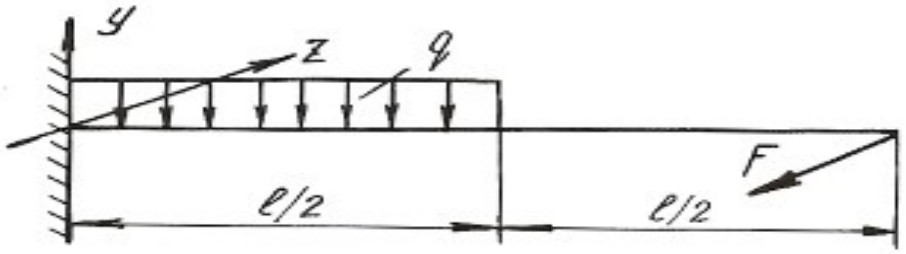
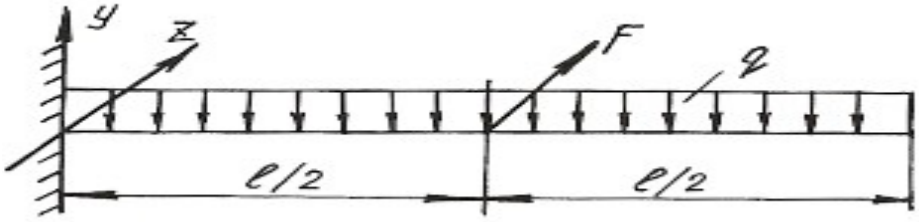
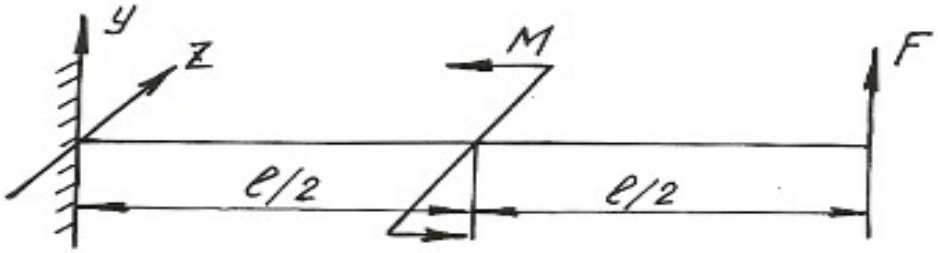
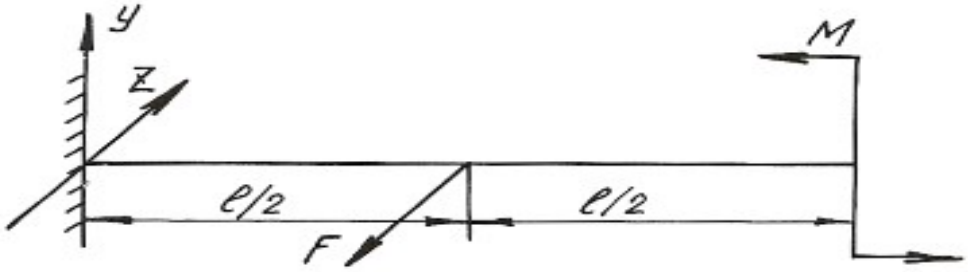
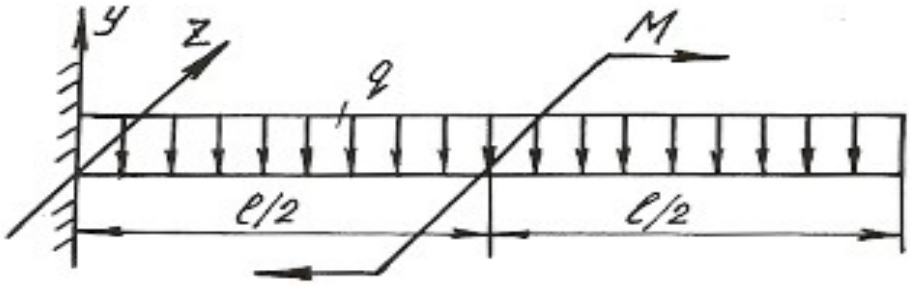
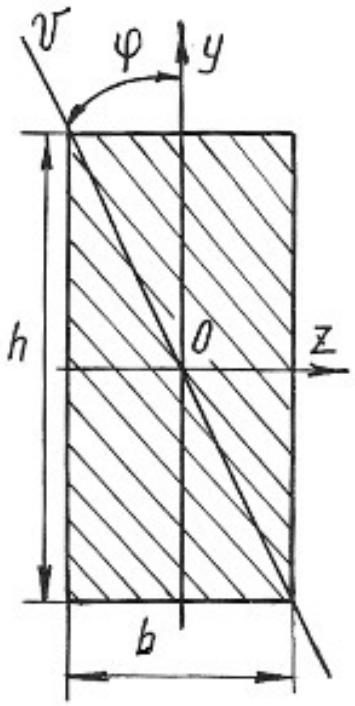
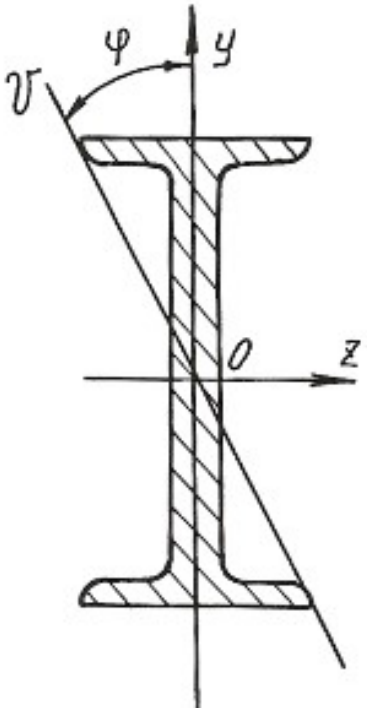
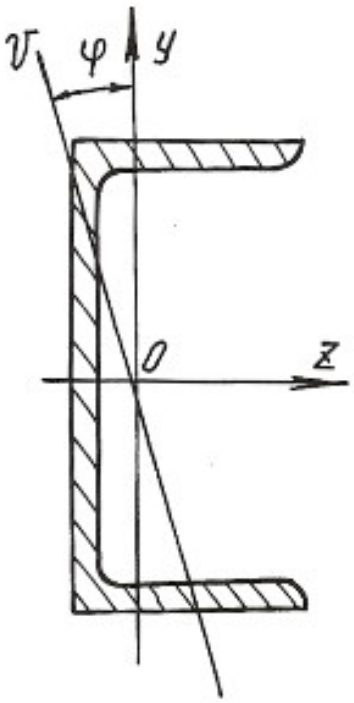
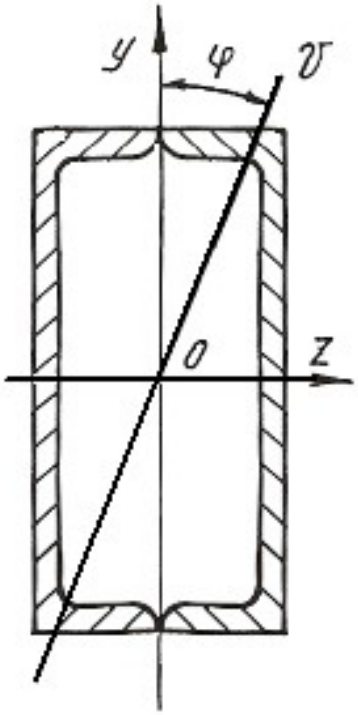
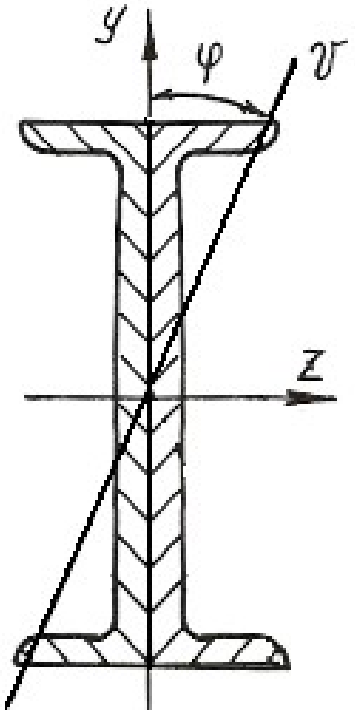
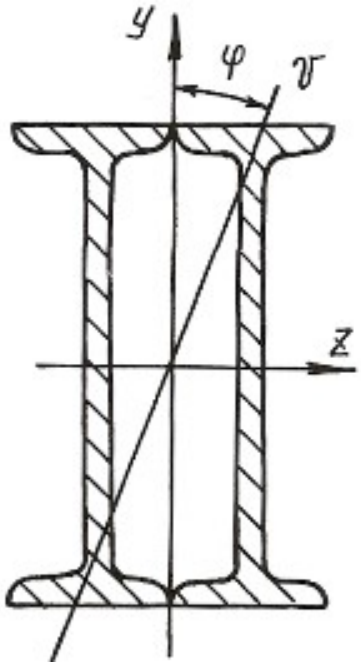
Номер схемы	Схема балки
12	
13	
14	
15	
16	

Таблица 6.3

Схемы поперечных сечений балок

А	Б	В
		
Г	**Д**	**Е**
		

6.3. Внецентренное растяжение или сжатие

Если действующая на брус продольная растягивающая или сжимающая сила приложена на некотором расстоянии от центра тяжести сечения, то возникает внецентренное растяжение или сжатие. Расстояние между точкой приложения силы и центром тяжести сечения бруса называется эксцентриситетом. Для практики весьма важны случаи внецентренного сжатия, например, для каменных и кирпичных столбов, бетонных колонн и др.

Внецентренное приложение сжимающей силы можно привести к случаю сжатия центральной силой F и чистому изгибу моментом $M = Fe$, если перенести силу F в центр тяжести поперечного сечения и уравновесить ее (рис. 6.5).

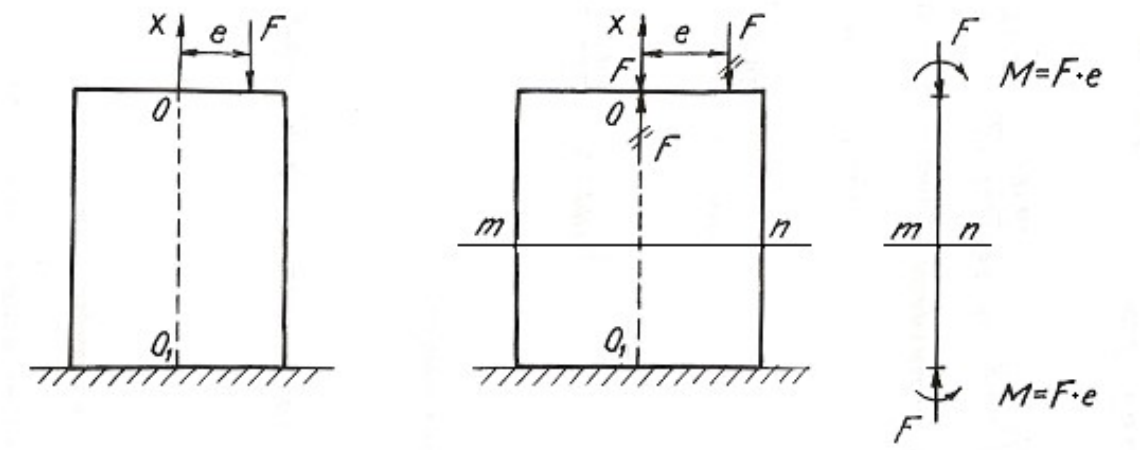


Рис. 6.5.

Так как изгибающий момент во всех сечениях постоянен, то проверку прочности можно производить по любому сечению бруса. Если отбросить верхнюю часть бруса по сечению *m-n* и рассмотреть нижнюю **(**рис. 6.6**),** то для любой точки A поперечного сечения с координатами y, z нормальное напряжение будет равно алгебраической сумме напряжений

$$\sigma_A = \sigma_F + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}, \qquad (6.7)$$

где $\sigma_F = -\dfrac{F}{A}$ – напряжение от сжимающей центрально приложенной силы F;

$\sigma_{M_y} = -M_y \dfrac{z}{J_y}$ – напряжение от изгибающего момента относительно главной оси сечения y; $\sigma_{M_z} = -M_z \dfrac{y}{J_z}$ – напряжение от изгибающего момента относительно главной оси сечения z.

Знак минус указывает на то, что данные нагрузки вызывают в точке A деформацию сжатия.

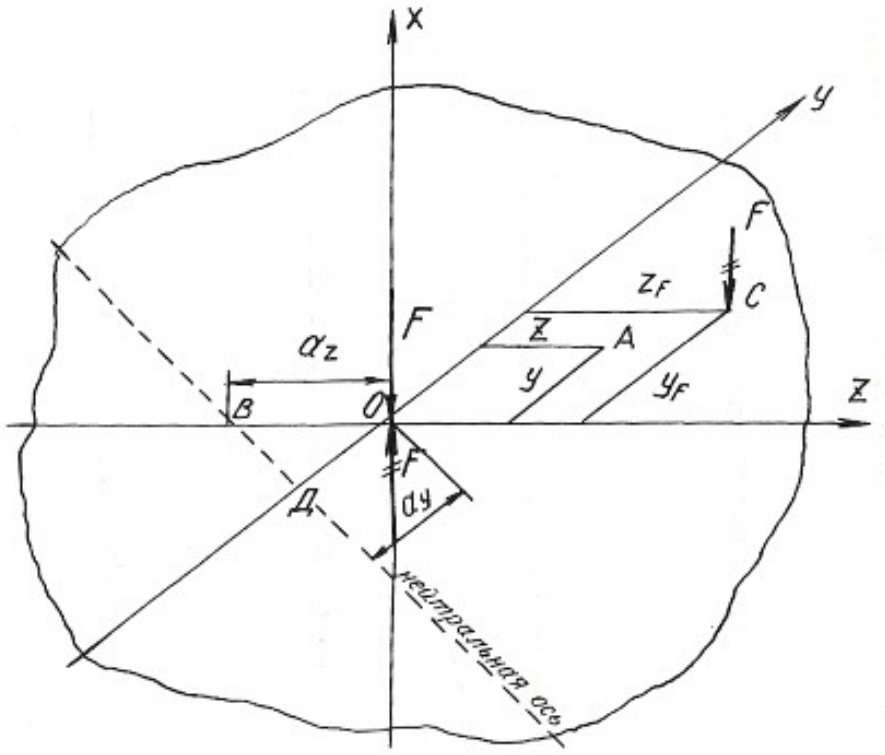


Рис. 6.6.

Изгибающие моменты определяются

$$M_y = Fz_F; \qquad M_z = Fy_F;$$

где z_F и y_F - координаты точки C приложения силы F.

После подстановки имеем:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} - Fz_F \frac{z}{J_y} - Fy_F \frac{y}{J_z}.$$

Окончательный вид формулы для определения напряжений в любой точке поперечного сечения получаем после простых преобразований

$$\sigma = F\left(\pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z}{J_y} \pm y_F \frac{y}{J_z} \right), \tag{6.8}$$

где J_y, J_z – моменты инерции поперечного сечения; y_F, z_F – координаты точки приложения силы F.

У каждого из слагаемых данного уравнения знак плюс берется для растягивающего, а знак минус – для сжимающего напряжения.

Условие прочности при внецентренном растяжении или сжатии имеет вид:

$$\sigma_{\max} = F\left(\pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z_{\max}}{J_y} \pm y_F \frac{y_{\max}}{J_z}\right) \le \sigma_{\text{adm}}, \qquad (6.9)$$

где $z_{\max}$, $y_{\max}$ – координаты наиболее удаленных точек сечения от его центра тяжести.

Уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении или сжатии имеет вид:

$$\pm\frac{1}{A} \pm z_F \frac{z_0}{J_y} \pm y_F \frac{y_0}{J_z} = 0, \qquad (6.10)$$

где z_0, y_0 – координаты точек, лежащих на нейтральной оси.

Это уравнение является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Величины отрезков, отсекаемых на координатных осях y и z нейтральной осью, определяются из уравнения:

$$\pm 1 \pm z_F \frac{a_z}{i_y^2} \pm y_F \frac{a_y}{i_z^2} = 0, \qquad (6.11)$$

где $a_z = z_0$, $a_y = y_0$ - отрезки, определяющие положение нейтральной оси.

Величины отрезков определяются по формулам:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \qquad (6.12)$$

где i_z, i_y - радиусы инерции поперечного сечения относительно осей y и z.

Знак минус в этих формулах указывает на то, что нейтральная ось располагается по другую сторону центра тяжести сечения, по сравнению с точкой приложения силы F, действующей на брус.

Если поперечное сечение имеет сложную форму, то необходимо найти центр тяжести сечения, положение главных центральных осей и главные моменты инерции, пользуясь формулами и указаниями, приведенными в главе 2. В формулы, содержащие моменты инерции, необходимо подставлять значения главных моментов инерции сечения.

Пример 6.3.

Короткий чугунный стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 6.7, сжимается продольной силой F, приложенной в точке A**.**

Требуется:

1. Вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через F и размеры сечений.

2. Найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие σ^{c}_{adm} и на растяжение σ^{p}_{adm}: $\sigma^{c}_{adm} = 110$ МПа, $\sigma^{p}_{adm} = 24$ МПа.

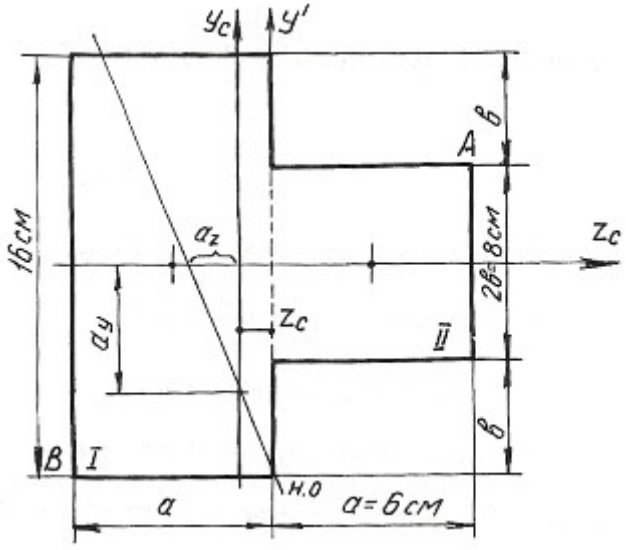


Рис. 6.7.

Определяем координату центра тяжести сечения. Проведем вспомогательную ось y':

$$z_c = \frac{\sum Sy'}{\sum A} = \frac{(A_1 z_1 + A_2 z_2)}{A_1 + A_2} = \frac{[16 \cdot 6 \cdot (-3) + 6 \cdot 8 \cdot 3]}{16 \cdot 6 + 6 \cdot 8} = \frac{-144}{144} = -1 \text{ см}.$$

Для определения положения нейтральной оси находим геометрические характеристики сечения.

Моменты инерции:

$$J_{y_c} = 16\frac{6^3}{12} + 6 \cdot 16 \cdot 2^2 + 8 \cdot \frac{6^3}{12} + 6 \cdot 8 \cdot 4^2 = 1584 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_c} = 16^3 \frac{6}{12} + 6\frac{8^3}{12} = 2304 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{1584}{144}} = \sqrt{11} = 3{,}31 \text{ см};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_{z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{2304}{144}} = \sqrt{16} = 4 \text{ см}.$$

Нейтральная ось пересекает оси z_c и y_c в точках:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; \qquad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad z_F = 7\,\text{см}; \quad y_F = 4\,\text{см}.$$

$$a_y = \frac{-4^2}{4} = -4\ \text{см}; \quad a_z = \frac{-3{,}31^2}{7} = -1{,}57\ \text{см}.$$

Максимальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, т. е. в точках *A* и *B*. Определяются они по формуле:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{F z_F z_{\max}}{J_{y_c}} \pm \frac{F y_F y_{\max}}{J_{z_c}},$$

где $z_{\max}$, $y_{\max}$ – координаты точек *A* и *B*.

Наибольшее сжимающее напряжение:

$$\sigma_A = -F\left[\frac{1}{144} + 7\frac{7}{1584} + 4\frac{4}{2304}\right] = -0{,}044 \cdot F\,.$$

Наибольшее растягивающее напряжение:

$$\sigma_B = -F\left[\frac{1}{144} + 7\frac{(-5)}{1584} + 4\frac{(-8)}{2304}\right] = 0{,}028 \cdot F.$$

Находим допускаемую нагрузку:

$$\sigma_A \le \sigma^{\text{c}}_{\text{adm}} = 110\ \text{МПа}; \qquad 0{,}044 \cdot F \le 110; \quad F \le 0{,}25\ \text{МН}.$$

$$\sigma_B \le \sigma^{\text{p}}_{\text{adm}} = 24\ \text{МПа}; \qquad 0{,}028 \cdot F \le 24; \quad F \le 0{,}09\ \text{МН}.$$

Допускаемая нагрузка $F = 0{,}09$ МН.

6.4. Задания для расчета на внецентренное растяжение или сжатие

Колонна заданного поперечного сечения с известными размерами нагружена сжимающей силой F, приложенной вне центра тяжести сечения в указанной точке. Требуется:

1) Определить положение нейтральной оси;
2) Вычислить наибольшие напряжения в опасном сечении колонны;
3) Построить эпюры напряжений в опасном сечении.

Данные для расчета взять из таблиц 6.4, 6.5 и табл. П. 1.

Примечание: собственным весом колонны при расчетах пренебречь.

Таблица 6.4

Вариант	Схема сечения	Материал	Размеры сечения, см	Точка приложения силы F	Нагрузка F, кН
1	А	дерево	b x h = 15 x 25	1	20
	Б	Ст 3	двутавр № 16	2	30
	В	Ст 3	швеллер № 16	3	40
	Г	Ст 3	2 швеллера № 14	4	50
	Д	Ст 3	2 швеллера № 12	5	60
	Е	Ст 3	2 двутавра № 14	6	70
	Ж	чугун	b = 20	7	35
	З	чугун	b x h = 20 x 30, D = 10	8	45
	И	Ст 3	2 швеллера № 12, a = 10	1	75
	К	Ст 3	2 двутавра № 14, a = 10	2	80
2	А	дерево	b x h = 16 x 27	2	25
	Б	Ст 3	двутавр № 18	3	35
	В	Ст 3	швеллер № 18	4	45
	Г	Ст 3	2 швеллера № 16	5	50
	Д	Ст 3	2 швеллера № 18	6	60
	Е	Ст 3	2 двутавра № 16	7	70
	Ж	чугун	b = 30	8	55
	З	чугун	b x h = 25 x 35 , D = 12	1	65
	И	Ст 3	2 швеллера № 14, a = 10	2	65
	К	Ст 3	2 двутавра № 16, a = 10	3	75

Продолжение табл. 6.4

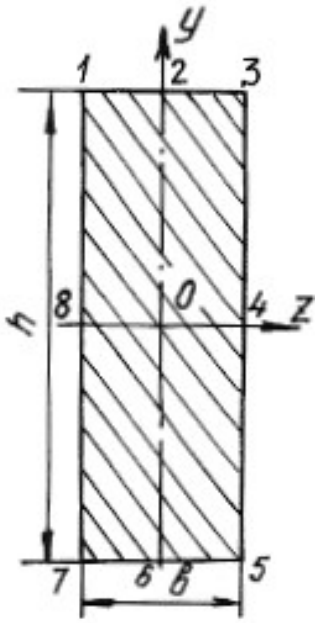
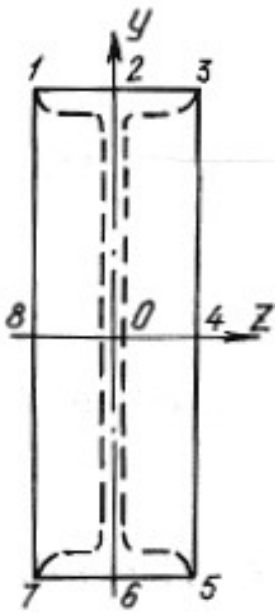
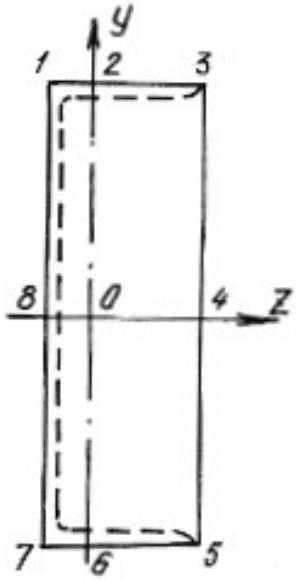
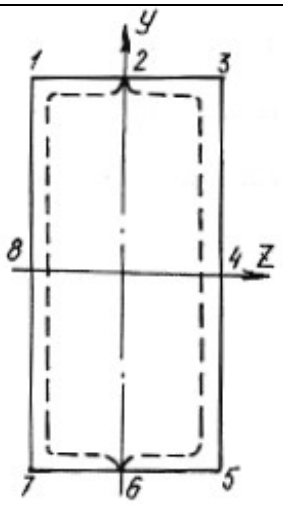
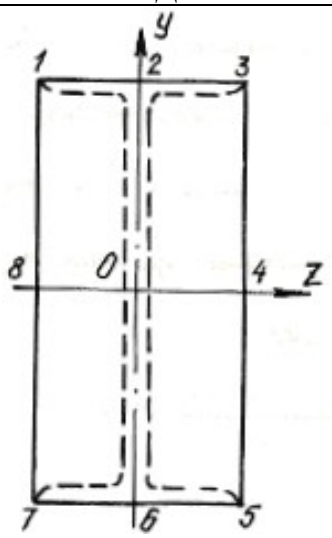
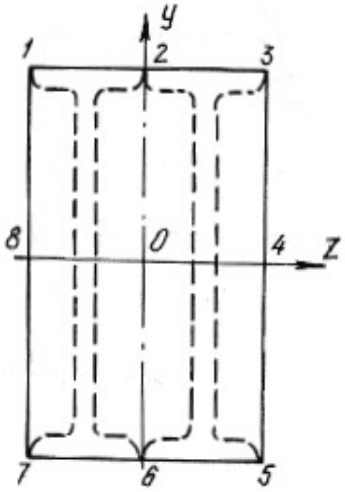
Вариант	Схема сечения	Материал	Размеры сечения	Точка приложения силы F	Нагрузка F, кН
3	А	дерево	b x h = 17 x 28	3	30
	Б	Ст 3	двутавр № 14	4	40
	В	Ст 3	швеллер № 20	5	48
	Г	Ст 3	2 швеллера № 14	6	52
	Д	Ст 3	2 швеллера № 16	7	62
	Е	Ст 3	2 двутавра № 18	8	72
	Ж	чугун	b = 32	1	60
	З	чугун	b x h = 24 x 32, D = 8	2	70
	И	Ст 3	2 швеллера № 18, a = 14	3	66
	К	Ст 3	2 двутавра № 12, a = 8	4	74
4	А	дерево	b x h = 18 x 36	4	40
	Б	Ст 3	двутавр № 20	5	44
	В	Ст 3	швеллер № 20	6	54
	Г	Ст 3	2 швеллера № 18	7	64
	Д	Ст 3	2 швеллера № 16	8	74
	Е	Ст 3	2 двутавра № 14	1	46
	Ж	чугун	b = 34	2	38
	З	чугун	b x h = 28 x 36, D = 14	3	48
	И	Ст 3	2 швеллера № 16, a = 8	4	58
	К	Ст 3	2 двутавра № 18, a = 12	5	72
5	А	дерево	b x h = 20 x 24	5	28
	Б	Ст 3	двутавр № 22	6	38
	В	Ст 3	швеллер № 22	7	48
	Г	Ст 3	2 швеллера № 20	8	62
	Д	Ст 3	2 швеллера № 22	1	76
	Е	Ст 3	2 двутавра № 20	2	78
	Ж	чугун	b = 28	3	46
	З	чугун	b x h = 22 x 34, D = 6	4	56
	И	Ст 3	2 швеллера № 20, a = 6	5	80
	К	Ст 3	2 двутавра № 20, a = 12	6	82

Продолжение табл. 6.4

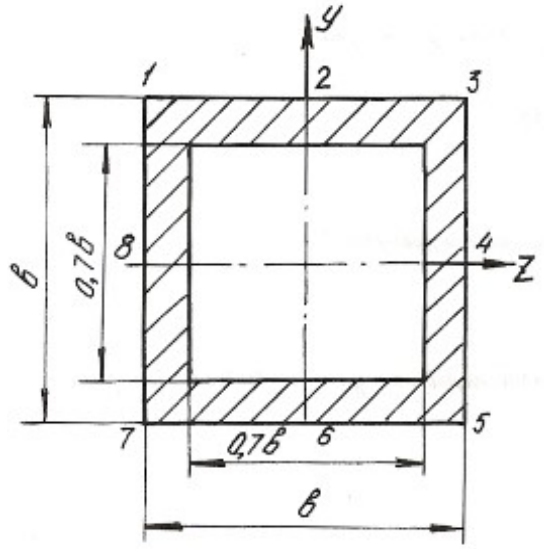
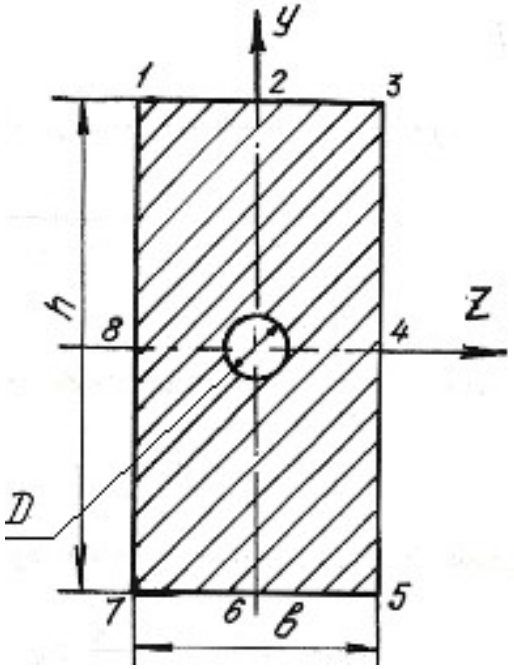
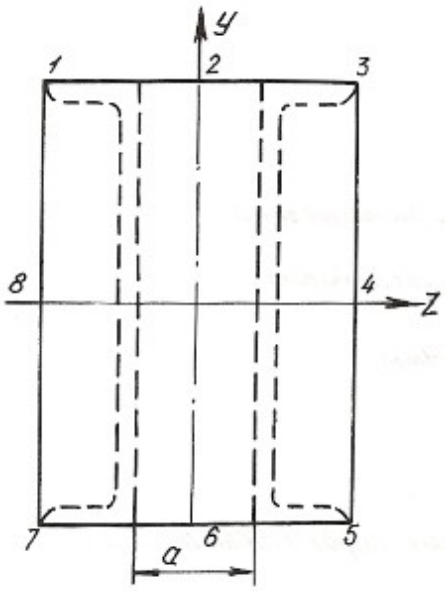
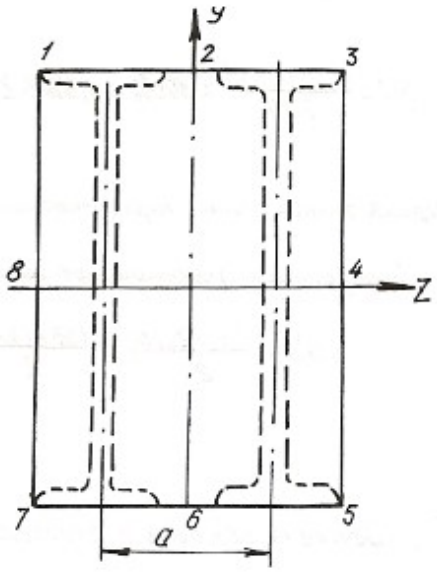
Вариант	Схема сечения	Материал	Размеры сечения, см	Точка приложения силы F	Нагрузка F, кН
6	А	дерево	b x h = 22 x 38	6	36
	Б	Ст 3	двутавр № 22	7	46
	В	Ст 3	швеллер № 22	8	48
	Г	Ст 3	2 швеллера № 22	1	68
	Д	Ст 3	2 швеллера № 20	2	72
	Е	Ст 3	2 двутавра № 22	3	74
	Ж	чугун	b = 24	4	50
	З	чугун	b x h = 24 x 34, D = 8	5	60
	И	Ст 3	2 швеллера № 22, a = 8	6	74
	К	Ст 3	2 двутавра № 22, a = 12	7	69
7	А	дерево	b x h = 22 x 30	7	25
	Б	Ст 3	двутавр № 24	8	48
	В	Ст 3	швеллер № 24	1	52
	Г	Ст 3	2 швеллера № 24	2	63
	Д	Ст 3	2 швеллера № 22	3	68
	Е	Ст 3	2 двутавра № 20	4	64
	Ж	чугун	b = 22	5	43
	З	чугун	b x h = 26 x 36, D = 6	6	49
	И	Ст 3	2 швеллера № 24, a = 4	7	78
	К	Ст 3	2 двутавра № 24, a = 13	8	84
8	А	дерево	b x h = 18 x 32	8	35
	Б	Ст 3	двутавр № 27	1	62
	В	Ст 3	швеллер № 27	2	68
	Г	Ст 3	2 швеллера № 22	3	85
	Д	Ст 3	2 швеллера № 24	4	87
	Е	Ст 3	2 двутавра № 22	5	78
	Ж	чугун	b = 26	6	52
	З	чугун	b x h = 26 x 36, D = 9	7	58
	И	Ст 3	2 швеллера № 27, a = 5	8	86
	К	Ст 3	2 двутавра № 27, a = 14	1	88

Таблица 6.5

Схемы поперечных сечений колонны

А	Б	В
		
Г	Д	Е
		

Окончание табл. 6.5

Ж	З
	
И	К
	

6.5. Изгиб с кручением

Помимо крутящих моментов валы могут испытывать воздействие изгибающих моментов. Последние возникают от действия собственного веса вала, усилий натяжения приводных ремней, весов шкивов, усилий зацепления в зубьях зубчатых передач и т. п.

Крутящий момент на валу или его участке определяется по формулам:

$$T = 9550\frac{N}{n}, \tag{6.13}$$

где T – крутящий момент, Нм; N – мощность двигателя, кВт; n – число оборотов вала в минуту, или

$$T = \frac{D}{2}\cdot(t_1 - t_1'), \tag{6.14}$$

где D – диаметр ведущего шкива, соединенного с двигателем приводным ремнем; t_1 – усилие натяжения в набегающей ветви приводного ремня; t_1' – усилие натяжения в сбегающей ветви приводного ремня.

Определив крутящий момент по формуле (6.13) и, зная соотношение между усилиями t_1 и t_1', определяют эти усилия из формулы (6.14) при известном диаметре шкива. Если усилия t_1, t_1' последовательно перенести в центр тяжести сечения вала и уравновесить их, то получим два момента пар сил, направленных в противоположные стороны. Равнодействующий момент этих моментов и будет равен крутящему моменту в том сечении, где находится шкив. Вместе с этим в центре этого сечения вала возникнет нагрузка, $S = t_1 + t_1'$, которая может быть направлена под углом к горизонту. В этом случае ее раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие: $S_y = S\cdot\sin\alpha$; $S_z = S\cdot\cos\alpha$.

При наличии на валу нескольких ведомых шкивов крутящие моменты и изгибающие нагрузки определяются аналогичным способом. Таким образом, вал будет испытывать одновременно деформацию кручения от крутящих моментов и деформацию поперечного изгиба в двух плоскостях – вертикальной и горизонтальной. Дальнейший расчет вала на изгиб с кручением осуществляется в таком порядке:

1. Строится эпюра крутящих моментов T.
2. Вычерчивается схема вала в виде балки на двух опорах и загружается только вертикальными изгибающими нагрузками. С помощью уравнений статики определяются реакции на опорах, и строится эпюра изгибающих моментов от этих нагрузок $M_{\text{и}}^{\text{в}}$.

3. Вал загружается только горизонтальными изгибающими нагрузками, от них определяются реакции на опорах, и строится эпюра изгибающих моментов от горизонтальных нагрузок $M_{\text{и}}^{\text{г}}$.

4. В характерных сечениях вала определяются суммарные изгибающие моменты в виде геометрической суммы изгибающих моментов, возникающих в этих сечениях от вертикальных и горизонтальных нагрузок: $M_{\text{и}} = \sqrt{(M_{\text{и}}^{\text{в}})^2 + (M_{\text{и}}^{\text{г}})^2}$. Строится суммарная эпюра изгибающих моментов $M_{\text{и}}$. При построении эпюр выбирается необходимый масштаб, и применяются знаки, принятые в сопротивлении материалов при построении эпюр крутящих и изгибающих моментов.

5. Выбирается опасное сечение по длине вала, где одновременно крутящий и суммарный моменты достаточно большие – на основании эпюр $M_{\text{и}}$ и T.

6. На основании третьей или четвертой теории прочности для опасного сечения определяется расчетный (эквивалентный) момент по формулам:

$$M_{\text{р}}^{\text{III}} = \sqrt{T^2 + M_{\text{и}}^2}; \quad M_{\text{р}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75T^2}. \tag{6.15}$$

7. Определяется диаметр сечения вала на основании условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{P}}}{W_z} \le \sigma_{\text{adm}}, \tag{6.16}$$

где $W_z = \dfrac{J_z}{d/2} = \pi \dfrac{d^4/64}{d/2} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ – момент сопротивления поперечного сечения вала изгибу.

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{P}}}{\pi\sigma_{\text{adm}}}}. \tag{6.17}$$

Величина диаметра округляется до ближайшего целого.

Пример 6.4.

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность N. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 и, каждый из них передает мощность $N/2$ **(**рис. 6.8).

Требуется:

1. Определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным N и n ;

2. Построить эпюру крутящих моментов T;

3. Определить окружные усилия t_1 и t_2 действующие на шкивы, по данным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2;

4. Принять $t_1 = 2 \cdot t_2$;

5. Определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);

6. Построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных и вертикальных сил $M_{\text{верт.}}$, $M_{\text{гор.}}$;

7. Построить эпюры суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{\text{и}} = \sqrt{M_{\text{гор}}{}^2 + M_{\text{верт}}{}^2}$;

8. При помощи эпюр T и $M_{\text{и}}$ найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент (по третьей теории прочности);

9. Подобрать диаметр вала d при $\sigma_{\text{adm}} = 70$ МПа и округлить его значение.

Решение.

1. Определяем крутящие моменты:

$$T_1 = \frac{9{,}55 \cdot N_1}{650} = \frac{9{,}55 \cdot 90}{650} = 1{,}32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{9{,}55 \cdot N_2}{n} = \frac{9{,}55 \cdot 45}{650} = 0{,}66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 6.8).

3. Определяем усилия натяжения в ветвях ремней:

$$t_1 = \frac{2 \cdot T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1{,}32}{1} = 2{,}64 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2 \cdot T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0{,}66}{0{,}6} = 2{,}2 \text{ кН}.$$

4. Определяем изгибающие нагрузки:

$$S_1 = t_1 + 2 \cdot t_2 = 7{,}92 \text{ кН}; \quad S_2 = t_2 + 2 \cdot t_2 = 6{,}60 \text{ кН}.$$

5. Определяем изгибающие нагрузки в вертикальной плоскости и реакции от этих нагрузок:

$$S_1^y = S_1 \cdot \sin\alpha_1 = 7{,}92 \cdot \sin 75^\circ = 7{,}92 \cdot 0{,}9659 = 7{,}65 \text{ кН};$$

$$S_2^y = S_2 \cdot \sin\alpha_2 = 6{,}6 \cdot \sin 80^\circ = 6{,}6 \cdot 0{,}9848 = 6{,}49 \text{ кН}.$$

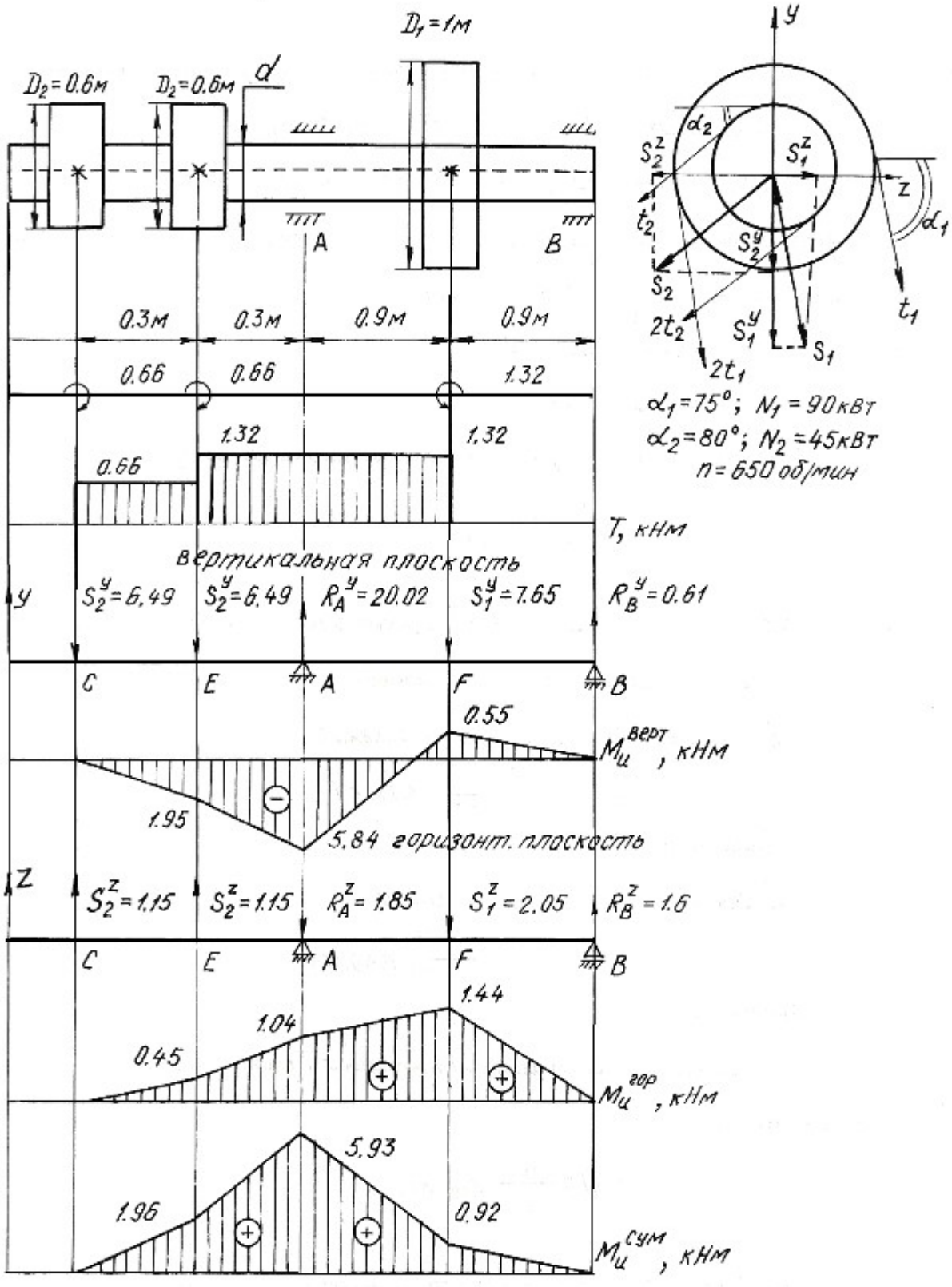

D1=1м
D2=0.6м
D2=0.6м
d
A
B
0.3м
0.3м
0.9м
0.9м
0.66
0.66
1.32
1.32
1.32
0.66
T, кНм
вертикальная плоскость
y
S2y=6.49
S2y=6.49
RAy=20.02
S1y=7.65
RBy=0.61
C
E
A
F
B
0.55
Mцверт, кНм
1.95
5.84 горизонт. плоскость
z
S2z=1.15
S2z=1.15
RAz=1.85
S1z=2.05
RBz=1.6
C
E
A
F
B
1.44
1.04
0.45
Mцгор, кНм
5.93
1.96
0.92
Mцсум, кНм
y
α2
S2z
S1z
z
α1
t2
S2y
S2
t1
2t2
S1y
S1
2t1
α1=75°; N1=90кВт
α2=80°; N2=45кВт
n=650 об/мин

Рис. 6.8.

$$\sum M_A = 0; \quad S_2^y \cdot 0,6 - S_1^y \cdot 0,9 + R_B^y \cdot 1,8 + S_2^y \cdot 0,3 = 0;$$

$$6,49 \cdot 0,6 + 6,49 \cdot 0,3 - 7,65 \cdot 0,9 + R_B^y \cdot 1,8 = 0;$$

$$R_B^y = 0,61 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \; S_2^y \cdot 2,4 + S_2^y \cdot 2,1 - R_A^y \cdot 1,8 + S_1^y \cdot 0,9 = 0;$$

$$6,49 \cdot 2,4 + 6,49 \cdot 2,1 - R_A^y \cdot 1,8 + 7,65 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_A^y = 20,02 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; \quad -S_2^y - S_2^y + R_A^y - S_1^y + R_B^y = 0;$$

$$-6,49 - 6,49 + 20,02 - 7,65 + 0,61 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости:

$$M_{\text{и}}^E = -6,49 \cdot 0,3 = -1,95 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{и}}^A = -6,49 \cdot 0,6 - 6,49 \cdot 0,3 = -5,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{и}}^F = R_B^y \cdot 0,9 = 0,61 \cdot 0,9 = 0,55 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определяем изгибающие нагрузки в горизонтальной плоскости и реакции от этих нагрузок:

$$S_1^z = S_1 \cdot \cos\alpha_1 = 7,92 \cdot \cos 75^\circ = 2,05 \text{ кН};$$

$$S_2^z = S_2 \cdot \cos\alpha_2 = 6,6 \cdot \cos 80^\circ = 1,15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$S_2^z \cdot 0,6 - S_1^z \cdot 0,9 + R_B^z \cdot 1,8 - S_2^z \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_B^z = 1,6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$-S_2^z \cdot 2,4 - S_2^z \cdot 2,1 + R_A^z \cdot 1,8 + S_1^z \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_A^z = 1,85 \text{ кН}.$$

$$\sum Z = 0; \quad S_2^z + S_2^z - R_A^z - S_1^z + R_B^z = 0;$$

$$1,15 + 1,15 - 1,85 - 2,05 + 1,6 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости:

$$M_{\text{и}}^{E} = 1{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{A} = 1{,}15 \cdot 0{,}6 + 1{,}15 \cdot 0{,}3 = 1{,}04 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{F} = 1{,}6 \cdot 0{,}9 = 1{,}44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

7. Строим эпюру суммарных изгибающих моментов:

$$M_{\text{и}}^{E} = \sqrt{1{,}95^2 + 0{,}45^2} = 1{,}96 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{A} = \sqrt{5{,}84^2 + 1{,}04^2} = 5{,}93 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{и}}^{F} = \sqrt{0{,}55^2 + 1{,}44^2} = 0{,}92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

8. Опасным сечением будет сечение A:

$$M_{\text{и}}^{A} = 5{,}93 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad T = 1{,}32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетный момент для сечения A:

$$M_{\text{р}}^{\text{III}} = \sqrt{5{,}93^2 + 1{,}32^2} = 6{,}08 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Определяем диаметр сечения вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{р}}}{\pi\sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}08 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 70}} = 0{,}096 \text{ м} = 96 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 100$ мм.

6.6. Задания для расчета на изгиб с кручением

Трансмиссионный вал делает n оборотов в минуту при мощности N. На шкив с диаметром D_1 с углом наклона ремней ветвей ремня к горизонту α_1 передается мощность N кВт от электродвигателя. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы α_2 наклона ветвей ремня к горизонту, и каждый из них передает мощность $0{,}5N$ на станки. Для заданной расчетной схемы и данных размеров и нагрузок требуется:

1) определить окружные моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n;

2) построить эпюру крутящих моментов T;

3) определить окружные усилия, действующие на шкивы;

4) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкива и вала не учитывать);

5) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{\text{гор}}$ и от вертикальных сил $M_{\text{верт}}$;

6) построить эпюру суммарных изгибающих моментов;

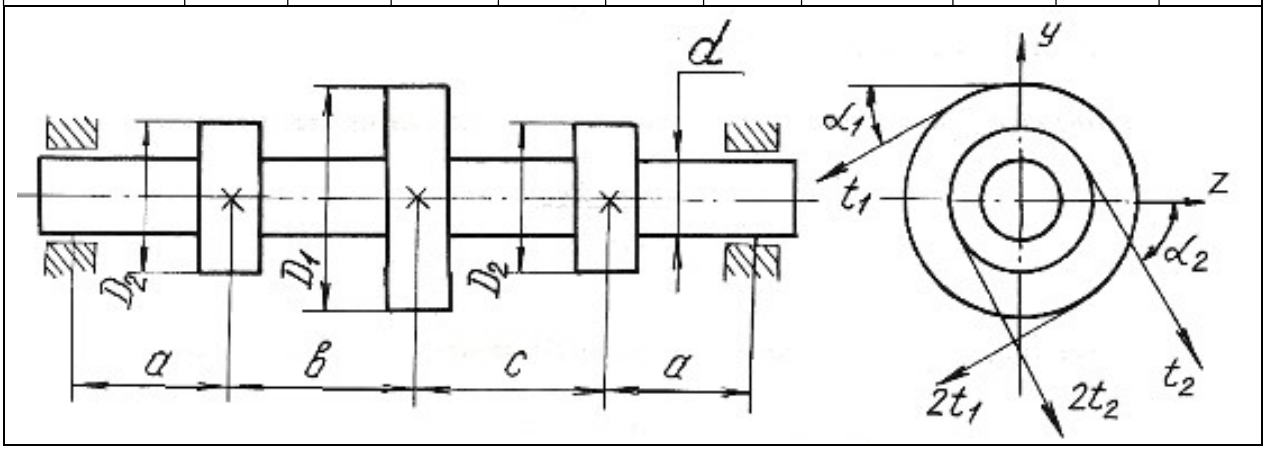
7) найти опасное сечение и определить величину максимально-расчетного момента по третьей теории прочности;

8) подобрать диаметр сечения вала при σ_{adm}=80 МПа.

Данные для расчета и схемы взять из табл. 6.6.

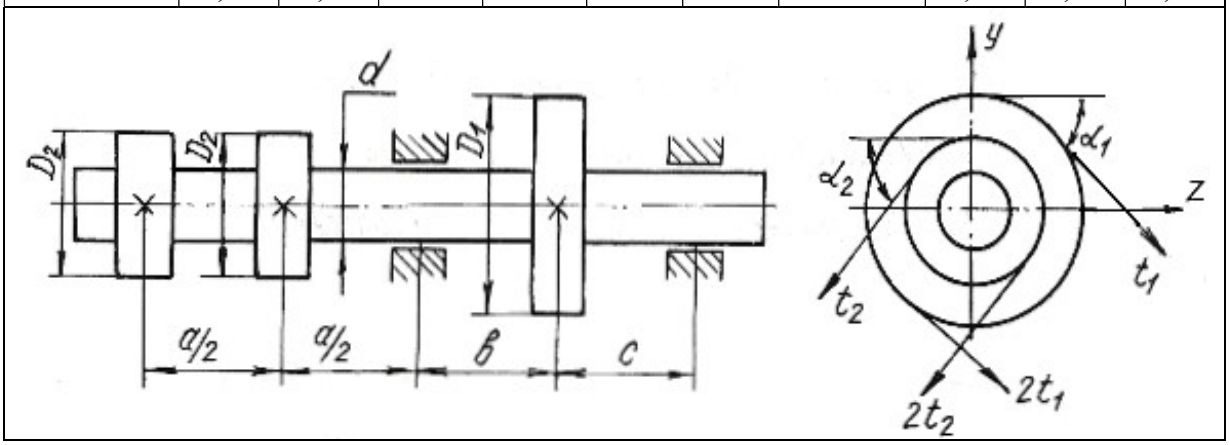
Таблица 6.6

Номер варианта	Числовые значения									
	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
1	1,00	0,30	45	40	30	15	250	0,50	1,00	1,00
2	0,80	0,40	15	10	40	20	200	0,50	1,30	1,20
3	1,00	0,40	30	35	30	15	250	0,40	1,25	2,00
4	1,20	0,50	60	55	50	25	200	0,40	1,00	2,50
5	1,40	0,40	45	45	60	30	300	0,60	1,20	1,80



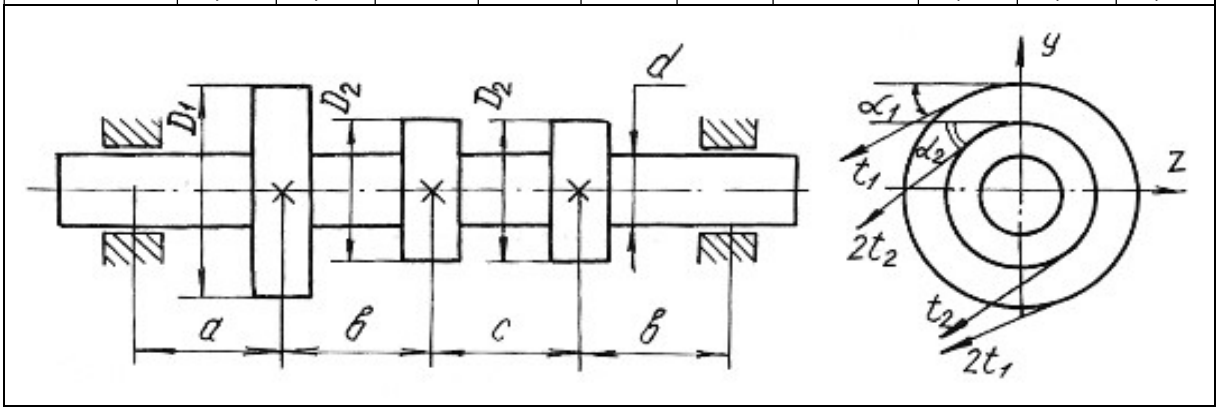
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
6	1,00	0,30	45	40	70	35	400	0,70	1,20	1,30
7	0,90	0,60	55	50	75	38	400	0,50	1,00	1,00
8	1,00	0,70	60	35	80	40	500	0,60	1,00	1,10
9	1,20	0,80	65	30	85	42	550	0,70	1,10	1,20
10	1,20	0,90	70	45	90	45	600	0,70	1,00	1,00



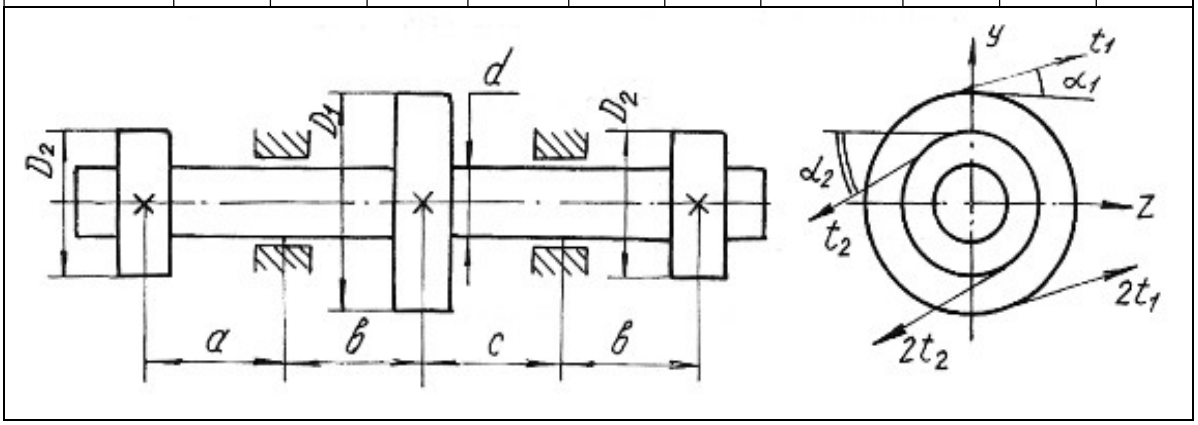
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
11	1,00	0,60	75	80	90	45	650	0,60	0,90	0,90
12	1,20	0,80	80	75	100	50	700	0,50	1,00	1,00
13	1,20	0,70	85	30	110	55	750	0,60	1,10	1,20
14	1,20	0,60	30	85	120	60	800	0,50	1,00	1,00
15	1,00	0,80	35	40	130	65	360	0,60	1,20	1,00



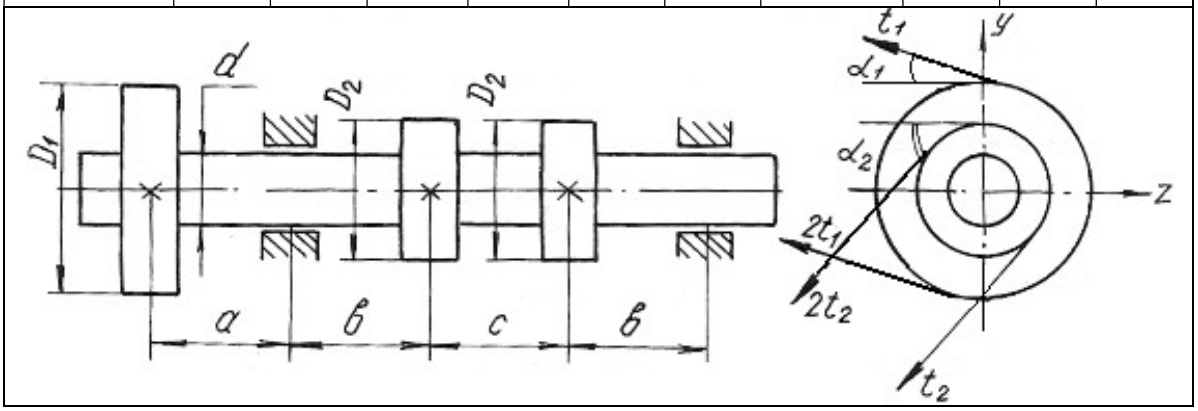
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
16	1,20	0,60	40	35	140	70	400	0,50	1,00	1,00
17	1,40	0,70	45	50	150	75	450	0,50	0,50	1,00
18	1,20	0,60	50	45	160	80	500	0,60	1,00	1,00
19	1,20	0,70	60	65	170	85	550	0,50	0,90	0,90
20	1,00	0,60	65	60	180	90	600	0,60	1,00	0,90



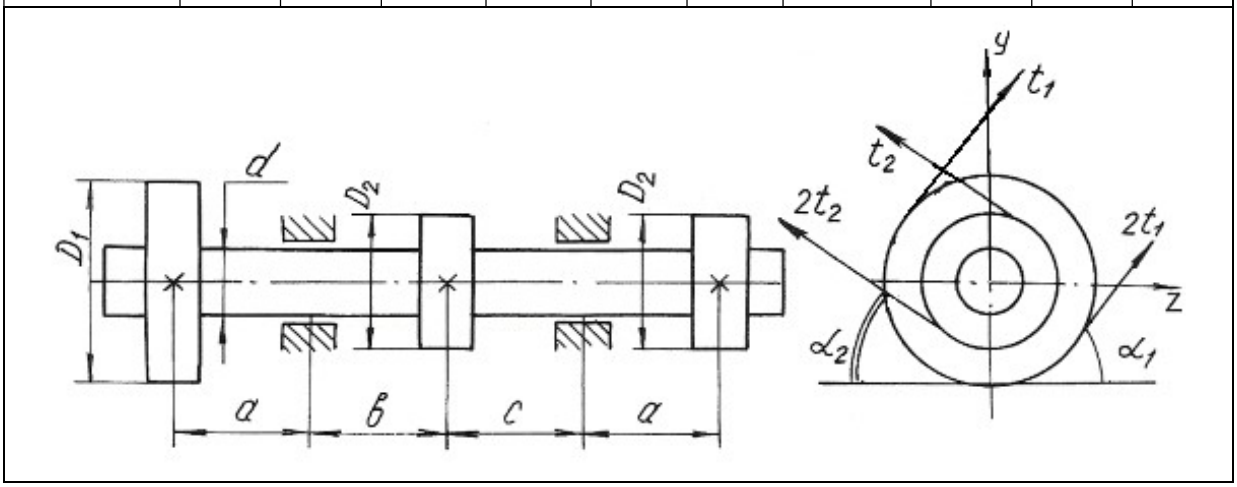
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
21	1,20	0,80	15	25	30	15	250	1,00	0,80	1,20
22	1,00	0,60	25	15	40	20	280	1,20	1,20	1,30
23	0,80	0,50	30	45	50	25	300	1,30	1,30	1,40
24	1,00	0,65	45	60	60	30	450	1,25	1,40	1,50
25	1,20	0,75	60	30	70	35	500	1,40	1,00	1,60



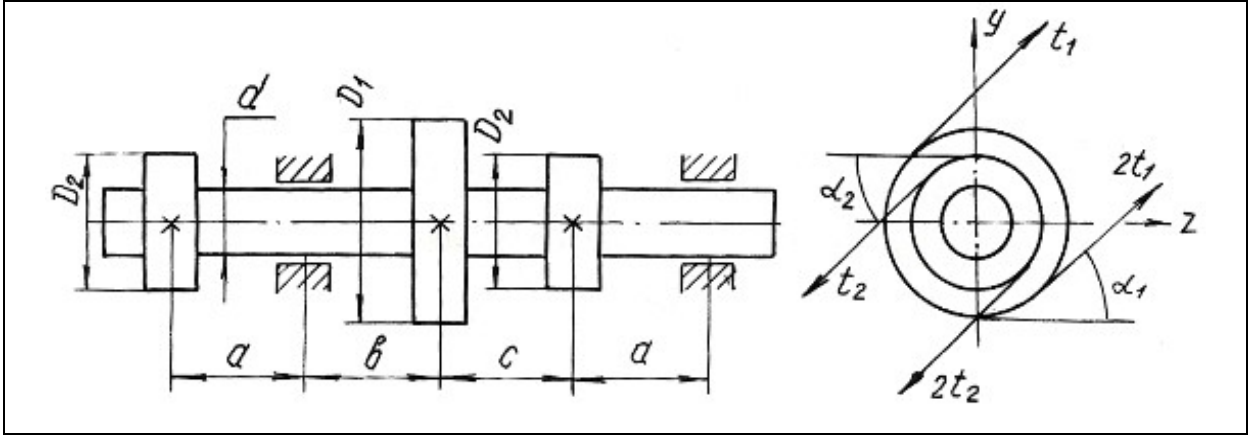
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
26	1,20	0,80	75	15	60	30	500	1,20	1,20	1,40
27	1,00	0,90	30	45	64	32	550	1,00	0,80	1,00
28	0,90	0,80	35	55	70	35	600	0,60	1,00	0,90
29	0,80	0,70	40	50	74	37	650	0,60	0,90	0,80
30	1,10	0,75	55	65	80	40	700	0,80	1,00	0,65



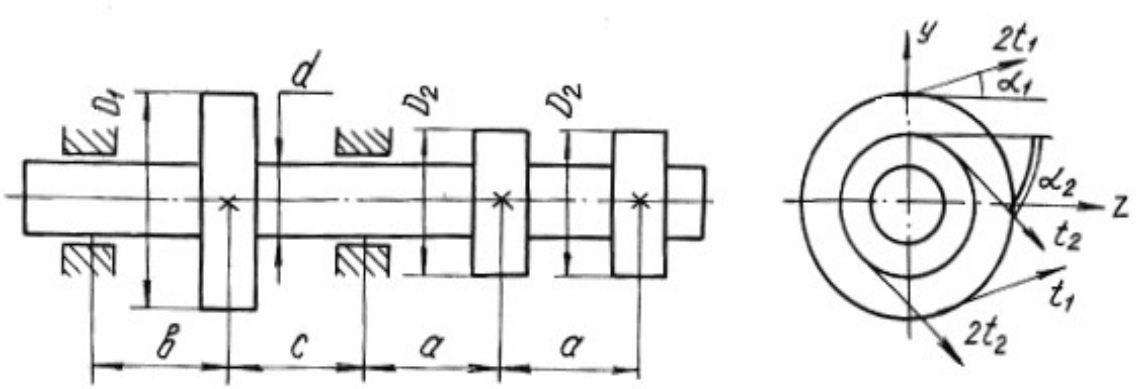
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
31	1,10	0,75	45	45	170	85	500	1,00	0,90	1,10
32	1,20	0,90	60	30	90	45	400	0,90	1,00	0,80
33	0,90	0,70	75	15	95	47	450	0,80	0,90	1,00
34	1,00	0,80	30	45	100	50	500	1,00	1,20	0,90
35	1,20	0,90	25	15	110	55	550	0,90	1,00	1,20



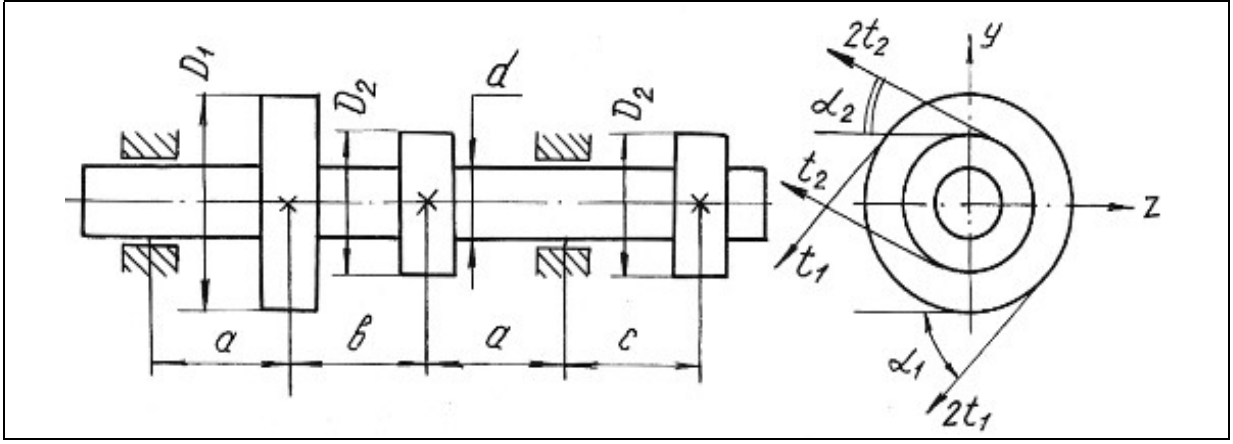
Продолжение табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
36	1,00	0,80	30	20	120	60	600	0,80	1,20	0,90
37	1,20	0,90	35	45	130	65	650	1,00	0,80	0,90
38	1,10	0,80	60	50	140	70	700	0,90	1,00	0,90
39	1,00	0,70	75	15	150	75	300	0,80	1,00	0,70
40	1,00	0,60	60	40	160	80	300	1,00	1,20	1,30



Окончание табл. 6.6

Номер варианта	D_1, м	D_2, м	α_1, град	α_2, град	N_1, кВт	N_2, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м
41	1,00	0,40	40	20	40	20	200	0,50	1,00	0,40
42	0,80	0,50	45	25	50	25	250	0,40	1,10	0,50
43	1,00	0,60	50	30	60	30	300	0,60	0,90	0,40
44	1,20	0,80	55	35	70	35	200	0,40	1,00	0,60
45	1,10	0,50	60	40	80	40	350	0,70	1,20	0,70



Глава 7

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКИХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Стержни, длина которых относительно невелика по сравнению с их поперечными размерами, рассчитываются на сжатие, исходя из условия прочности:

$$\frac{F}{A} \le \sigma_{\text{adm}}.$$

При этом полагается, что вплоть до разрушения стержень работает на осевое сжатие и продольная ось его остаётся прямолинейной.

Иная картина наблюдается при сжатии стержней, длина которых значительно больше размеров поперечного сечения. В этих случаях прямолинейная продольная ось стержней может искривляться. Искривление происходит в плоскости наименьшей жесткости стержня.

Деформация, которая возникает при сжатии стерня и сопровождается искривлением продольной оси стержня, называется продольным изгибом, а переход прямолинейной формы продольной оси стержня в криволинейную носит название потери устойчивости. Нагрузка, при которой стержень теряет устойчивость, называется критической силой F_{cr}.

Напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня от критической силы, называется критическим напряжением σ_{cr}.

Критические напряжения весьма опасны для сжатых стержней, поэтому необходимо проводить расчёты на устойчивость.

Для стержней, закрепленных на одной или двух опорах, величина критической силы может быть определена по формуле Эйлера:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, J_{\min}}{(\mu l)^2}, \qquad (7.1)$$

где E − модуль продольной упругости материала; $J_{\min}$ − минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня; l − длина стержня; μ − коэффициент приведенной длины стержня, отражающий способ закрепления концов стержня (рис. 7.1); μl − приведенная длина стержня.

Критические напряжения

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \qquad (7.2)$$

где λ − гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \tag{7.3}$$

где $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}, \tag{7.4}$$

Формула Эйлера применима для стержней с гибкостью более гибкости, предельной для данного материала стержня

$$\lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}, \tag{7.5}$$

где σ_{pr} – предел пропорциональности материала стержня (напряжение, при котором сохраняется прямая пропорциональность между σ и ε).

Для расчёта сжатых стержней любой гибкости применяется способ, основанный на применении коэффициентов φ. Этот способ расчёта сжатых стержней на устойчивость сводится к расчёту стержня как бы на простое сжатие, только по заниженному допускаемому напряжению с использованием формулы:

$$\sigma^{\text{у}}_{\text{adm}} = \varphi\, \sigma_{\text{adm}}, \tag{7.6}$$

где $\sigma^{\text{у}}_{\text{adm}}$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость; φ – коэффициент продольного изгиба (коэффициент понижения основного допускаемого напряжения σ_{adm} на простое сжатие), значения коэффициентов φ для различных материалов приведены в табл. 7.1.

Величина допускаемой нагрузки на устойчивость $F^{\text{у}}_{\text{adm}}$ сжатого стержня соответственно будет равна

$$F^{\text{у}}_{\text{adm}} = \sigma^{\text{у}}_{\text{adm}} A = \varphi \sigma_{\text{adm}} A, \tag{7.7}$$

где A – площадь поперечного сечения сжатого стержня.

Между критической и допускаемой нагрузкой на устойчивость существует следующая связь

$$F_{cr} = K_{\text{у}} F^{\text{у}}_{\text{adm}}, \tag{7.8}$$

где $K_{\text{у}}$ – коэффициент запаса на устойчивость.

Таблица 7.1

Гибкость, λ	Значение коэффициента φ				
	Материал				
	Ст. 4, Ст. 3	Ст. 5	Ст. СПБ	чугун	дерево
0	1	1	1	1	1
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,95	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,8
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,6
80	0,75	0,7	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,2	0,38
100	0,6	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25
120	0,45	0,36	0,3	–	0,22
130	0,4	0,33	0,26	–	0,18
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14
160	0,29	0,24	0,19	–	0,12
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,1
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08

В зависимости от исходных данных для расчета на устойчивость решение сводится к определению допускаемой нагрузки $F_{\text{adm}}^{\text{у}}$ из условий устойчивости сжатого стержня или к подбору площади поперечного сечения сжатого стержня.

Рассмотрим возможные варианты решения на устойчивость сжатых стержней с помощью коэффициента φ на следующих примерах.

Пример 7.1.

Определить допускаемую нагрузку для стойки, изготовленной из Ст. 3 в виде трубы с наружным диаметром $d_1 = 0{,}04$ м и внутренним $d_2 = 0{,}03$ м, длиной $l = 1$ м. Концы стойки защемлены. Допускаемое напряжение для материала стержня $\sigma_{\text{adm}} = 120$ МПа, предел пропорциональности материала $\sigma_{pr} = 200$ МПа. Коэффициент запаса на устойчивость $K_{\text{у}} = 2$. Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение.

Выявим возможность решения данной задачи с помощью формулы Эйлера. Для этого находим предельную гибкость для данного материала стойки

$$\lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}5.$$

Для определения действительной гибкости данной стойки находим минимальный момент инерции поперечного сечения

$$J_{\min} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) = \frac{3{,}14}{64}(0{,}04^4 - 0{,}03^4) = 8{,}586 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) = \frac{3{,}14}{4}(0{,}04^2 - 0{,}03^2) = 5{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{8{,}586 \cdot 10^{-8}}{5{,}5 \cdot 10^{-4}}} = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \text{м}.$$

Тогда гибкость стойки при $\mu = 0{,}5$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}5 \cdot 1}{1{,}25 \cdot 10^{-2}} = 40.$$

Сравнивая полученные значения гибкостей, приходим к выводу, что расчет с помощью формулы Эйлера в данном случае не применим, так как $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$.

Расчет производим с помощью коэффициента φ. Для данной стальной стойки при $\lambda = 40$ коэффициент $\varphi = 0{,}92$.

Найдем допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm}}^{\text{у}} = \varphi\sigma_{\text{adm}} = 0{,}92 \cdot 120 = 110{,}4 \text{ МПа},$$

а допускаемая нагрузка на устойчивость

$$F_{\text{adm}}^{\text{у}} = \sigma_{\text{adm}}^{\text{у}} A = 110{,}4 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-4} = 60{,}72 \cdot 10^3 \text{ Н} = 60{,}72 \text{ кН}.$$

Критическая нагрузка

$$F_{cr} = K_{\text{у}} F_{\text{adm}}^{\text{у}} = 2 \cdot 60{,}72 = 121{,}44 \text{ кН}.$$

Пример 7.2.

Подобрать двутавровое сечение стойки с одним защемленным, а другим свободным концом. Осевая сжимающая сила $F = 400$ кН, длина стойки $l = 1{,}5$ м. Основное допускаемое напряжение на сжатие $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

Решение.

Решаем задачу методом последовательных приближений. Примем для первого приближения коэффициент $\varphi_1 = 0{,}5$. В этом случае необходимая площадь поперечного сечения стойки:

$$A_1 \geq \frac{F}{\varphi_1 \sigma_{adm}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По сортаменту выбираем двутавр № 33 (см. табл. П. 1) с площадью $A_2 = 53{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2 и минимальным радиусом инерции $i_{\min_1} = 2{,}79 \cdot 10^{-2}$ м.

Соответствующая гибкость стойки при коэффициенте $\mu = 2$

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min_1}} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}79 \cdot 10^{-2}} = 107.$$

С помощью линейной интерполяции находим коэффициент φ_2 между его значениями по табл. 7.1 при $\lambda = 100$ и при $\lambda = 110$. При $\lambda = 100$, $\varphi = 0{,}60$; при $\lambda = 110$, $\varphi = 0{,}52$, следовательно, $\Delta\lambda = 10$, $\Delta\varphi = 0{,}08$:

$$\varphi_2 = \varphi_{\lambda=100} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}\left[(\lambda{=}107) - (\lambda{=}100)\right] = 0{,}544.$$

Следовательно, при $\lambda = 107$ коэффициент $\varphi_2 = 0{,}544$.

Проводим проверку по условию

$$F_{\text{расч}_1} = \varphi_2 A_2 \sigma_{adm} = F \pm 5\ \%,$$

в нашем случае $F_{\text{расч}_1} = 0{,}544 \cdot 53{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 468270$ Н $= 468{,}27$ кН $> F$.

Находим величину расхождения между заданной и расчетной нагрузками

$$\delta = \frac{468{,}27 - 400}{400} 100 = 17\ \% > 5\ \%.$$

Делаем новый расчет (приближение)

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}544}{2} = 0{,}522 .$$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \sigma_{adm}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}522 \cdot 160 \cdot 10^6} = 48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

По сортаменту проката найденной площади соответствует двутавр № 30а (см. табл. П. 1) площадью сечения $A_4 = 49{,}9 \cdot 10^{-4}$ м^2 и $i_{\min_2} = 2{,}95 \cdot 10^{-2}$ м. Тогда гибкость

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min_2}} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}95 \cdot 10^{-2}} = 101{,}7 \approx 102 .$$

После интерполяции получаем

$$\varphi_4 = 0{,}6 - \frac{0{,}08}{10}(102 - 100) = 0{,}584 .$$

Проводим проверку

$$F_{\text{расч}_2} = 0{,}584 \cdot 49{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 466265 \text{ Н} = 466{,}265 \text{ кН} > F .$$

Величина расхождения между заданной и расчетной нагрузками составляет:

$$\delta = \frac{466{,}265 - 400}{400} 100 = 16{,}6 \text{ \%} > 5 \text{ \%} .$$

Проверяем двутавр № 30 площадью сечения $A_5 = 46{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2, $i_{\min_3} = 2{,}69 \cdot 10^{-2}$ м.

Гибкость $\lambda_3 = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}69 \cdot 10^{-2}} \approx 112$.

Коэффициент φ_5 находим линейной интерполяцией между значениями $\lambda = 110$ и $\lambda = 120$. Получим $\varphi_5 = 0{,}506$.

Проверка

$F_{\text{расч}_3} = \varphi_5 A_5 \sigma_{adm} = 0{,}506 \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 376500 \text{ Н} = 376{,}5 \text{ кН}.$

Величина расхождения между заданной и расчетной нагрузками составляет

$$\delta = \frac{400 - 376{,}5}{400} 100 = 5{,}87 \text{ \%} > 5 \text{ \%} .$$

Следовательно, из трех рассмотренных номеров двутавров к практическому применению необходимо принять двутавр № 30а с площадью поперечного сечения $A = 49{,}9 \cdot 10^{-4}$ м^2, так как нагрузка, которую воспринимает двутавр № 30 меньше заданной нагрузки более чем 5 %.

7.1. Задания для расчета стержней на устойчивость

Подобрать поперечное сечение заданного профиля гибкого стержня при действии осевой сжимающей силы. Решение выполнить методом последовательных приближений с помощью коэффициентов φ. Допускаемые напряжения для материалов стержней на сжатие принять: для стали $\sigma_{adm} = 160$ МПа; для чугуна $\sigma_{adm} = 130$ МПа; для дерева $\sigma_{adm} = 10$ МПа.

Данные для расчетов взять из рис. 7.1, табл. 7.2 и П. 1.

Примечания:

1. Для сечения прямоугольного профиля принять соотношение между размерами как $b:h = 1:2$.
2. Для кольцеобразного сечения принять соотношение между внутренним и наружным диаметрами как $d/D = 0{,}85$.

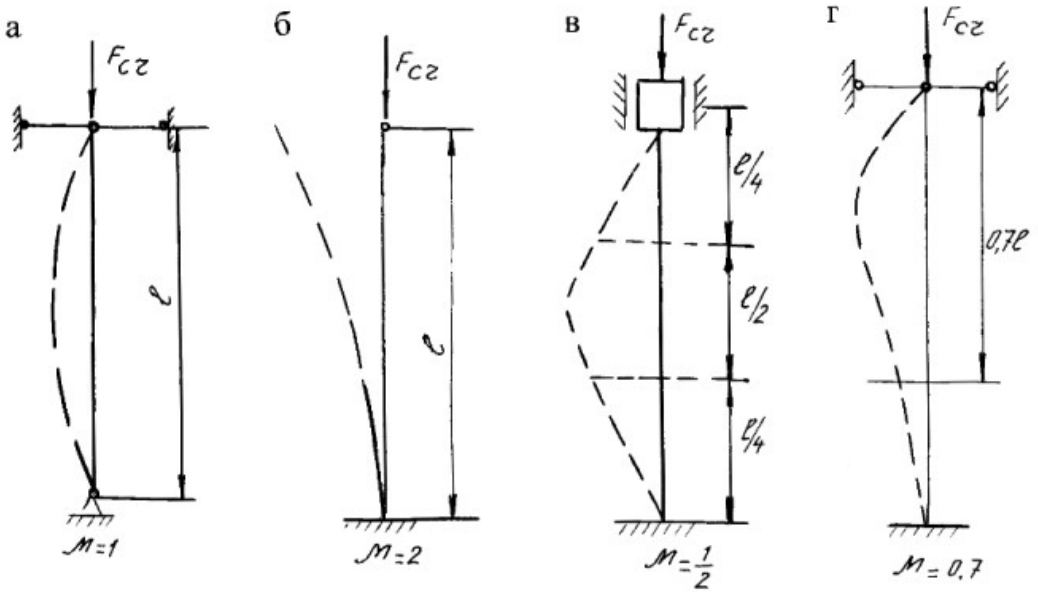
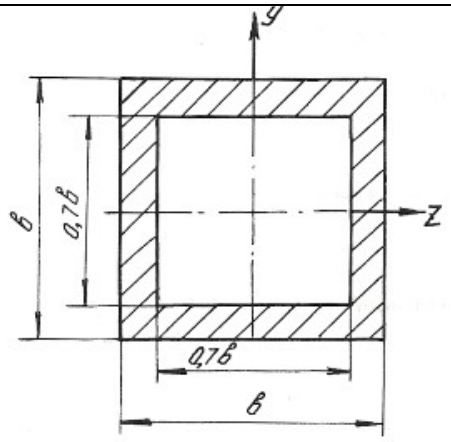
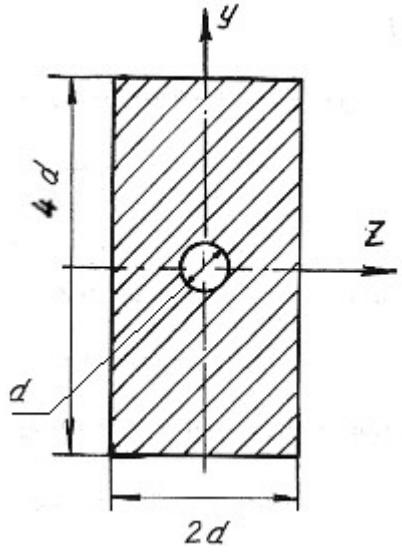
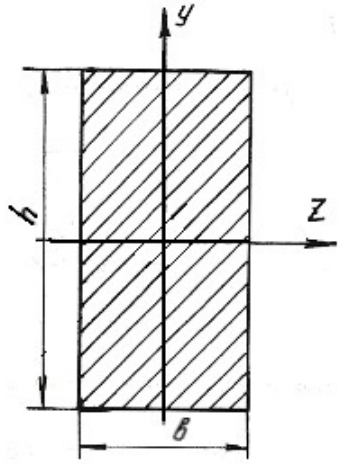
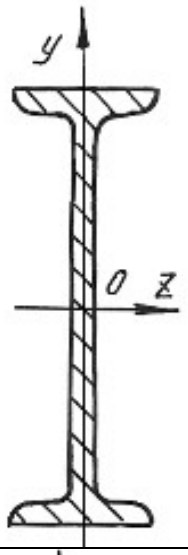
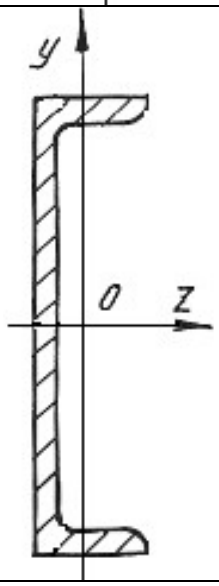


Рис. 7.1.

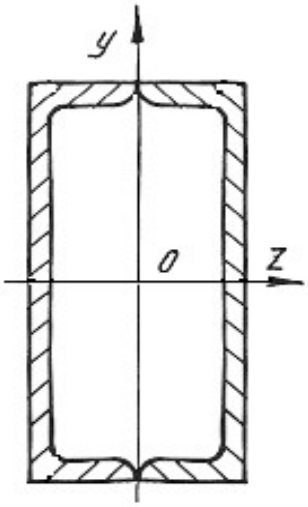
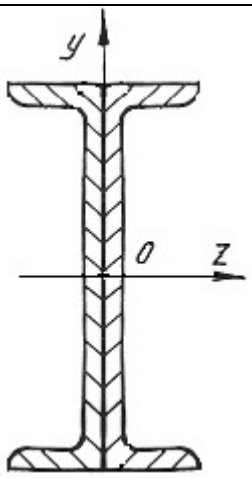
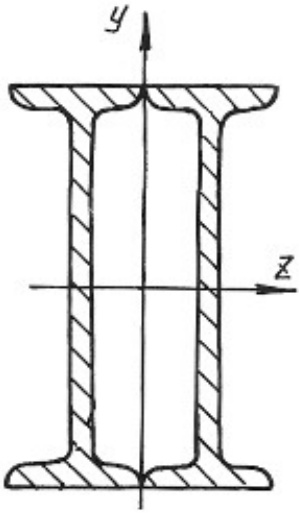
Таблица 7.2

Номер варианта	Схема поперечного сечения	Материал	Способ закрепления	Длина стержня, м	Сжимающая нагрузка, кН
1		Дерево	а б в г	3 4 4 1,6	90 120 150 60
2		Дерево	а б в г	3,6 5 5 2	140 250 400 180
3		Чугун	а б в г	5,2 4,8 4,5 2,8	600 800 900 700

Продолжение табл. 7.2

Номер варианта	Схема поперечного сечения	Материал	Способ закрепления	Длина стержня, м	Сжимающая нагрузка, кН
4		Чугун	а б в г	4,6 3,8 4,2 3,2	850 600 700 900
5		Сталь 5	а б в г	3,2 3,6 8 2,4	380 700 800 600
6		Сталь 3	а б в г	3,6 4,5 5 2,2	280 650 450 250

Окончание табл. 7.2

Номер варианта	Схема поперечного сечения	Материал	Способ закрепления	Длина стержня, м	Сжимающая нагрузка, кН
7		Сталь 3	а б в г	3 4 5,5 4,8	300 400 250 350
8		Сталь 3	а б в г	5,5 6,6 7 3,5	960 500 800 750
9		Сталь 3	а б в г	3 7 6 4	930 740 830 980

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета

«___» _____ 2018 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от «07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018
©Уральский государственный горный университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА 4
1.1. Основные понятия статики 4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия 9
1.3. Произвольная плоская система сил 16
1.4. Равновесие систем тел 26
1.5. Произвольная пространственная система сил 34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения 44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА 55
2.1. Криволинейное движение точки 55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела 62
вокруг неподвижной оси 62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки 100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки 114
4.2. Колебания материальной точки 124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки 134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ 146
5.1. Теорема о движении центра масс системы 146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы
относительно оси 148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы 153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию
движений твёрдого тела 162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ 177
6.1. Принцип Даламбера для системы 177
6.2. Принцип возможных перемещений 182
6.3. Общее уравнение динамики 189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода 201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ 220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1 220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2 226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3 231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4 233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5 236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6 241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил.**

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной,** или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

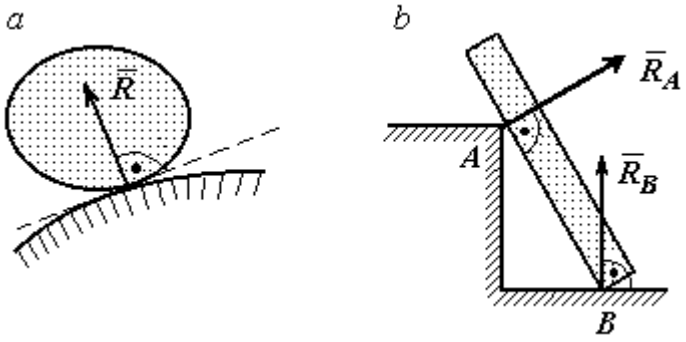


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормалям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

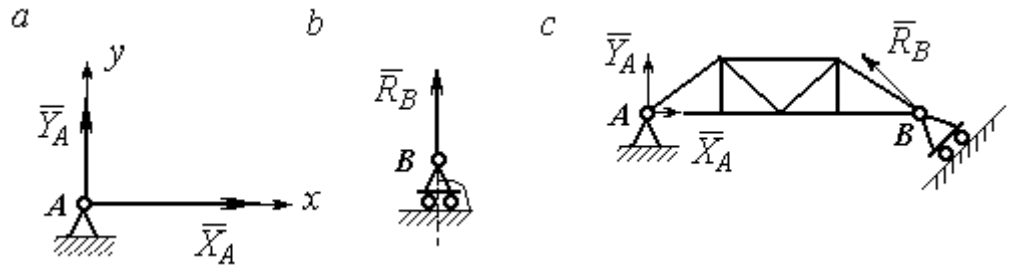


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

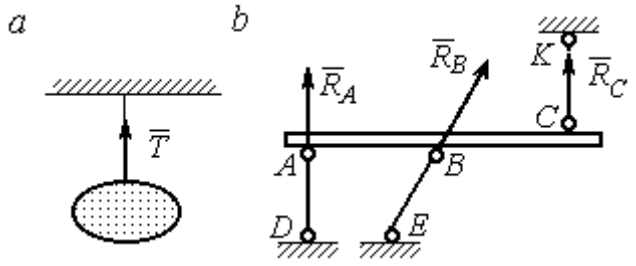


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира A разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

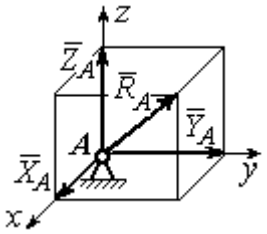


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

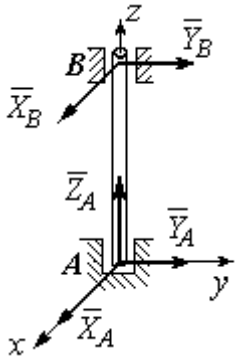


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника *B* разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям. Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник *A*). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, *a*, на ось *x*: $F_x = F\cos\alpha$, $Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi$, $P_x = P\cos 90^\circ = 0$.

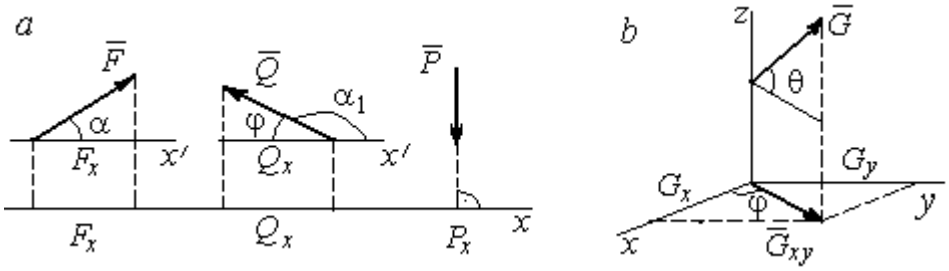


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
a – проекция силы на ось; *b* – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, *b* вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость *xy*. По величине $G_{xy} = G\cos\theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz: $G_x = G_{xy}\cos\varphi = G\cos\theta\cos\varphi$, $G_y = G_{xy}\sin\varphi = G\cos\theta\sin\varphi$, $G_z = G\sin\theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120°$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

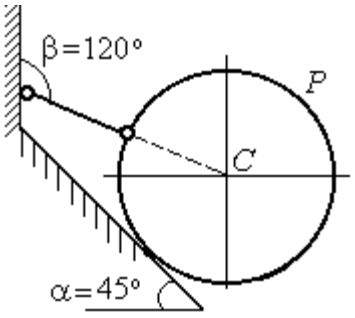


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0.$$

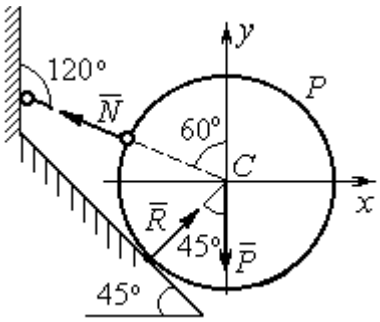


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N\cos 30^\circ + R\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N\cos 60^\circ + R\cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14{,}64$ кН, $R = 17{,}93$ кН.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней *AC* и *BC*, скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень *BC* горизонтален, стержень *AC* составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру *C* прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10$ кН и $G_2 = 12$ кН. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок *D* так, что угол наклона участка троса *CD* к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней *BC* и *AC*.

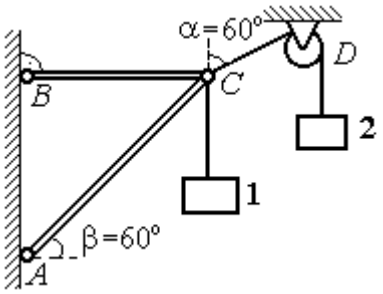


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла *C*, в котором закреплены стержни и тросы. На узел *C* действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней *BC* и *AC* (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xCy, как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2\cos 60^\circ - T_2\cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2\cos 30^\circ + T_1 - T_2\cos 60^\circ = 0.$$

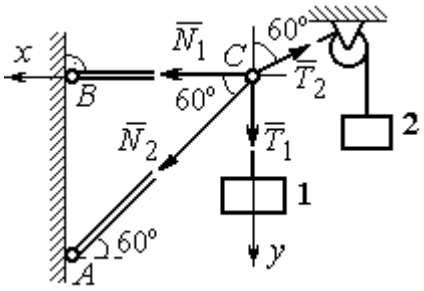


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел *C* при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12{,}7$ кН, $N_2 = -4{,}62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня *AC* направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном *ABC* посредством каната, перекинутого через блоки *B* и *D* (рис. 1.11). Блок *B* установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней *AB* и *BC*, блок *D* укреплён так, что участок троса *DB* составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни *AB* и *BC* соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз *P*, переброшен через блок *E* и на отрезке *BE* составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока *B*, определить усилия в стержнях *AB* и *BC* при равновесии груза.

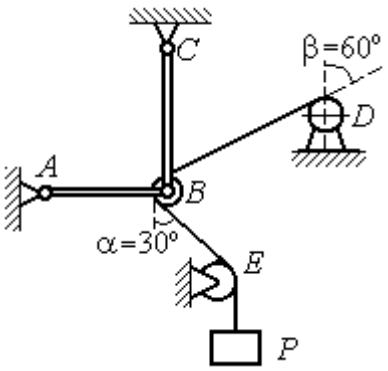


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

Решение

Рассмотрим равновесие блока *B* вместе с отрезками нити *BE* и *BD*. Освободим блок *B* от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити *BD*, приложенная в точке *D*, численно равная весу груза *P*, реакция $\vec{T}'$ нити *BE*, приложенная в точке *E* и также численно равная весу груза *P* и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

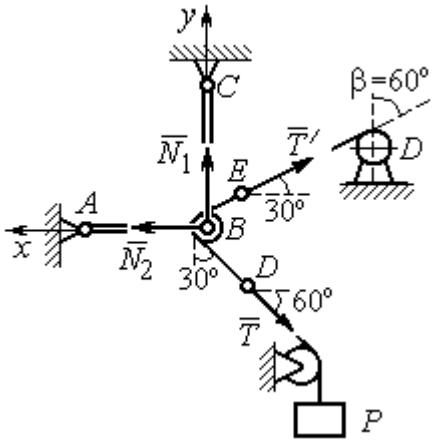


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок *B*, при его равновесии

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T'\cos 30^\circ - T\cos 60^\circ = 0;\ \sum F_{ky} = N_1 + T'\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P$ = 20 кН, получим: N_1 = 7,32 кН, N_2 = 27,32 кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса *CBDP*, натянутого грузом весом *P* = 50 Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса *CB*, *BD*, *DP* и натяжения оттяжек *BA* и *DE*, если угол отклонения оттяжки *BC* от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса *BD* от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

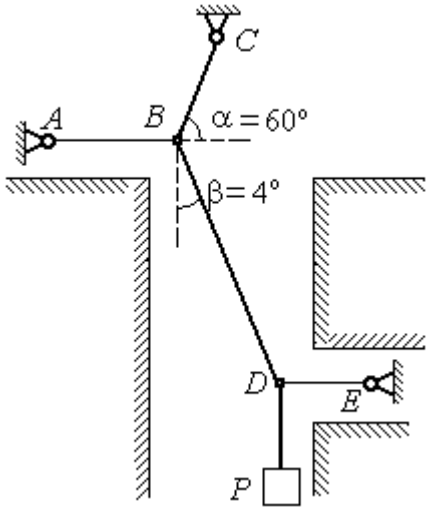


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла *D*, в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки *DE* и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP, равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат *xDy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *D:*

$$\sum F_{kx} = S\cos 86^\circ - T_E = 0\,; \;\; \sum F_{ky} = S\cos 4^\circ - T_P = 0\,.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке *DP* $T_P = P =$ 50 Н, находим натяжение S на среднем участке отвеса: $S = \dfrac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50{,}12$ Н. Из первого уравнения находим натяжение $T_E = S\cos 86^\circ = 3{,}49$ Н.

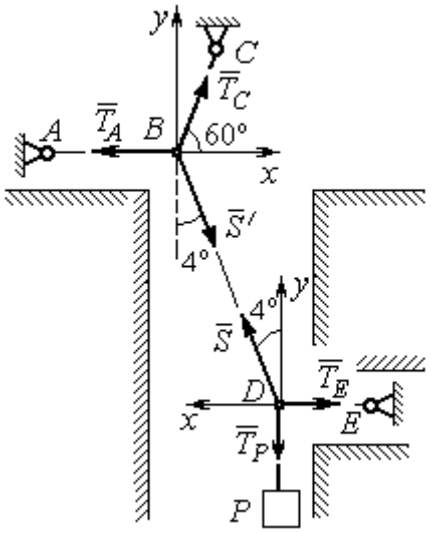


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах *B* и *D* при равновесии отвеса

Теперь рассмотрим равновесие узла *B*, на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки *BA*, реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса *BC* и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$, а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *B:*

$$\sum F_{kx} = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ - T_A = 0\,; \quad \sum F_{ky} = T_C\cos 30^\circ - S'\cos 4^\circ = 0\,.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке *BC* и натяжение T_A оттяжки *BA*: $T_C = \dfrac{S'\cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57{,}73$ Н; $T_A = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ = 32{,}36$ Н.

Задача 5. Груз *P* = 20 кН удерживается двумя стержнями *AC*, *AD* одинаковой длины и цепью *AB*, скреплённых в точке *A*, так, что плоскость треугольника *ADC* горизонтальна (рис. 1.15). Цепь *BA* отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние *CE* = *ED.* Трос закреплён одним концом в точке *A*, а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок *K* так, что отрезок

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

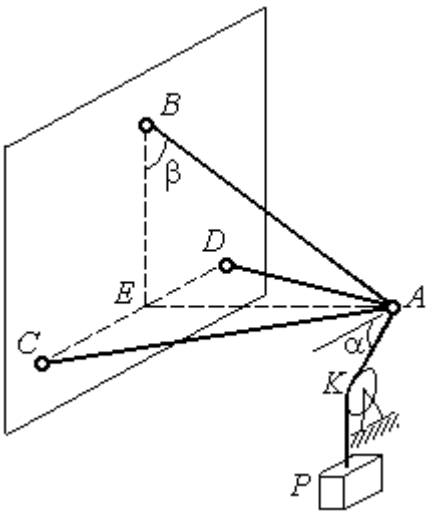


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла A. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

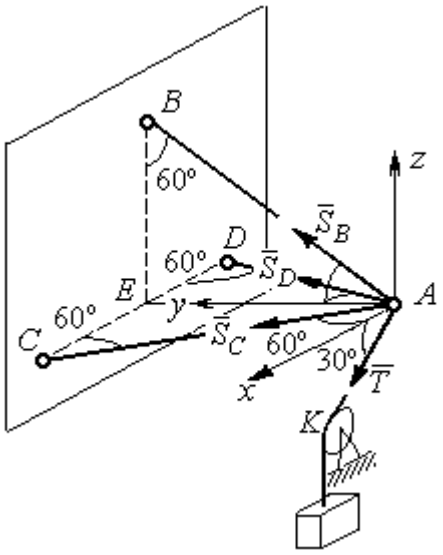


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A, при его равновесии

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27{,}32$ кН; $S_D = 7{,}32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC, соединённых в точке D. В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

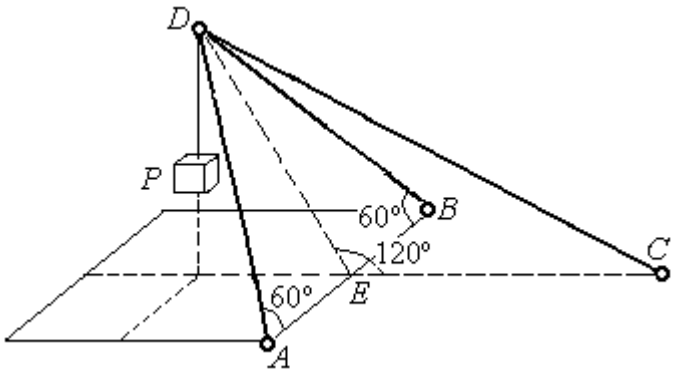


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

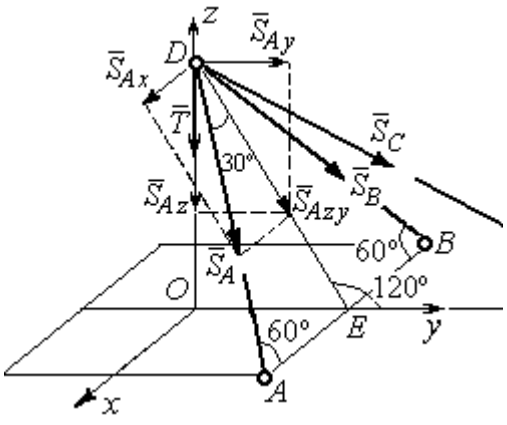


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D, при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz, а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz. На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A\cos60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy}\cos60^\circ = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy}\cos30^\circ = -S_A\cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C\cos30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C\cos60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ + S_B\cos30^\circ\cos60^\circ + S_C\cos30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A\cos60^\circ - S_B\cos60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A\cos^2 30^\circ - S_B\cos^2 30^\circ - S_C\cos60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил.**

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, *а*): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы.** Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

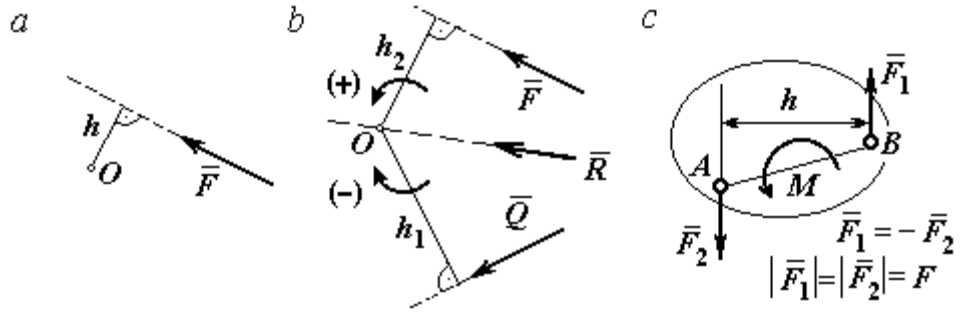


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо *h* и момент *M*: $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.19, *c*).

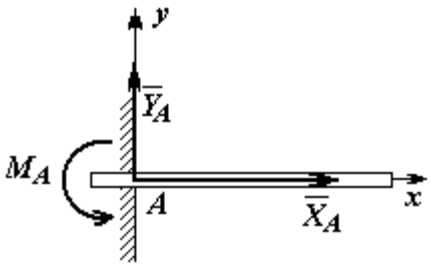


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно центра *O*. Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

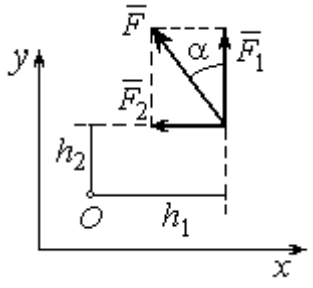


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределенными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*. Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

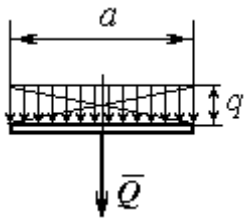


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка *AB* весом *P* = 100 кН прикреплена к стене шарниром *A* (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке *B*, перекинутого через блок *D* и несущего груз *Q*. Участок троса *DB* образует с вертикалью угол 30°. В точке *C* к балке подвешен груз *G* весом *G* = 200 кН. Определить вес груза *Q*, удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира *A*, пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0{,}25BA$.

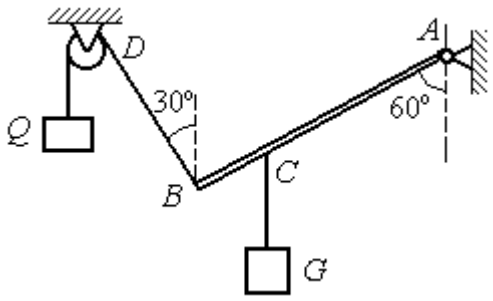


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка *AB*. На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка *AB*, реакция шарнира *A*, представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз *Q*, и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз *G*. Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0\,;\ \sum F_{ky} = 0\,;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0\,.$$

Выберем систему координат *xAy,* как показано на рис. 1.24.

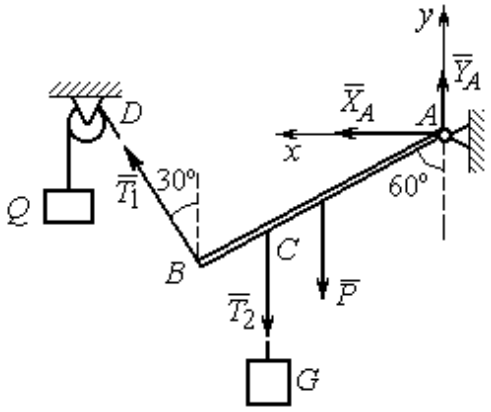


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1\cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку *A* и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра *A* имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1\ell + T_2\frac{3}{4}\ell\cos 30^\circ + P\frac{1}{2}\ell\cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз *Q*, по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз *G*, численно равна весу груза *G*: $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q\cdot 0{,}5 = 0,\ \ Y_A + Q\cdot 0{,}866 - 300 = 0,\ \ -Q + 173{,}2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173{,}2$ кН, $X_A = -86{,}6$ кН, $Y_A = 150{,}01$ кН.

Задача 8. Рама *ACE* (рис. 1.25, *a*) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке *AB* нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке *E* под прямым углом к отрезку *CE* рамы прикреплен трос, перекинутый через блок и несущий груз $P = 20$ кН.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы *ACE*. Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.25, *b*.

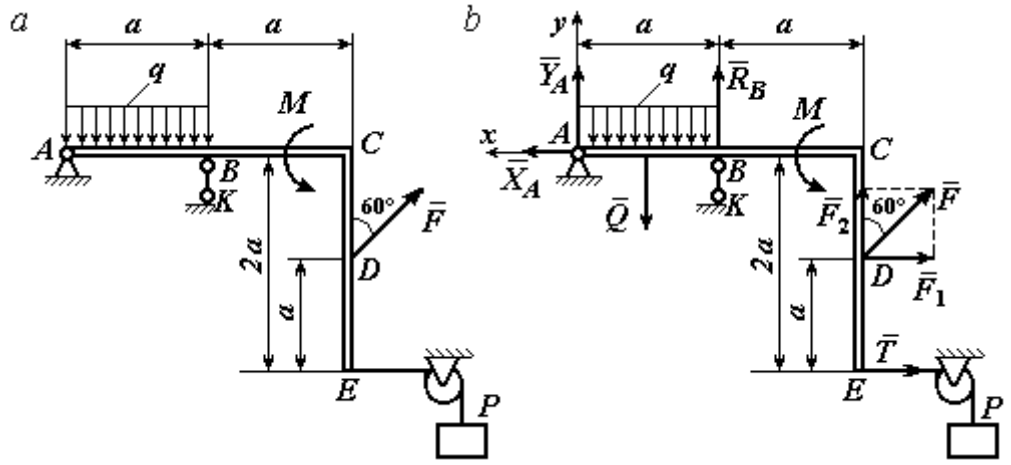


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
a – конструкция и нагрузка рамы; *b* – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси *Ax* и вертикальной *Ay*. Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Действие груза *P* на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, *b* показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры *BK* выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы *ACE* действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M$) ~ 0. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *Ax*, *Ay*, первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0. \qquad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира *A*, проходят через центр *A*, плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, *b*). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы *F* на оси координат: $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра *A* равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра *A*: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0{,}5a + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0. \qquad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B. Решая эту систему, найдем: X_A= 28,66 кН; Y_A= 59,66 кН; R_B = – 60,66 кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры *A* – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама *ABCED* (рис. 1.26) в точке *A* закреплена жёсткой заделкой. В точке *E* к раме прикреплена нить, составляющая угол 60º к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом *P* = 15 кН. На раму действуют: пара сил с моментом M = 12 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *C* под углом 30° к горизонтальному участку рамы *BE*, и равномерно распределенная на отрезке *BC* нагрузка интенсивностью *q* = 2 кН/м. В точке *D* под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

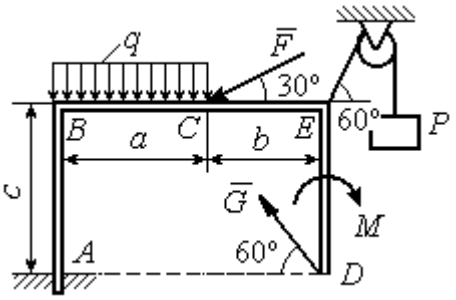


Рис. 1.26. Конструкция рамы

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке *A*, если размеры рамы: *a* = 2 м, *b* = 1 м, *c* = 5 м.

Решение

Объектом равновесия является рама *ABCED.* Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке *A* и нить, натянутая грузом *P.* Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке *A* в виде силы, которую представим двумя ее составляющими $-\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке *E*, направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

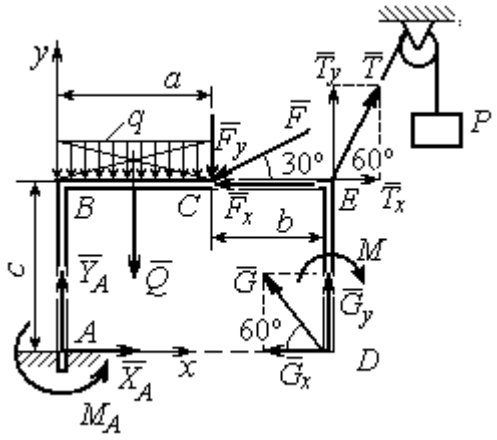


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия для такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - G\cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F\cos 60^\circ + T\cos 30^\circ + G\cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F\cos 30^\circ$, $F_y = F\cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра *A* равно *c* (как длина перпендикуляра, проведённого из центра *A* на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние *a*. По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a .$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G\cos 30^\circ \cdot (a+b)$; $M_A(\vec{T}) = -T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

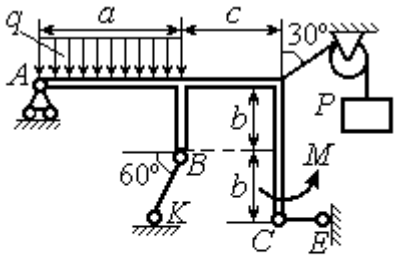
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a - T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b) +$$

$$+ G\cos 30^\circ \cdot (a+b) - Q\frac{a}{2} - M + M_A = 0. \qquad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A, откуда найдём значения реакций: X_A= 11,16 кН; Y_A= –21,31 кН; M_A = –70,73 Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ = 24,05 кН.

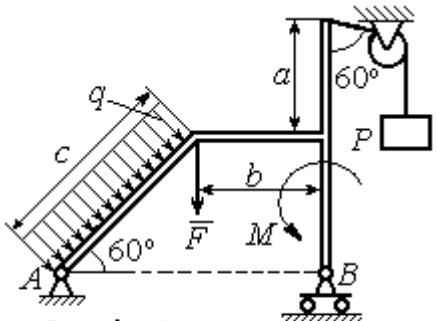
Упражнения

Упражнение 1.1



a = 3 м, b = 1 м, c = 2 м,
P = 15 кН, M = 3 кНм, q = 5 кН/м.
Найти реакцию стержней BK, CE
и реакцию шарнира A

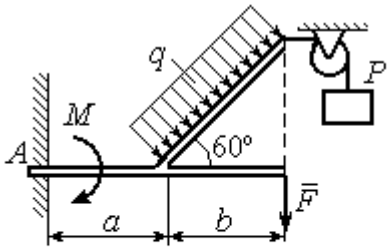
Упражнение 1.2



a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м,
M = 3 кНм, q = 3 кН/м,
P = 2 кН, F = 4 кН.
Найти реакцию шарниров A и B

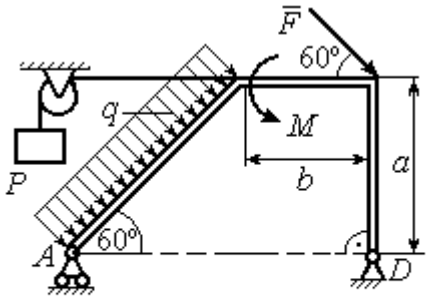
Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



$a = 1$ м, $b = 2$ м, $F = 2$ кН,
$P = 3$кН, $M = 3$ кН·м,
$q = 2$ кН/м
Найти реакцию жесткой заделки

Упражнение 1.4



$a = 3$ м, $b = 1$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН,
$M = 3$ кН·м, $q = 2$ кН/м.
Найти реакцию шарниров A и D

Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. **При этом реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом Q = 100 кН опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB. На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30º к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60º к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B, а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P. Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P, удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

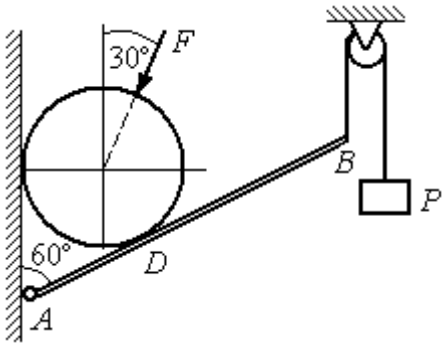


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

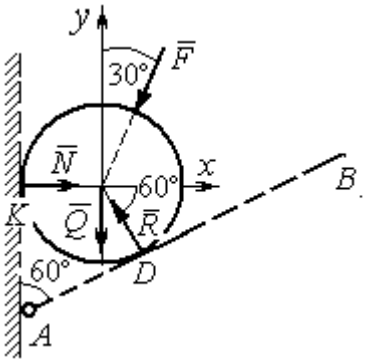


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

$$\sum F_{kx} = -F\cos 60^\circ - R\cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F\cos 30^\circ + R\cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A, (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P, и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

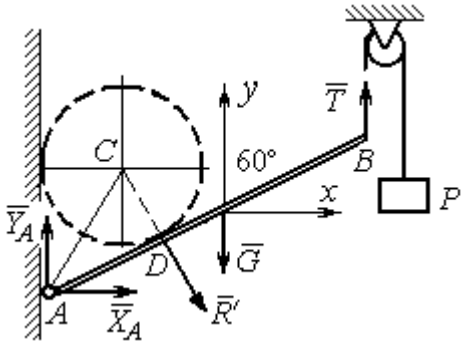


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R'\cos 60^\circ = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R'\cos 30^\circ - G + T = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + T\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{1.10}$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165{,}47$ кН; $N = 107{,}74$ кН; $P = 95{,}26$ кН; $X_A = -82{,}73$ кН; $Y_A = 128{,}03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

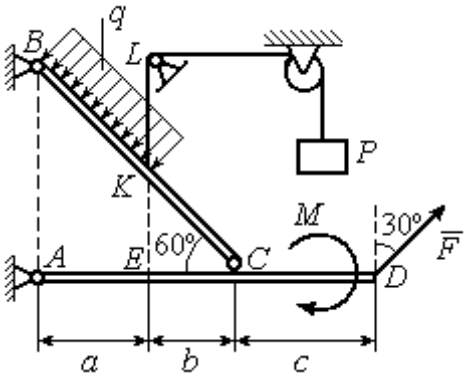


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD, прикрепленной к вертикальной стене в точке A, и откоса BC, соединённого с балкой AD в точке C под углом 60º и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30º к вертикали и равная по модулю F =10 кН, пара сил с моментом M = 8 кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью q = 3 кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом P = 5 кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A, B и C, если a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD. Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

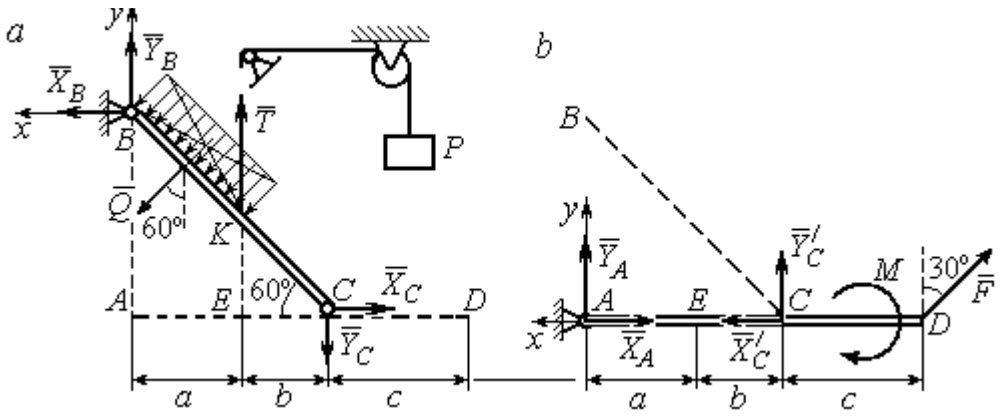


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кронштейна:
a - силы, действующие на балку *BC*; *b* - силы, действующие на балку *AD*

На рис. 1.34, *a* показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC: реакция $\vec{R}_B$ шарнира B, реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T = P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C. Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, *a*) и численно равной $Q = q \cdot BK = q \cdot \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил ($\vec{Q}$, $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}$), действующая на балку *BC*, является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.34, *a*, и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $AB = (a+b)\mathrm{tg}60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки *AD* (рис. 1.34, *b*).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира *A* и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, *b* реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат *xAy* как показано на рис. 1.34, *b*, и составим уравнения равновесия балки *AD*, вычисляя моменты сил относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \tag{1.15}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \tag{1.16}$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

X_A = 5,99 кН, Y_A = 5,99 кН, X_C = 10,99 кН, Y_C = – 14,65 кН;

X_B = 0,6 кН, Y_B = – 13,65 кН,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8{,}47 \text{ кН}, \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18{,}31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13{,}65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB, а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил с моментом $M = 5$ кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если параметр a, определяющий размеры конструкции, равен $a = 2$ м.

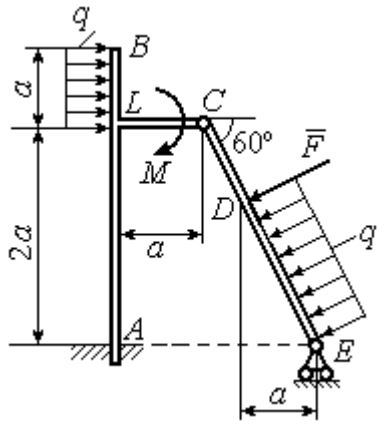


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

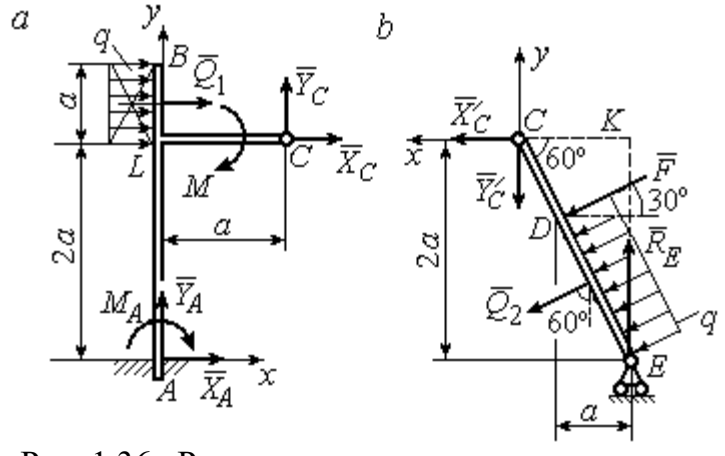


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку AB;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, численно равной $Q_1 = qa = 4$ кН. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C.

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_{A}. Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a,* и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \tag{1.17}$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \dfrac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b,* и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a\,\text{tg}30^\circ = 0. \tag{1.21}$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

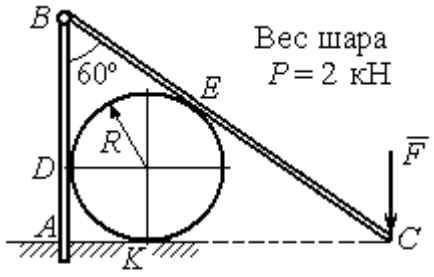
$$X_A = 11{,}59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2{,}76 \text{ кН}; \quad M_A = 42{,}87 \text{ кН·м};$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2{,}76 \text{ кН}; \quad R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91$ кН; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83$ кН.

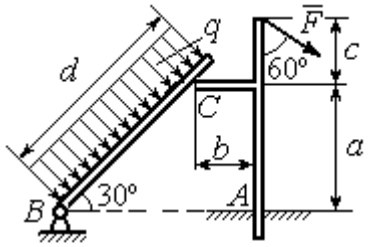
Упражнения

Упражнение 1.5



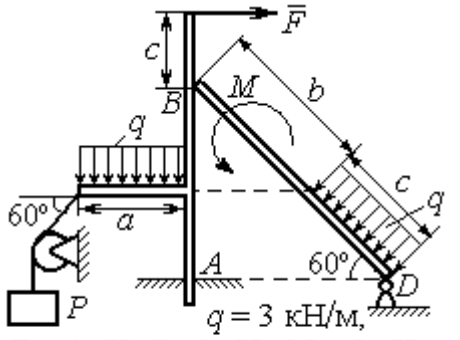
$R = 1$ м, $F = 8$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B, реакцию опоры шара в точках D, K, E

Упражнение 1.6



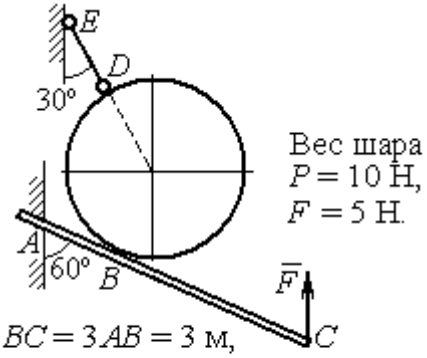
$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $d = 5$ м,
$q = 3$ кН/м, $F = 4$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Упражнение 1.7



$q = 3$ кН/м,
$F = 4$ кН, $P = 3$ кН, $M = 2$ кН·м,
$a = 2$м, $b = 3$м, $c = 1$м
Найти реакцию заделки A, шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$BC = 3AB = 3$ м,
Найти реакцию жесткой заделки A, реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z:

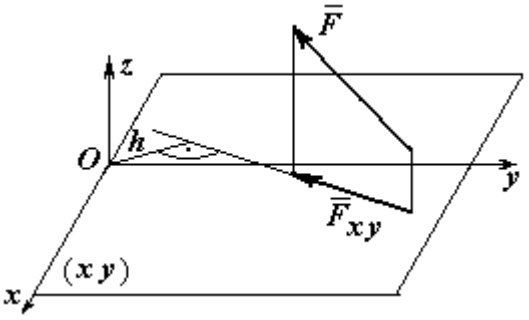


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy, перпендикулярной оси z; $\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O. Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, ...$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике C и подшипнике K. Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r.

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*.

Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива *D* по касательной в точке *L* параллельно плоскости *zCx*, так что радиус шкива *D*, проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30º.

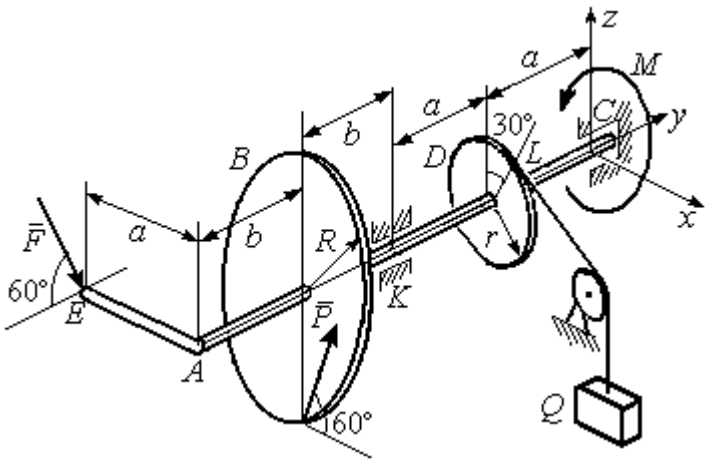


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива *B*, параллельна плоскости *zCx* и составляет угол 60° с направлением оси *Cx*. Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м.

Решение

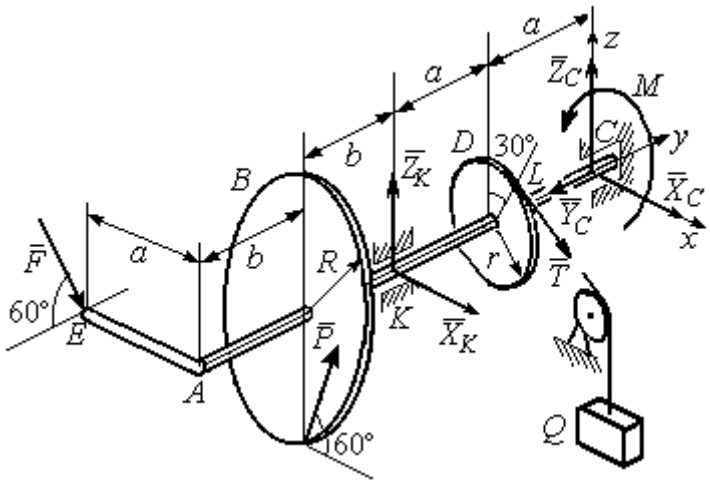


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника *K* лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *L* и по модулю равна весу груза *Q*.

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

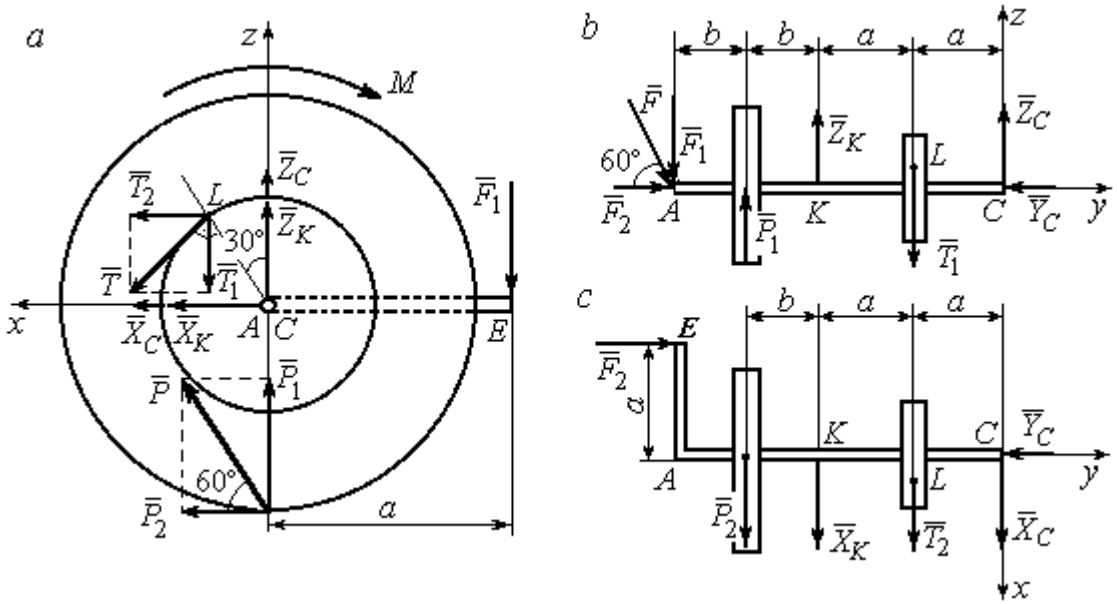


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*

На рис. 1.41, *a* показаны проекции вала и всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций сил относительно точки *C*, получим значения моментов этих сил относительно оси *y*. При вычислении моментов сил относительно оси *x* достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (рис. 1.41, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси *z* (рис. 1.41, *c*).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P\cos 30^\circ$;

$P_2 = P\cos 60^\circ$; $T_1 = T\cos 60^\circ$; $T_2 = T\cos 30^\circ$; $F_1 = F\cos 30^\circ$; $F_2 = F\cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P\cos 60^\circ + X_K + T\cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F\cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P\cos 30^\circ + Z_K - T\cos 60^\circ + Z_C - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T\cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P\cos 30^\circ \cdot (2a + b) +$$

$$+ F\cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F\cos 30^\circ \cdot a - P\cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T\cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P\cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F\cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8{,}09 \text{ кН}, \; Y_C = 1 \text{ кН}, \; Z_C = 4{,}65 \text{ кН}, \; Z_K = 2{,}92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10{,}02 \text{ кН}, \; T = 18{,}6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9{,}4 \text{ кН}, \; R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10{,}44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза *Q* равен реакции нити *T*.

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира *A*, подшипника *B* и удерживается в вертикальном положении стержнем *CO*, лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10$ кН, приложенная на верхней стороне плиты в точке *H* под углом 30º к линии *EC*, и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5$ кН, приложенная в точке *D* параллельно стороне *AB*.

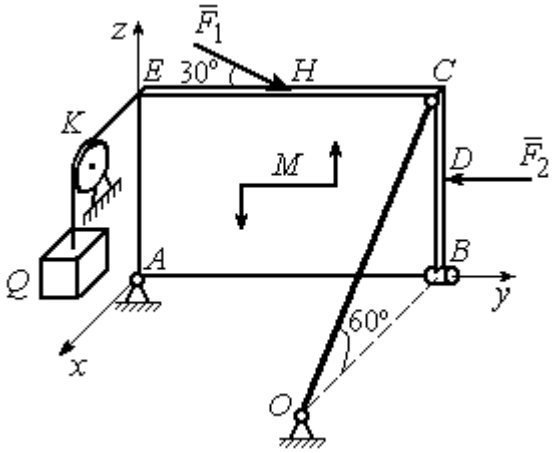


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K, подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A, подшипника B и реакцию стержня CO, если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A, нить, натянутая грузом Q, подшипник B и невесомый стержень CO.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза $T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay, и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

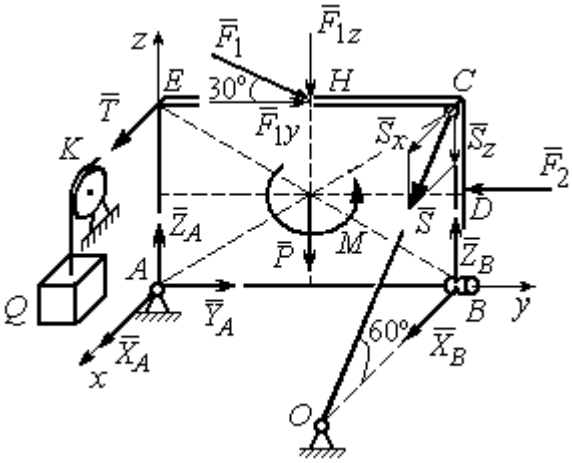


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1\cos 60^\circ - P + Z_B - S\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -F_1\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - F_1\cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0{,}5 \cdot AB +$$

$$+ F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S\cos 30^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S\cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S\cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17{,}53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12{,}89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга *ACEB* весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках *A* и *B* цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60º (рис. 1.44). На фрамуге в точке *H* закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок *K*, несёт груз *Q*. При этом линия верёвки *HK* параллельна прямой *ED*. На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке *C* перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

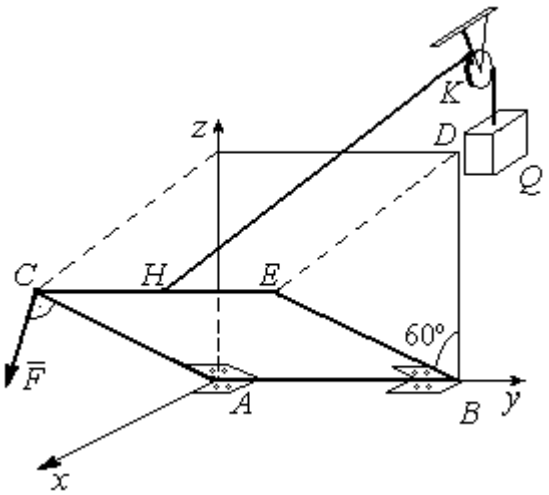


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза *Q*, необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров *A* и *B*, если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги *ABCE*. Изображаем внешние активные силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира *A* и *B* (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом *Q*. Выберем систему координат *Axyz*, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров *A* и *B* раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось *Ay*), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

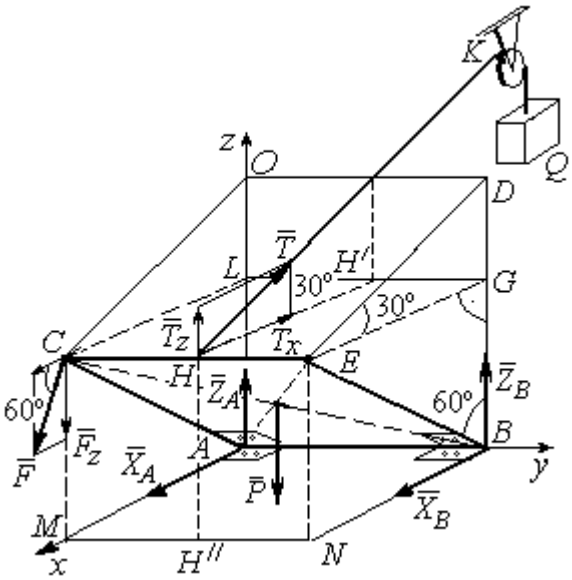


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси *Ax* определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость *zAy* относительно точки *A* – пересечения оси *Ax* и перпендикулярной ей плоскости *zAy* (см. рис. 1.46, *a*). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси *Az* достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость *xAy* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *b*).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, *c*).

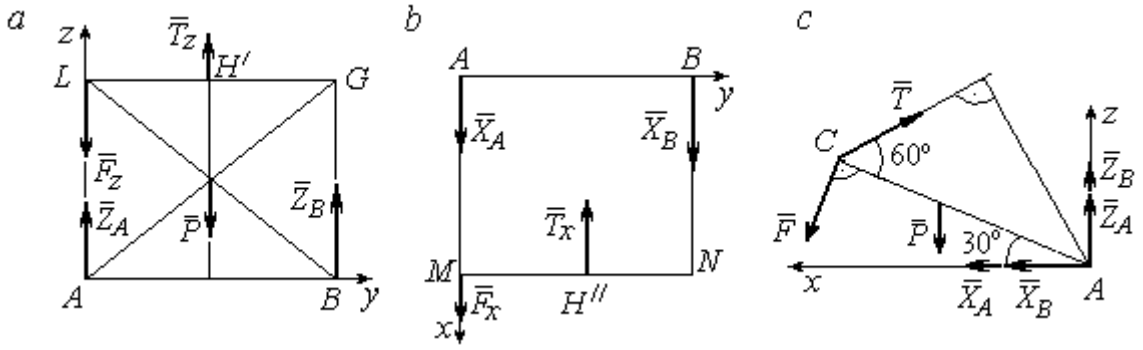


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:
a – проекция на плоскость *zAy* со стороны положительного направления оси *x*;
b – проекция на плоскость *xAy* со стороны положительного направления оси *z*; *c* – проекция на плоскость *zAx* со стороны положительного направления оси *y*

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T_z \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB =$$

$$= T\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0{,}5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18{,}22 \text{ Н},\ Z_B = 14{,}41 \text{ Н},\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23{,}31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10{,}83 \text{ Н},\ Z_A = 27{,}41 \text{ Н},\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29{,}47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42{,}37$ Н.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал *AD* (рис. 1.47) закреплен в подпятнике *A* и подшипнике *C*. Вал имеет шкив радиуса r и рукоять *DH*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *DH* образует угол 30º к направлению оси *Ax*. Колено вала расположено в горизонтальной плоскости *xAy*. Нить, удерживающая груз *Q*, намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ приложена в верхней точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси *Ay* и находится в плоскости *zAy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке *H* рукояти параллельно оси *Az*. Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке *K* стойки колена вала под углом 60º к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом *M* создаёт вращение вала вокруг оси *Ay*.

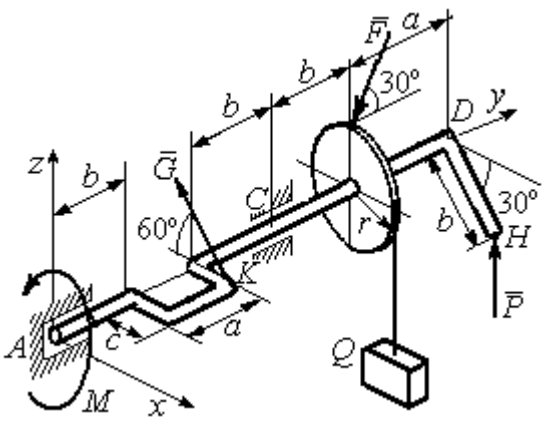


Рис. 1.47. Равновесие вала

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН; $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м; $c = 0{,}2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *A* и подшипник *C*.

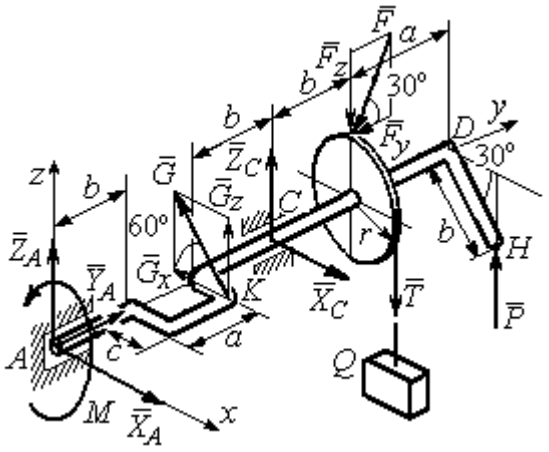


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G\cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G\cos 30^\circ + Z_C - F\cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r -$$

$$- T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb\cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G\cos 30^\circ$; $G_x = G\cos 60^\circ$; $F_z = F\cos 60^\circ$; $F_y = F\cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

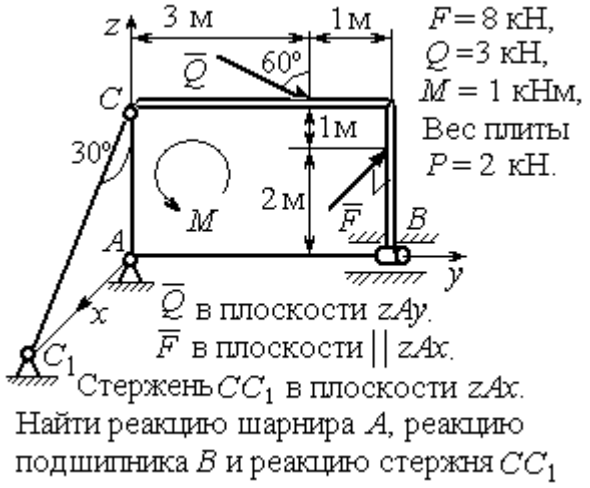
$$X_C = 2{,}25 \text{ кН}; \; Z_C = 13{,}57 \text{ кН}; \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0{,}39 \text{ кН}; \; Y_A = 10{,}39 \text{ кН}; \; X_A = 0{,}75 \text{ кН}; \; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10{,}42 \text{ кН}.$$

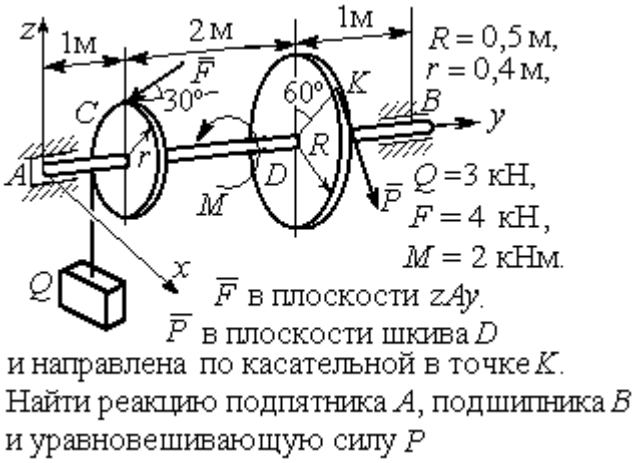
Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25{,}03$ кН.

Упражнения

Упражнение 1.9



Упражнение 1.10



Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

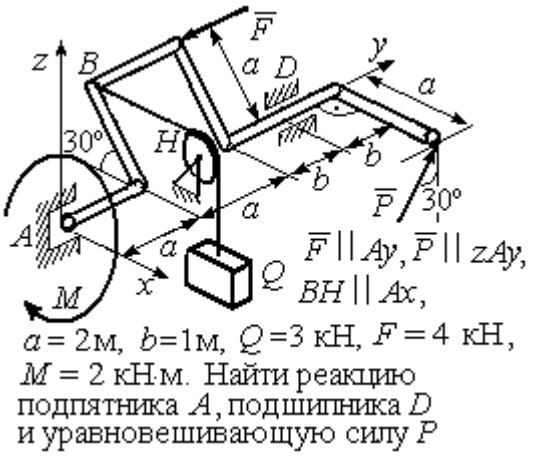


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

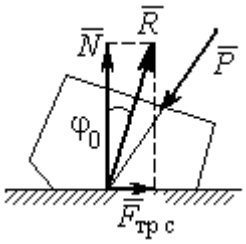


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**. Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$ смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

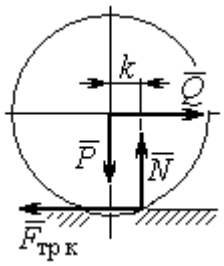


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$. Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q, а к другому, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом P. Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30º к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P, при которых груз Q может начать скольжение по плоскости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0{,}4$.

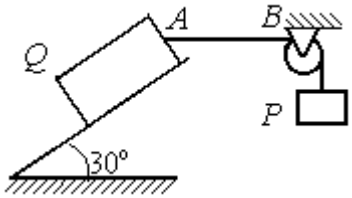


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P. На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, *а*). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравновешивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P, направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *a*).

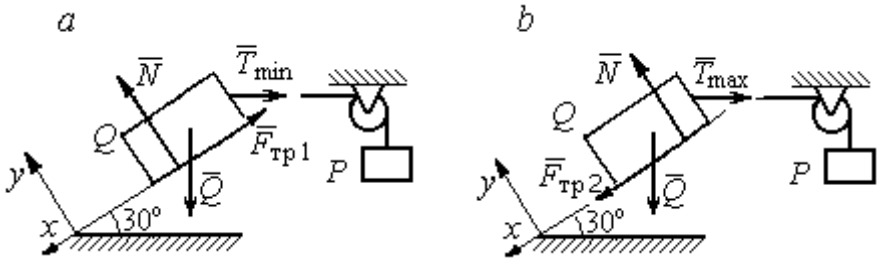


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
a – минимальный вес уравновешивающего груза;
b – максимальный вес уравновешивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\min}\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\min}\cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7{,}21$ Н. Минимальное значение веса уравновешивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7{,}21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P. На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, *b*).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза Q:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\max}\cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\max}\cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P: $P_{\max} = T_{\max} = 63{,}54$ Н.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравновешивающего груза находится в пределах $8{,}87 < P < 48{,}87$ Н.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса r = 0,5 м, весом P = 50 Н удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец которой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_{\text{к}}$ = 0,02 м. Наклонная плоскость составляет угол 30º с горизонтом.

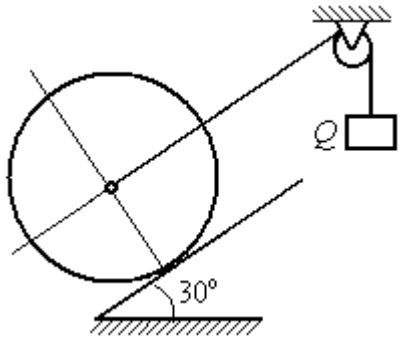


Рис. 1.54. Равновесие катка

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{с}}$, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

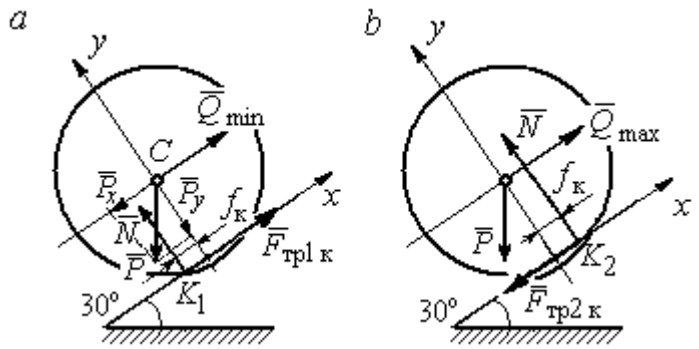


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1, слева от нормального к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P\cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7{,}68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43{,}3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17{,}32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр2 к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр2 к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P\cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42{,}32$ Н; $N = 43{,}3$ Н; $F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7{,}68 \le Q \le 42{,}32$ Н.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр с}}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр с}} > F_{\text{тр к}}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр с}} = f_{\text{с}} N = 43{,}3 f_{\text{с}}$, где $f_{\text{с}}$ – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр к}} = F_{\text{тр1 к}} = F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43{,}3 f > 17{,}32$, откуда $f > 0{,}4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединённого цепью CD с концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0{,}4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n, удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m, составляет 30º.

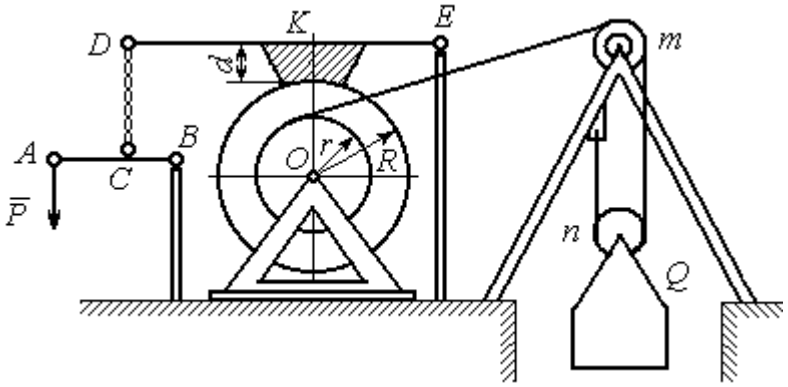


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

Определить величину силы $\vec{P}$, уравновешивающей груз Q, и реакции шарниров O и E, если вес ворота G = 140 Н, высота тормозной колодки $d = 0{,}1$ м, расстояния AB = 1 м, BC = 0,1 м; $ED = 1{,}2$ м; $EK = 0{,}6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, *а*). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n.

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \qquad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{бл}$ – радиус блока *n*. Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0{,}5Q = 500$ Н.

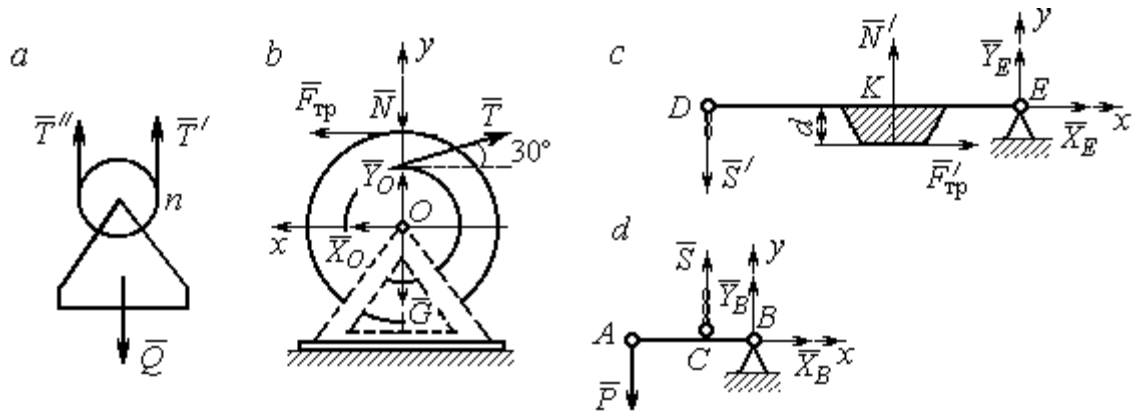


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
a – равновесие груза; *b* – силы, действующие на барабан; *c* – силы, действующие на тормозной рычаг *DE*; *d* – силы, действующие на рычаг *AB*

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира *O*, представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, *b*).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{G}$, $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$) ~ 0. Составим уравнение моментов относительно точки *O*:

$$-Tr + F_{\text{тр}}R = 0,\ \text{откуда с учётом } T = T'\ F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н}.$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{\text{тр}} = fN$, тогда $N = \dfrac{F_{\text{тр}}}{f} = 500$ Н.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, *b*:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{\text{тр}} - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T\cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира *O*:

$$X_O = 233 \text{ Н};\ Y_O = 390 \text{ Н};\ R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454{,}3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага *DE* (см. рис. 1.57, *c*).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке *D* на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира *E*, разложенная на составляющие $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ вдоль осей *x*, *y*. Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \qquad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200$ Н, $N' = N = 500$ Н, определим усилие S', с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира *E*:

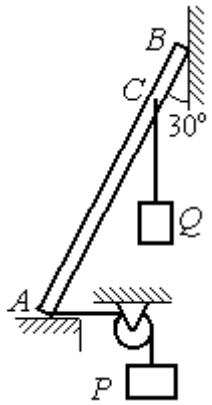
$$S' = 233{,}33 \text{ Н};\ X_E = -200 \text{ Н};\ Y_E = -266{,}67 \text{ Н};\ R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333{,}34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравновешивания груза *Q*, найдём рассматривая равновесие рычага *AB* (см. рис. 1.57, *d*) . На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира *B*, показанная на рис. 1.57, *d* составляющими $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки *B*: $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдем $P = 23{,}3$ Н.

Упражнения

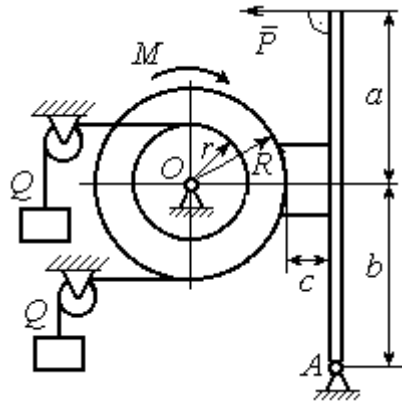
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0{,}2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30°. В точке C к стержню подвешен груз Q. Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P. В каких границах можно изменять вес груза P, не нарушая равновесия стержня?

$AB = 3$ м, $AC = 2$ м, $Q = 200$ Н.

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r. На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q. К шкиву приложена пара сил с моментом M. Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0{,}4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравновешивающую шкив. Найти реакцию шарнира A.

$a = b = 1$ м; $c = 0{,}1$ м; $Q = 100$ Н; $M = 120$ Н·м;
$R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}2$ м.

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

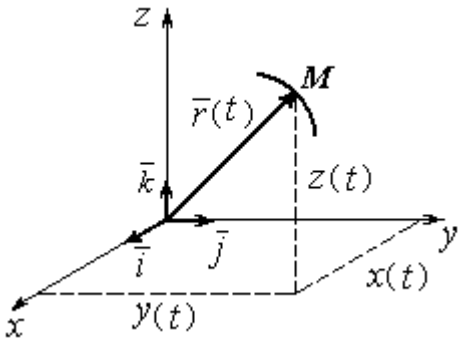


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x, V_y, V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки**,** или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x, a_y, a_z проекций вектора ускорения на координ-

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $O\breve{M} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

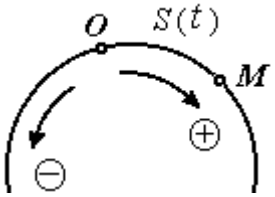


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось *n*):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

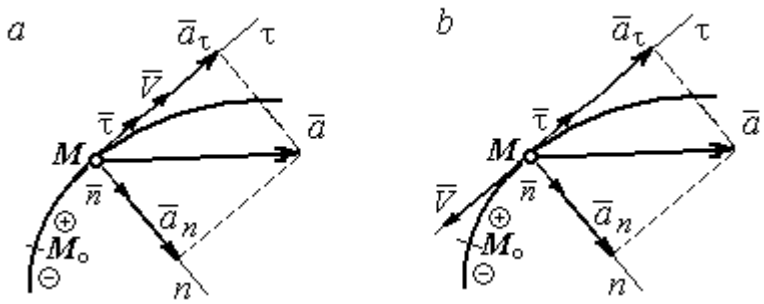


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau,\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где *x*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени t_1 = 0,25 с, t_2 = 0,75 с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

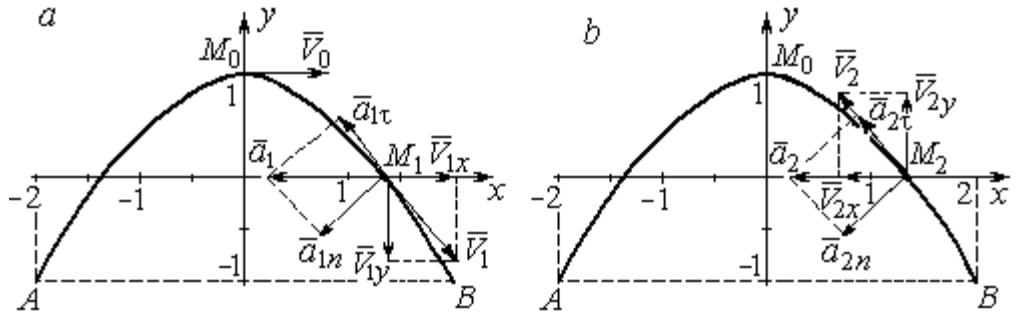


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к *B*;
b – ускоренное движение точки на участке от *B* к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени t_1 = 0,25 с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1:

$$x_1 = x(0{,}25) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0{,}25) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t; \; V_y(t) = \dot{y} = -2\pi\sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0{,}25) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0{,}25) = -2\pi\sin\frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x}, a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin\pi t;\ a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0{,}25) = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{1y} = a_y(0{,}25) = -4\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2\sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0{,}25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, *а*.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, *а*). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0{,}75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1:

$$x_2 = x(0{,}75) = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см};\ y_2 = y(0{,}75) = \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0{,}75) = 2\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с};\ V_{2y} = V_y(0{,}75) = -2\pi\sin 2\pi\frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0{,}75) = -2\pi^2 \sin\frac{3\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{2y} = a_y(0{,}75) = -4\pi^2 \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0{,}75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени t_2 = 0,75 с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 (t_0 = 0) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения *B* на траектории (t_B = 0,5 с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 (t_{M_0} = 1 с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса *R* = 1 км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0, где поезд выходит на закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты *S*. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

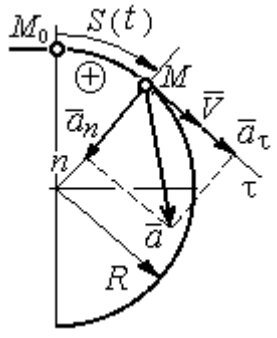


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: a_τ = const. Так как $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 =$ = 54 км/ч = 15 м/с. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: C_1 = 15 м/с; C_2 = 0.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t .$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь S = 500 м. Подставляя это условие во второе уравнение, получим a_τ = 7 м/с^2. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения V_τ = 85 м/с. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса R = 1000 м в момент времени t = 10 с равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R}$ = 7,23 м/с^2. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ = 10,06 м/с^2. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса R = 80 м. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной V_0 = 18 км/ч до конечной V_1 = 9 км/ч.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь S = 60 м.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t\,; \quad S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2{,}5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м. Получим систему:

$$-2{,}5 = a_\tau t_1\,; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0{,}16$ м/с^2.

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0{,}31$ м/с^2.

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0{,}35$ м/с^2. В конце движения нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}08$ м/с^2. Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0{,}18$ м/с^2.

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ, при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: ω_z = const. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: ε_z = const. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела **(**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

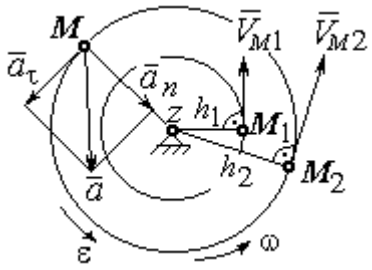


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от этих точек до оси вращения: $\dfrac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \dfrac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

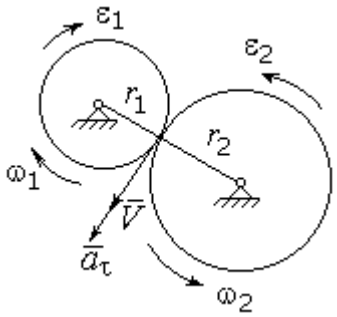


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси *z* происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2$ мин = 120 с; $\varphi_1 = 3600$ об $= 7200\pi$ рад. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

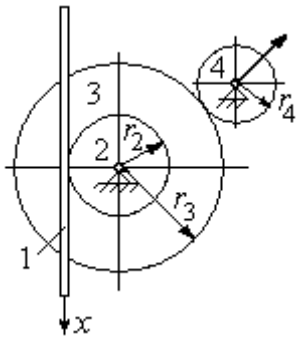


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2: $\omega_{2z} = \dfrac{V_{1x}}{r_2} = \dfrac{4\pi\cos\pi t}{6} = \dfrac{2\pi}{3}\cos\pi t$ рад/с. Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одного тела другому: $\dfrac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \dfrac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \dfrac{V_{1x} r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{5\pi}{3}\cos\pi t$ с$^{-1}$. Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

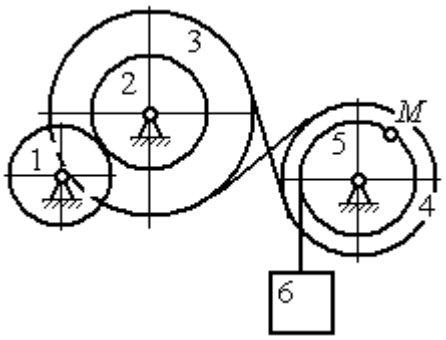


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1.

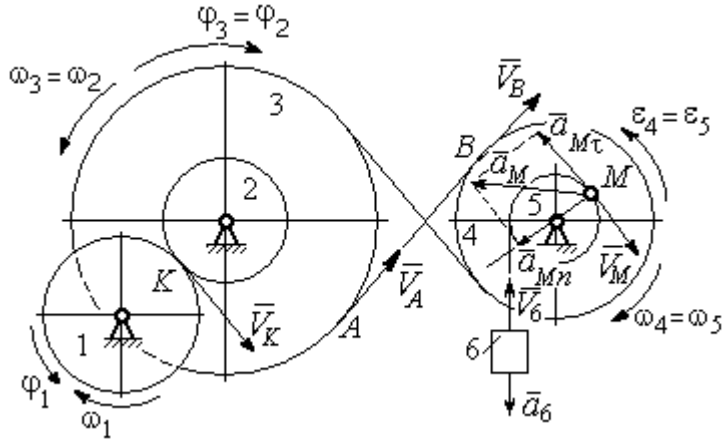


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1. Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1.

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта *K*. Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3=\omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2.

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки *A*, где ремень сходит со шкива 3, и до точки *B*, где ремень набегает на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек *A* и *B* равны: $V_A=V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3=\omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3=\omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4=\frac{\omega_3 r_3}{r_4}=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5=\omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4.

Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_5 r_5$. В момент времени $t_1=1$ с $\omega_5=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}=5$ рад/с и $V_M=20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке *M* и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки *M*: $V_6=V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1=1$с груз поднимается со скоростью $V_6=20$ см/с.

Определим ускорение точки *M*. Вектор ускорения точки *M* равен сумме векторов: $\vec{a}_M=\vec{a}_M^{\tau}+\vec{a}_M^{n}$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5: $\omega_{5z} = \dfrac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25$ рад/с. Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20$ рад/с^2. Так как в момент времени $t_1 = 1$ с знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5$ рад/с $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$ $\varepsilon_{5z} = +20$ рад/с^2), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5.

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = 5$ рад/с и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^{\,n} = 100$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^{\,n}$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128{,}06$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^{\,n}$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos\pi t + \sin\pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси *x*. Положительное направление движения задаётся направлением оси *x* (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi\sin\pi t + \pi\cos\pi t$.

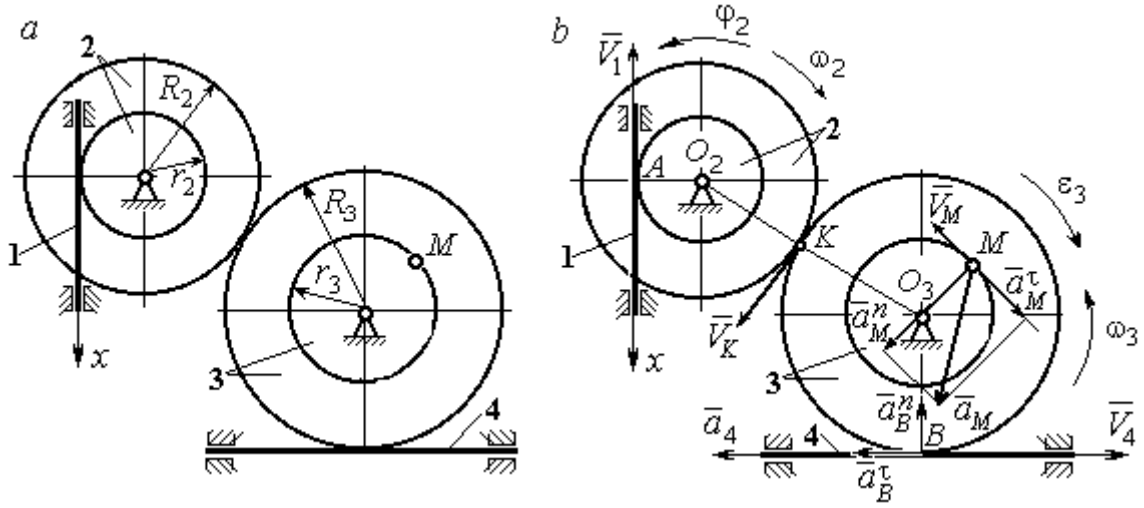


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей
и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_2.

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке *K*. Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_3.

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки *M* в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки *B* касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки *M*. Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}; \varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис 2.11, *b* направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3.

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^{\tau} = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^{\tau} = 2\pi^2$ см/с^2. Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^{\tau}$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, *b*).

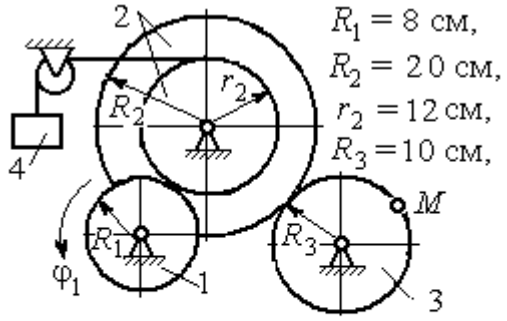
Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M: $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^{\tau})^2} = \pi^2\sqrt{5}$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^{\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с^2. Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B.

Упражнения

Упражнение 2.1

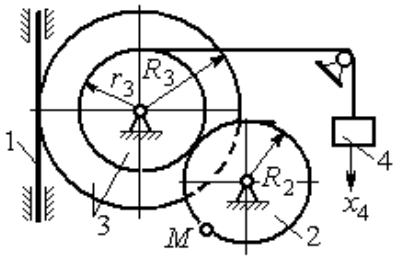


$R_1 = 8$ см,
$R_2 = 20$ см,
$r_2 = 12$ см,
$R_3 = 10$ см,

$\varphi_1 = 3t + 2\sin\frac{\pi t}{2}$ рад,

Найти скорость и ускорение точки M и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2



$R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}3$ м,

$x_4 = t - 1 - \sin\frac{\pi t}{3} + \cos\frac{\pi t}{3}$ м.

Найти скорость и ускорение точки M и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

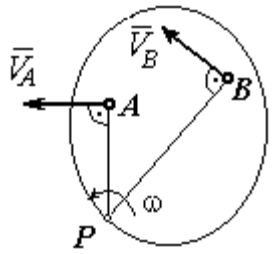
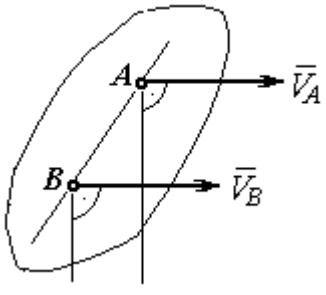
Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

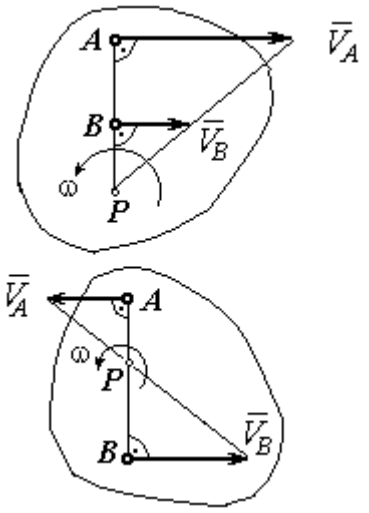
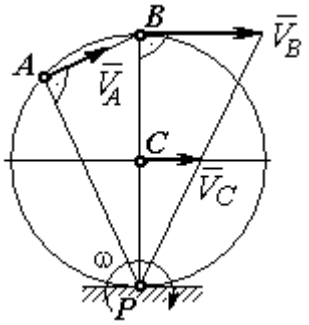
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A\cos\alpha = V_M\cos\beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа. Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC, коромысла AB и штока AD, если O_1C = 20 см, $OB = 2 \cdot OA$ = 40 см, AD = 60 см.

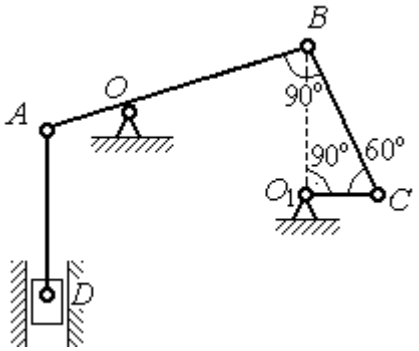


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C, в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O, параллельно оси вращения кривошипа. Скорость точки B направлена перпендикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

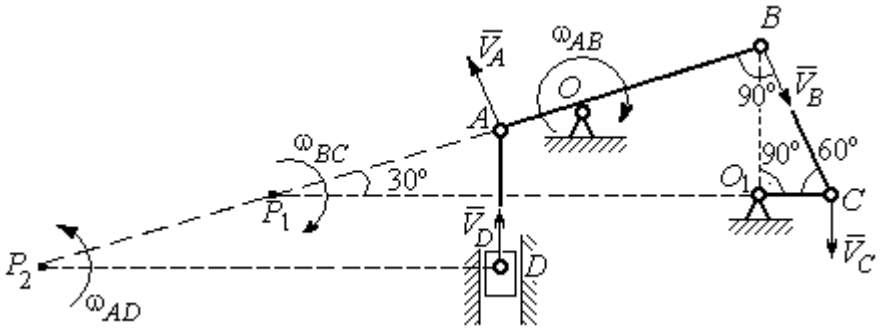


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_1} = 0{,}5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC. Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB}.

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B: $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD. Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD}.

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA, вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

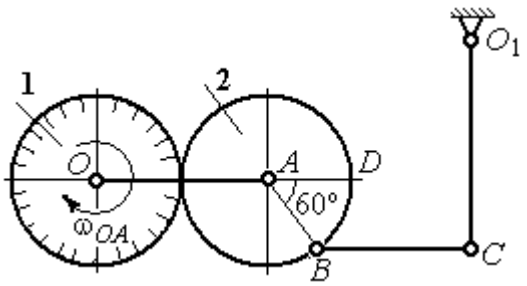


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC, коромысла CO_1, а также скорости точек A, B, C, D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2.

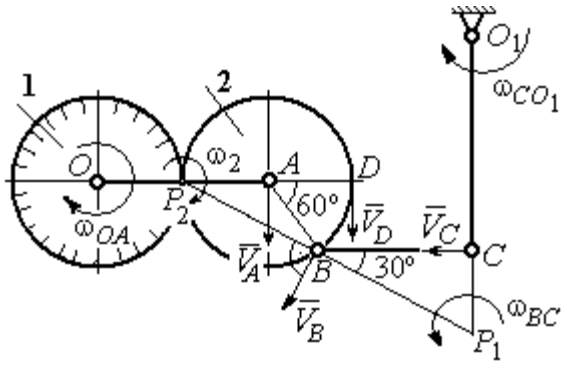


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D: $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1. Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1, которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC. Расстояние $P_1B = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = \dfrac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость точки C: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \dfrac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC.

Угловая скорость коромысла CO_1: $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = \dfrac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной OA = 25 см вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью ω_{OA} = 3,6 рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса r_1 = 45 см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. Шатун BC, шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B, приводит в движение кривошип CO_1. Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1, скорости точек A, B, C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна BC = 100 см, длина кривошипа CO_1 = 50 см.

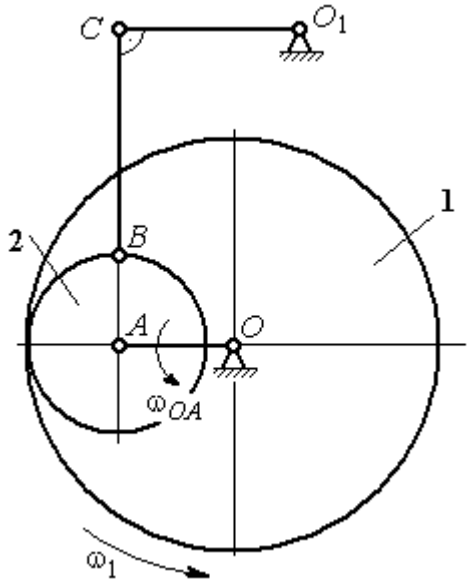


Рис. 2.17. Планетарный механизм

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D, и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда P_2D = 20 см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \dfrac{V_D}{P_2 D} = 2{,}25$ рад/с. Направление угловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2.

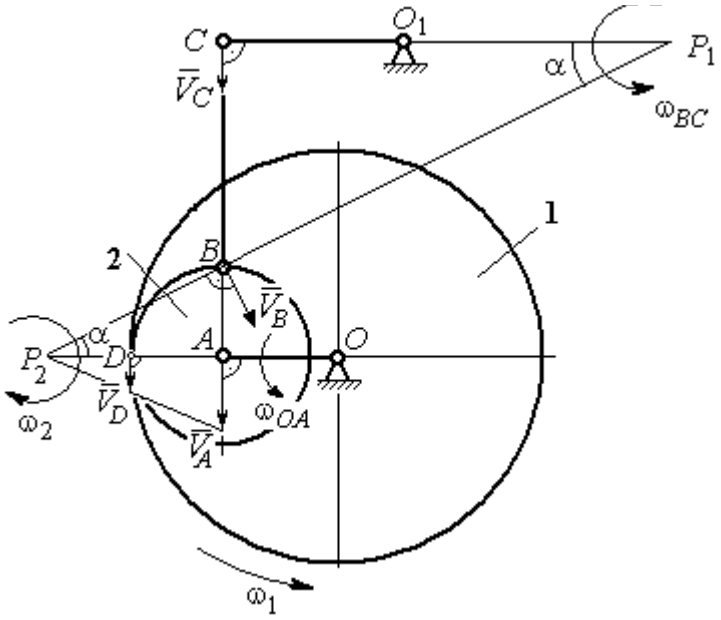


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Скорость точки *B,* которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна *BC*. Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC: $P_1B = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha = \dfrac{AB}{P_2B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = 0{,}45$ рад/с. Скорость точки *C* шатуна *BC* найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек *C* и *B* на линию, проходящую через эти точки Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos\alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = 1{,}8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA}. На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2. Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC, закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C. Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A, B, C и угловые скорости шатуна BC, шестерни 2 и колеса 3, если ω_{OA}= 4 рад/с; r_1= 4 см; $r_2 = r_3$= 8 см.

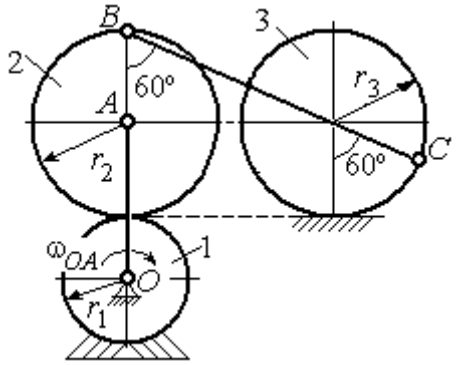


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$= 48 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2}$= 6 рад/с.

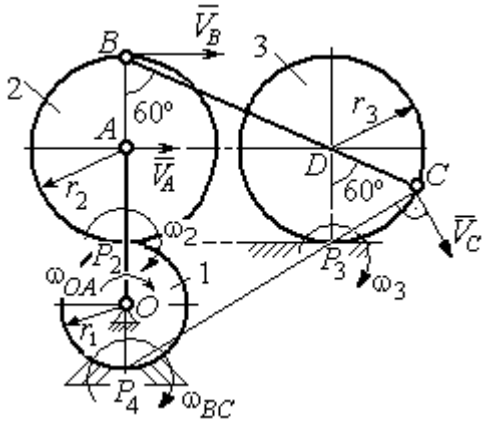


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 96 см/с.

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C. По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC, вращаясь вокруг неподвижной оси O, приводит в движение два шатуна CD и CE, присоединённых к кривошипу в точке C. Шатун CE прикреплён в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплён ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

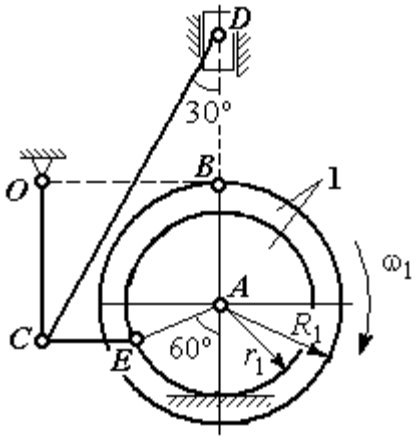


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A, E, C, D и угловые скорости диска 1, шатунов CE, CD и кривошипа CO, если известна скорость точки B на ободе диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

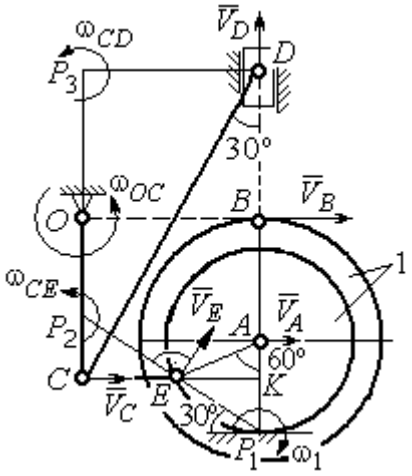


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1} = 2$ рад/с. Скорость точки A $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4$ см/с. Скорость точки E $V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны, соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E. Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

Расстояние $EP_2 = \dfrac{EC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см. Угловая скорость шатуна CE $\omega_{CE} = \dfrac{V_E}{EP_2} = 0{,}86$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E, на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой ω_{CE}. Скорость точки C шатуна CE $V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \dfrac{V_E}{2} = 2$ см/с.

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \dfrac{V_C}{OC} = 0{,}5$ рад/с.

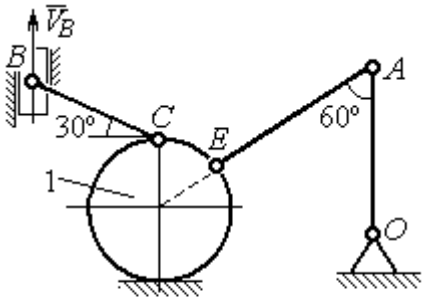
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D. Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3, полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ)\operatorname{ctg} 30^\circ = 9{,}92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD: $\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}21$ рад/с.

Скорость ползуна D: $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD}(CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1{,}2$ см/с.

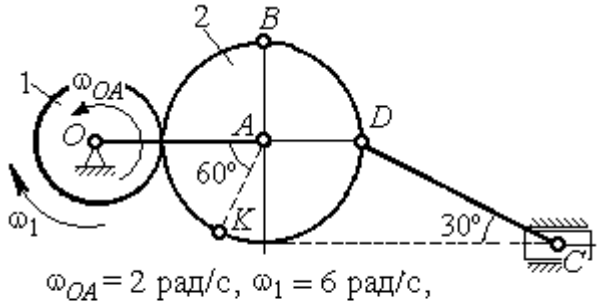
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
$BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
Найти: $\omega_{OA}, \omega_{AE}, \omega_{CB}, \omega_1, V_C, V_A, V_E$

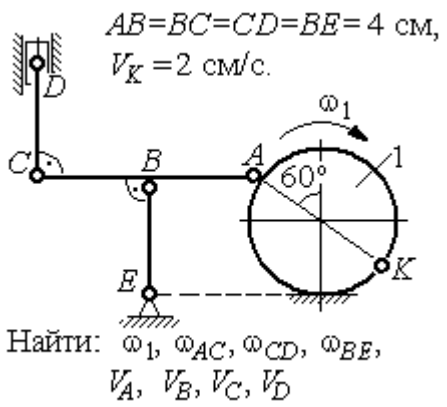
Упражнение 2.4



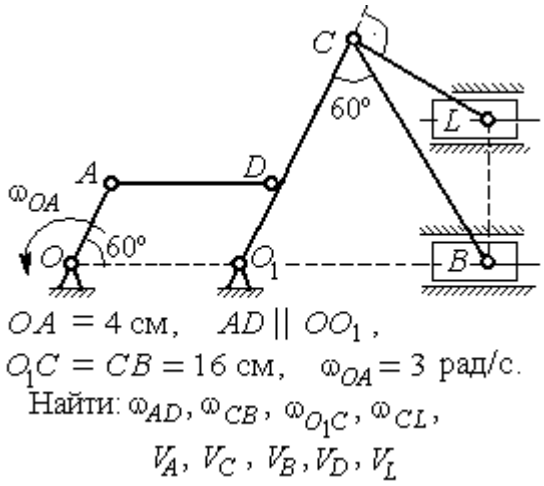
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
Найти: $\omega_2, \omega_{DC}, V_B, V_K, V_D, V_C$

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

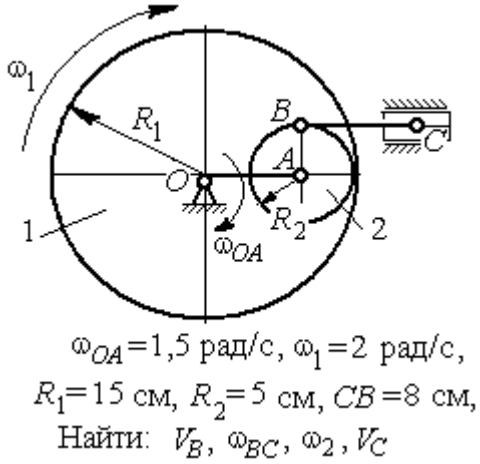
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

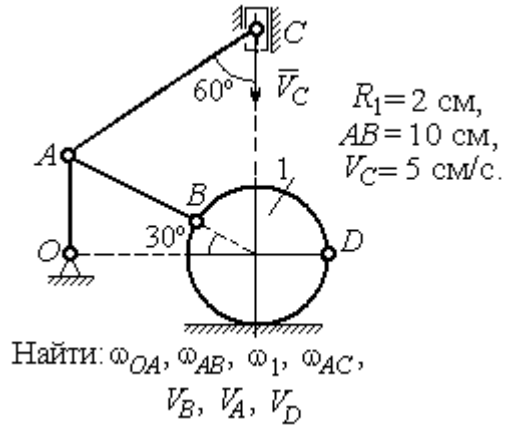


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A* (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, *a*), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, *b*). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки *M* определяются по формулам:

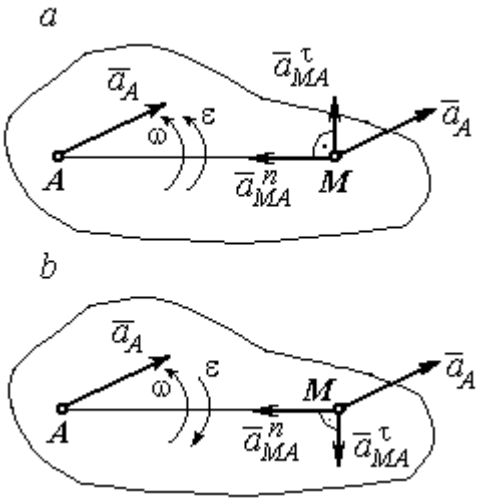


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки *M* до полюса *A*.

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса *A* и точки *M*, то для определения ускорения точки *M* используется векторное равенство $\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA}$, где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* и полюса *A* при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень *D* гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом *OABD*. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка *L* рычага имеет скорость $V_L = 0{,}6$ м/с и ускорение $a_L = 0{,}5$ м/с^2. Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0{,}6$ м, длина звена $AB = 0{,}4$ м. Определить скорость и ускорение поршня *D*, угловую скорость и ускорение звена *AB*.

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL: $\omega_{OL} = \dfrac{V_L}{OL} = \dfrac{2}{3}$ рад/с.

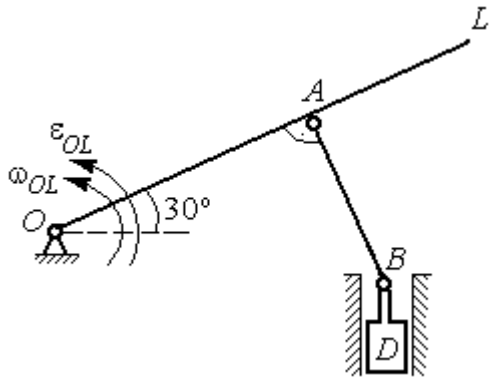


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^{\,\tau} + \vec{a}_L^{\,n}$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0{,}4$ м/с^2. Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^{\tau} = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0{,}3 \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_{OL} = \frac{a_L^{\tau}}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0{,}4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ - определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB. Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0{,}4\sqrt{3}$ м.

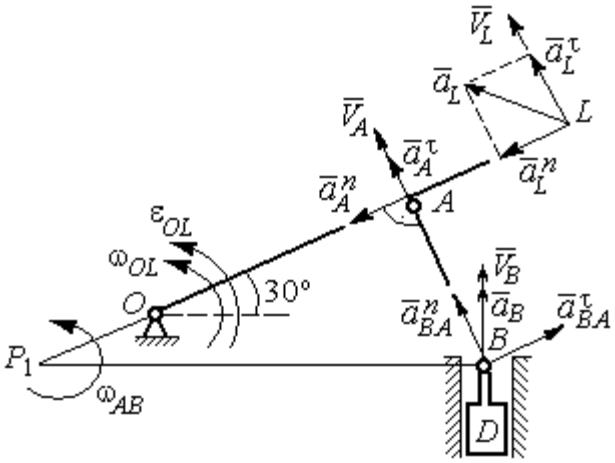


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{P_1A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A. Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O, ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A}$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a^{n}_{A} = \omega^{2}_{OL} \cdot OA = 0{,}27 \text{ см/с}^2;\ a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{AB} \cdot AB = 0{,}13 \text{ см/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{A} = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x, y, где ось x проходит вдоль линии звена AB, ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a^{\tau}_{A} + a^{n}_{BA};\ \ a_B \cdot \cos 60^\circ = -a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA}.$$

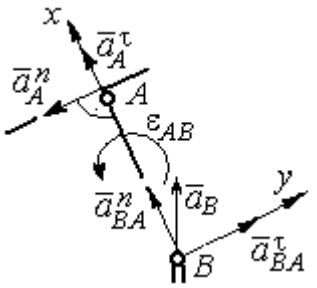


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B: $a_B = 0{,}38$ см/с^2 и величину касательного ускорения: $a^{\tau}_{BA} = 0{,}46$ см/с^2. Угловое ускорение стержня AB $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 1{,}15$ рад/с^2. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B: $a_D = a_B = 0{,}38$ см/с^2.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0{,}6$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

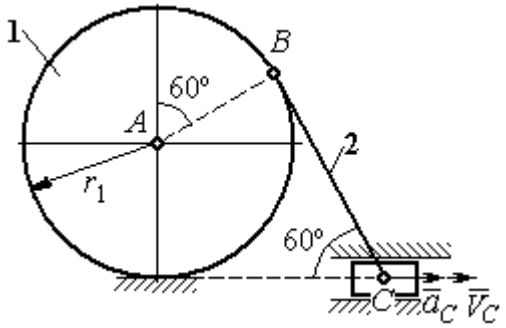


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C: $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с^2.

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B. Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

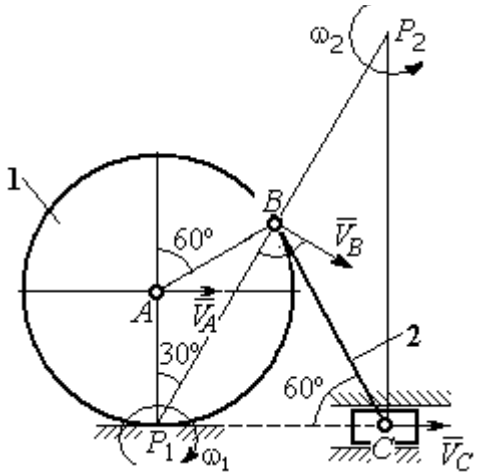


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов: $P_1B = r_1\sqrt{3} = 1{,}04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C: $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}8$ м.

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{P_2C}$ = 5рад/с. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки *B* найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = 5,2 м/с.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = 5 рад/с. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A$ = 3 м/с.

Найдём ускорение точки *A*.

Примем точку *B* за полюс и выразим ускорение точки *A* через полюс *B*: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса *B*; $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$, $\vec{a}^{\,n}_{AB}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *A* при вращении диска 1 вокруг полюса *B* (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$ точки *A* выбраны в предположении ускоренного движения диска.

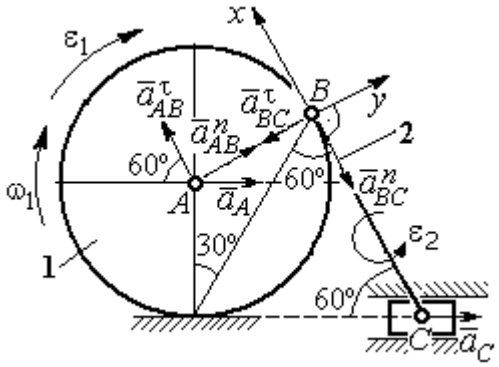


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса *B* выразим через полюс *C*: $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса *C*; $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$, $\vec{a}^{\,n}_{BC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *B* при вращении шатуна 2 вокруг полюса *C*. Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$ точки *B* выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки *A* выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускорение a^{τ}_{AB} точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a^n_{AB} = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2;\ a^n_{BC} = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние P_2C от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x, y, выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x\text{: } -a_A\cos60^\circ = a^{\tau}_{AB} - a^n_{BC} - a_C\cos60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y\text{: } a_A\cos30^\circ = a^n_{AB} - a^{\tau}_{BC} + a_C\cos30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a^{\tau}_{AB} = a_A$, найдём ускорение точки A: a_A = 18,67 м/с^2. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2{,}29$ м/с^2. Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|a_{BC}^{\tau}\right|}{BC} = 2{,}2$ рад/с^2. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^{τ} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2, насаженная в центре на кривошип OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2. Длина стержня $BC = 1$ м.

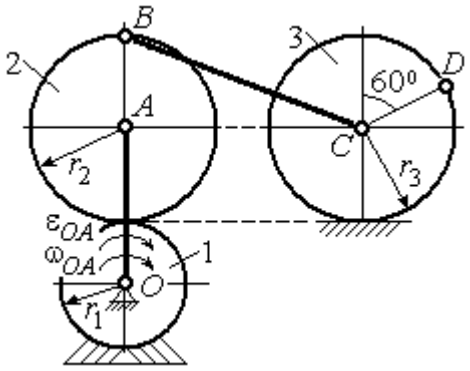


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость его точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2{,}4$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} =$ 6 рад/с. Скорость точки B шестерни 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 =$ 4,8 м/с.

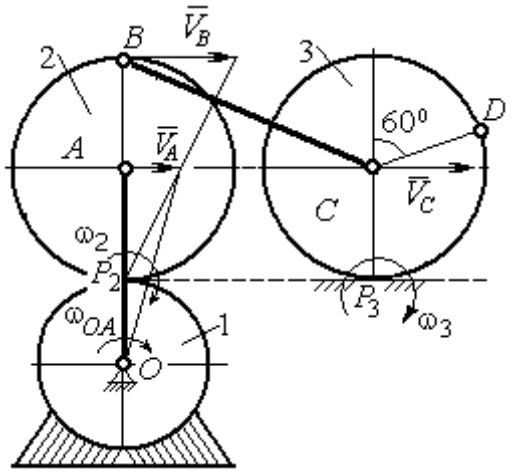


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение. При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B =$ 4,8 м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} =$ 12 рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C, направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B. Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B. Вектор $\vec{a}^{n}_{CB}$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B, вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ перпендикулярен стержню BC. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC, показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB}.

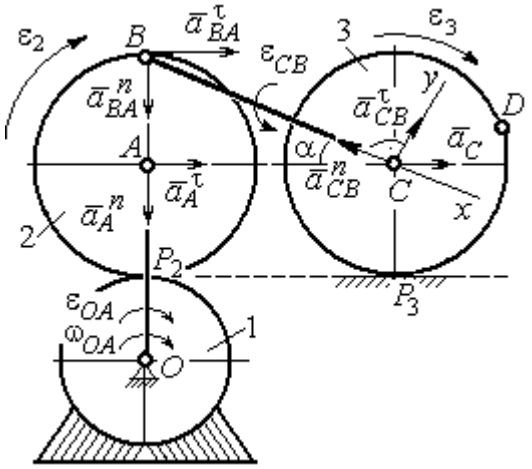


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A, вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен линии BA. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA. Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A. Вектор $\vec{a}^{n}_{A}$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}^{\tau}_{A}$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14{,}4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, получим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3$ рад/с^2 и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1{,}2$ м/с^2.

Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C. Получим систему уравнений:

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin\alpha = -a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha - a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C: $a_C = 12{,}83$ м/с^2, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B: $a_{CB}^\tau = 33{,}95$ м/с^2. Величина углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 33{,}95$ рад/с^2. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как движение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равенство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32{,}07$ рад/с^2.

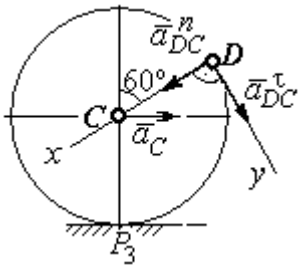


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Выразим ускорение точки D через полюс C, ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Модули ускорений

$$a_C = 12{,}83 \text{ м/с}^2;\ a^n_{DC} = \omega_3^2 DC = 57{,}6 \text{ м/с}^2;\ a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 DC = 12{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a^n_{DC};\quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a^\tau_{DC}.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46{,}49$ м/с^2; $a_{Dy} = 19{,}25$ м/с^2.

Величина ускорения точки D: $a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 50{,}32$ м/с^2.

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C, B и A, так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx}, a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ}.

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA, вращающийся вокруг неподвижной оси O, шестерню 1 радиуса r_1, насаженную на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC, присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1. В положении, указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1, если ω_{OA} = 2 рад/с; ε_{OA} = 4 рад/с^2; OA = 0,8 м; r_1 = 0,4 м; AB = 0,2 м; BC = 0,6 м. Для этого же положения определить ускорение точки C.

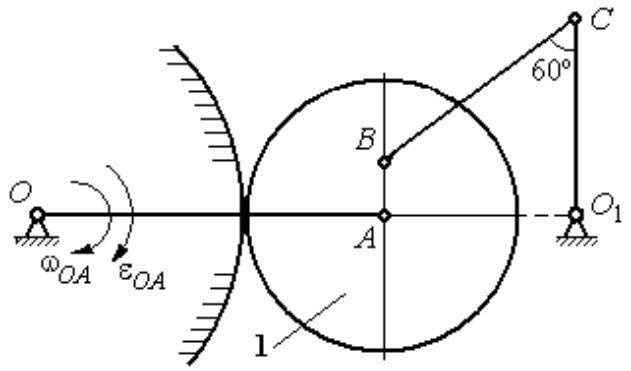


Рис. 2.36. Механизм качалки

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$ = 1,6 м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1}$ = 4 рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1.

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B P_1B = 0,45 м. Скорость точки B: $V_B = \omega_1 \cdot P_1B$ = 1,8 м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C, является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC\cos 30^\circ = 0{,}52$ м; $\cos\alpha = \dfrac{AP_1}{BP_1} = 0{,}89$; $P_2B = \dfrac{BK}{\cos\alpha} = 0{,}58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = 3{,}1$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC}.

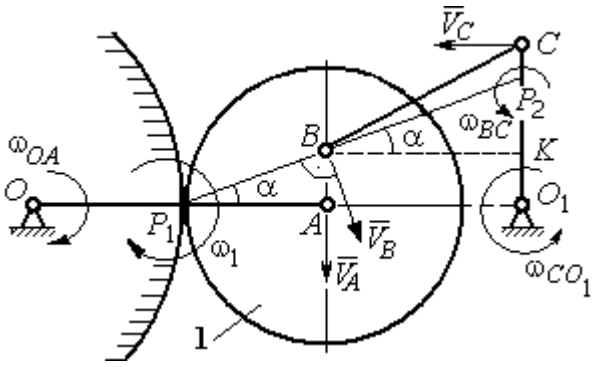


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Расстояние $P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin\alpha = 0{,}04$ м. Скорость точки C шатуна BC: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0{,}12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0{,}5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{CO_1} = 0{,}24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC, выразим ускорение точки C через полюс B: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B.

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A.

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA, а точка C – коромыслу CO_1, вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих точек можно представить в виде сумм векторов:

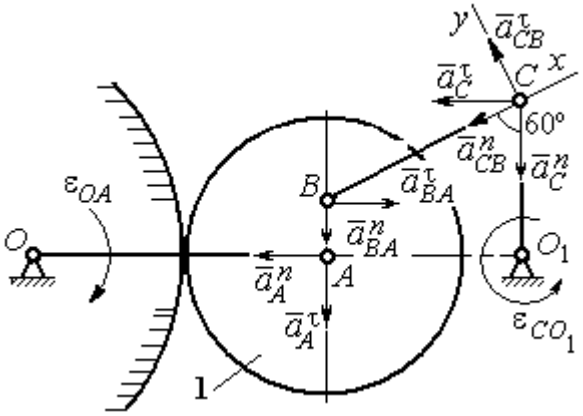


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_C = \vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau},$$

где $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_A^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O; $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_C^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1.

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau} = \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;\ \ a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5{,}77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ \ a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференцируем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A^\tau}{r_1} = 8$ рад/с^2.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1{,}6$ м/с^2.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ и $\vec{a}^{\tau}_{C}$. Выберем ось x вдоль шатуна BC, как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a^{n}_{C}\cos 60^{\circ} - \vec{a}^{\tau}_{C}\cos 30^{\circ} = -a^{n}_{CB} - a^{n}_{BA}\cos 60^{\circ} + a^{\tau}_{BA}\cos 30^{\circ} - a^{n}_{A}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{A}\cos 60^{\circ},$$

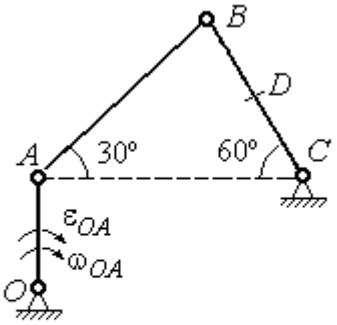
откуда найдём ускорение a^{τ}_{C} = 11,94 м/с^2. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{\left|a^{\tau}_{C}\right|}{CO_1} = 23{,}88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a^{τ}_{C} свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}^{\tau}_{C}$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

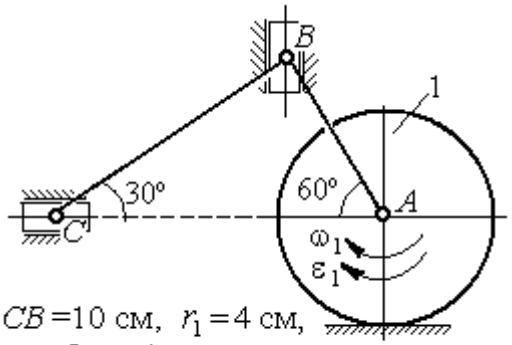
Упражнения

Упражнения 2.9



$OA = 4$ см, $BD = DC = 4$ см,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки D

Упражнения 2.10



$CB = 10$ см, $r_1 = 4$ см,
$\omega_1 = 3$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки C

Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной.**

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным.**

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса:** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_{\text{к}}$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_{\text{к}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_{\text{к}}| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

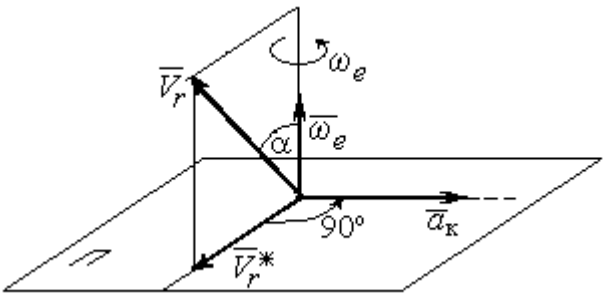


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость *П*, перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости *П* вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_{\text{к}} = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу *AB* с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке *A* и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат *xOy*, если радиус $OA = 0{,}5$ м, радиус кривизны канала в точке *A* $\rho = 0{,}8$ м, угол между нормалью *n* к кривой *AB* в точке *A* и радиусом *OA* $\alpha = 30^\circ$.

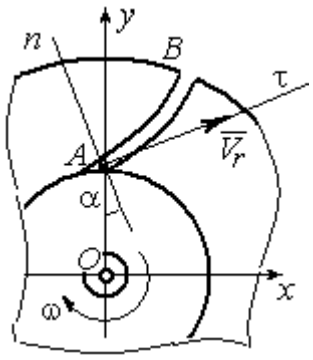


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки *A* компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу *OA* и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой *AB* (стенки канала) в точке *A*.

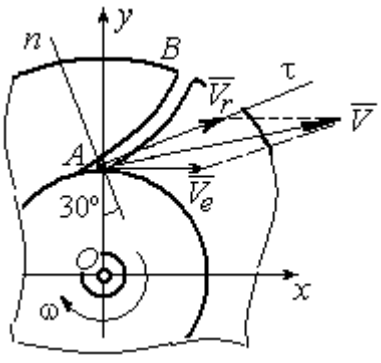


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси *x*, *y*. Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8{,}46 \text{ м/с}; \; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{к}}.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

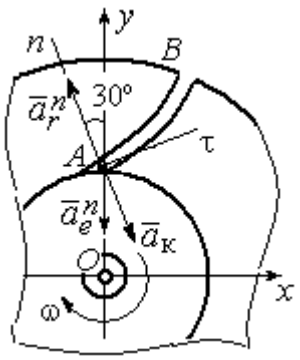


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки *A* вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$, где $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке А выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0,\ a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2;\ a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2;\ a_{\text{к}} = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат *xOy*. Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_к \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_к \cos 30^\circ = -101{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106{,}28$ м/с^2.

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворота крана (рис. 3.5) груз *A* перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан *B* радиуса $r_1 = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0{,}5$ рад/с^2.

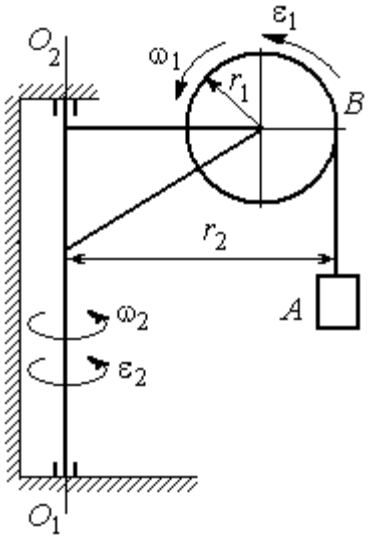


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза *A* на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана *B* из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3$ рад/с. Скорость подъёма груза *A* в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1) r_1 = 1{,}5$ м/с. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$. При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2: $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

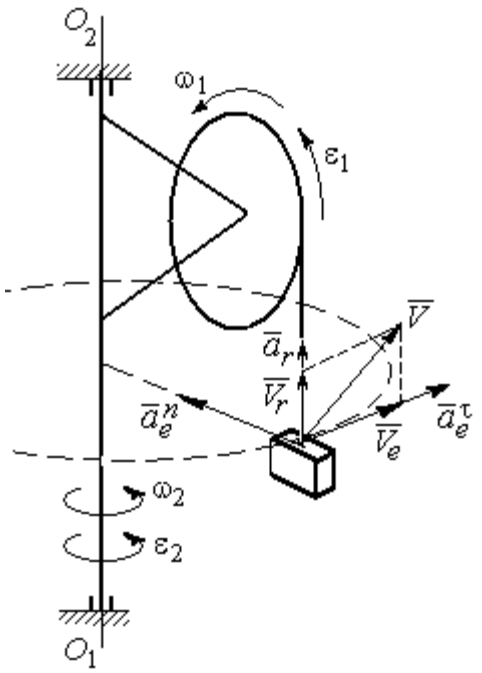


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5{,}22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_\text{к} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_\text{к}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$, $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$, $\vec{a}_\text{к}$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1{,}5$ м/с^2. Направление вектора $\vec{a}_r^{\,\tau}$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2$ = 2,5 м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2$ = 5 м/с^2. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса $a_к$ равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_к = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (\vec{a}_e^\tau)^2 + (\vec{a}_r)^2}$ = 5,79 м/с^2.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ.

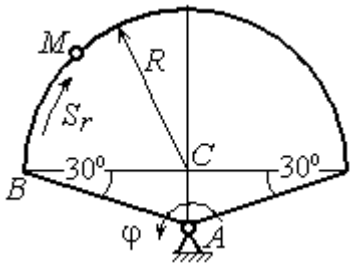


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M. Уравнение движения точки: $\breve{BM} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска R = 9 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A, относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом: $\alpha = \dfrac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1.

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\varphi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с. Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла φ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e.

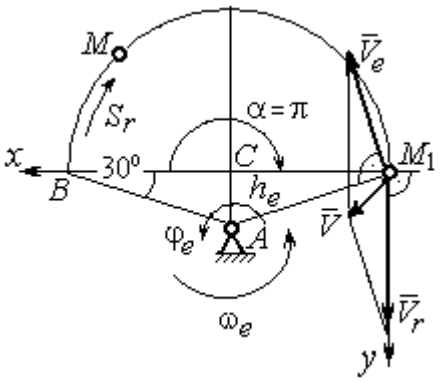


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = = \omega_e AM_1 = \dfrac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10{,}39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x, M_1y, как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 5{,}2 \text{ см/с}, \; V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = 47{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47{,}8$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_\text{к}$.

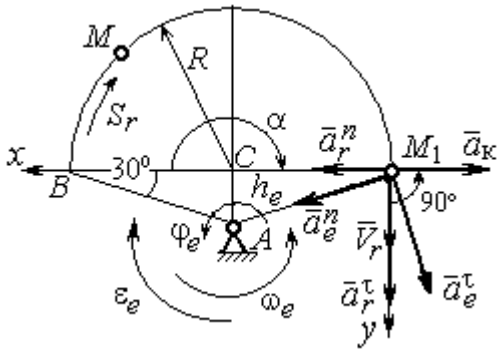


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$, где $\vec{a}_e^{\,\tau}$ и $\vec{a}_e^{\,n}$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_\text{к}$.

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1.

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно 355,3 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,n}$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e| = 4$ рад/с^2. Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e. Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с^2. Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega V_r =$ $=113{,}1$ см/с^2. По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y, как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 230{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2, проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ. Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30º к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t-1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r. Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

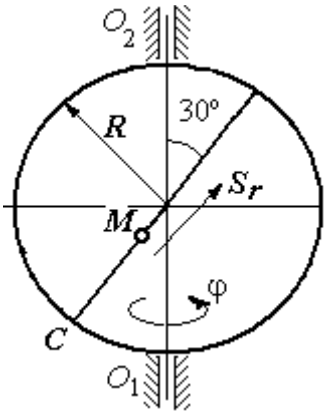


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r, пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1.

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω.

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1. Очевидно, $KM_1 = 0{,}5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, *a*).

(На рис. 3.11, *a* символ ⊙ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ ⊕ – «от нас».)

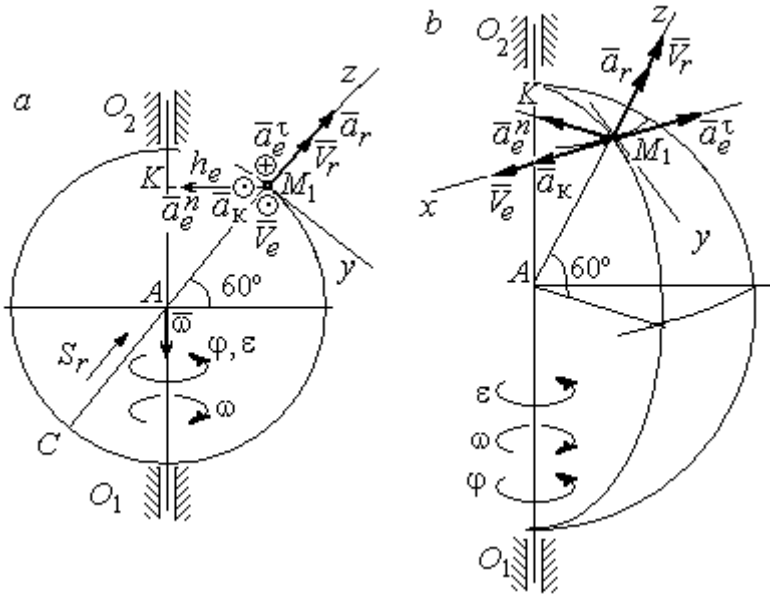


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
a – плоская модель движения;
b – пространственная модель движения

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|8(4t - 1)\right|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24{,}33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}$.

Относительное ускорение точки $a_r = \left|\ddot{S}_r\right| = 32$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \left|\dot{\omega}\right| = \left|4t - 4\pi\sin\pi t\right|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 4$ рад/с^2. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4$ рад/с^2) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε. Модуль переносного касательного ускорения a_e^{τ} определяется по формуле $a_e^{\tau} = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{\tau} = 8$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_e^{\tau}$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^{n} рассчитывается по формуле $a_e^{n} = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{n} = 8$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{n}$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150º. Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1$ с $a_{\text{к}} = 2\left|\omega\right\|V_r\left|\sin 150^\circ = 48\right.$ см/с^2. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, *а* это будет проекция на линию KM_1. Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, *а* вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x, M_1y и M_1z, как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, *а* ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

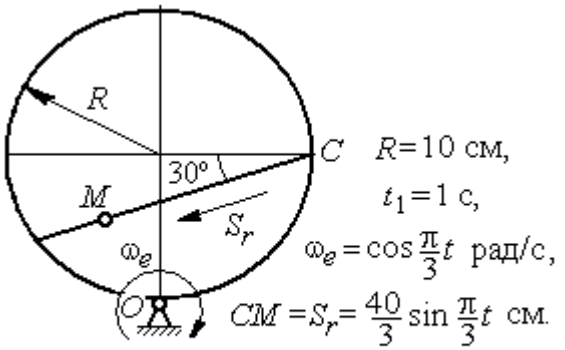
$$a_x = -a_e^{\tau} + a_{\text{к}} = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49{,}32$ см/с^2.

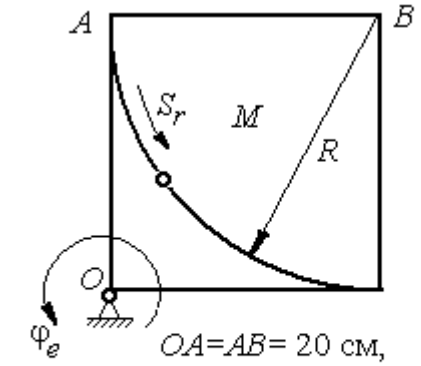
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1$ с

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ldots,\ \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\ ,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\ .$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\ ;\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}\ ;\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}\ ,$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\ ;\ \ m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}\ ;\ \ m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ ,$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}\ ;\ \ m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}\ ;\ 0 = \sum F_{kb}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0, направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f. Дойдя до края стола в точке B, частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h. На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

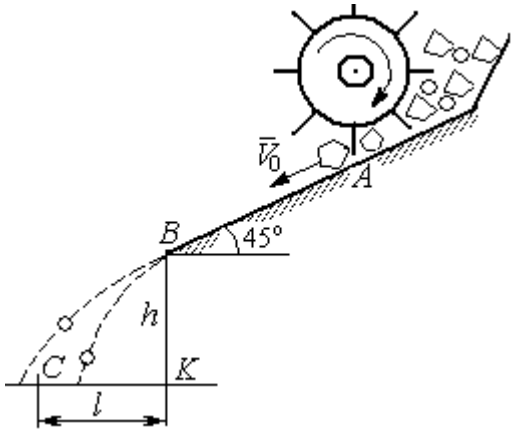


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1{,}2$ м, угол наклона $\alpha = 45°$, высота точки отрыва $BK = h = 1{,}5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0{,}4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат *xAy*, направив ось *x* вдоль линии движения, а ось *y* – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

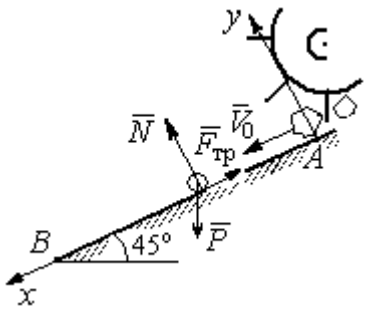


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси *y* частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения, которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1-f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0{,}4: \ \frac{dV_x}{dt} = 4{,}18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4{,}18t + C_1$; $x = 2{,}09t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке *AB* сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4{,}18t + 1$; $x = 2{,}09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4{,}18t_B + 1$, $S = 2{,}09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8{,}36S}$. При длине стола S = 1,2 м скорость отрыва V_B = 3,32 м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B, направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$$

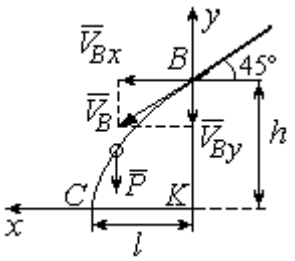


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3;\ x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4. определяются из начальных условий движения: при t = 0 , $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось x, $V_{Bx} = V_B\cos45^\circ$ = 2,35 м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: C_4 = 0, C_3 = 2,35. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2{,}35t$.

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y. Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y: при t = 0 , $y(0) = h$ = 1,5 м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B\cos45^\circ = -2{,}35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось y. Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2{,}35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4{,}91t^2 - 2{,}35t + 1{,}5$.

В момент $t = t_{\text{п}}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2{,}35t_{\text{п}},\ 0 = -4{,}91t_{\text{п}}^2 - 2{,}35t_{\text{п}} + 1{,}5.$$

Исключая в системе время $t_{\text{п}}$, выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1{,}12\ell - 1{,}68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0{,}85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0{,}4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0{,}4$) – недолетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0{,}5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k, при котором скорость точки за первую секунду от начала движения увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

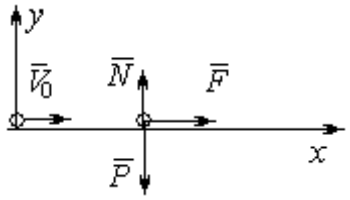


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось *x* положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс *x* у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\dfrac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \dfrac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt} = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\dfrac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента *k*, получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \dfrac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51{,}86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой m = 1 кг, находясь на высоте h_1 = 2 м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью V_0 = 4 м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0{,}5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H, на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

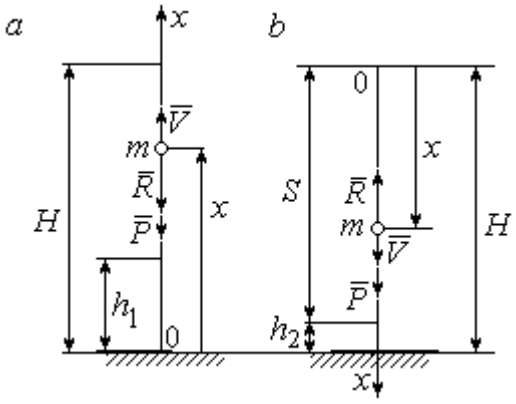


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x, вдоль которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x: $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x: $P_x = -P = -mg$; $R_x = -0{,}5mV^2$. Полагая $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, получим уравнение движения точки в виде: $\dfrac{dV}{dt} = -(g + 0{,}5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}=\frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g+0{,}5V^2}=-2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g+0{,}5V^2)=-x+C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C=h_1+\ln(g+0{,}5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x=h_1+\ln\left(\frac{g+0{,}5V_0^2}{g+0{,}5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x=H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H, получим: $H=h_1+\ln\left(1+\frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2{,}6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки: $m\frac{dV}{dt}=P_x+R_x = mg-0{,}5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду: $\frac{dV^2}{g-0{,}5V^2}=2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g-0{,}5V^2)=-x+C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1=\ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением $x = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V^2}\right)$.

Расстояние S, которое пролетела точка с высоты H, приобретя скорость, V_0: $S = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V_0^2}\right)$. Высота h_2 этого положения от уровня Земли: $h_2 = H - S$ (см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2{,}6$ м высота $h_2 = 0{,}91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1 на высоте h. Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

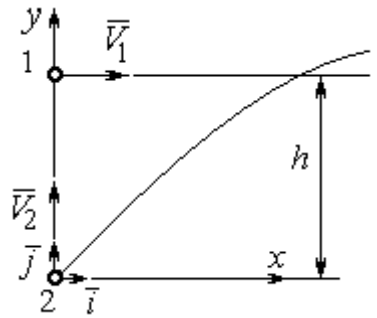


Рис. 4.6. Схема встречного движения точек

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y, точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2. В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представлена в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат xy: $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где p, q – const. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y: $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

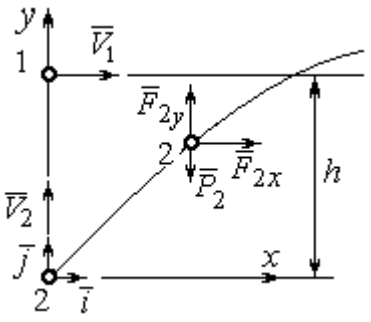


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

Уравнения движения точки в проекциях на оси xy имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p,\ m_2\ddot{y} = q - m_2 g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y: $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y: $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2 t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1 t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \qquad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2 t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1 m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы m = 2 кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения f = 0,4. На тело действует сила $F = kt + 0{,}5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь S = 2 м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы m = 1 кг, находящуюся на высоте H = 10 м над уровнем Земли, бросили под углом φ = 30° к горизонту с начальной скоростью V_0. Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту h =7 м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.** В случае гармонического возмущения $Q = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае возникновения резонанса ($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

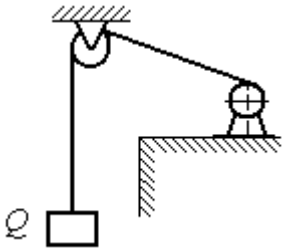


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* (точка *O*) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox* имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение колебаний:

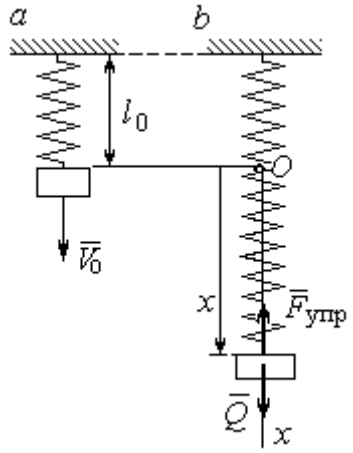


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0{,}69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0{,}71$ м. Окончательно, движение груза после защемления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0{,}69\cos 14{,}14t + 0{,}71\sin 14{,}14t + 0{,}69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1{,}68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134{,}4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60º. Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

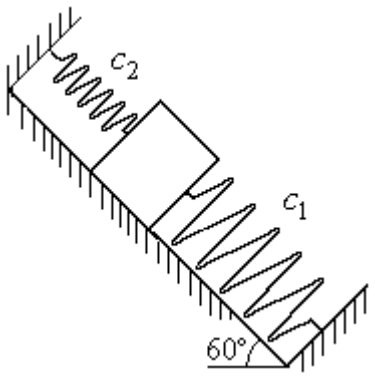


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0{,}12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикреплённого к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_э = c_1 + c_2$ = 900 Н/м (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

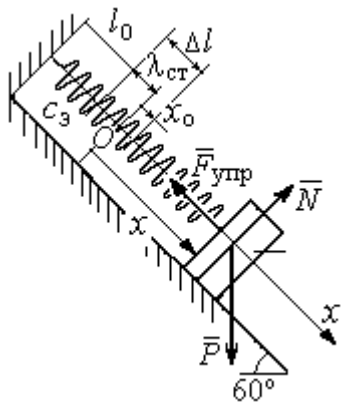


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox: $m\ddot{x} = P_x - F_{упр\,x}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox: $F_{упр\,x} = -c_э \Delta\ell$, где $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст})$ – удлинение пружины, включающее её растяжение $\lambda_{ст}$ относительно положения нерастянутой пружины и растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{ст}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P\cos 30^\circ - F_{упр} = 0{,}87mg - c_э\lambda_{ст} = 0.$$

Находим $\lambda_{ст} = \dfrac{0{,}87mg}{c_э} = 0{,}085$ м.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0{,}87mg = c_э\lambda_{ст}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_э x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 10$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{ст} = 0{,}035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0{,}035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2 \sin\omega_2 t + C_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0{,}035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0{,}035$ м. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины c = 350 Н/м. Груз массой m = 5 кг падает с высоты h = 0,3 м.

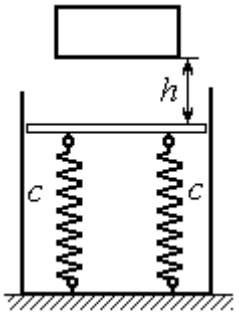


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

Решение

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_э = 2c$ = 700 Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, c предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, *c*), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния (см. рис. 4.13, *a*) составляет величину: $\Delta\ell = x + \lambda_{ст}$. Величина $\lambda_{ст}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, *b*): $P - F_{упр\,ст} = P - c_э\lambda_{ст} = 0$.

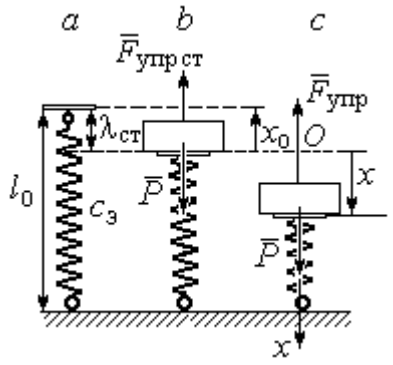


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
a – недеформированная пружина;
b – положение статического равновесия груза; *c* – произвольное положение

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} + c_э x = 0$ или $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 11,83 рад/с – угловая частота колебаний.

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{ст} = -\dfrac{mg}{c_э} = -0{,}07$ м.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая s = 0,3, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: V = 2,43 м/с. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V$ = 2,43 м/с.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0{,}07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0{,}2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0{,}07\cos 11{,}83t + 0{,}2\sin 11{,}83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0{,}28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c. К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A. В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза $m = 1$ кг, жесткость пружины $c = 10$ Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a\sin pt$ см, где амплитуда $a = 0{,}02$ м, частота колебаний платформы $p = 7$ рад/с.

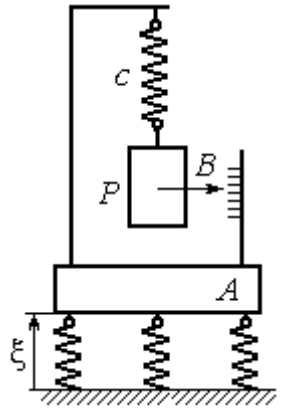


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x, связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x+\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия груза, определяемое из условия $P-c\lambda_{ст}=0$. Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины. В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме: $\Delta\ell=(x+\lambda_{ст}+\xi)$.

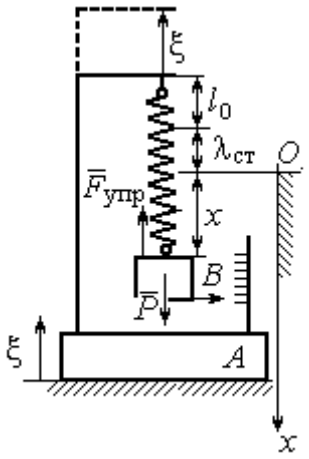


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x}=P_x+F_{упр\,x}$, где проекции $P_x=P$, $F_{упр\,x}=-c\Delta\ell=-c(x+\lambda_{ст}+\xi)$. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P-c\lambda_{ст}=0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2x=-h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=3{,}16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h=\dfrac{ca}{m}$ = 0,2 м/с^2;

p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 7 рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x=x_1+x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения $\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний: $\ddot{x}_2+\omega^2x_2=-h\sin pt$.

Решив однородное уравнение, находим: $x_1=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b\sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2\sin pt + \omega^2 b\sin pt = -h\sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \dfrac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2}\sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим C_1= 0. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \dfrac{hp}{p^2 - \omega^2}\cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\dfrac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0{,}01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t - 0{,}02\sin 7t = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}03\sin 7t.$$

Упражнения

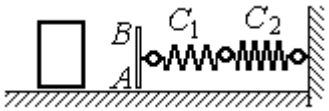


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы m = 0,5 кг, получив начальную скорость V_0 = 6 м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью C_1 = 120 и C_2 = 40 Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если k = 0,5 Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы m =1 кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости C = 160 Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость V = 4 м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

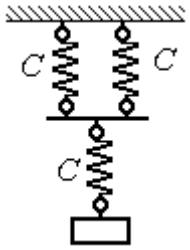


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется скалярная величина $A(\vec{F}) = FS\cos\alpha$, где F – модуль силы; S – конечное перемещение точки приложения силы; α – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

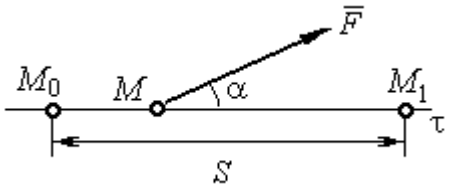


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

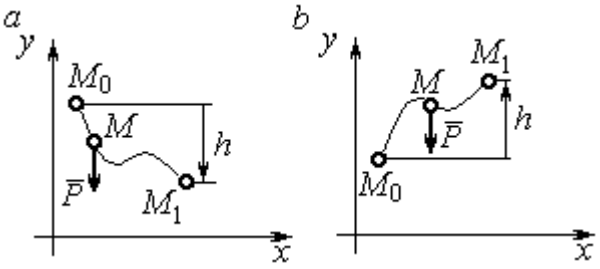


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние *h* определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где *m* – масса точки; *V* – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1. При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью V_0 = 6 м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s$, где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть V = 0. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_0^2}{2} = \left(P - F_{\text{тр}}\right)s$, откуда находим требуемую для остановки груза силу трения: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}}$ = 5,81 кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов R = 1 м и r = 0,5 м (рис. 4.20). Линия OO_1, соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик весом P = 10 Н. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60°, шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90°$ относительно линии центров.

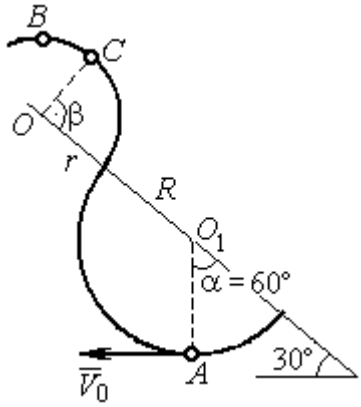


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и потому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

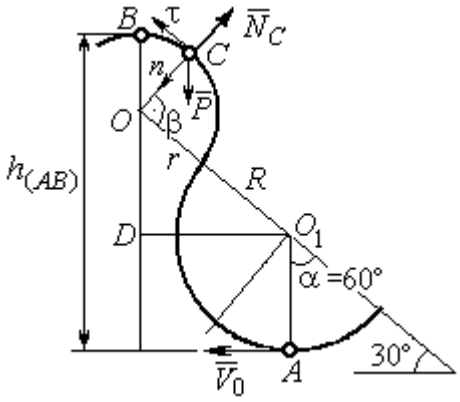


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A, $h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r)$ (см. рис. 4.21); V_A, V_B – скорость шарика в точках A и B, причём $V_A = V_0$, $V_B = 0{,}5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда $V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7{,}67$ м/с.

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарику, в момент, когда он находится в точке *C*. Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn. Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *C* в положение *B*. Получим равенство $\dfrac{mV_B^2}{2} - \dfrac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения *C* в положение *B*. С учётом известных значений $V_B = 0{,}5V_0 =$ 3,84 м/с и $h_{(CB)} = r\cos 30^\circ =$ 0,43 м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} =$ 4,82 м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} =$ – 38,7 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой *AB* и гладкой дуги окружности радиуса *r* = 0,8 м, сопряжённых в точке *B* так, что прямая *AB* является касательной к окружности в точке *B* (рис. 4.22). Положение точки *B* на дуге задаётся углом 30º относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой *m* = 0,5 кг начинает движение из точки *A* со скоростью $V_0 = 0{,}2$ м/с.

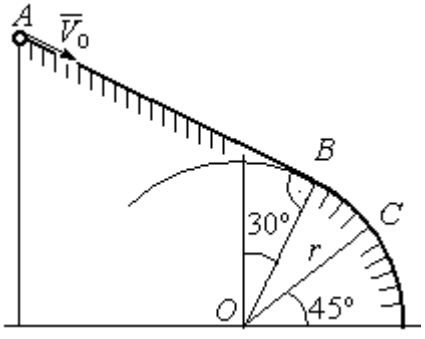


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины *S* должен быть желоб *AB*,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C, определяемой углом 45º относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0{,}4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C. Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C. Реакция опоры $N_C = P\cos 45^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r}$.

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg\cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2{,}36$ м/с.

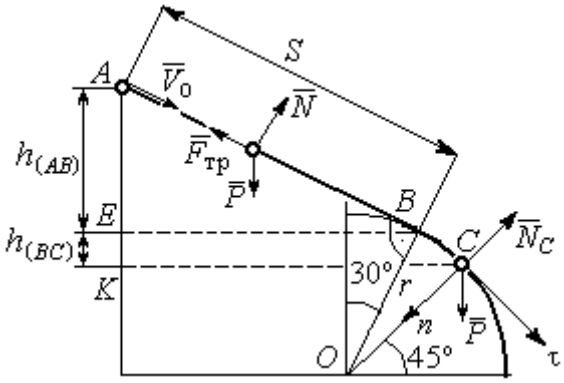


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки $\dfrac{mV_C^2}{2} - \dfrac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{\text{тр}}S$, где S – длина участка AB; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB, составим проекцию уравнения движения шарика на ось y, перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB:

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A, при котором линия OA составляет с вертикалью угол $60°$. В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1, расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

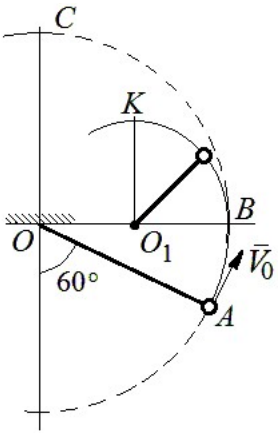


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A, чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K. На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $n K \tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0{,}5l$ с центром O_1 (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид: $m\dfrac{V_K^2}{r} = P + N_K$, где V_K – скорость

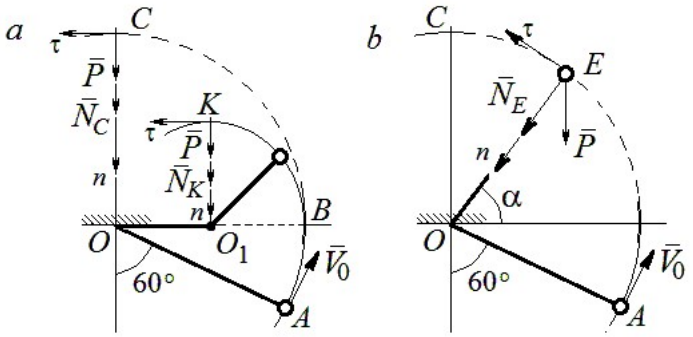


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
a – нить навивается на препятствие;
b – свободное движение

груза в точке K; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза; $r = 0{,}5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m\dfrac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \dfrac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K. Имеем равенство $\dfrac{mV_K^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки *K*. Однако, натяжение нити в точке *K* обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения *A* с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, *b*). Построим в точке *E* оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке *K*. Уравнение движения груза в проекции на ось *En* имеет вид: $m\frac{V_E^2}{l} = P\sin\alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке *E*; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке *E* составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения *A* в положение *E*. Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек *A* и *E*; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l\sin\alpha$ (см. рис. 4.25, *b*). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl\sin\alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке *E* натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl\sin\alpha$. Приравнивая выражения, получим $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B. Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l. Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой m = 0,5 кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса R = 0,6 м и прямолинейного участка BD, сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60°. Начальная скорость шарика V_0 = 5 м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью c = 100 Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

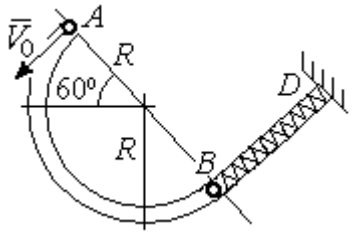


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B. Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B. Получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}$, где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B, $h_{(AB)} = 2R\sin 60^\circ = 1{,}04$ м (рис. 4.27).

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B: $V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6{,}74$ м/с.

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD. На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарику (см. рис. 4.27).

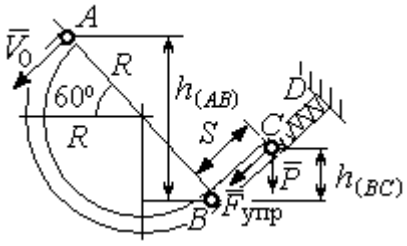


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC. На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке BC, имеем уравнение $\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{упр}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2}$,

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C; $h_{(BC)} = S\sin 30^\circ = 0{,}5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6{,}74$ м/с, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0{,}05S - 0{,}23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0{,}45$ м.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ, с начальной скоростью V_0. Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R, сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

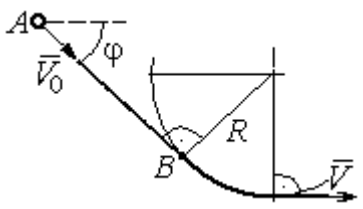


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт - сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью C = 100 Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0{,}3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0{,}5$ кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB, окружности радиуса R = 1 м, затем – по горизонтальному участку BD. Определить давление шарика на трубку в точке C. Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD, если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0{,}4$.

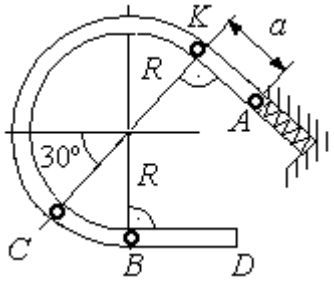


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C, координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k \ , \quad my_C = \sum m_k y_k \ , \ mz_C = \sum m_k z_k \ ,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды *ABCD*, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 m_1 = 15 кг, груза 2 m_2 = 20 кг, пирамиды m = 50 кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

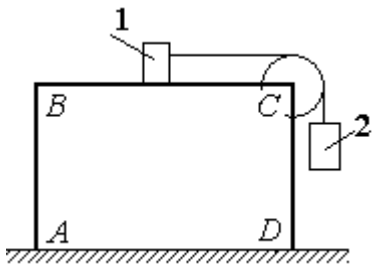


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока *C* и пирамиды *ABCD*.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат *Axy*, как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось *Ax,* имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

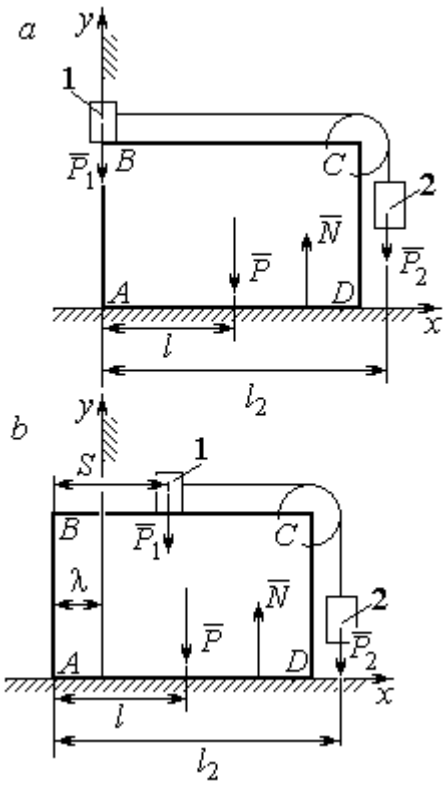


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: *a* – начальное положение; *b* – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние *S*

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, *a* не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси *Ax* остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, *a*.

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, *a*). Тогда начальная координата центра масс системы: $x_{C0} = \dfrac{m_2 l_2 + ml}{(m_1 + m_2 + m)}$.

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние *S*, и положение призмы показано на рис. 5.2, *b*. На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние *S* призма *ABCD* сместилась влево на расстояние λ. Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнивая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды $\lambda = \dfrac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}$. Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0{,}18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом *R*, массой *m* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска: $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$. **Для неоднородных тел момент инерции** относительно оси *z* вычисляется по формуле: $J_z = mi_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси *z* называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, кинетический момент: $L_z = J_z\omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси**. Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R. Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z. На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60$ Н·м. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t$ Н·м, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 50$ кг, $m_3 = 20$ кг. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}4$ м; $i_z = 0{,}5$ м.

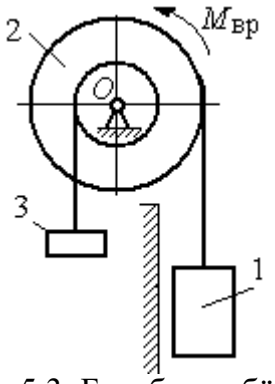


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c. Направления векторов сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси *y*, вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

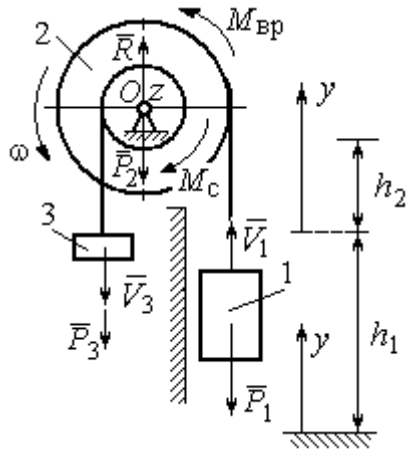


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*, проходящей через центр *O*: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$. Кинетический момент системы относительно оси *z* равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*: $L_z^{бар} = J_z\omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси *z*, $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси *z*: $L_z^{гр} = M_z(m_1\vec{V}_1) = m_1V_1R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3\vec{V}_3) = m_3V_3r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2\omega + m_1V_1R + m_3V_3r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ - и подставим их в выражение кинетического момента. Получим $L_z = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\omega = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{V_1}{R}$.

Суммарный момент внешних сил относительно оси *z*

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r\right)R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0{,}58 + 0{,}35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0{,}58t + 0{,}175t^2; \quad y(t) = 0{,}29t^2 + 0{,}058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1{,}62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1{,}86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(-M_c - P_1 R + P_3 r\right)R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6{,}61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь уравнение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6{,}61$. Интегрируя его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути $\frac{V_1^2}{2} = -6{,}61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1. Из начальных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1{,}86$ м/с, получим: $C_3 = 1{,}73$.

Максимальную высоту h_2, на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6{,}61h_2 + 1{,}73$, откуда $h_2 = 0{,}26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1{,}88$ м.

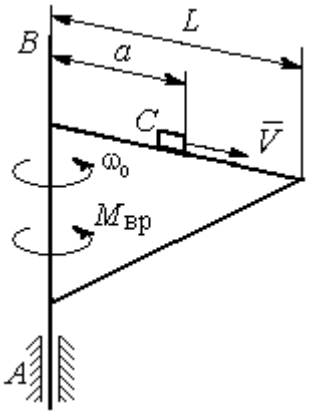


Рис. 5.5. Поворотный кран

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Длина стрелы

L = 10 м, масса тележки с грузом m_1 = 100 кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза J = 1800 кг·м^2. Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{вр}$ = 400 Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью ω_0 = 2 рад/с, а тележка находилась на расстоянии a = 1 м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с грузом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{вр}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z, направленной вдоль линии AB.

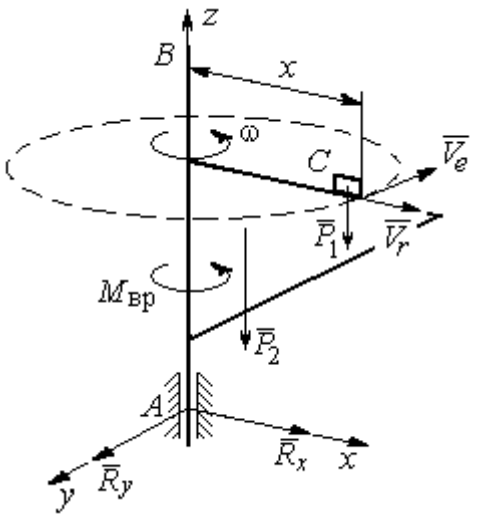


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{вр}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{вр}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{кран} + L_z^{груз}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси *z*. Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1\vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1\vec{V}_e + m_1\vec{V}_r) = M_z(m_1\vec{V}_e) = m_1V_ex = m_1\omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = \left(J + m_1x^2\right)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = \left(J + m_1a^2\right)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $\left(J + m_1x^2\right)\omega - \left(J + m_1a^2\right)\omega_0 = M_{\text{вр}}t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \dfrac{M_{\text{вр}}t + \left(J + m_1a^2\right)\omega_0}{\left(J + m_1x^2\right)}$. Момент времени $t_{\text{к}}$, когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $Vt_{\text{к}} = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_{\text{к}}) = 0{,}93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \dfrac{1}{2}J_z\omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси *z*; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

раллельном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FS\cos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом** M при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом *OA* (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип *OA* вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными *m* и *r,* и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

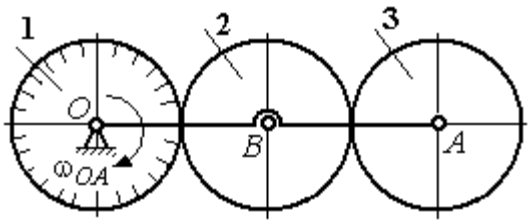


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма *T* равна сумме энергий колёс 2 и 3: $T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

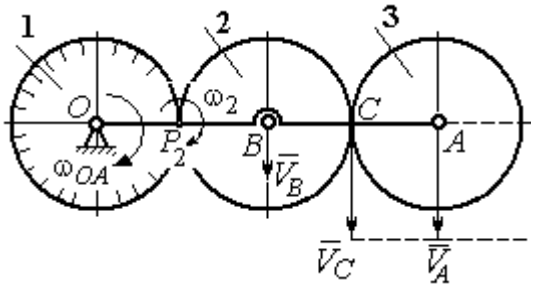


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA.

Скорость точки B, лежащей на кривошипе OA: $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C, считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA} r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA} r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA} r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1. Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R. Их общий вес равен Q, а общий радиус инерции относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: P_1 = 40 Н, Q = 60 Н, F = 50 Н, M = 45 Н·м, R = 0,8 м, r = 0,6 м, i_z = 0,4 м.

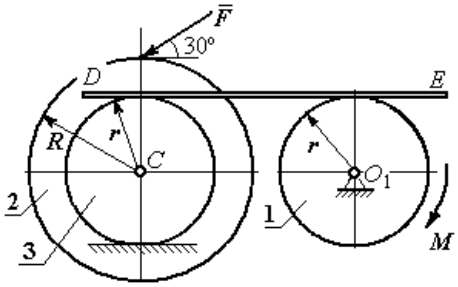


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

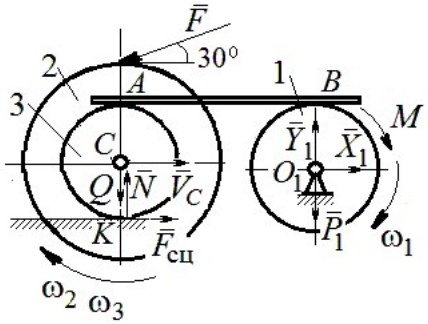


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1, ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, двигается плоскопараллельно. Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – момент инерции фигуры относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g}\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M\omega_1 = M\frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90°.

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F})\vec{\omega}_2 =$$

$$= -F(r+R)\omega_2 \cos 30° = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30°.$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K, противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + M\frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы $\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]$ и приравниваем суммарной мощности внешних сил. Получим:

$$\frac{1}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2{,}88$ м/с^2. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \dfrac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \dfrac{2a_C}{r} = 9{,}6$ рад/с^2.

Задача 59. Каток радиуса *r*, весом *P* закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы *F* = 2*P*. В начальном положении центр катка имел скорость V_0.

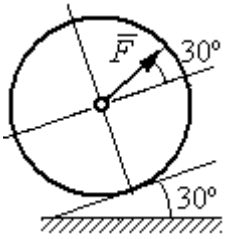


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

На какое расстояние *S* переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние *S* вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F\cos 30° S$ и сила тяжести: $A(\vec{P}) = -Ph$, где *h* – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

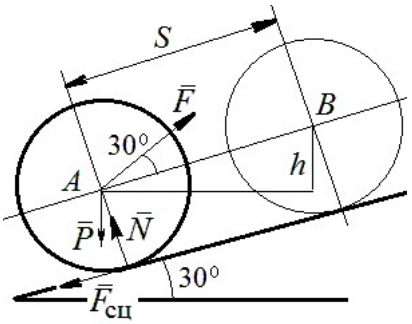


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

Кинетическая энергия катка $T = \dfrac{1}{2}mV_A^2 + \dfrac{1}{2}J_{zA}\omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \dfrac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \dfrac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, получим энергию катка в виде: $T = \dfrac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S: $\dfrac{3}{4} m V_B^2 - \dfrac{3}{4} m V_A^2 = F\cos 30° S - Ph$, где $V_A = V_0$ $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30°$.

Найдём искомое перемещение: $S = \dfrac{9V_0^2}{4g\left(2\cos 30° - \sin 30°\right)}$.

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l, на другом конце которого привязан груз массы m_2. Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

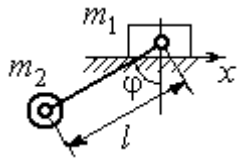


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

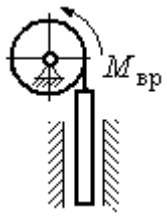


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{ВР} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

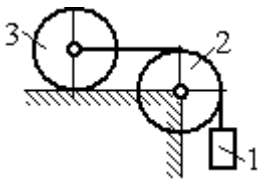


Рис. 5.15. Схема движения системы

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3, радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h, если к катку 3 приложен момент M.

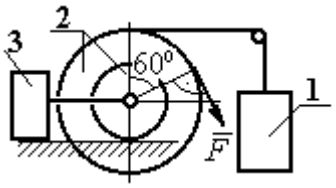


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твердого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F^e_{kz}$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}$, $ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}$, $ma_{Cz} = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции внешних сил.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$ или алгебраическим уравнением: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx};\ ma_{Cy} = \sum F^e_{ky};\ J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0{,}8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

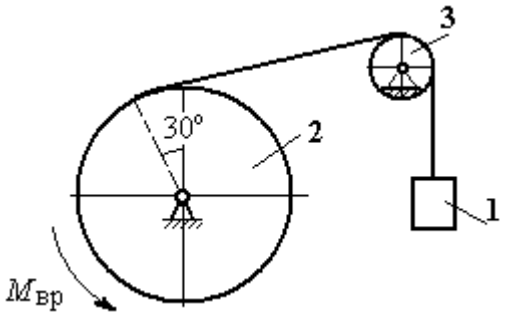


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось *x* по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось *x*: $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

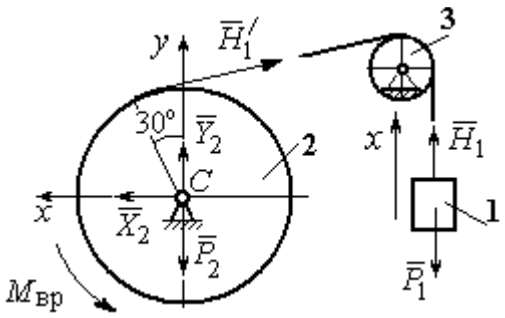


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z: $J_z\varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1'r$, где момент инерции барабана $J_z = \dfrac{m_2 r^2}{2}$.

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напишем уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \;\; m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим a_1= 1,82 м/с^2, H_1 = 581,8 Н. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1'\cos 30^\circ = 0, \; m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1'\cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503{,}84$ Н, $Y_2 = -94{,}7$ Н, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512{,}66$ Н.

Задача 60. Барабан весом G, радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30°, опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M.

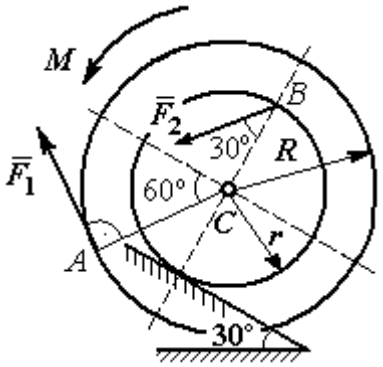


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравновешивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: R = 0,6 м, r = 0,2 м, G = 100 Н, F_1 = 60 Н, F_2 = 25 Н, радиус инерции барабана i_z = 0,4 м.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления барабана с поверхностью. Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

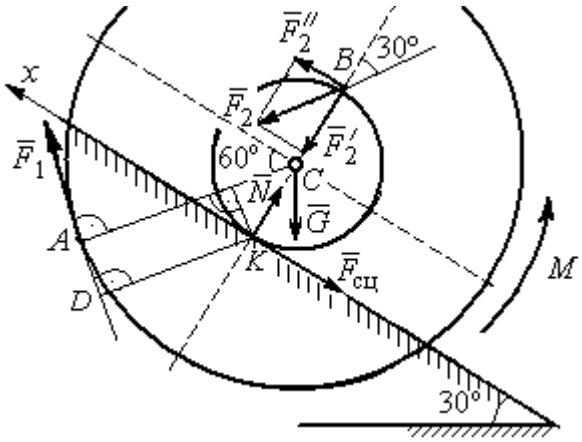


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Для определения момента M, приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки *K*. Точка *K* выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2\cos 30°$, $F_2'' = F_2\sin 30°$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки *K*: $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2\sin 30° \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки *K*:

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r\cos 30°).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r\cos 30°) + F_2\sin 30° \cdot 2r - Gr\sin 30° + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину уравновешивающего момента $M = 30{,}61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента *M*, удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1{,}2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось *x*, направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G\cos 60° - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1 R + F_2 r\cos 60° + F_{\text{сц}} r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) = -F_1\left(\frac{R}{r} - \cos 30°\right) + 2F_2\cos 60° - G\cos 60° + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0{,}6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0{,}3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x.

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с^2.

Задача 61. Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

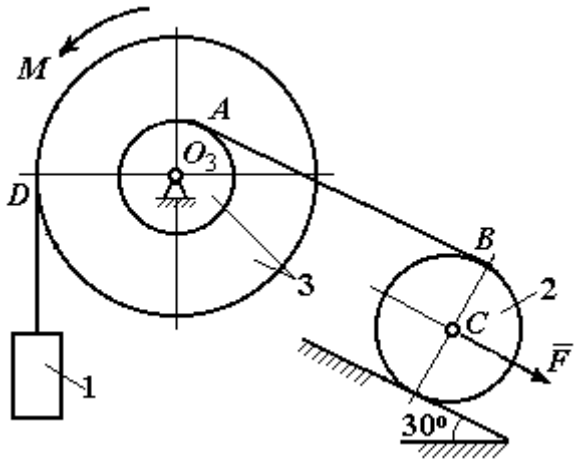


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M, приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30º происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2. Радиусы ступеней барабана 3: R_3, r_3, радиус инерции барабана i_3.

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

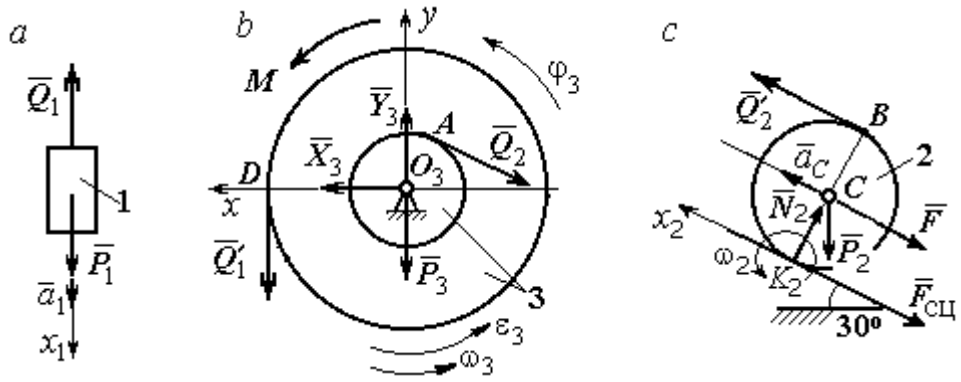


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1, ускорением a_1. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, *a*). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1 .$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс O_3. На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$), пара сил с моментом *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1'3r + Pr - Q_2r,$$

Момент инерции барабана относительно оси *z*: $J_{zO_3} = m_3i_3^2 = \dfrac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2' - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2'2r + F_{\text{сц}}2r,\ \ J_C = \frac{m_2R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см. рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK_2} = \dfrac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{R_2} = \dfrac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \dfrac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ получим систему:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1; \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

откуда находим: $a_C = 0{,}09g$, $Q_1 = 0{,}92P$, $Q_2 = 2{,}14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, *b*), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0{,}92P$ и $Q_2 = 2{,}14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1, радиусом r_1, ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1 g r_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, походящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

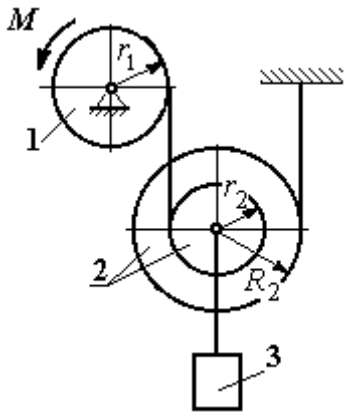


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

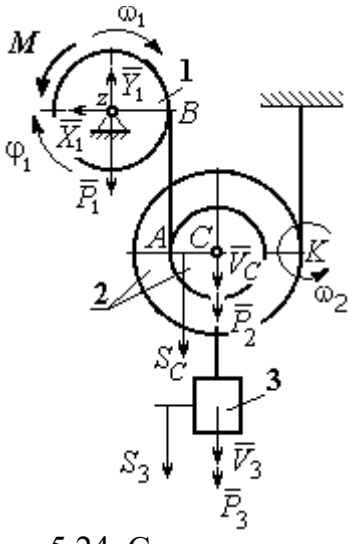


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \dfrac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A. Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2}\left[\frac{m_1}{2}\left(1 + \frac{r_2}{R_2}\right)^2 + m_2\left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2}\right) + m_3\right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M. Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3S_3 + P_2S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$ следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M\frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 .$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3 .$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3\frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с^2.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3. Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x: $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 –реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

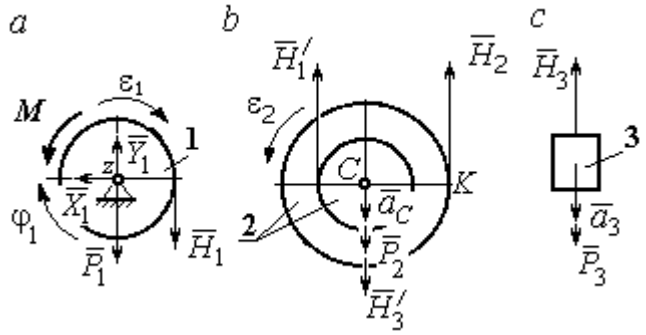


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси *z*. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом *M* и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции диска 1 относительно оси *z*, $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, *b*) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \;\; J_{2C}\varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2 .$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, *c*). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3 ,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \dfrac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}_3'$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8}m_1 a_3 = H_1 - m_1 g;\ \ 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1;\ \ 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \dfrac{120}{209}g$ м/с^2, $H_3 = \dfrac{178}{209}m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P, радиуса r. Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r. Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

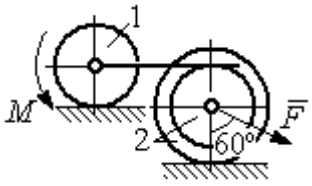


Рис. 5.26. Система катков

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r, затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2{,}5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреплён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

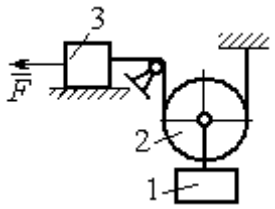


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r. Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

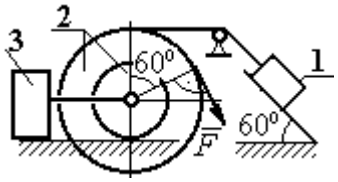


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

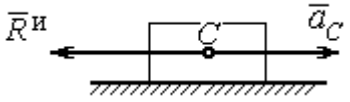


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

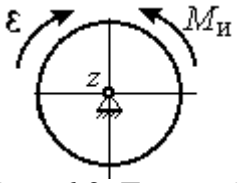


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

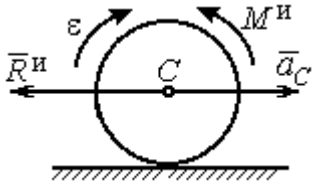


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0,\ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ –внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{и}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра *O*.

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы m_1 = 10 кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60º с горизонтом, и посредством нити, переброшенной через блок 2, укреплённый в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы m_3 = 5 кг (рис. 6.4). Клин *ABC* массы m_4 = 15 кг стоит гранью *AC* на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ *E*.

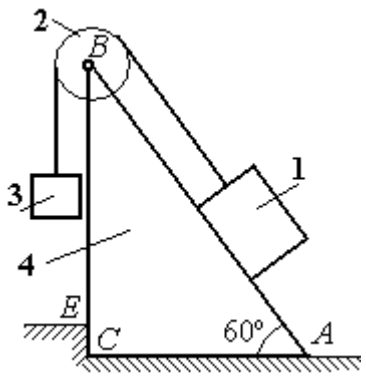


Рис. 6.4. Клин с грузами

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина *ABC*, блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира *B* блока 2 для данной системы являются внутренними.

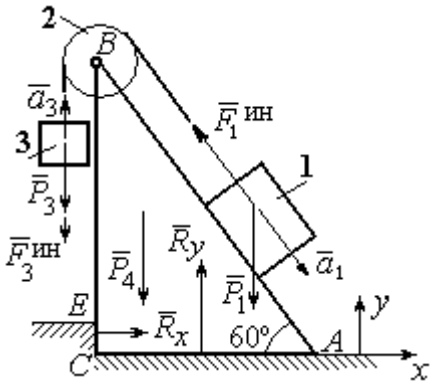


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_3^{ин} = 0$.

Выберем оси *xy,* как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось *x*. Получим: $R_x - F_1^{ин}\cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a*, *b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы: силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{ин}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось *x*, расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{ин} = 0$, где $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

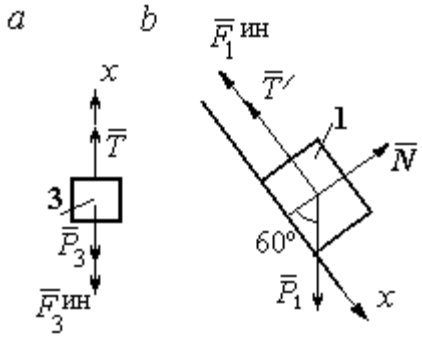


Рис. 6.6. Равновесие грузов

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{ин}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось *x*, выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим: $a_1 = a_3 = \dfrac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}$. Тогда давление клина на уступ:

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ .$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём R_x = 11,97 Н.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3. Лебёдка установлена на горизонтальной балке *AB*, которая закреплена в точке *A* на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке *B*. Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

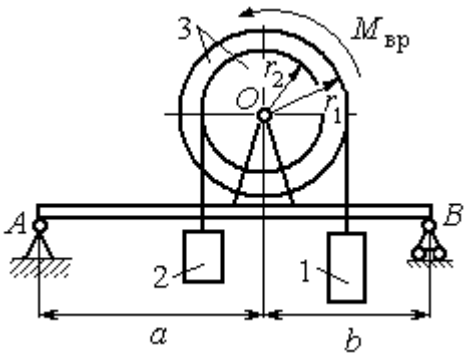


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана r_1 = 0,8 м, r_2 = 0,2 м, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 =0,6 м, масса груза 1 m_1 = 100 кг, противовеса 2 m_2 =30 кг, масса барабана m_1 = 50 кг, величина вращающего момента $M_{\text{вр}}$ = 1050 Н·м, расстояния от крайних точек балки *A* и *B* до линии вертикального диаметра барабана *a* = 2 м, *b* = 1 м.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O. Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

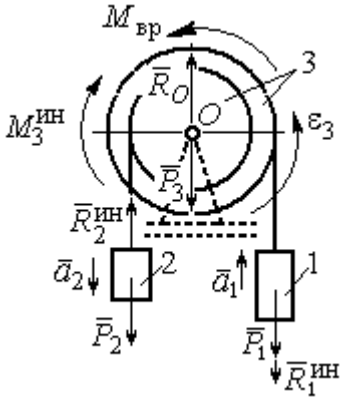


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0;\ \ M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}} r_2 + P_2 r_2 - P_1 r_1 - R_1^{\text{ин}} r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3 i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{r_1}$ и $a_2 = \dfrac{r_2}{r_1} a_1$, найдём ускорение груза 1: $a_1 = \dfrac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2 r_2 - P_1 r_1)}{m_3 i_3^2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}$. Подставляя данные задачи, получим a_1 = 3,49 м/с^2.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$=349 Н; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$ = 26,17 Н.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O:

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088{,}63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O, реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B. Составим уравнения равновесия балки:

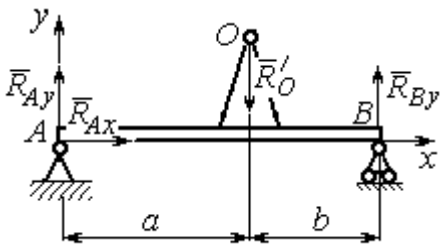


Рис. 6.9. Равновесие балки

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0,\ \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a+b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём реакции опор балки: $R_{By} = R_O \dfrac{a}{a+b} = 1392{,}42$ Н; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696{,}21$ Н.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419{,}18$ Н, $R_{Ay} = 346{,}62$ Н.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m. Массой нити и блока пренебречь.

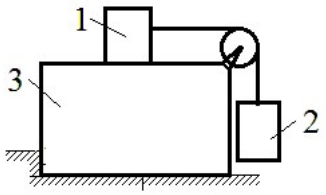


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1, нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1.

Какой вращающий момент M, постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P, прикреплённый в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

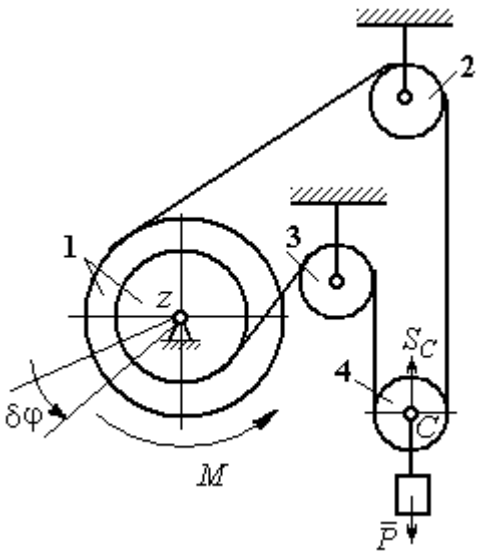


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M. По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C. Предположим, в механизме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки *K*. Здесь скорость точки *A* блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки *B* – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию $\frac{V_B}{V_A}=\frac{BK}{AK}=\frac{r_4+CK}{r_4-CK}$, где r_4 – радиус блока 4 (см. рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек *A* и *B* $V_A=\omega_1 r_1$, $V_B=\omega_1 R_1$, найдём расстояние: $CK=\frac{(R_1-r_1)r_4}{R_1+r_1}$.

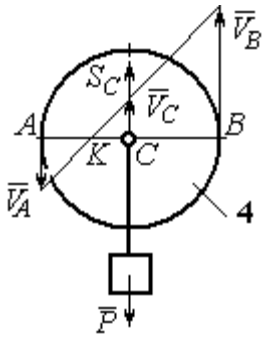


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_B}{r_4+CK}=\frac{\omega_1(R_1+r_1)}{2r_4}$. Скорость его центра: $V_C=\omega_4\cdot CK=\frac{\omega_1(R_1-r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки *C* и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме: $dS_C=d\varphi_1\frac{(R_1-r_1)}{2}$. Поскольку действительное перемещение является одним из возможных (т. е. $ds=\delta s$, $d\varphi=\delta\varphi$), получим связь между возможными перемещениями барабана 1 и груза: $\delta S_C=\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}$.

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных перемещений, представим его в окончательном виде: $M\delta\varphi_1-P\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}=0$, откуда найдём значение уравновешивающего момента: $M=\frac{P(R_1-r_1)}{2}$.

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r, и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30º к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

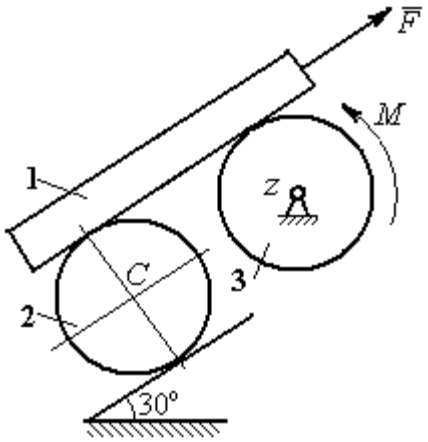


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{сц}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

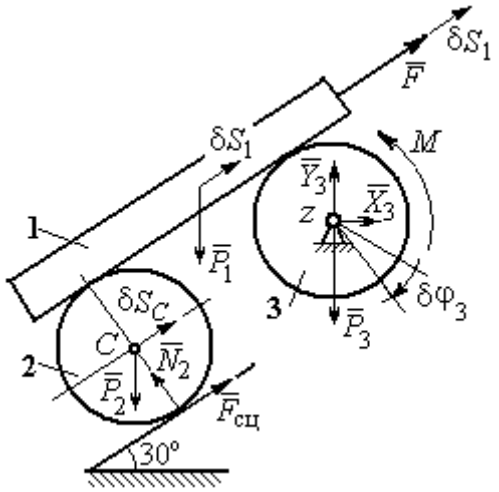


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C, а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1. Допустим, скорость бруса равна V_1. Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом *M*, приложенных к блоку 2. Каток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов *r* и *R* = 2*r* с общей массой 3*m*. Масса груза 1 равна *m*. При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

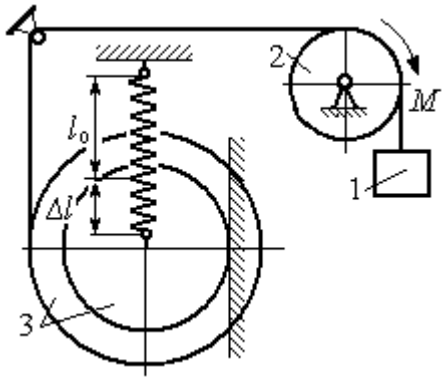


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

Какой величины уравновешивающий момент *M* приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

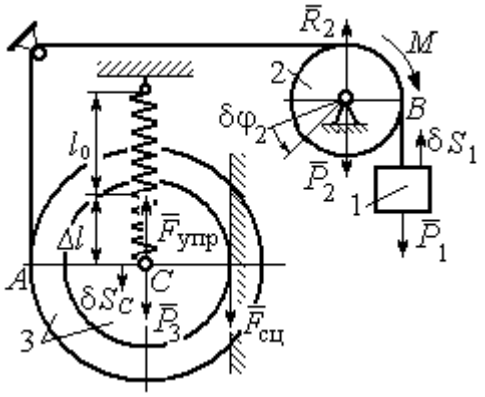


Рис. 6.16. Расчётная схема уравновешивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C, направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1. Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C. Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C. Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \dfrac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r} = \dfrac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r}\delta S_C = 3\delta S_C; \quad \delta\varphi_2 = \frac{R+r}{r^2}\delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3\delta S_C - c\Delta l\delta S_C + M\dfrac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравновешивающего момента $M = \dfrac{1}{3}mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F, приложенной к внешнему рычагу, и силой Q, сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

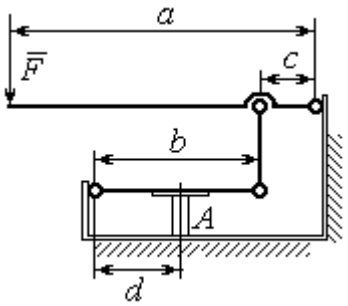


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными валы (рис. 6.18).

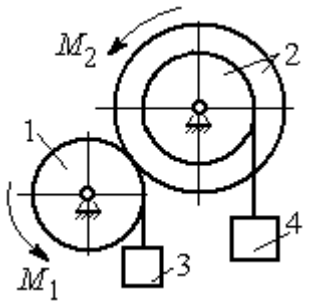


Рис. 6.18. Схема уравновешивания валов

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скреплённых на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравновешивающего момента M_2, приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P.

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M. Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с, если P_1 = 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_{2C} = 0,6 м.

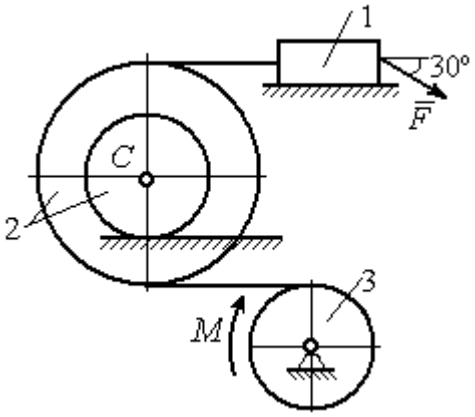


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{сц}$ и реакция шарнира O блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

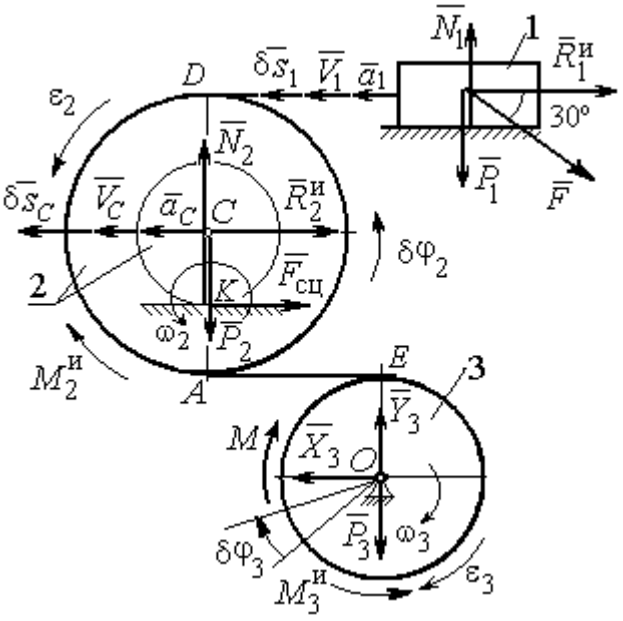


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении поворота, создаваемого моментом M. Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2, а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{и}$, $\vec{R}_2^{и}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{и}$, $\vec{M}_3^{и}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 (R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2} .$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_E}{R_3} = V_C \dfrac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2 (R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} .$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0;\ \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0;\ \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C,\ \ R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = -R_1^{\text{и}}\delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = -R_2^{\text{и}}\delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C -$$

$$-\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C = -52{,}75\, a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0{,}02 + 0{,}45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0{,}02 + 0{,}45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0{,}01t^2 + 0{,}075t^3.$$

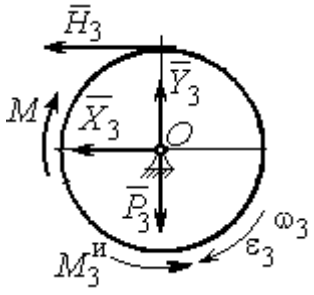


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21). Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения: $M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \dfrac{M}{R_3} - \dfrac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0{,}7$ Н·м и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1$ с, $M(1) = 9$ Н·м найдём реакцию нити $H_3(1) = 20{,}75$ Н.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0,\ Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -20{,}75$ Н, $Y_3 = 15$ Н. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25{,}6$ Н.

Задача 69. Груз 2 весом P_2, поднимаемый лебёдкой (рис. 6 22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3. Нерастяжимая нить одним концом прицеплена к грузу 1 весом P_1, лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок B, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

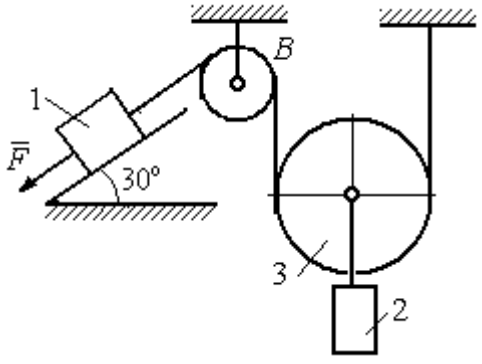


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока *B* и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1. Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

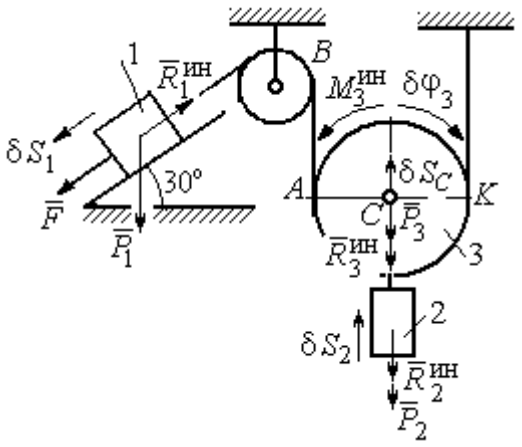


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1. В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C, а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \cos 60° - P_2 \delta S_2 - P_3 \delta S_C -$$

$$- R_1^{\text{ин}} \delta S_1 - R_2^{\text{ин}} \delta S_C - R_3^{\text{ин}} \delta S_C - M_3^{\text{ин}} \delta \varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \dfrac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta \varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_A}{AK} = \dfrac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta \varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \dfrac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \dfrac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\dfrac{1}{2} P \delta S_1 = \dfrac{17}{8g} P a_1 \delta S_1$. Отсюда $a_1 = \dfrac{4}{17} g = 0{,}23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \dfrac{a_1}{2} = 0{,}12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0{,}12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0{,}06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

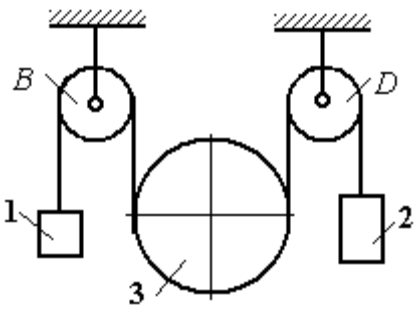


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D. Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо составлять для каждого из независимых перемещений.

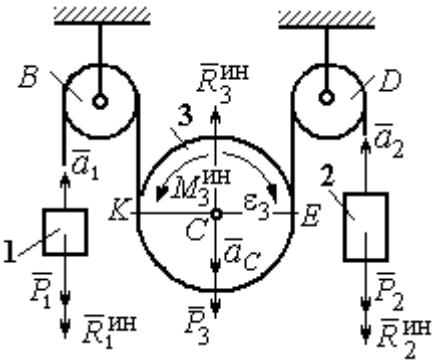


Рис.6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ε_3, направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$, $R_3^{ин} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{ин} = J_{3C}\varepsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \dfrac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс. Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}^{\,n}_{EK} + \vec{a}^{\,\tau}_{EK}$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K; $\vec{a}^{\,n}_{EK}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{EK}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$. Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a^{\tau}_{EK}$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

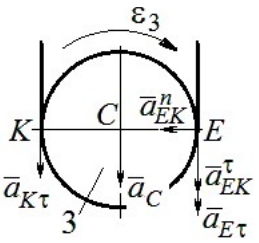


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a^{\tau}_{EK} = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \dfrac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a^{\tau}_{CK} = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D. Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2.

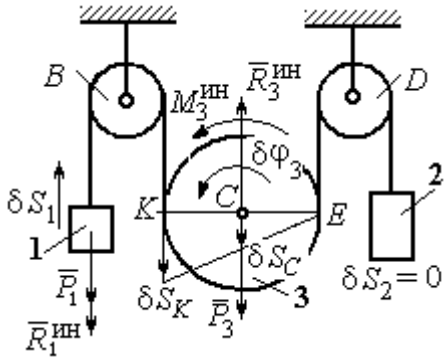


Рис.6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1, а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \dfrac{V_K}{2r} = \dfrac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \dfrac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \dfrac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) + \sum \delta A\left(\vec{R}_k^{\text{ин}}\right) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C}\varepsilon_3\delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3 a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

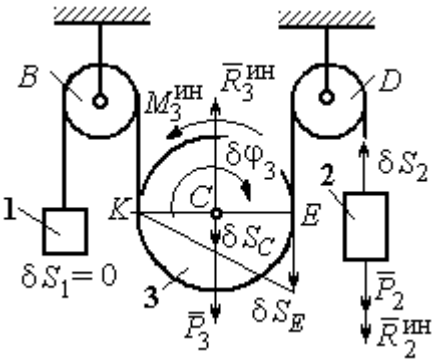


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{ин}$, $\vec{R}_3^{ин}$ и пара сил с моментом $M_3^{ин}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{ин}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{ин}\delta s_C - M_3^{ин}\delta\varphi_3 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{a_2-a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3 a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2, получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2. Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса *r* и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов *r* и *R* = 2*r*, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень, двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{\text{вр}} = mgr\sin\omega t$.

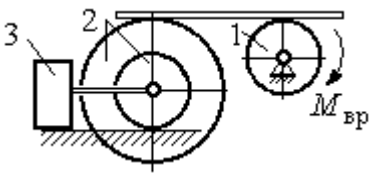


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1{,}5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t+1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны *P*, вес барабана 2 равен 2*P*, радиусы ступенек барабана *r* и 2*r*, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

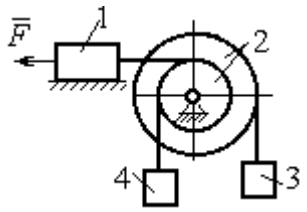


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами называется совокупность любых *s* независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые **вариациями обобщенных координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$.

Величина Q_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1,2,...,s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы m_5 = 50 кг.

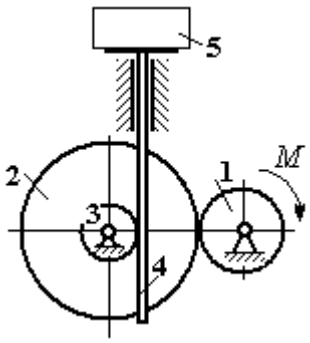


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс r_1 = 5 см, r_2 = 12 см, r_3 = 6 см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс m_1 = 0,8 кг, m_2 = 1,6 кг, m_3 = 0,6 кг, масса зубчатой рейки m_4 = 1 кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость V_5 = 1 м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату *x*, отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты *x* имеет вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1=\frac{J_1\omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1=\frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно: $T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}$, $T_3=\frac{J_3\omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2=\frac{m_2 r_2^2}{2}$, $J_3=\frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5=V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5: $T_4=\frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5=\frac{m_5 V_4^2}{2}$.

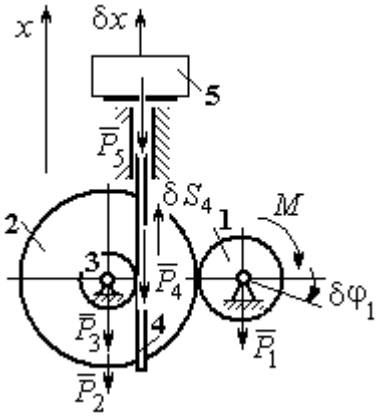


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$ следует $\omega_1 = \dfrac{\omega_2 r_2}{r_1} = \dfrac{V_4 r_2}{r_1 r_3}$.

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{4}\left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} =$$

$$= \left[\frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5\right]\frac{V_4^2}{2} = 28{,}05\, V_4^2 = 28{,}05\, \dot{x}^2 .$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4, а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta\varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1 r_3}\delta x$. В результате сумма работ сил на возможном перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\right)\delta x$. Отсюда обобщённая сила Q_x, соответствующая координате x: $Q_x = -(m_5 + m_4)g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3} = -500{,}31 + 40M$.

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56{,}1\,\ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение движения имеет вид: $56{,}1\,\ddot{x} = -500{,}31+40M$ или $\ddot{x} = -8{,}92+0{,}71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8{,}92+0{,}71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13{,}27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c. Радиусы ступеней блока r и $R = 1{,}5r$, радиус катка 3 равен r. Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M. Качение катка по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

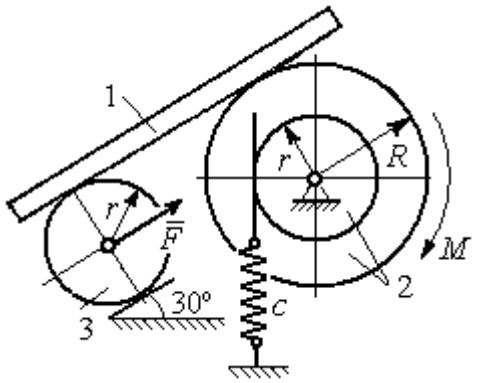


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x.

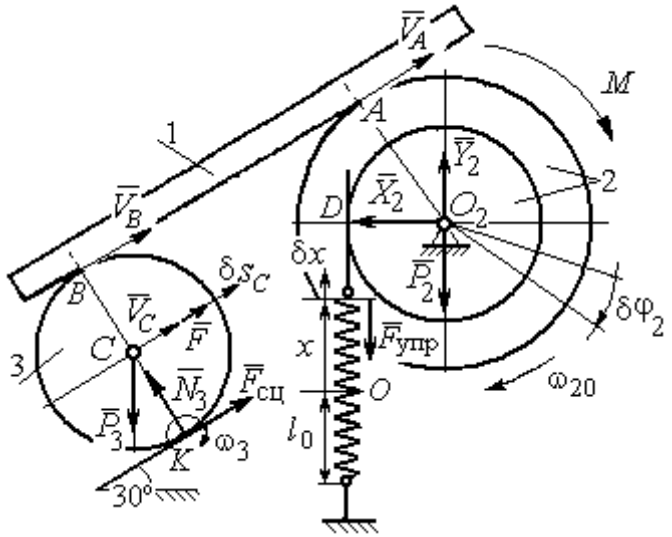


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C, ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2, ω_3, а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \dfrac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \dfrac{V_B}{2r} = \dfrac{V_A}{2r} = \dfrac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \dfrac{V_B}{2} = \dfrac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta s_C = \dfrac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\dfrac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 120^\circ = -P_3\dfrac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F: $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\dfrac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180° = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{2P}{g}\left(2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ и, подставляя их в общий вид уравнений Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10{,}2x = 4{,}34 \text{ (здесь } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10{,}2}$ = 3,19 рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0{,}42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3{,}19t + C_2 \cos 3{,}19t + 0{,}42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, то при $r = 0{,}2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3{,}19 C_1 \cos 3{,}19t - 3{,}19 C_2 \sin 3{,}19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}03 \sin 3{,}19t - 0{,}42 \cos 3{,}19t + 0{,}42$ м. Уравнение колебательного движения блока 2: $\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = 0{,}15 \sin 3{,}19t - 2{,}1 \cos 3{,}19t + 2{,}1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r. Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

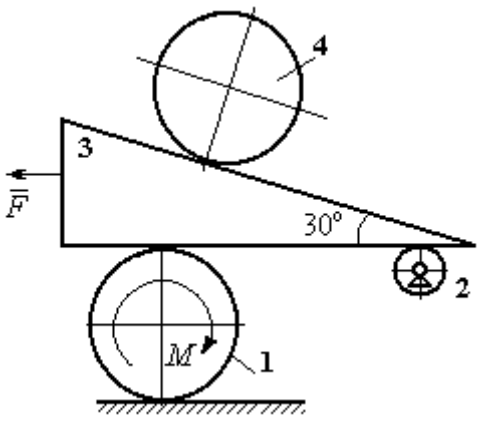


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30º. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

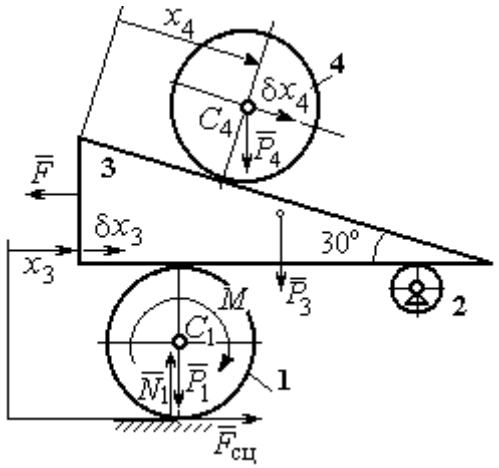


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$; J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}$.

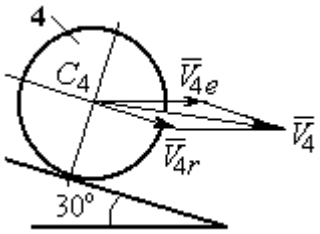


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

При расчёте кинетической энергии катка 4 по формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ .$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении $\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}$.

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

$$= \frac{P}{2g}\left(\frac{27}{8}\dot{x}_3^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_4^2 + \dot{x}_3\dot{x}_4\sqrt{3}\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M, приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r}\right)\delta x_3 .$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4\delta x_4\cos 60^\circ = \frac{1}{2}P\delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4: $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3;\ \ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6{,}75\ddot{x}_3 + 1{,}73\ddot{x}_4 = g; \quad 3\ddot{x}_4 + 1{,}73\ddot{x}_3 = g.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0{,}07g$, $\ddot{x}_4 = 0{,}29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0{,}035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0{,}145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины *c*. Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен *r*. Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса *R*. К блоку 3 приложена пара сил с моментом *M*. Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

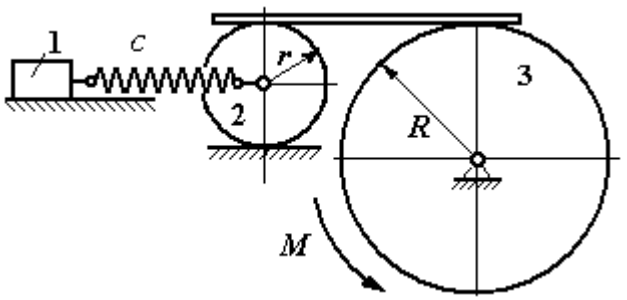


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0.

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно P_1 = 10 Н, P_2 = 20 Н, P_3 = 30 Н, M = 5 Н·м, R = 24 см, c = 207 Н/м, Δl_0 = 5 см.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

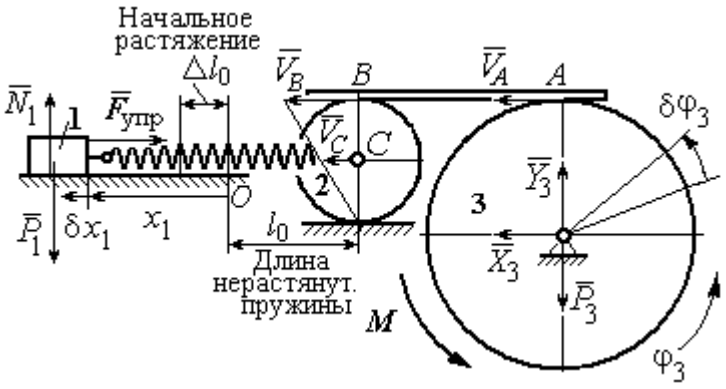


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2} V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_\varphi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и φ_3.

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4} m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3: $T_3 = \frac{1}{2} J_{3z} \omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Окончательно $T_3 = \frac{1}{4} m_3 \dot{\varphi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R)^2 + \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi}_3 R + \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{4} m_3\right) \dot{\varphi}_3^2 R^2.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta\varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1: $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x, соответствующая координате x_1: $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta\varphi_3$: $\delta\varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка *C* движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta\varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\dot{\varphi}_3;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2}m_1R\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\dot{\varphi}_3R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\ddot{\varphi}_3;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{1}{2}m_1R\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\ddot{\varphi}_3R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\varphi}_3$:

$$1{,}02\ddot{x}_1 + 0{,}12\ddot{\varphi}_3 = -207x_1;\ \ 0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительных колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4{,}35\,.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0{,}02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1\sin 15t + C_2\cos 15t - 0{,}02\,.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0{,}05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0{,}05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0{,}07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15\cos 15t - C_2 15\sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0{,}07\cos 15t - 0{,}02 \text{ м}.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим: $\ddot{\varphi}_3 = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\dfrac{d\omega_3}{dt} = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33{,}33t + 0{,}84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 3: $\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + C_3 t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0{,}056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + 0{,}056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0{,}06\cos 15t - 0{,}01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r, движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P / r$, прикреплённой одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

Найти закон движения груза 2 и максимальное растяжение пружины, если движение системы началось из состояния покоя при недеформированной пружине.

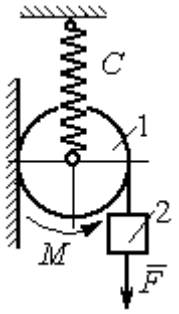


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

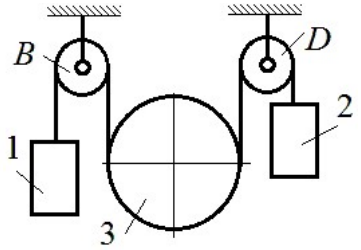


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передаёт движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P, который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

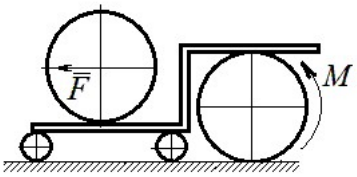


Рис. 6 42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

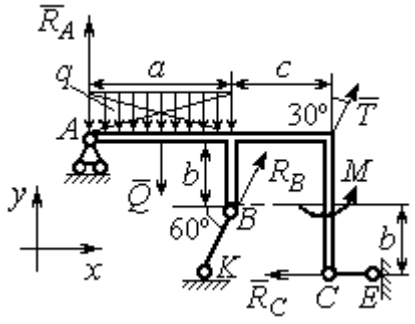


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$$T = 15 \text{ кН}, \quad Q = 15 \text{ кН}.$$

$$R_B\cos 60^\circ + T\cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B\cos 30^\circ + T\cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{a}{2} + R_B\cos 30^\circ\cdot a + R_B\cos 60^\circ\cdot b + T\cos 30^\circ\cdot(a+c) +$$

$$+ M - R_C\cdot 2b = 0.$$

$$R_B = -3{,}8 \text{ кН}, \quad R_C = 5{,}6 \text{ кН}, \quad R_A = 5{,}3 \text{ кН}.$$

1.2

$Q = 9$ кН. $T = 2$ кН.

$$X_A + T\cos 30^\circ + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60^\circ + R_B - T\cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{c}{2} + R_B(b + c\cos 60^\circ) - Fc\cos 60^\circ + M -$$

$$-T\cos 60^\circ(b + c\cos 60^\circ) - T\cos 30^\circ(a + c\sin 60^\circ) = 0.$$

$R_B = 10{,}02$ кН, $X_A = -9{,}53$ кН, $Y_A = -0{,}52$ кН.

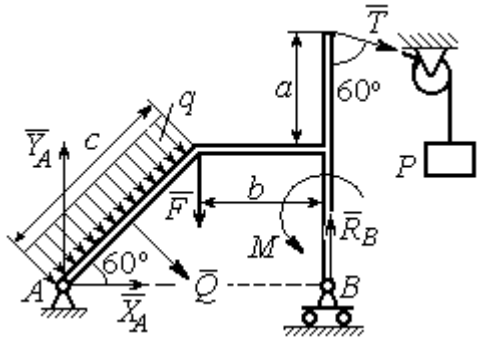


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

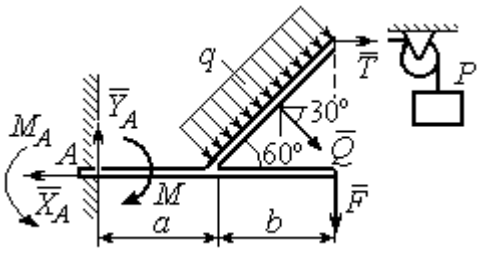


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$Q = 8$ кН. $T = 3$ кН.

$$-X_A + T + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60° - F = 0;$$

$$-T2b\cos 30° - F(a+b) + M_A - M -$$

$$-Q\cos 60°\left(a + \frac{b}{2}\right) - Q\cos 30^\circ\left(b\cos 30^\circ\right) = 0.$$

$M_A = 18{,}61$ кН·м, $X_A = 9{,}93$ кН, $Y_A = 6$ кН.

1.4

$Q = 6{,}93$ кН, $T = 2$ кН.

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - Fa\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

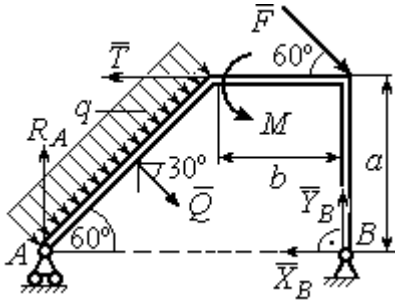


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

$R_A = 0{,}72$ кН, $X_B = -5{,}5$ кН, $Y_B = 5{,}34$ кН.

1.5

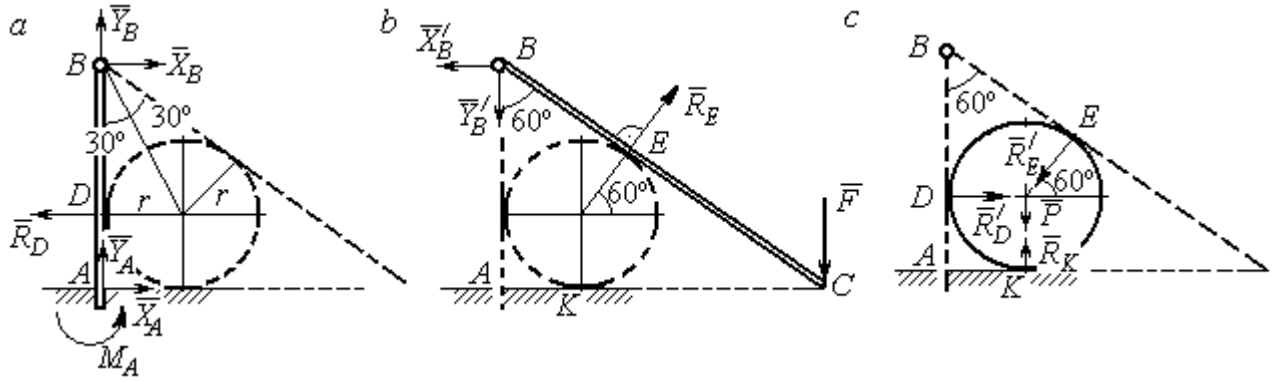


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$, $R_D = R'_D$, $R_E = R'_E$.

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg}30^\circ = 2{,}73$ м.

$$X_A - R_D + X_B = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка *BC*. $BE = BD = 1{,}73$ м. $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4{,}73$ м.

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, \quad RE\sin 60\circ - Y'B - F = 0, \quad R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, \quad R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$R_E = 21{,}87$ кН, $Y_B = 10{,}94$ кН, $X_B = 10{,}94$ кН, $R_D = 10{,}94$ кН;

$R_K = 20{,}94$ кН, $X_A = 0$, $Y_A = -10{,}94$ кН, $M_A = 18{,}93$ кН·м.

1.6

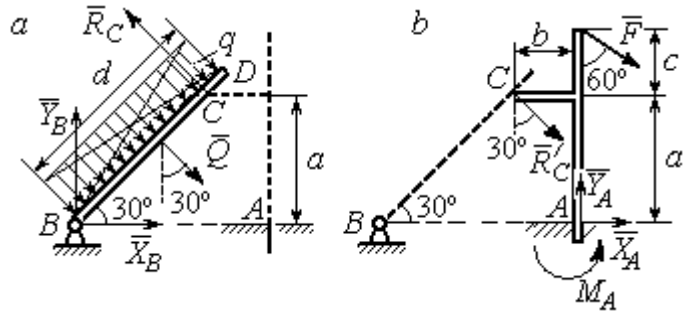


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
a – равновесие балки *BD*; *b* – равновесие балки *AC*

Балка *BD*. $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q\cos 60^\circ - R_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q\cos 30^\circ + R_C\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q\frac{d}{2} + R_C\, 2a = 0.$$

Балка *AC*. $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0,\ Y_A - R'_C\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C\cos 60^\circ \cdot a + R'_C\cos 30^\circ \cdot b - F\cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0{,}61 \text{ кН},\ \ Y_B = 8{,}3 \text{ кН},\ R_C = 9{,}37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8{,}15 \text{ кН},\ \ Y_A = 10{,}11 \text{ кН},\ \ M_A = 11{,}65 \text{ кН·м}.$$

1.7

Балка *AB*. $Q_1 = 6$ кН.

$T = P = 3$ кН.

$$X_A + R_B - T\cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_1\frac{a}{2} +$$

$$+ T\cos 30^\circ a + T\cos 60^\circ c\cos 30^\circ -$$

$$- F\left[c + (b + c)\cos 30^\circ\right] = 0.$$

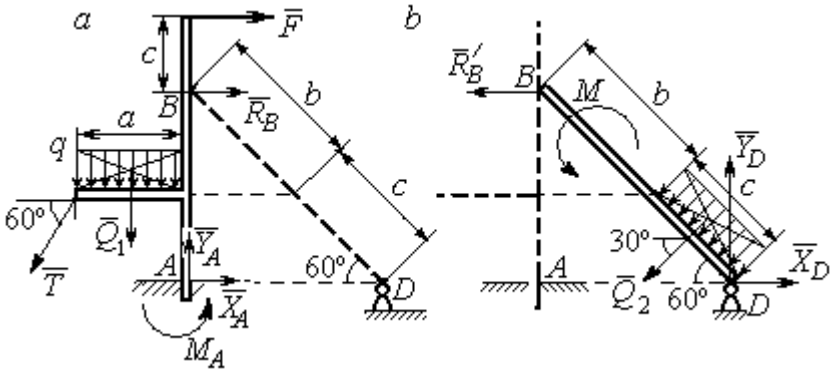


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BD*

Балка *DB*. $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2\cos 30^\circ = 0,\ \ Y_D - Q_2\cos 60^\circ = 0,\ M + R'_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_2\frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1{,}49 \text{ кН},\ Y_A = 8{,}6 \text{ кН},\ M_A = 8{,}86 \text{ кН},\ R_B = -1{,}01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1{,}59 \text{ кН},\ \ Y_D = 1{,}5 \text{ кН}.$$

1.8

Шар.

$$R_B\cos60^\circ - R_D\cos60^\circ = 0;$$

$$R_B\cos30^\circ + R_D\cos30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B\cos60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B\cos30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC\cos30^\circ = 0.$$

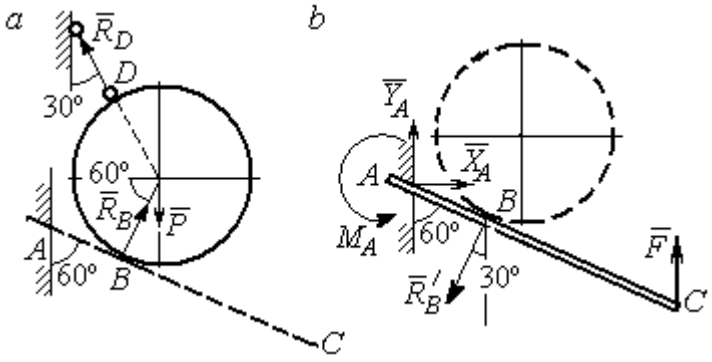


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
a – равновесие шара; *b* – равновесие балки *AC*

$X_A = 2{,}89$ кН, $Y_A = 0$ кН, $M_A = -11{,}55$ кН·м, $R_B = 5{,}77$ кН, $R_D = 5{,}77$ кН.

1.9

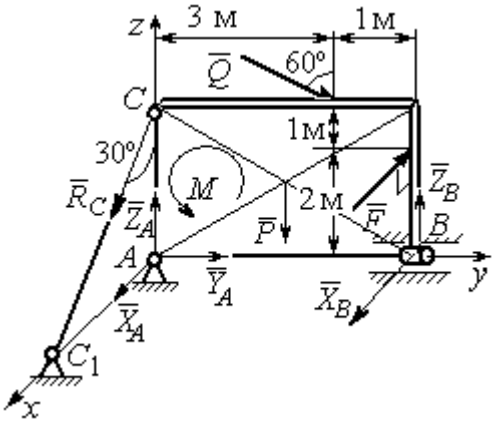


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C\cos60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C\cos30^\circ - Q\cos60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q\cos60^\circ \cdot 3 - Q\cos30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C\cos60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0,\ -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}34$ кН, $Y_A = 2{,}6$ кН;

$Z_A = 8{,}92$ кН, $R_C = 10{,}67$ кН;

$X_B = 8$ кН, $Z_B = 3{,}82$ кН.

1.10

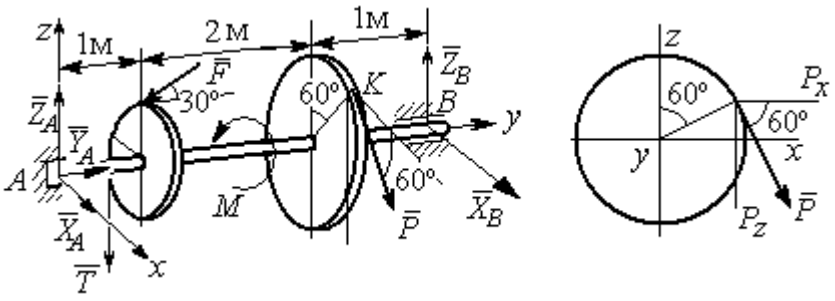


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$T = Q = 3$ кН.

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0,\ \ Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T\cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0,\ \ -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}6$ кН, $Y_A = 3{,}46$ кН, $Z_A = 5{,}48$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 2{,}4$ кН, $Z_B = 5{,}06$ кН.

1.11

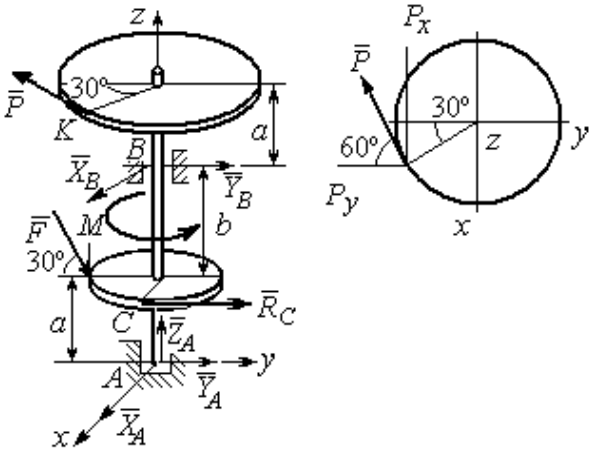


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$R_C = Q = 3$ кН.

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a - -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$X_A = -1{,}85$ кН, $Y_A = -5{,}64$ кН, $Z_A = 2$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 7{,}39$ кН, $Y_B = 2{,}38$кН.

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + T + X_D = 0;\ Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Fa\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$Ta\sin 30^\circ - Pa\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + Pa\cos 60^\circ + Fa\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0{,}8 \text{ кН},\quad Y_A = 2{,}56 \text{ кН},\ \ Z_A = 1{,}3 \text{ кН};$$

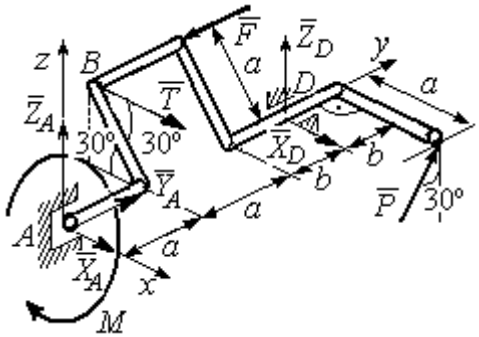


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2{,}89 \text{ кН},\ X_D = 0{,}76 \text{ кН},\ Z_D = -3{,}80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P:

$$T_{\min} + F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0$$

Максимальный вес груза P:

$$T_{\max} - F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

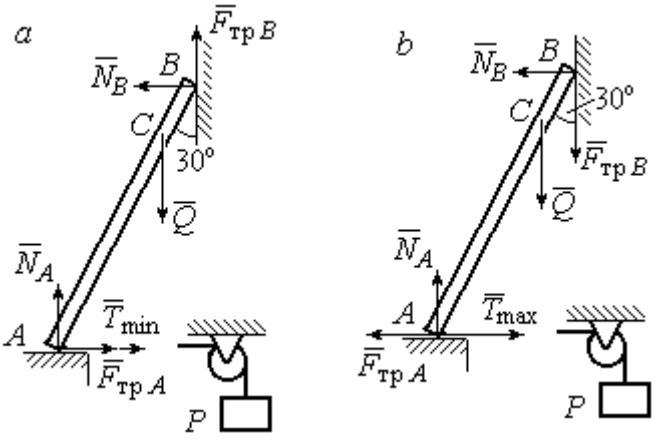


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
a – расчёт минимального веса груза;
b – расчёт максимального веса груза

$$-F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,A} = f N_A,\ F_{\text{тр}\,B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31.77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130{,}51 \text{ Н}.$$

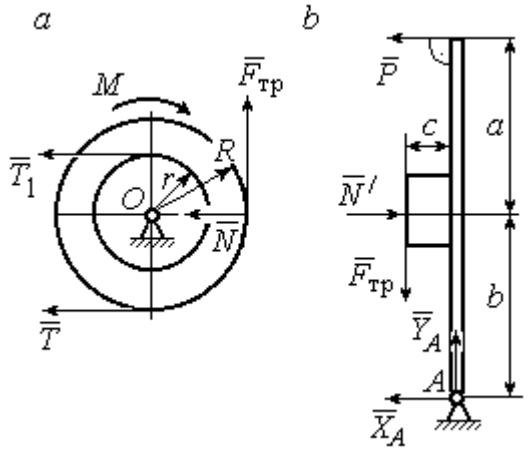


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:
a – равновесие шкива; *b* – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266{,}67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666{,}67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a+b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346{,}67 \text{ Н},\ Y_A = 266{,}67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2},\ \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с}.$$

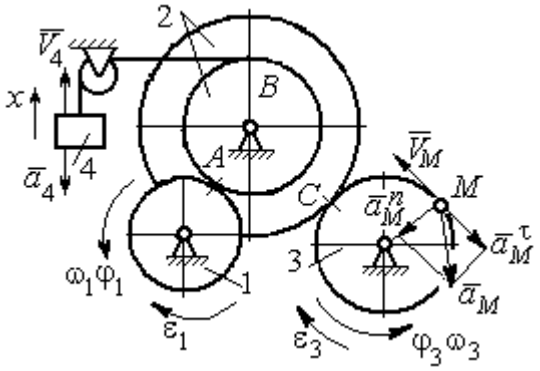


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z}\frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)\frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с}.$$

$$V_M(1) = \omega_3(1)R_3 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\frac{\pi t}{2},\quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6{,}58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau,\ a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160 \text{ см/с}^2,\ a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z}R_1 = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)8;\ V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с}.$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2\sin\frac{\pi t}{2},\ \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2;\ a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39{,}48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2{,}05 \text{ м/с},\ V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6{,}83 \text{ рад/с};\ \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3}\left(\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}\right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3{,}65 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

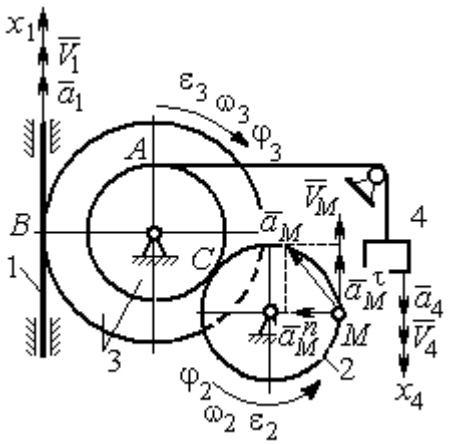


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \omega_2=\omega_3\frac{r_3}{R_2}=10{,}25\ \text{рад/с};\ V_M=\omega_2 R_2=2{,}05\ \text{м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3\frac{r_3}{R_2}=5{,}47\ \text{рад/с}^2.$$

$$a_M^n=\omega_2^2 R_2=20{,}4\ \text{м/с}^2;\ \ a_M^\tau=\varepsilon_2 R_2=1{,}09\ \text{м/с}^2.$$

$$a_M=\sqrt{\left(a_M^n\right)^2+\left(a_M^\tau\right)^2}=20{,}43\ \text{м/с}^2.$$

$$V_1=\omega_3 R_3=2{,}73\ \text{м/с};\ a_1=\dot V_1=\dot\omega_3 R_3=\varepsilon_3 R_3=2{,}19\ \text{м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2=BC\cos30^\circ=4{,}33\ \text{см};\ CP_2=2{,}5\ \text{см}.$$

$$\omega_{BC}=\frac{V_B}{BP_2}=1{,}15\ \text{рад/с};\ \ V_C=\omega_{BC}CP_2=2{,}87\ \text{см/с};$$

$$\omega_1=\frac{V_C}{CP_1}=0{,}72\ \text{рад/с};\ EP_1=2R_1\cos30^\circ=3{,}46\ \text{см};$$

$$V_E=\omega_1 EP_1=2{,}49\ \text{см/с};\ EP_3=2AE\cos30^\circ=10{,}39\ \text{см};$$

$$\omega_{AE}=\frac{V_E}{EP_3}=0{,}24\ \text{рад/с};\ EA=AP_3;$$

$$V_A=\omega_{AE}AP_3=1{,}44\ \text{см/с},\ \ \omega_{AO}=\frac{V_A}{AO}=0{,}24\ \text{рад/с}.$$

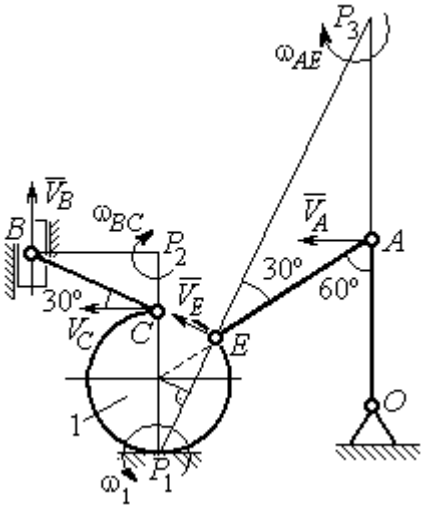


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

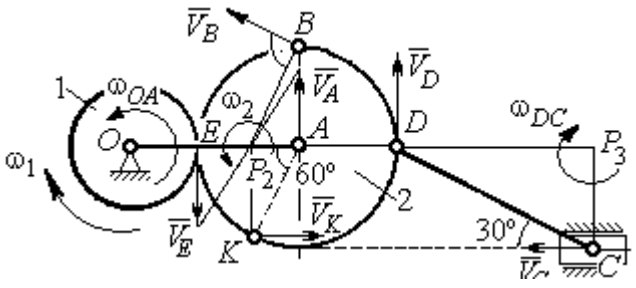


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E=\omega_1 r_1=18\ \text{см/с}.$$

$$V_A=\omega_{OA}\left(r_1+r_2\right)=18\ \text{см/с}.$$

$$EP_2=P_2A=3\ \text{см},\ \omega_2=\frac{V_E}{EP_2}=6\ \text{рад/с}.$$

$$V_K=\omega_2 P_2K=31{,}18\ \text{см/с}.$$

$$V_B=\omega_2 P_2B=40{,}25\ \text{см/с};\ V_D=\omega_2 P_2D=54\ \text{см/с}.$$

$DC = 2r_2$, $\omega_{DC} = \dfrac{V_D}{DP_3} = 5{,}197$ рад/с; $V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ$, $V_C = 31{,}18$ см/с.

2.5

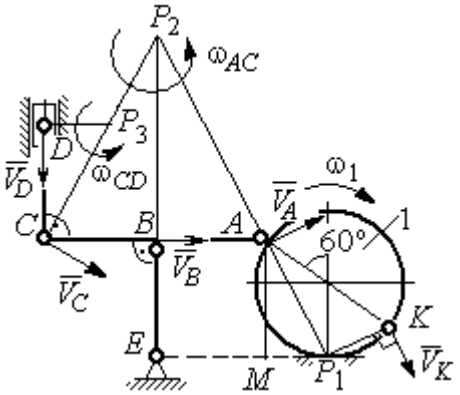


Рис. 7. 19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$BE = 1{,}5R_1$; $R_1 = 2{,}67$ см.

$KP_1 = R_1$; $\omega_1 = \dfrac{V_K}{KP_1} = 0{,}75$ рад/с.

$AP_1 = \dfrac{AM}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см; $V_A = \omega_1 P_1 A = 3{,}46$ см/с.

$AP_2 = 2AB = 8$ см; $\omega_{AC} = \dfrac{V_A}{AP_2} = 0{,}43$ рад/с.

$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ$; $V_B = 2{,}99$ см/с.

$\omega_{BE} = \dfrac{V_B}{BE} = 0{,}75$ рад/с; $V_C = V_A = 3{,}46$ см/с; $CP_3 = \dfrac{DC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см;

$\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}75$ рад/с; $V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ$; $V_D = 1{,}73$ см/с.

2.6

$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12$ см/с; $\omega_{AD} = 0$, $V_D = V_A$.

$\omega_{O_1C} = \dfrac{V_D}{DO_1} = 3$ рад/с;

$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48$ см/с.

$CB = CP = 16$ см; $\omega_{CB} = \omega_{CL} = \dfrac{V_C}{CP} = 3$ рад/с.

$PL = \dfrac{CP}{\cos 30^\circ} = 18{,}48$ см; $PB = 2BC \cos 30^\circ$.

$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55{,}44$ см/с;

$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83{,}13$ см/с.

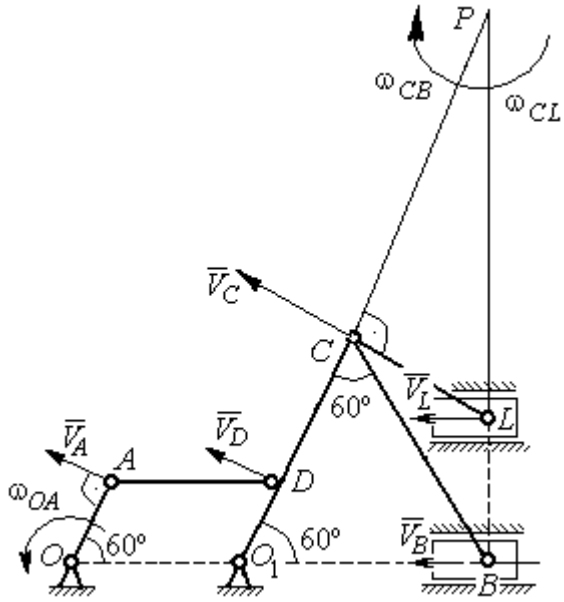


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$V_D = \omega_1 R_1 = 30$ см/с; $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15$ см/с.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21{,}21 \text{ см/с.}$$

$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ$; $V_C = 15$ см/с.

$CP_3 = CB$; $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 1{,}87$ рад/с.

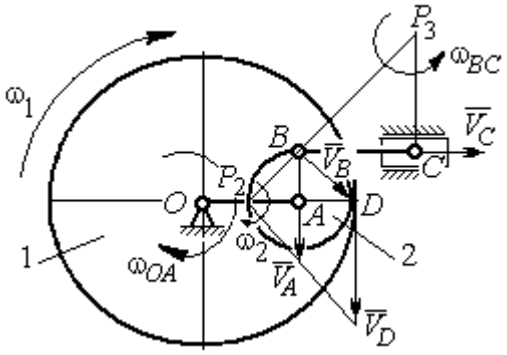


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

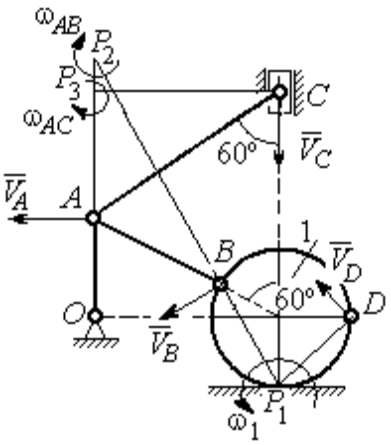


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$AC = AB + R_1 = 12$ см; $CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10{,}39$ см.

$\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}48$ рад/с; $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2{,}89$ см/с.

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ см.}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5{,}02 \text{ см/с.}$$

$OA = (AB + R_1)\sin 30° = 6$ см; $\omega_{OA} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}48$ рад/с.

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3{,}46 \text{ см;} \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1{,}45 \text{ рад/с.}$$

$$DP_1 = R_1\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ см;} \; V_D = \omega_1 DP_1 = 4{,}09 \text{ см/с.}$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ см/с;} \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 27{,}71 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0{,}43 \text{ рад/с;} \; V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; \; V_B = 10{,}38 \text{ см/с.}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}, \; a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO},\ a_O = 0.$$

$$\bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO} + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a^τ_{BC}

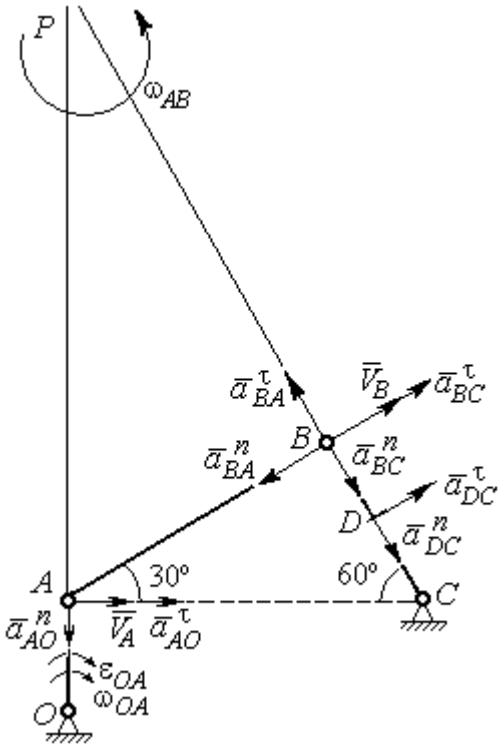


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

$$a^n_{AO} = \omega^2_{AO} \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a^\tau_{AO} = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \text{tg}60^\circ = 13{,}86 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2{,}56 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_{BC} \cdot BC = 13{,}31 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{BC} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a^\tau_{BC} = -a^n_{AO}\cos 60^\circ +$$

$$+ a^\tau_{AO}\cos 30^\circ - a^n_{BA} = 13{,}63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\left|a^\tau_{BC}\right|}{BC} = 1{,}7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}.$$

$$a^n_{DC} = \omega^2_{BC} \cdot DC = 6{,}65 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{DC} = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{\left(a^n_{DC}\right)^2 + \left(a^\tau_{DC}\right)^2} = 9{,}51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с};\ P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2{,}4 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ;\ V_B = 6{,}93 \text{ см/с}.$$

$$P_3 B = BC\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ см};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0{,}8 \text{ рад/с}.$$

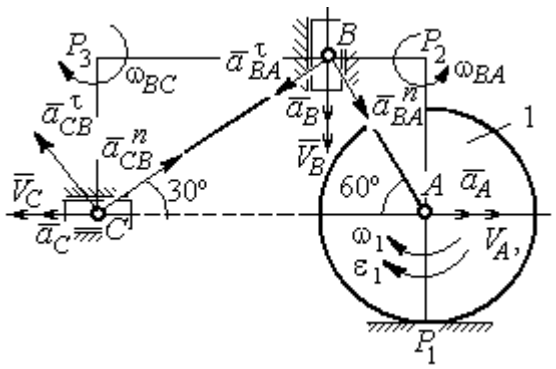


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a_B.

Проекция на BA: $a_B\cos30° = a_A\cos60° + a^n_{BA}$.

$$a_A = a^\tau_A = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ см/с}^2;\ AB = BC\operatorname{tg}30° = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{BA}\cdot BA = 33{,}23 \text{ см/с}^2;\ \ a_B = 43{,}03 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar a_C = \bar a_B + \bar a^n_{CB} + \bar a^\tau_{CB}.$$

Проекция на BC: $a_C\cos60° = a_B\cos60° - a^n_{CB}$,

$$a^n_{CB} = \omega^2_{CB}\cdot CB = 6{,}4 \text{ см/с}^2;\ \ a_C = a_B - 2a^n_{CB} = 30{,}23 \text{ см/с}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 11{,}55 \text{ см}.$$

Так как $CM_1\cos30° = 10$ см $= R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

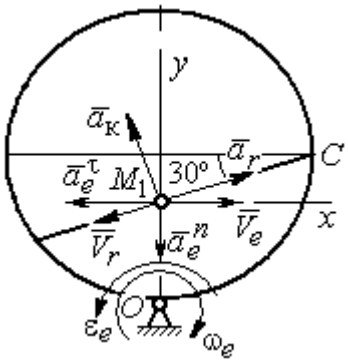


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$V_r = \dot S_r = \frac{40\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ V_r(1) = 6{,}98 \text{ см/с}.$$

$$\omega_e(1) = 0{,}5 \text{ рад/с};\ OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4{,}23 \text{ см}.$$

$$V_e = \omega_e OM_1;\ \ V_e(1) = 2{,}12 \text{ см/с}.$$

$$\bar V_M = \bar V_e + \bar V_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r\cos30° = -3{,}93 \text{ м/с};\ V_{My} = -V_r\cos60° = -3{,}49 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5{,}26 \text{ см/с}.$$

$$\bar a_M = \bar a_e + \bar a_r + \bar a_к.$$

$$\bar a_e = \bar a^n_e + \bar a^\tau_e,\ \ a^n_e = \omega^2_e OM_1;\ \ a^n_e(1) = 1{,}06 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot\omega_e = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3},\ \ \dot\omega_e(1) = -0{,}91 \text{ рад/с}^2;\ \ \varepsilon_e = |\dot\omega_e(1)| = 0{,}91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a^\tau_e(1) = \varepsilon_e\cdot OM_1 = 3{,}85 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27}\sin\frac{\pi t}{3},\ \dot{V}_r(1) = -12{,}66;\ a_r = \left|\dot{V}_r(1)\right| = 12{,}66 \text{ см/с}^2$$

$$a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 6{,}98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r\cos 30° - a_к\cos 60° = 3{,}62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r\cos 60° + a_к\cos 30° = 11{,}31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11{,}87 \text{ см/с}^2.$$

3.2

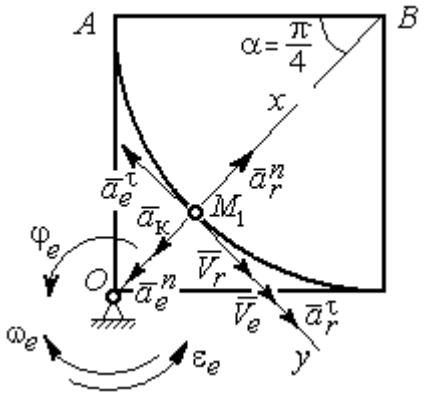


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1:

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4};\ \ OM_1 = 8{,}28 \text{ см}.$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t;\ \ V_r = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 31{,}42 \text{ см/с}.$$

$$\dot{\varphi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\varphi}_e(1) = -3 \text{ рад/с},\ \ \omega_e = \left|\dot{\varphi}_e(1)\right| = 3 \text{ рад/с}.$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24{,}6 \text{ см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot\ V_{Mx} = V_e + V_r = 56{,}02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0;\ V_M = 56{,}02 \text{ см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau\ \cdot\ a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74{,}52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|;\ \ a_e^\tau(1) = \varepsilon_e OM_1 = 16{,}56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi;\ a_r^\tau = \left|\dot{V}_r\right| = 10\pi = 31{,}42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49{,}36 \text{ см/с}^2;\ \ a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 62{,}84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_к = -88 \text{ см/с}^2;\ a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14{,}86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89{,}24 \text{ см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60° - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30° = 0.$$

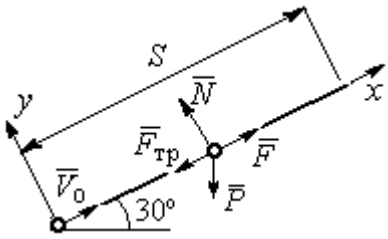


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30°;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3{,}4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3{,}4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1{,}7t^2 + V_0 t.$$

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6{,}8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3{,}4 + V_0.$$

$$k = 8{,}4; \; V_0 = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

4.2

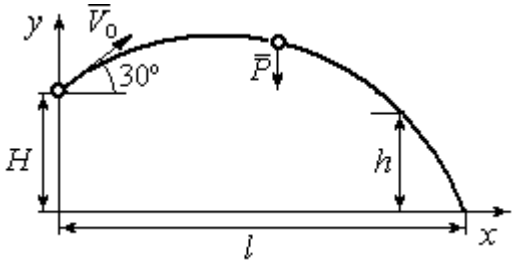


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \; \dot{x} = V_0\cos 30°; \; x = V_0 t\cos 30°.$$

$$m\ddot{y} = -P; \dot{y} = -gt + V_0\cos 60°;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\cos 60° + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h:

$$t = 1 \text{ с}; \; y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3{,}81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \; x = l; \; y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0 t_{\text{пад}}\cos 30°; \; 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0 t_{\text{пад}}\cos 60° + H.$$

Находим: $t_{\text{пад}} = 1{,}64$ с; $l = 5{,}41$ м.

4.3

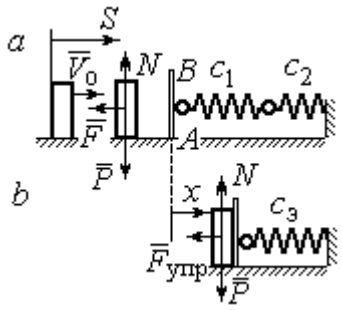


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3: *a* – движение груза до начала колебаний; *b* – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, *a*):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0;\ S = 0;\ \dot{S} = V_0$.

Решение: $S = \dfrac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 6\left(1 - e^{-t}\right)$ м.

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0{,}21$ м/с.

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, *b*):

$$m\ddot{x} = -F_{упр} = -c_э x;\ c_э = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м}.$$

Начальные условия движения: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 7{,}75$ рад/с,

где константы: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_1}{\omega} = 0{,}28$ м. Закон движения груза $x = 0{,}28\sin 7{,}75t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_э = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э(\lambda_{ст} + x) = -c_э x.$$

Общее решение:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 10{,}33 \text{ рад/с}.$$

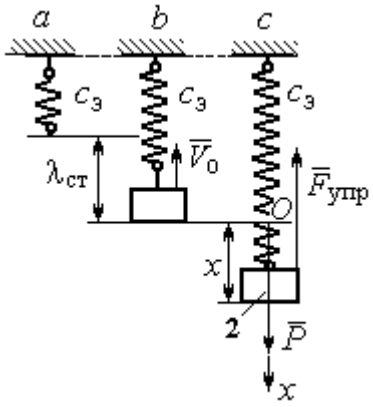


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4: *a* – нерастянутая пружина; *b* – положение статического равновесия; *c* – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_0}{\omega} = 0{,}39$ м.

Закон движения груза: $x = 0{,}39\sin 10{,}33t$.

Амплитуда $A = 0{,}39$ м, частота $\omega = 10{,}33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right]$.

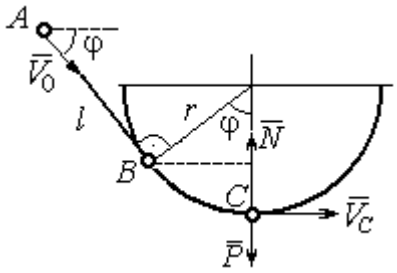


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

Уравнение движения человека, двигающегося вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\dfrac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \le 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \le 2gr$, или

$V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right] \le 2gr$. Откуда $r \ge \dfrac{V_0^2 + 2gl\sin\varphi}{2g\cos\varphi}$.

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg\left[R + R\cos 60° - a\cos 30°\right].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

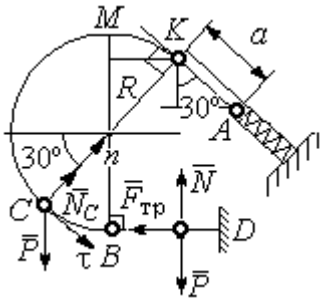


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: s = 5,39 м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60°.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство $N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60° = \frac{1}{R}\left[mV_B^2 - 2mgR(1-\cos 60°)\right] + mg\cos 60°$, где кинетическая энергия шарика в точке B: $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR\left[(1+\cos 60°) - \frac{a}{R}\cos 30°\right]$. Получим: $N_C = 18{,}71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

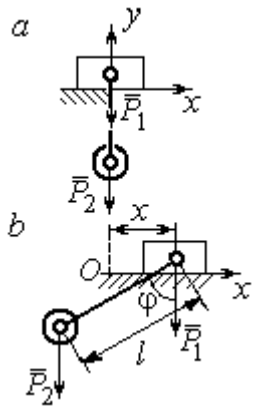


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:
a – начальное положение системы;
b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, x_0 = 0 (см. рис.7.33); x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения груза 2: $x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi$.

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси z: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

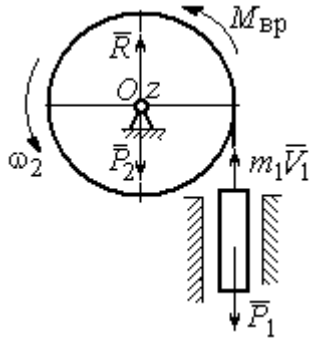


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2}\omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z: $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 g r$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 g r.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \dfrac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

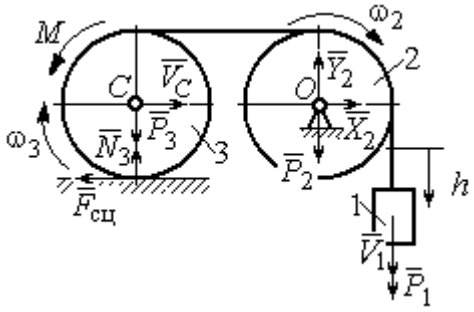


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \dfrac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока: $J_O = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3: $T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_C^2 + \dfrac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходя-

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа вешних сил на перемещении h: $\sum A(F_k) = P_1 h - M\frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h.$$

Скорость груза на высоте h: $V_1 = 4\sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

5.4

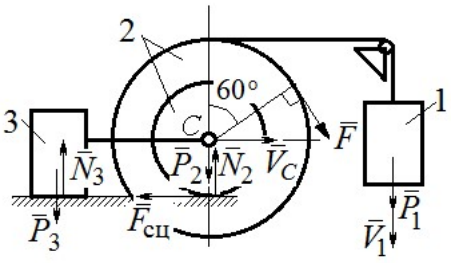


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1. Скорость центра масс катка V_C.

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$, $J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{9P}{2g}V_C^2$.

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы): $T = T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{17P}{2g}V_C^2$. Производная $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{17P}{g}V_C\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{17}{g}V_C a_C$.

Мощности сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{сц}}$, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле: $N(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F})\cdot\vec{\omega}_2 = FV_C\cos 60° + FR\omega_2$. Мощность силы $\vec{P}_1$ $N(\vec{P}_1) = P_1V_1$. Суммарная мощность внешних сил: $\sum N(F^e) = 7PV_C$.

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\dfrac{17P}{g}V_C a_C = 7PV_C$, откуда $a_C = \dfrac{7}{17}g$ м/с^2.

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

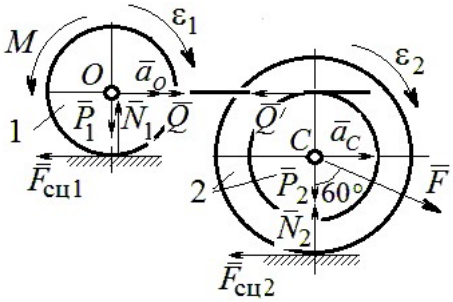


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц1}},\ J_{1O}\varepsilon_1 = F_{\text{сц1}}r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц2}} + F\cos 30°;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = F_{\text{сц2}}3r - Q'r.$$

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц1}}$, $\vec{F}_{\text{сц2}}$ – силы сцепления катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$, $J_{2C} = m_2 i_2^2$. Подставляя кинематические соотношения $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{3r}$; $a_O = \dfrac{4}{3}a_C$; $\varepsilon_1 = \dfrac{4a_C}{3r}$, с учётом данных задачи, получим систему уравнений:

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц}1};\ \ \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц}1} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц}2} + P\sqrt{3};\ \ \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц}2} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \dfrac{3\left(3\sqrt{3}-16\right)g}{46} \approx -\ 0{,}7g$. Каток движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2{,}6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. Допустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

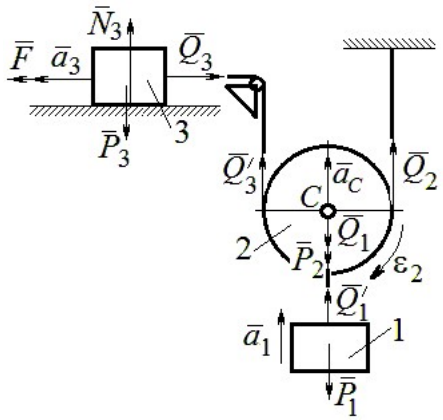


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

Уравнения движения тел:

$$m_3a_3 = F - Q_3,\ m_2a_C = Q_3' + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = Q_3'r - Q_2r,\ m_1a_1 = Q_1' - P_1.$$

С учётом, что $\left|\vec{Q}_3\right| = \left|\vec{Q}_3'\right|$, $\left|\vec{Q}_1\right| = \left|\vec{Q}_1'\right|$ и $a_C = a_1$, $a_3 = 2a_1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$, $J_{2C} = \dfrac{m_2r^2}{2}$, подставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2{,}5mg - Q_3;\ \ ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2;\ m_1a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \dfrac{2}{17}g \approx 0{,}12g$; $Q_3 = 2{,}26mg$; $Q_2 = 2{,}15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями. Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1a_1 = P_1\cos 30° - Q_1;\ \ m_3a_3 = Q_3;$$

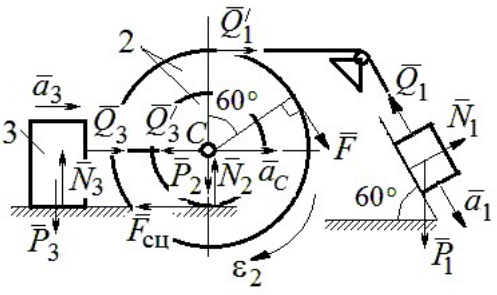


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q_1' - Q_3' - F_{\text{сц}} + F\cos 60^\circ;\ J_{2C}\varepsilon_2 = Q_1' R + FR + F_{\text{сц}} r,\ J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R+r}$, $a_C = \dfrac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q_1' = Q_1$ и $Q_3' = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1;\ \frac{2}{3}ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2}mg;\ 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \dfrac{3}{46}\left(5+3\sqrt{3}\right)g \approx 0{,}44g;\ Q_1 = 0{,}21mg;\ Q_3 = 0{,}44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$ Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, *a*). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

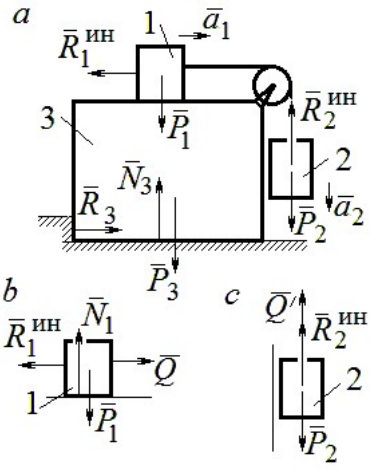


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0,\ N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, *b*, *c*). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил - для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – на вертикальную:

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0;\ P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0{,}5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2{,}5mg$.

6.2

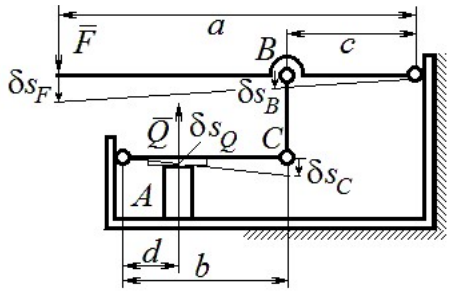


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A\left(\vec{F}\right) + \delta A\left(\vec{Q}\right) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\dfrac{\delta s_F}{\delta s_B} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \dfrac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \dfrac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \dfrac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2. Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A\left(\vec{P}_3\right) + \delta A\left(\vec{P}_4\right) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

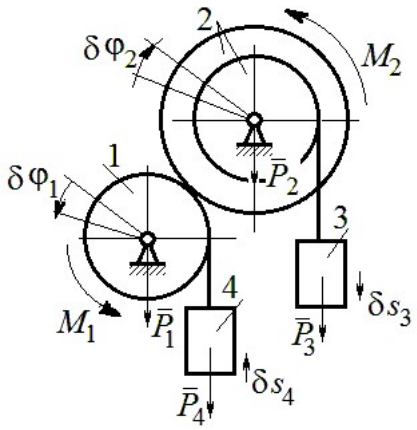


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4 + M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta\varphi_2 r$, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$, $\delta s_4 = 3r\delta\varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{\text{вр}}$ (рис. 7.43).

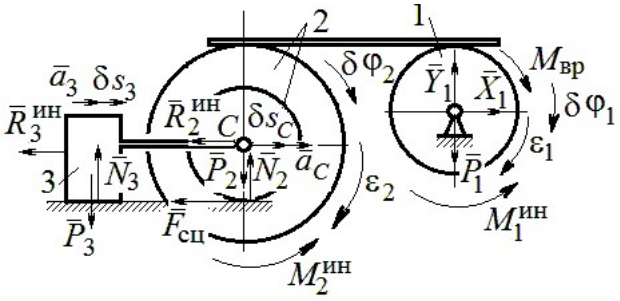


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta\varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta\varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3,\ a_C = a_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r},\ \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r},\ \delta\varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r},\ \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = ma_3$;

$$R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2ma_3;\ M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4{,}5mra_3;\ M_1^{\text{ин}} = \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = 1{,}5mra_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{\text{вр}}\delta\varphi_1 = (mg\sin\omega t)3\delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_2^{\text{ин}}\delta s_C - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - M_1^{\text{ин}}\delta\varphi_1 =$$

$$= -ma_3\delta s_3 - 2ma_3\delta s_3 - 4{,}5ma_3\delta s_3 - 1{,}5ma_3 3\delta s_3 = -12ma_3\delta s_3.$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g\sin\omega t - 12a_3)\delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0{,}25g\sin\omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0{,}25g\sin\omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \dfrac{0{,}25g}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

6.5

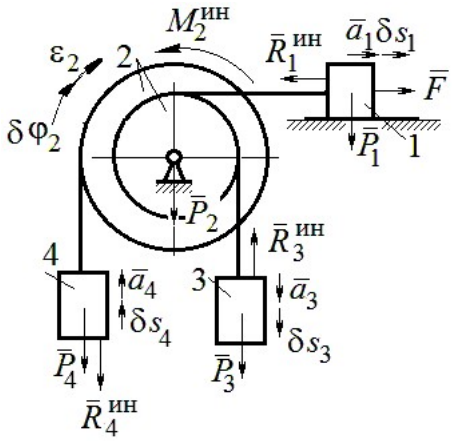


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F\delta s_1 + P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4$ и сил инерции $\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_4^{\text{ин}}\delta s_4 - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2$, где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \dfrac{P_3}{g}a_3$, $R_4^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_4$, $M_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2$.

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = P(t+1)\delta s_1 + P\delta s_1 - 2P\delta s_1 -$$

$$-\left(\frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{2P}{g}2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g}2r^2\frac{a_1}{r}\frac{\delta s_1}{r}\right) = P\left(t - \frac{14a_1}{g}\right)\delta s_1 = 0.$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \dfrac{1}{14}gt$, или $\ddot{x}_3 = \dfrac{1}{14}gt$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \dfrac{1}{84}gt^3 \approx 0{,}012gt^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0. Обобщённая скорость $\dot{x}$.

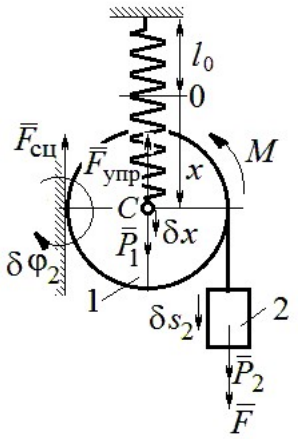


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Кинетическая энергия катка: $T_1=\frac{1}{2}m_1V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2$, где ω_1, V_C – угловая скорость катка и скорость его центра масс, $V_C=\dot{x}$, $\omega_1=\frac{V_C}{r}=\frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC}=\frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2=\frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2=2V_C=2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T=T_1+T_2=\frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x, дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum\delta A(F_{\text{к}})=P_1\delta x-F_{\text{упр}}\delta x+(P_2+F)\delta s_2-M\delta\varphi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2=2\delta x$, $\delta\varphi_1=\frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}}=cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum\delta A(F_{\text{к}})=(3P-cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x=3P-cx$.

Уравнение Лагранжа $\frac{7P}{g}\ddot{x}=3P-cx$, или $\ddot{x}+\frac{4g}{7r}x=\frac{3g}{7}$.

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями): $x = \frac{3}{4} r\left(1 - \cos\omega t\right)$. Закон движения груза: $s_2 = 2x = \frac{3}{2} r\left(1 - \cos\omega t\right)$.

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1, x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных центров блоков *B* и *D* (рис. 7.46, *a*). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

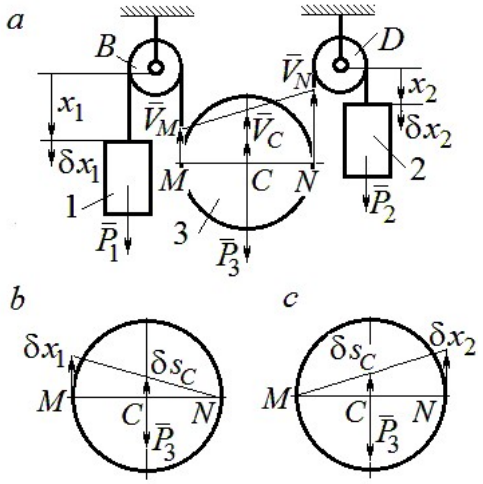


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7: *a* – кинематика механизма; *b*, *c* – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g},\ T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}\right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, *a*): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1, оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *b*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3$.

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2, так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *c*):

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3 , \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \text{ или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 , \; \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g .$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31} g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31} g$. Ускорение центра масс блока $\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31} g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы. Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

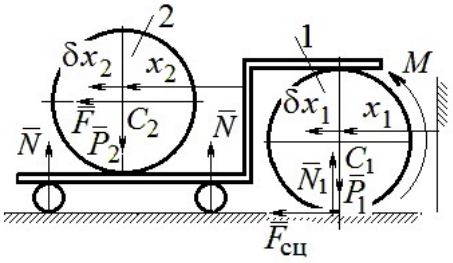


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 \left(\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1 \right)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 $\left(\delta x_1 \neq 0 \right)$, оставляя другую координату x_2 неизменной $\left(\delta x_2 = 0 \right)$. Работу совершают момент M и сила $\overline{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4P \delta x_1 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_к) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2, равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g}\left(\frac{11}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2\right) = 4P,\ \frac{P}{g}\left(2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1\right) = P, \text{ или}$$

$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g,\ 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси x_1. Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: В 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев*, *С. А*. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №
Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Екатеринбург
2017

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Издание УГГУ Екатеринбург, 2017

В 67

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017
©Уральский государственный горный университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 4
1.1. Основные виды связей и их реакции 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары 5
1.3. Условия равновесия систем сил 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ... 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы. 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

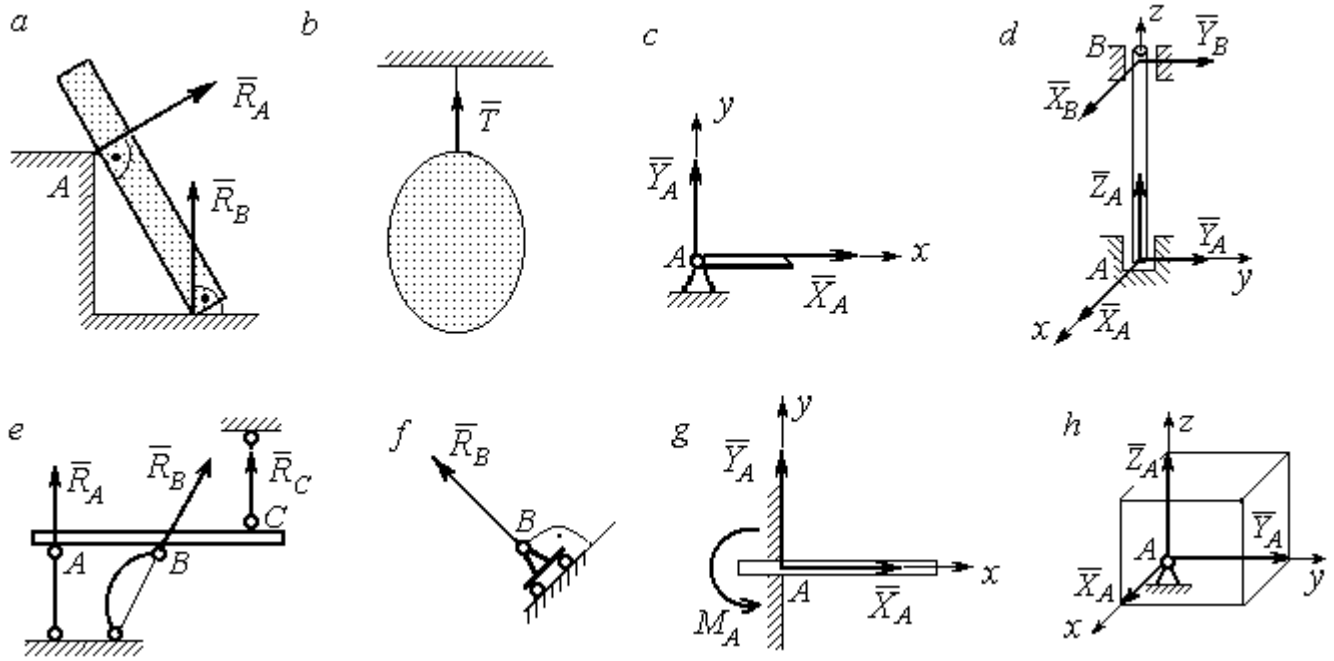


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
a – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы *F* относительно центра *O* $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра *O*, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние *h* от центра *O* до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

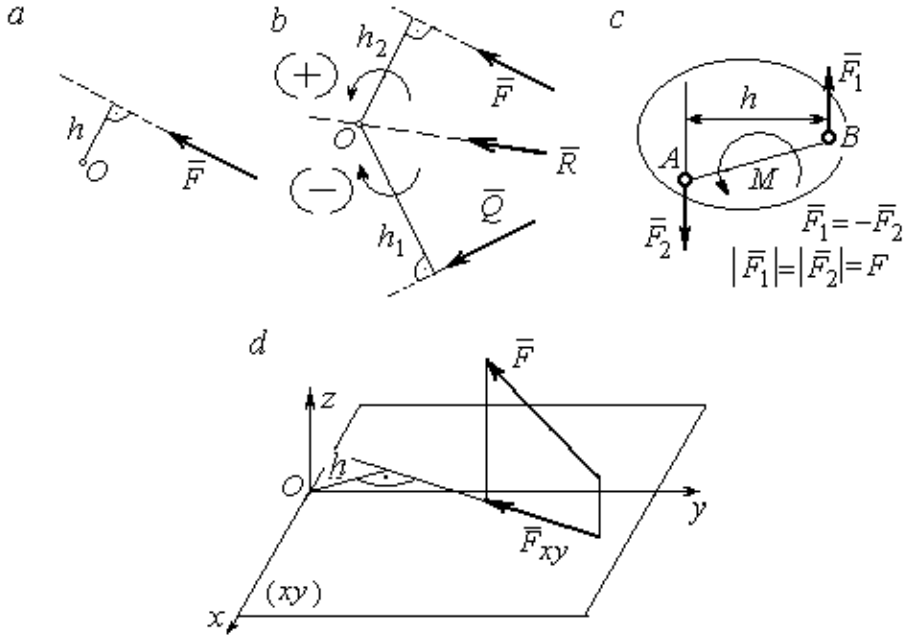


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, *c*).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси *z*: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость *xy*, перпендикулярную оси *z*, *h* – плечо проекции F_{xy} относительно центра *O* – точки пересечения оси *z* и плоскости *xOy*.

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

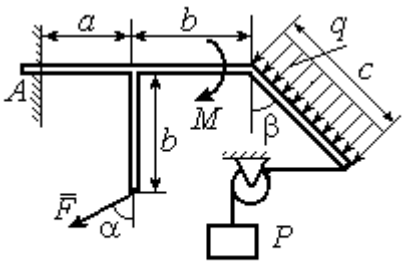
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

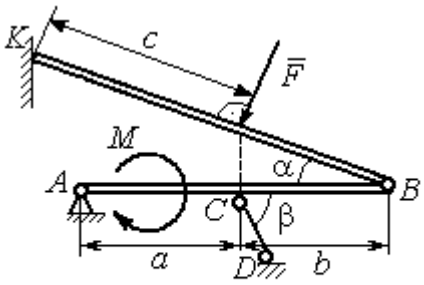
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

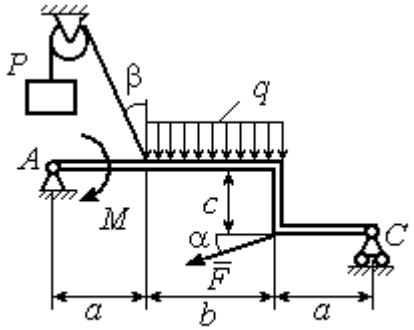
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

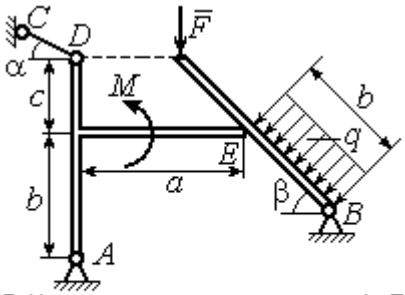
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

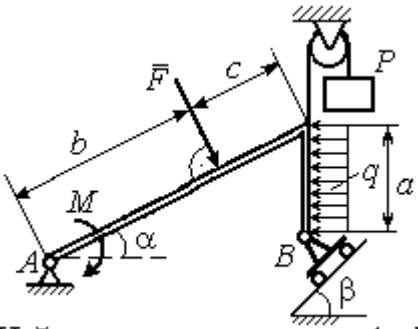
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

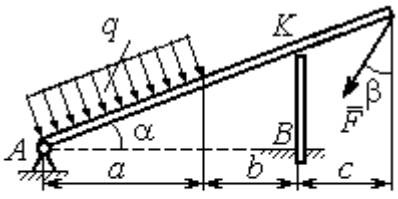
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

Задача 2

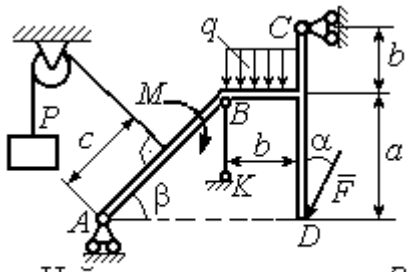


Найти реакцию шарнира A, реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

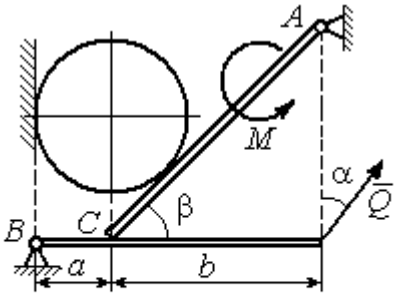
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

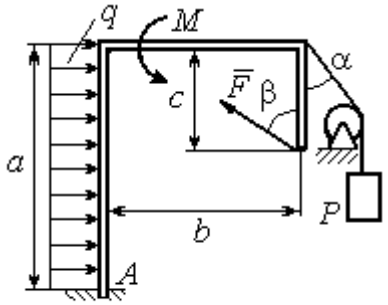
Задача 2



Вес шара P. Найти реакцию шарниров A, B, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

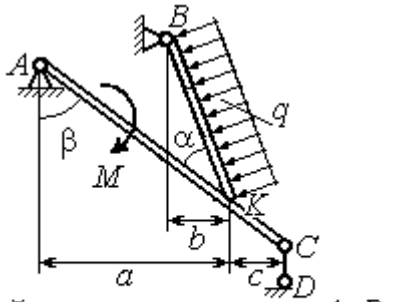
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

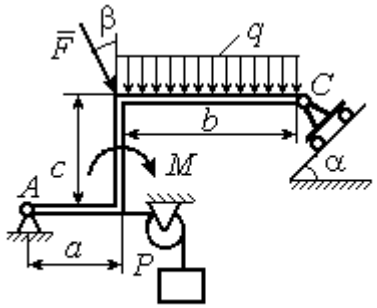
Задача 2



Найти реакцию шарнирв A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

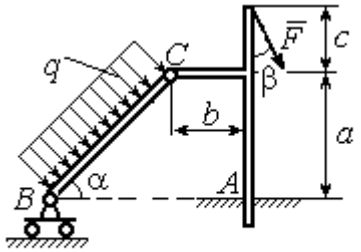
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

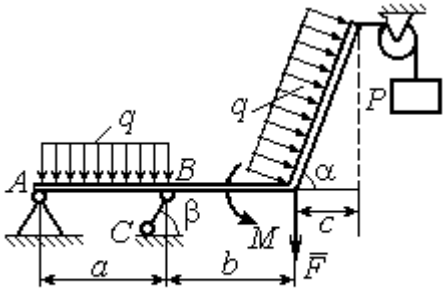


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

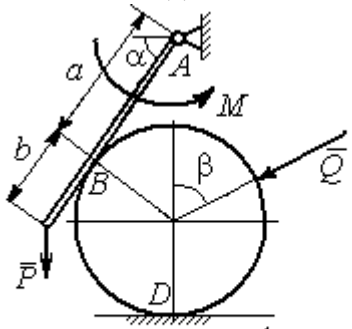
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

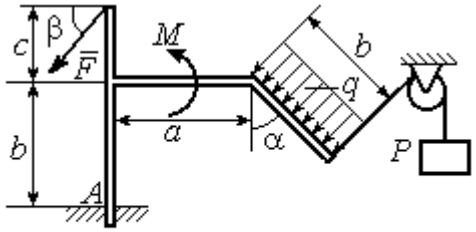
Задача 2



Найти реакцию шарнира A, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

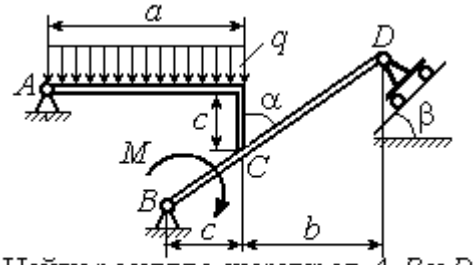
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

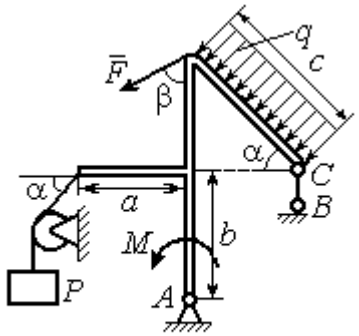
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

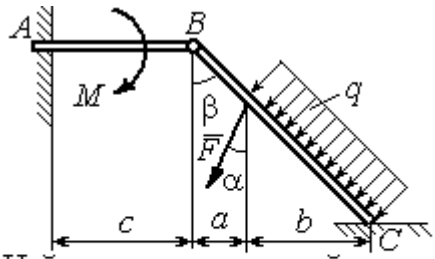
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



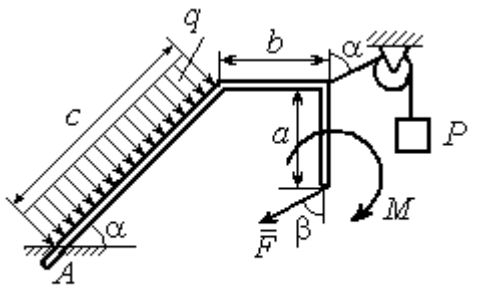
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания С1

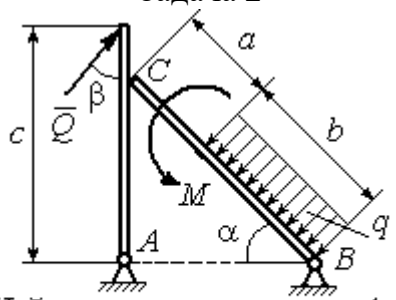
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P, кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F, кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q, кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M, кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α, град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β, град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a, м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b, м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c, м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F, кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q, кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M, кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α, град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β, град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a, м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b, м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c, м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1**.** Рама *ACE* (рис. 1.7) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке *AB*. В точке *E* под прямым углом к участку балки *CE* прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

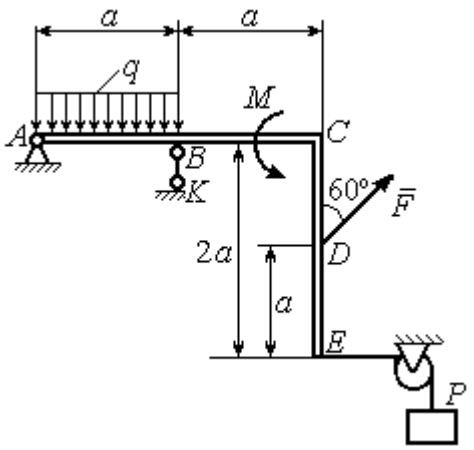


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза *P* на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

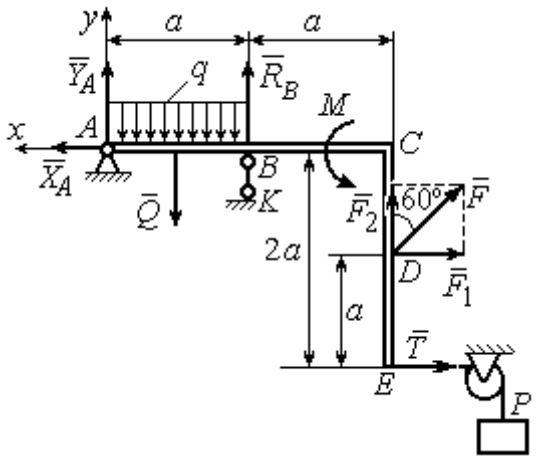


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *x*, *y*, и моменты сил относительно центра *A*, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра *A* использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем X_A = 28,66 Н, Y_A = 59,66 Н, R_B = – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры *BK* противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка *ABLC* с вертикальной частью *AB* и горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° в точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *CL*, а в точке *E* закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил

с моментом M = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если a = 2 м.

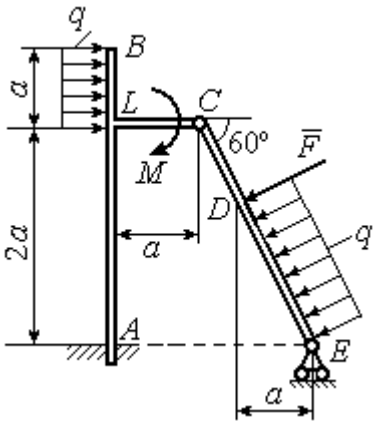


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a =$ 4 кН. Кроме силы $\vec{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке A, имеющая своими составляющими силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A, а также реакция шарнира C, разложенная на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ (см. рис. 1.10, *a*). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy, как показано на рис. 1.10, *a*, и составим уравнения равновесия:

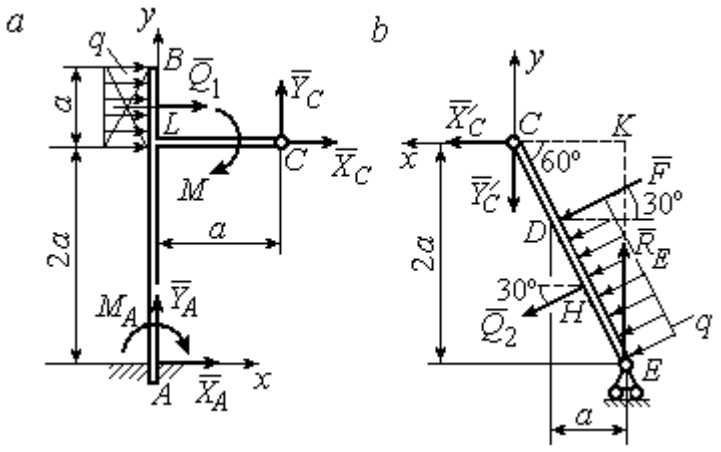


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки *EC*. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED*, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8$ кН. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке *E* и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира *C*. Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку *EC* силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат *xCy,* как показано на рис. 1.10, *b,* и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\,\mathrm{tg}30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C, а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59 \text{ кН},\ Y_A = -2{,}76 \text{ кН},\ M_A = 42{,}87 \text{ кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН},\ Y_C = 2{,}76 \text{ кН},\ R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки *A* и шарнира *C*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

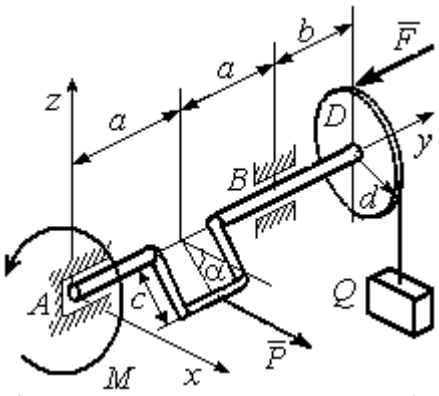
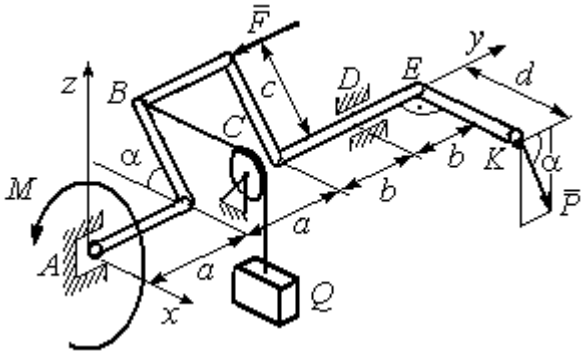
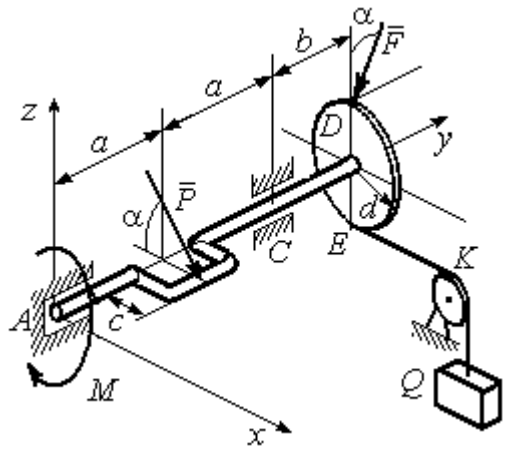
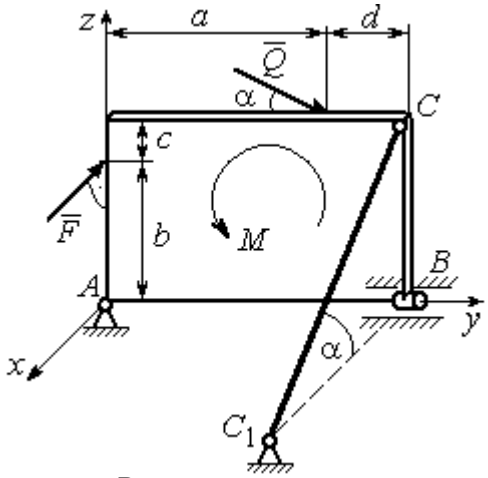
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравновешивающего груза Q	Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости *zAy*; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной *zAx*, отрезок нити *EK* параллелен оси *Ax*. Найти реакции подпятника и подшипника в точках *A* и *C*, а также величину уравновешивающего груза *Q*	Плита весом *P* расположена в плоскости *zAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *zAx*; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1

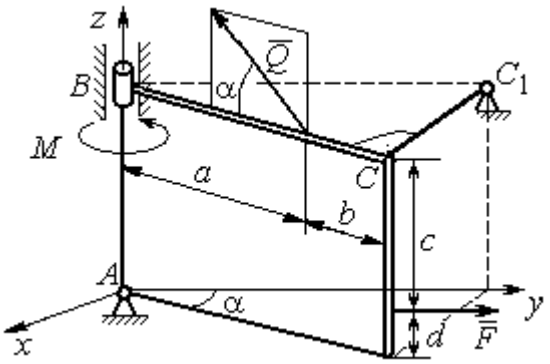
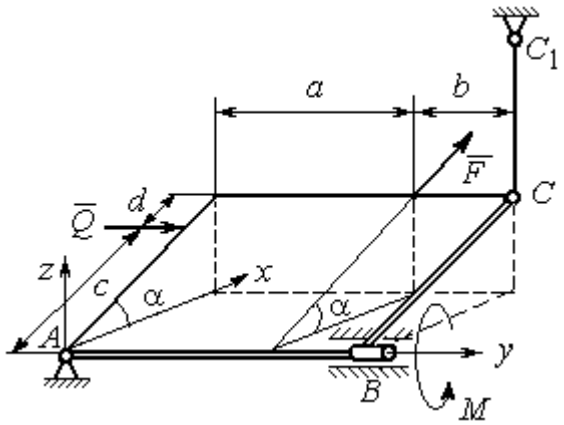
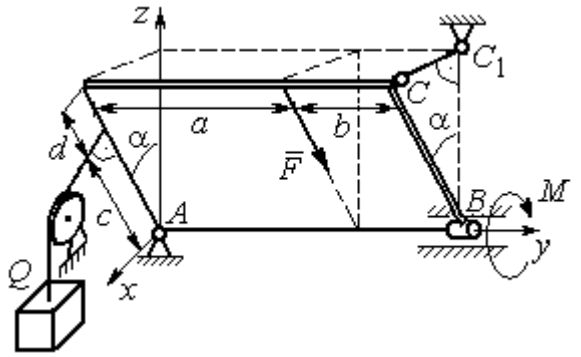
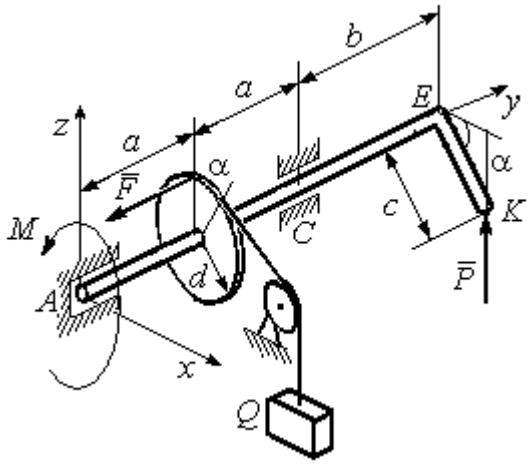
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси *Ay*; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Плита весом *P* отклонена на угол α от горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси *Ay*; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси *Az*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; нить, удерживающая груз *Q*, находится плоскости *zAx*, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости *zAy*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Рукоять *EK* перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{P}$ параллельна оси *Az*; сила $\vec{F}$ параллельна оси A*y*; нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *C*, и величину уравновешивающего груза *Q*

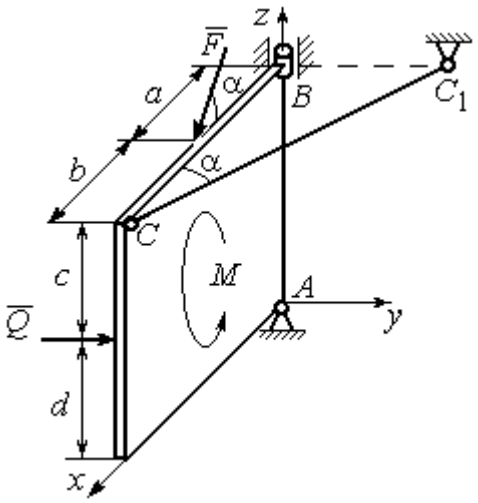
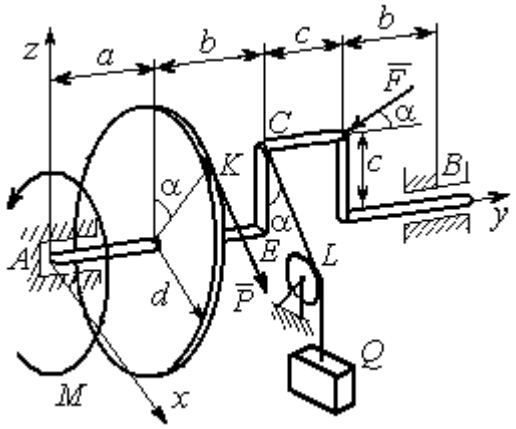
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Плита весом *P* находится в вертикальной плоскости *zAx*; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *xAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Сила $\vec{F}$ находится в плоскости *zAy*; стойка *CE* находится в плоскости *zAy*; отрезок *CL* нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной *xAz*; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке *K*. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и величину уравновешивающего момента *M*

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 1.2

Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P, кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F, кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q, кН	–	12	–	12	8	12	10	–	10	12
M, кН·м	12	–	10	8	12	6	8	6	8	–
α, град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a, м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b, м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c, м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d, м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P, кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F, кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q, кН	–	14	–	10	10	12	14	–	12	14
M, кН·м	10	–	12	12	12	8	10	10	10	–
α, град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a, м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b, м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c, м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d, м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F, кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q, кН	–	10	–	12	14	10	16	–	12	6
M, кН·м	12	–	16	14	8	10	8	12	10	–
α, град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a, м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b, м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c, м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d, м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив I радиуса *R* и шкив II радиуса *r*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*. Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*, закручивающая вал вокруг оси *Cy*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в точке *B* шкива II, определяемой центральным углом 30º, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента *M* и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0{,}6$ м, $r = 0{,}3$ м, $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}4$ м.

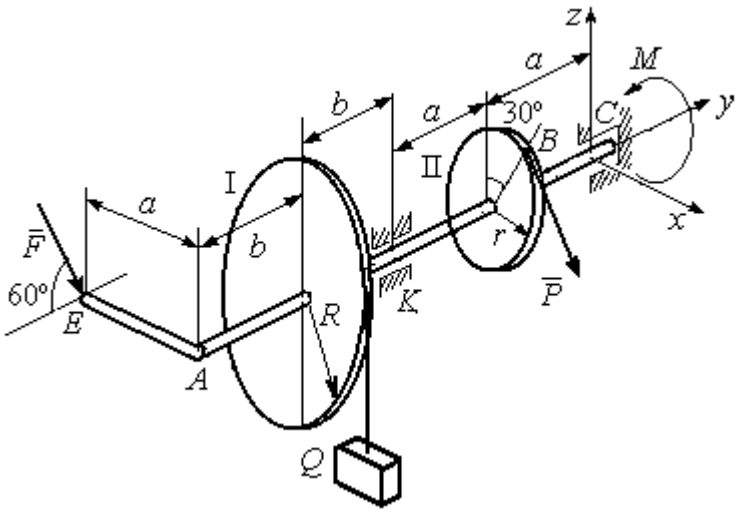


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом *Q*, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника *C* раскладываем на три со-

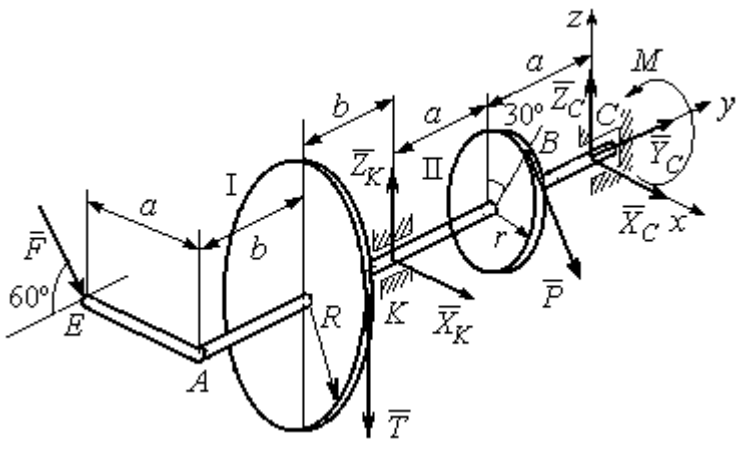


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *K* и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M$) ∞ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

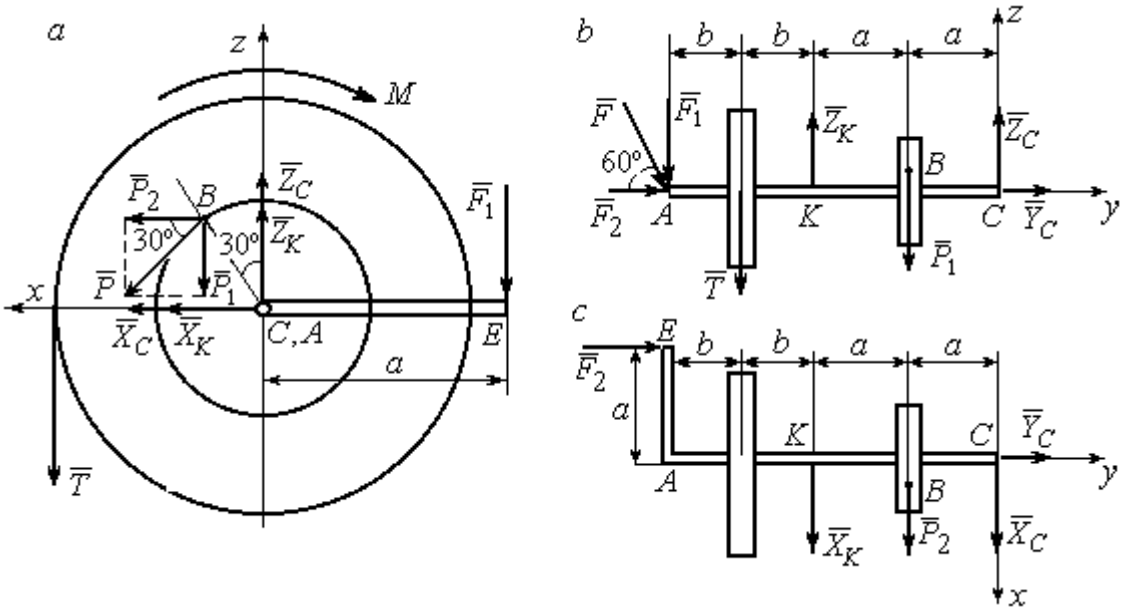


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси z.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy. В точке А плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

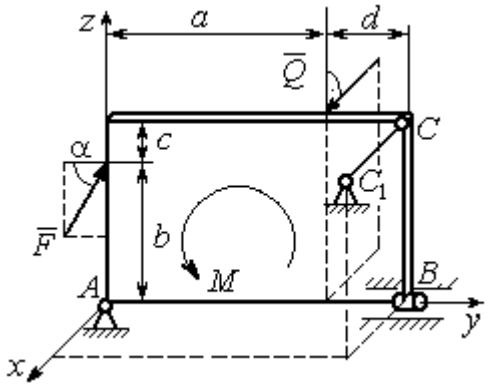


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\vec{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M. Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: P = 1 кН, Q = 500 Н, F = 400 Н, M = 300 Н·м, $\alpha = 35^\circ$, a = 2 м, b = 1,5 м, c = 0,2 м, d = 0,4 м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция стержня $\vec{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

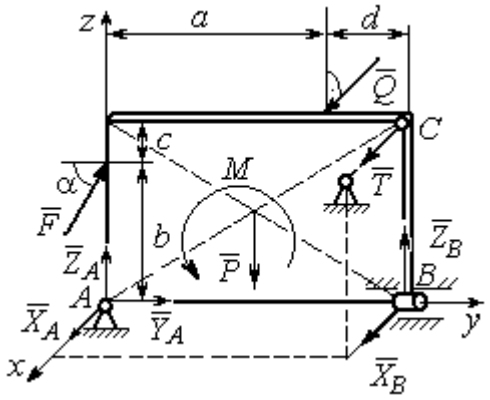


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + F\cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ Z_A + F\sin\alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -F\cos\alpha \cdot b - P \cdot 0{,}5(a+d) + Z_B(a+d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ Q \cdot (b+c) + T \cdot (b+c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0,\ -Q \cdot a - T \cdot (a+d) - X_B \cdot (a+d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0,\ Y_A + 400 \cdot 0{,}82 = 0,\ Z_A + 400 \cdot 0{,}57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0{,}82 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}4 + Z_B \cdot 2{,}4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1{,}7 + T \cdot 1{,}7 = 0,\quad -500 \cdot 2 - T \cdot 2{,}4 - X_B \cdot 2{,}4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500\ \text{Н},\ X_B = 83{,}33\ \text{Н},\ Z_B = 580\ \text{Н},$$

$$X_A = -83{,}33\ \text{Н},\ Y_A = -328\ \text{Н},\ Z_A = 192\ \text{Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира *A*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389{,}09\ \text{Н},$$

цилиндрического шарнира *B*: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585{,}95\ \text{Н}$.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

φ, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

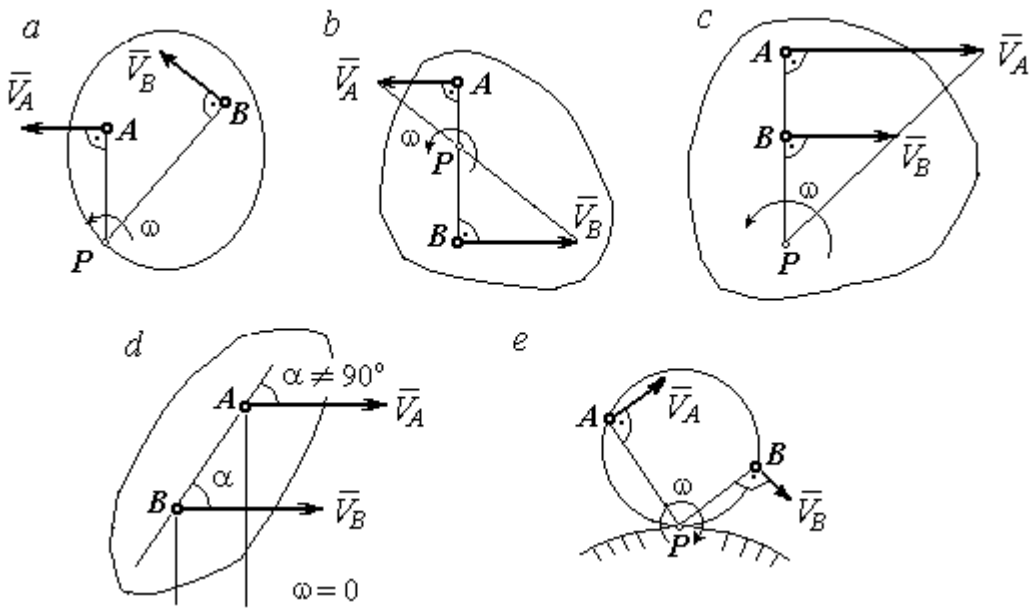


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

Ускорение любой точки *M* плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\,,\quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\,,$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

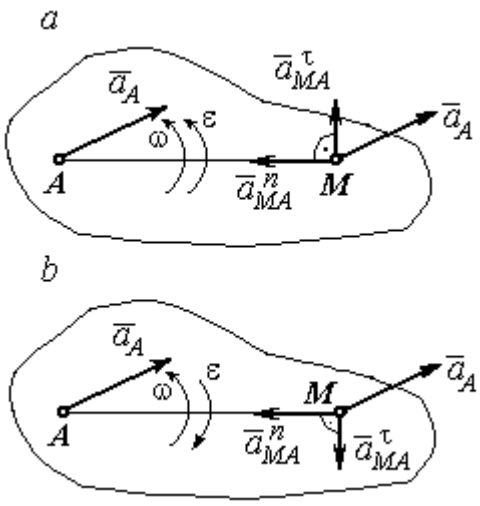


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M, то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

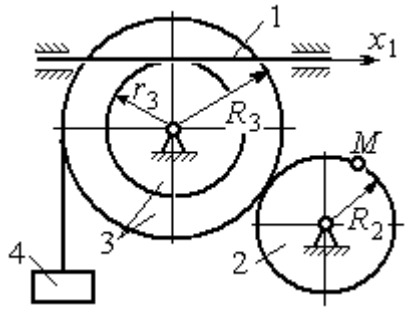
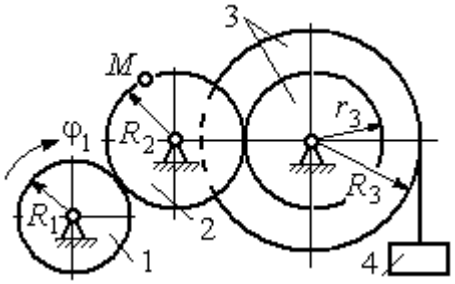
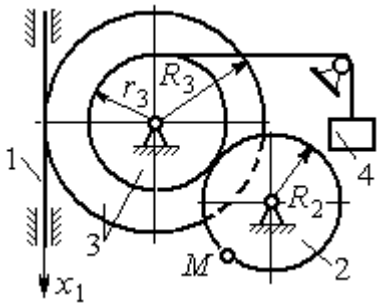
$$\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA},$$

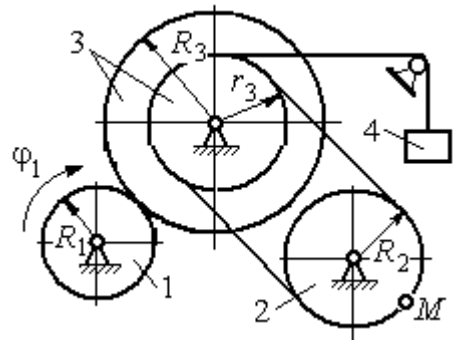
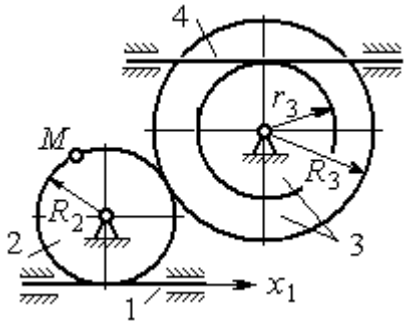
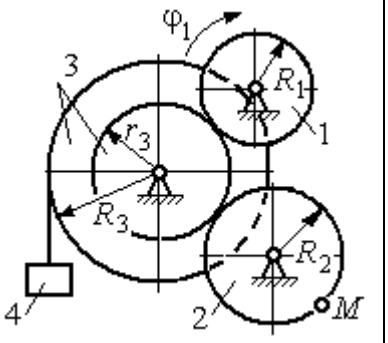
где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

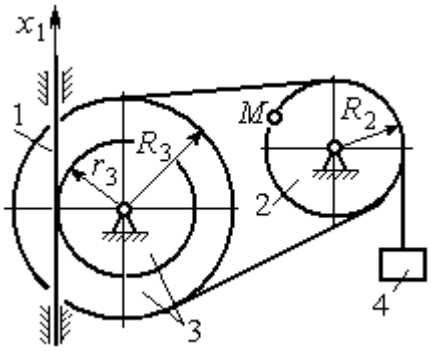
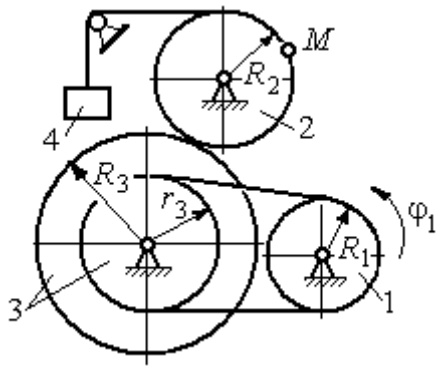
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

Окончание вариантов задания К1

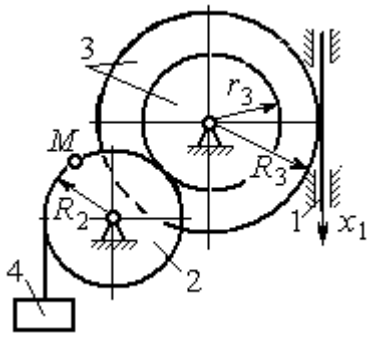
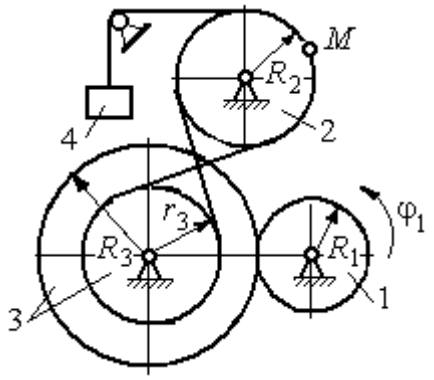
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
1	–	40	45	35	$x_1(t) = (3t-1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	–	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	–	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	–	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	–	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	–	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	–	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Окончание табл. 2.1

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
15	–	20	30	20	$x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$	1
17	–	20	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$	1
19	–	22	50	18	$x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$	4
21	–	20	40	20	$x_1(t)=t+(3t-4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$	3
23	–	45	60	40	$x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$	2
25	–	15	35	25	$x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$	1
27	–	15	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$	1
29	–	35	50	10	$x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на момент времени t_1, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: R_2= 20 см, r_2= 5 см, R_3= 8 см, r_3 = 4 см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, t_1=1 с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2, φ_3, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4.

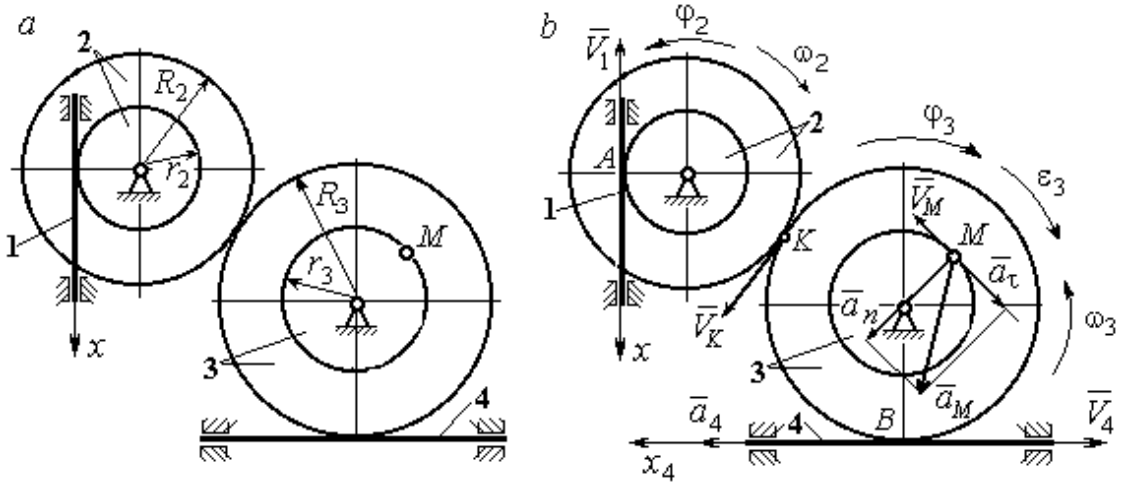


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Эту же скорость будет иметь точка *A* – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0{,}2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0{,}2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2{,}5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0{,}5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2{,}5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с^2. Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с^2. Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8{,}06$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

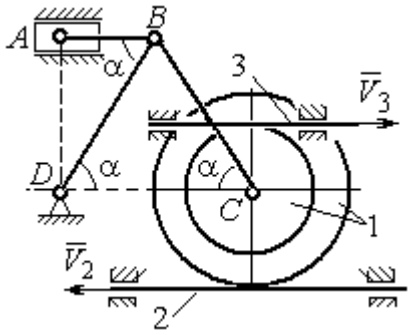
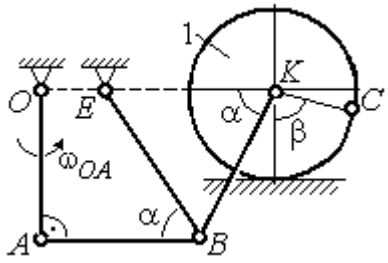
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

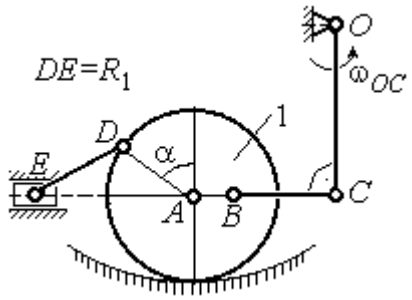
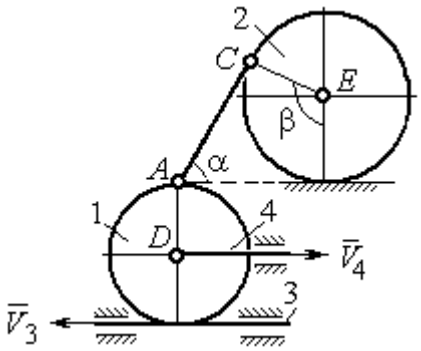
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$	 Найти: V_A, V_B, V_K, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, ω_{BE}, ω_{BK}

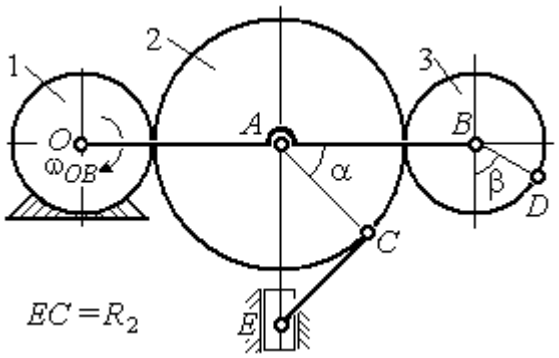
Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	AD, см	α, град	V_2, см/с	V_3, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	OE, см	α, град	β, град	V_C, см/с
1	10	5	20	30	8	10	**2**	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	**12**	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	**22**	5	12	2	60	120	12

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$	 Найти: V_A, V_C, V_E, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OC, см	AB, см	BC, см	α, град	ω_{OC}, рад/с	Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	α, град	β, град	V_3, см/с	V_4, см/с
3	12	18	10	35	60	4	**4**	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	**14**	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	**24**	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

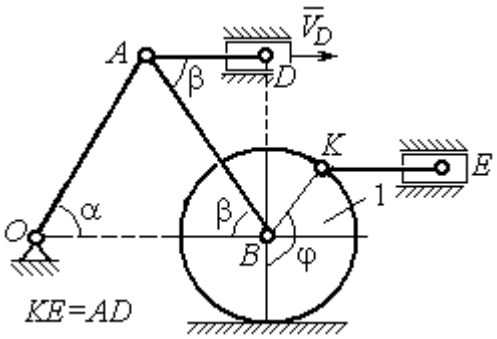
Варианты № 5, 15, 25



Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, ω_2, ω_3, ω_{EC}

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	α, град	β, град	ω_{OB}, рад/с
5	10	20	12	60	0	6
15	6	18	10	90	90	8
25	20	25	15	120	180	4

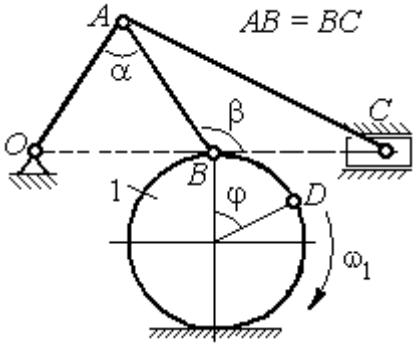
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$ ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AD}, ω_{KE}

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
6	10	20	30	60	60	12
16	12	26	30	30	90	8
26	15	30	60	60	120	15

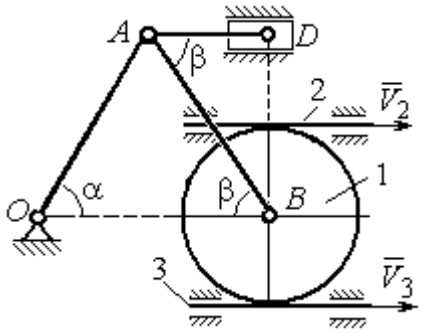
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
7	10	20	30	60	60	12
17	12	25	60	120	90	16
27	8	16	30	60	120	10

Варианты № 8, 18, 29

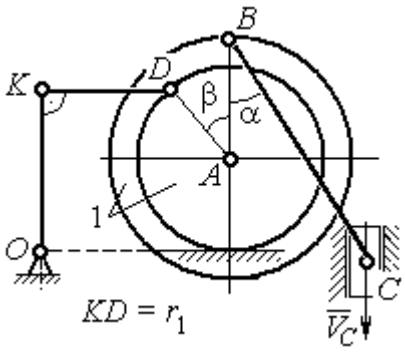
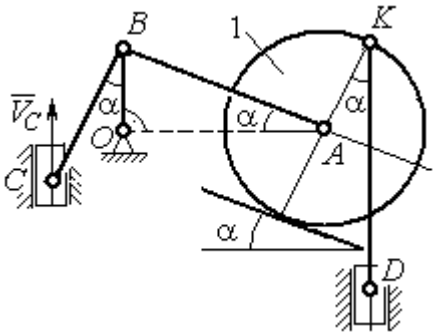


Найти: V_A, V_B, V_D, $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	V_2, см/с	V_3, см/с
8	10	20	30	60	12	4
18	12	26	30	30	8	2
28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К2

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1,$ V_A, V_B, V_K, V_D	 Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K,$ $\omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	α, град	β, град	BC, см	V_C, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	CB, см	OB, см	KD, см	α, град	V_C, см/с
9	20	12	45	60	60	8	**10**	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	**20**	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	**30**	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2, r_3, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C. Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC}. Диск 2, увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1. Диск 3, также увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзыва-

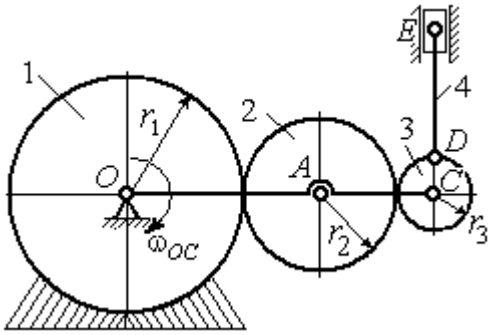


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке *D*, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке *E* шарнирно прикреплен поршень *E*, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень *OC* горизонтален, стержень *DE* направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек *A*, *C*, *D*, *E*, угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: r_1 = 6 см, r_2 = 4 см, r_3 = 2 см, *DE* = 10 см, ω_{OC} = 1 рад/с.

Решение

Определим скорость точки *A*, общей для стержня *OC* и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

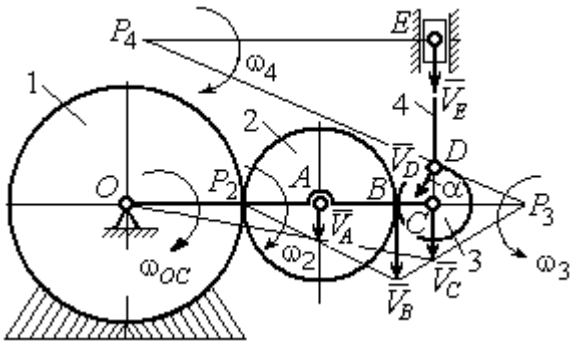


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2. В этом случае скорость точки *A* может быть определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как V_A = 10 см/с, получим ω_2 = 2,5 рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек *B* и *C*. Скорость точки *B* может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2.

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3, получим: CP_3= 8 см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3}$= 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$ = $=2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3.

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E. По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E: V_E=16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \dfrac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, $\omega_4 = 0{,}4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D.

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E. В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплён шатун DB, второй конец которого в точке B прикреплён к кривошипу OA. Шатун AC прикреплён в точке A к кривошипу AO, а другим своим концом – к ползуну C, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма AC = 6 см, AB = 2 см, BO = 8 см, DB = 10 см и скорость ползуна в данный момент V_C = 4 см/с.

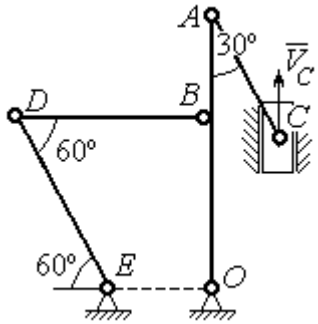


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA, а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошипу ED. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

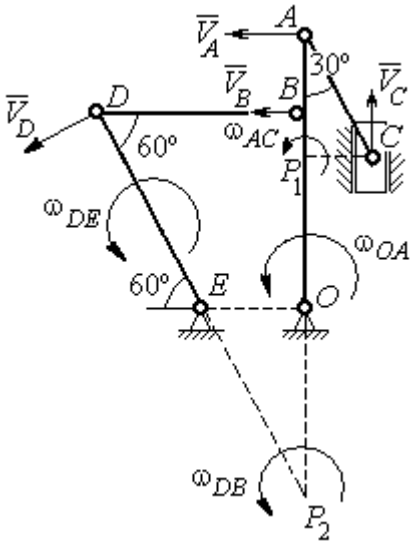


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{P_1C} = \dfrac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

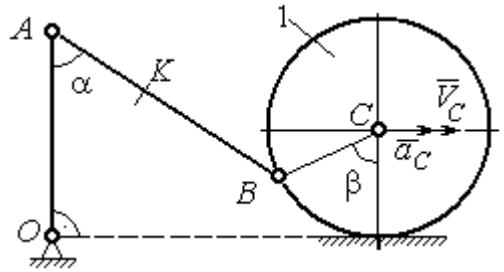
Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC, так и кривошипу OA, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D, построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB $\omega_{DB} = \dfrac{V_B}{P_2B} = \dfrac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки D $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \dfrac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа DE $\omega_{DE} = \dfrac{V_D}{DE} = \dfrac{6{,}4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

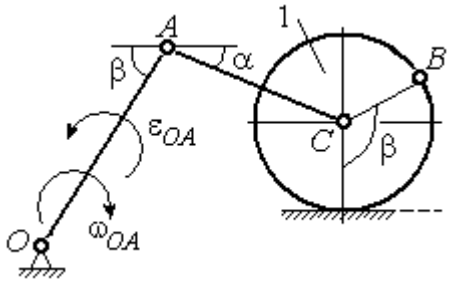
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

Номер варианта задания	AB, см	AK, см	α, град	β, град	R_1, см	V_C, см/с	a_C, см/с^2
1	16	10	60	120	10	12	6
11	20	16	30	60	8	10	8
21	18	10	60	180	6	8	4

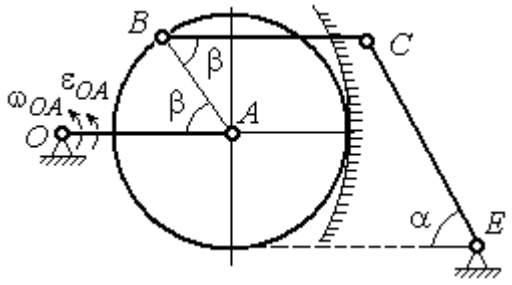
Варианты № 2, 12, 22



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	AC, см	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
2	5	10	12	30	60	2	4
12	8	24	20	30	120	1	2
22	6	12	15	60	90	2	3

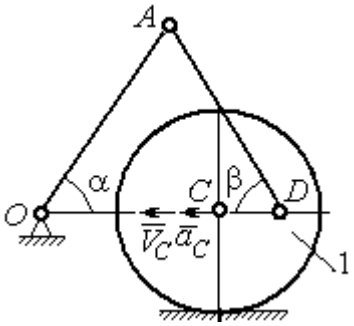
Варианты № 3, 13, 23



Найти: a_C, a_B, ε_{BC}

Номер варианта задания	BC, см	AO, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
3	16	15	60	90	10	2	3
13	18	12	90	60	8	3	2
23	14	12	30	120	10	2	4

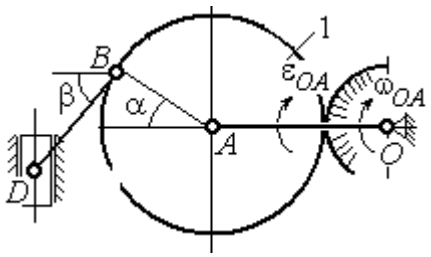
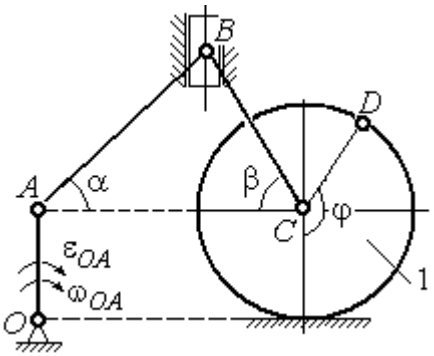
Варианты № 4, 14, 24



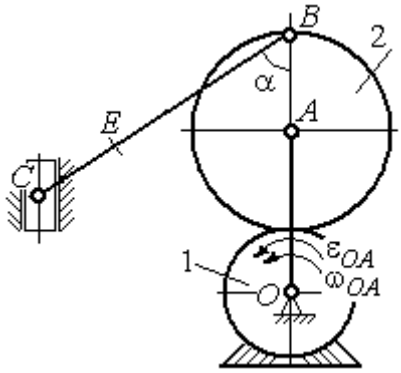
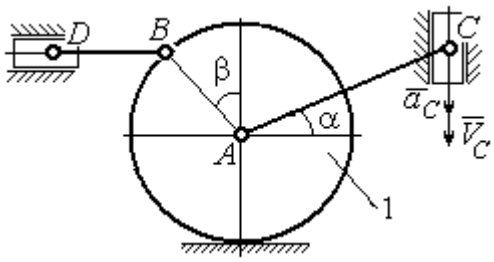
Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	DC, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
4	10	28	5,78	60	30	10	2
14	8	24	4,62	30	90	8	3
24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
 Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$	 Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

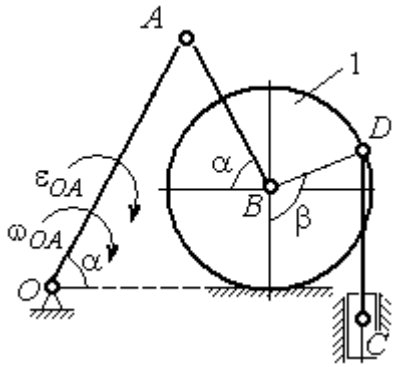
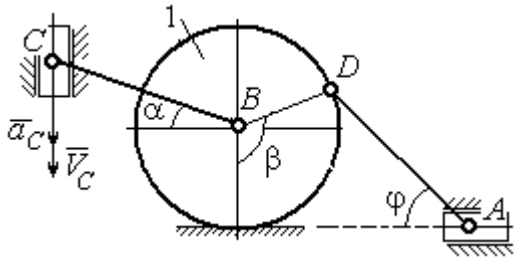
Номер варианта задания	*OA*, см	*BD*, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	*AB*, см	φ, град	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
5	16	10	60	30	10	4	3	**6**	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	**16**	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	**26**	5	16	120	30	60	3	4

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
 Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$	 Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	*BC*, см	*BE*, см	α, град	R_1, см	R_2, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	*BD*, см	*AC*, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
7	22	10	60	2	10	2	3	**8**	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	**18**	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	**28**	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К3

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$	 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$

Номер варианта задания	OA, см	DC, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	BC, см	φ, град	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
9	18	10	30	120	4	2	3	**10**	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	**20**	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	**30**	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек R = 0,5 м и r = 0,3 м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC, один конец которого соединён с центром барабана в точке A, а другой – с ползуном C, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C: V_C = 9м/с, a_C = 4 м/с^2.

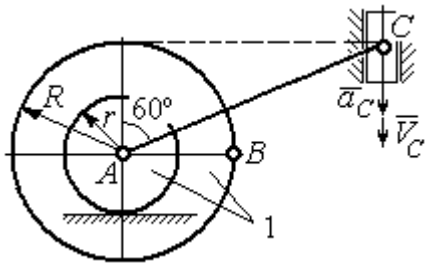


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC}, ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

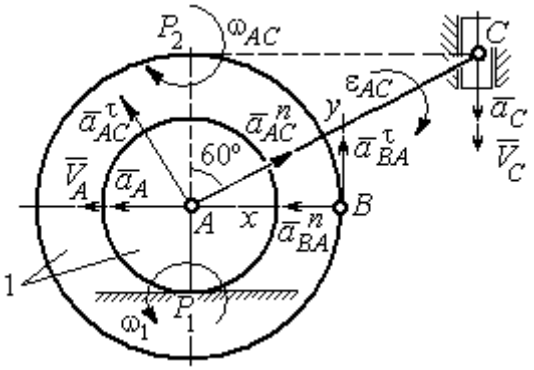


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\text{tg}60^\circ} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки A шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{AC} + \vec{a}^{\,n}_{AC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,\tau}_{AC}$, $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C. Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a^n_{AC} = \omega^2_{AC} \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с^2. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

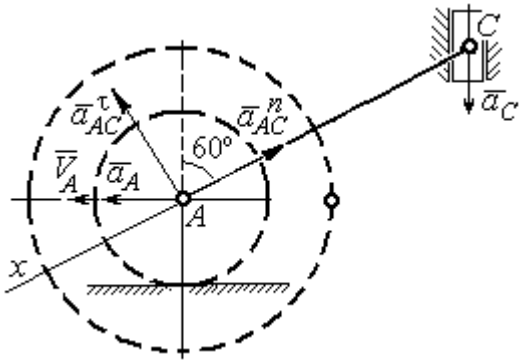


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\,\tau} + \vec{a}_{AC}^{\,n}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}\right) = -\,122{,}4$ м/с^2. Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B, выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки A, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$, $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ равен по величине $a_{BA}^{n} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с^2. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ вычисляется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с^2, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с^2.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B:

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с^2, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с^2. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34{,}32$ м/с^2.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2. На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

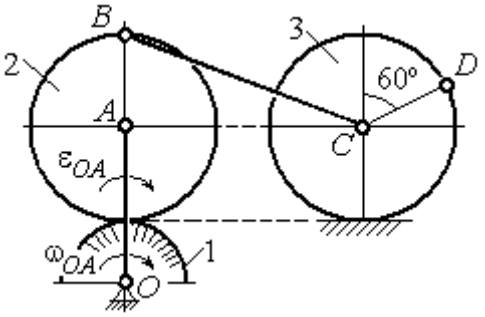


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

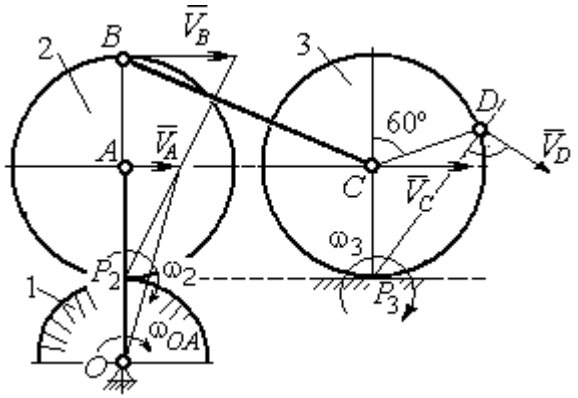


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки D диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30^\circ = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^{\tau}_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a^n_{CB} = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB}. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB}.

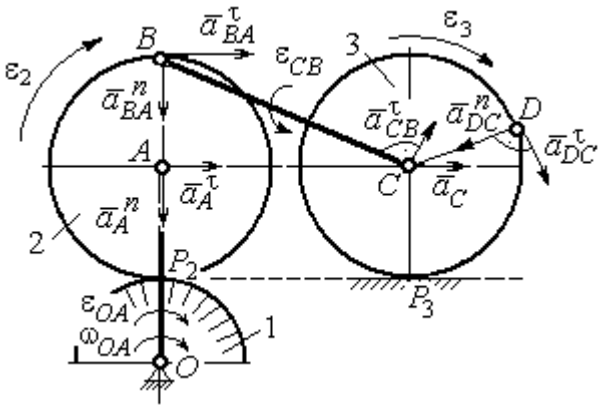


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

Выразим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A. Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA = 288$ см/с^2. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_A = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_A}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину a^{τ}_A, рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O. Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_A$, где $\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_A$ – известные

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA: $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192$ см/с^2, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24$ см/с^2. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ $= 3$ рад/с^2, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24$ см/с^2.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

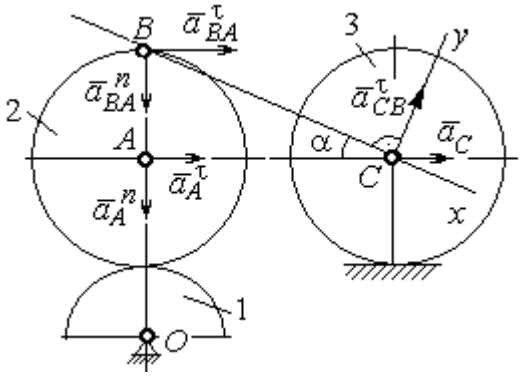


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha;$$

$$a_C \sin\alpha = a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha + a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256{,}7$ см/с^2, $a_{CB}^\tau = -358{,}12$ см/с^2.

Модуль углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 17{,}9$ рад/с^2.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB}, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{DC} + \vec{a}^{\,\tau}_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C; $\vec{a}^{\,n}_{DC}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Величина нормального ускорения точки D: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC = 1152$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}^{\,n}_{DC}$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

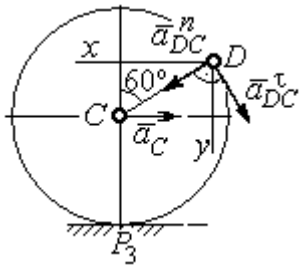


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a^{τ}_{DC} ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32{,}09$ рад/с^2. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки D: $a^{\tau}_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC = 256{,}7$ см/с^2. Направление вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^{\tau}_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^{\tau}_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612{,}5$ см/с^2, $a_{Dy} = 798{,}3$ см/с^2. Величина ускорения точки D:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

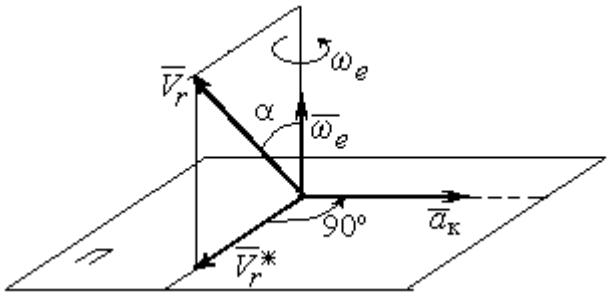


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0,\ a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1.

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

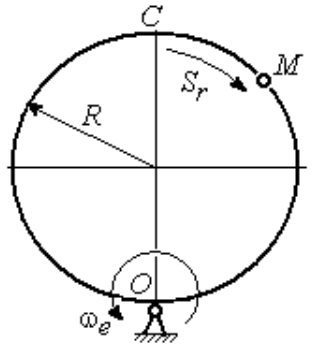
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

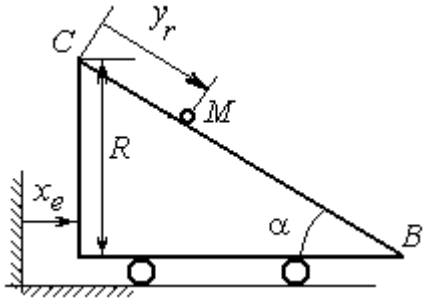
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



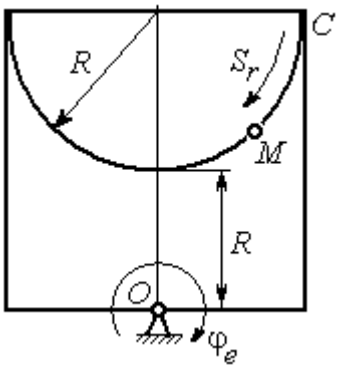
Задача 2



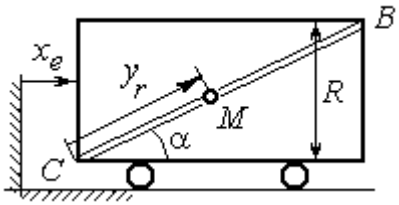
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



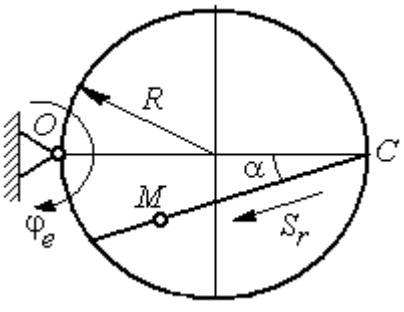
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла 2/3 пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

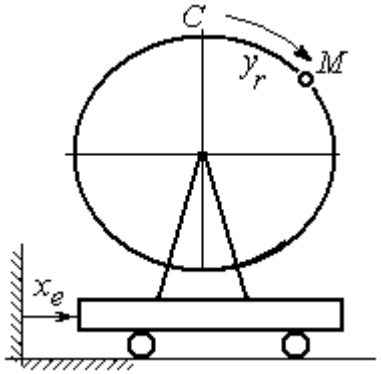
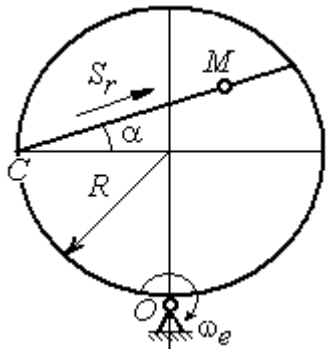


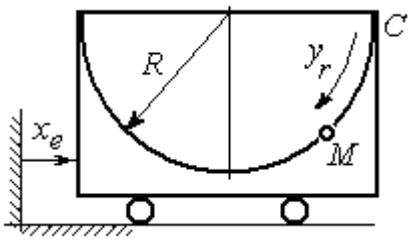
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

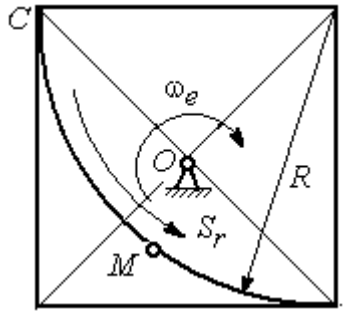


Задача 2

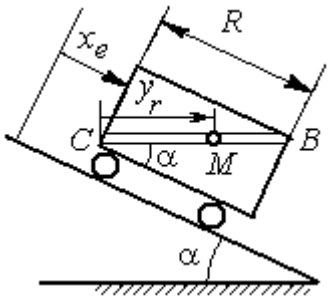


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



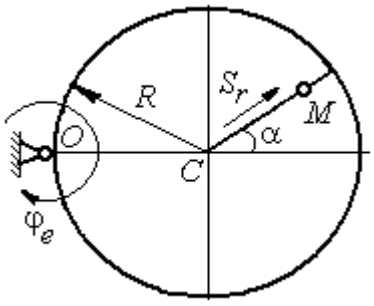
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

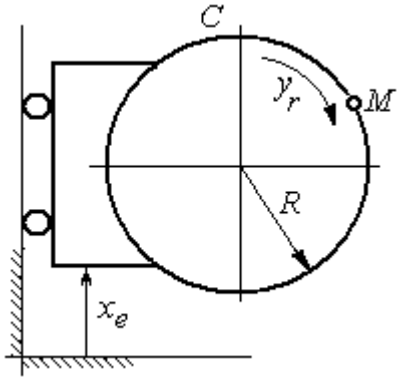
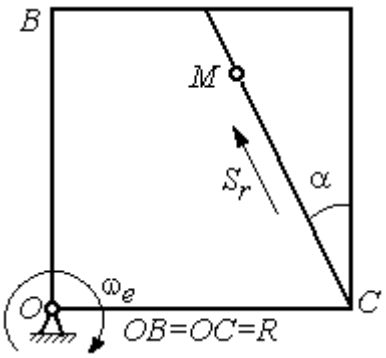


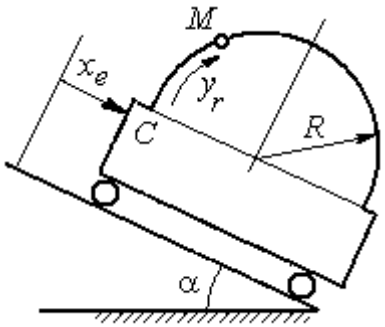
Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

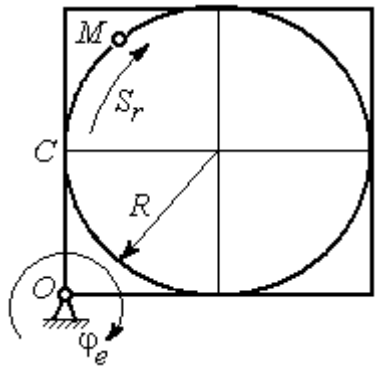


Задача 2

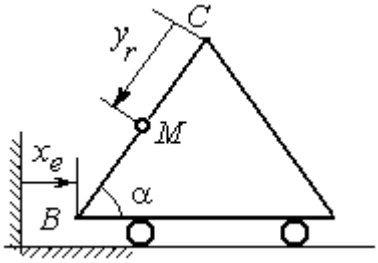


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



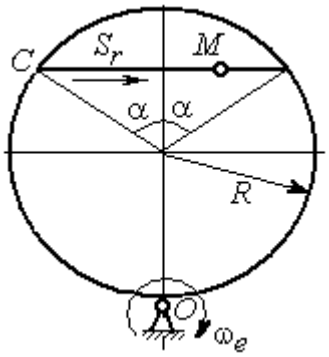
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

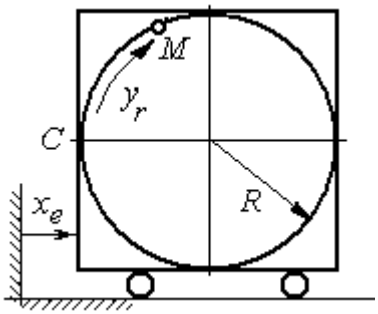
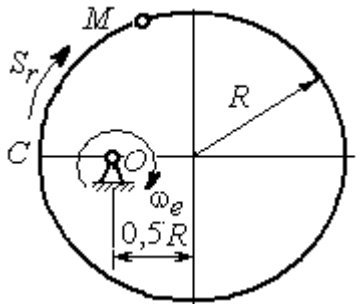


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

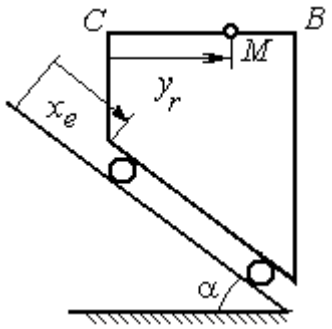
Окончание вариантов задания К4

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
1	1	3	–	$S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	–
2	1	2	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	–	$y_r = \pi[2t + \sin\pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	–	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	–
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
8	1	8	–	$S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	–
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	–	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	–
11	1	6	–	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	–
12	1	18	–	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	–
16	1	12	90	$S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	–	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	–
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	–	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	–
21	1	3	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	–

Окончание табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
22	1	4	–	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	–
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	–	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	–
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	–	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	–	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	–	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

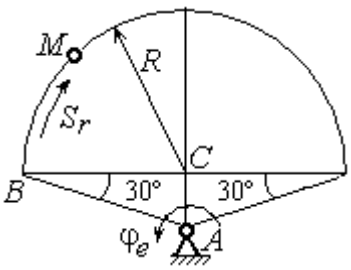


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e. По ободу диска от точки *B* движется точка *M*. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки *M* на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r. Радиус диска $R = 9$ см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Вращение фигуры будет для точки *M* переносным движением. Относительное движение точки *M* – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки** *M* на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки *M* определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1.

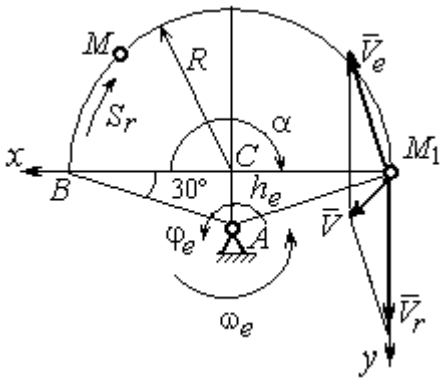


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При $t_1 = 1$ с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает, что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка *M* находится в положении M_1. Скорость V_e переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги *BM*. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|18\pi t\right|$. При t_1 = 1 с $V_r(1) = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 18\pi$ = 56,5 см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат M_1xy (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2} = 29{,}95$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi$ = 56,5 см/с^2 – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r.

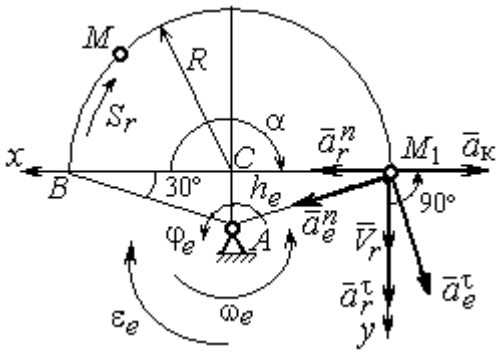


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^n(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9} = 355{,}3$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right| = 4$ рад/с^2 постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41{,}6$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1)h_e = 6\sqrt{3} = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113{,}1$ см/с^2.

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^{\tau}\cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^{\tau} = 97{,}9$ см/с^2, $a_x = -a_e^{\tau}\cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 228{,}4$ см/с^2. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248{,}5$ см/с^2.

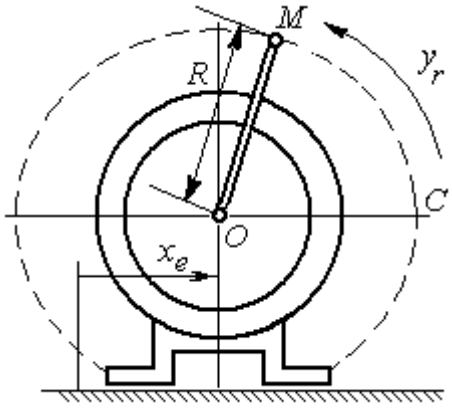


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α, отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с V_r= 6,28 см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1.

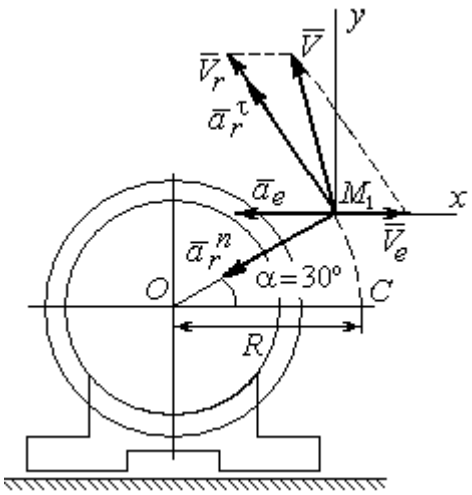


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60^\circ$ = 2,62 см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ = -0{,}52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ = 5{,}44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5{,}46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_к = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^{\tau} = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^{\tau} = \dot{V}_e = -\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$с равны $a_r^{\tau} = 6{,}28$ см/с^2, $a_r^n = 6{,}57$ см/с^2, $a_e = -4{,}75$ см/с^2. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^{\tau}\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^{\tau}\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4{,}61$ см/с^2.

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

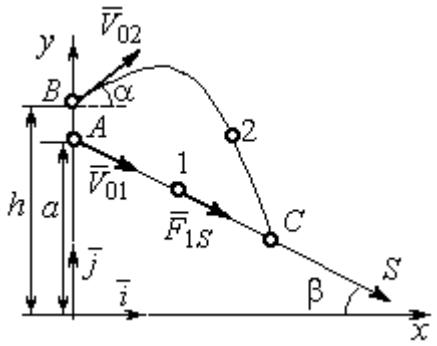
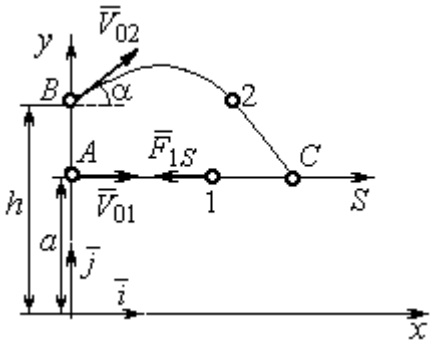
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой m_1, получив в начальном положении *A* скорость V_{01}, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C. Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

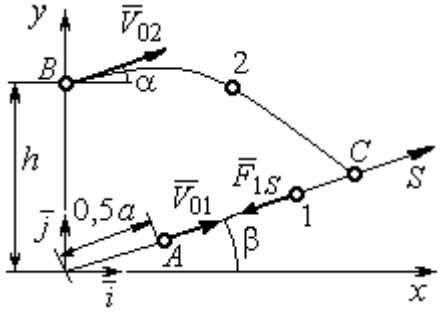
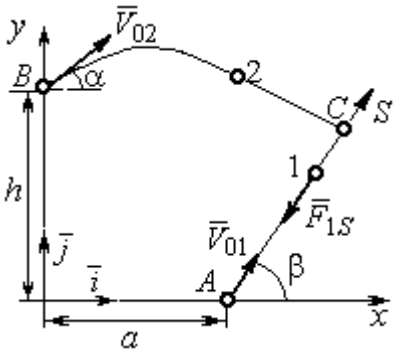
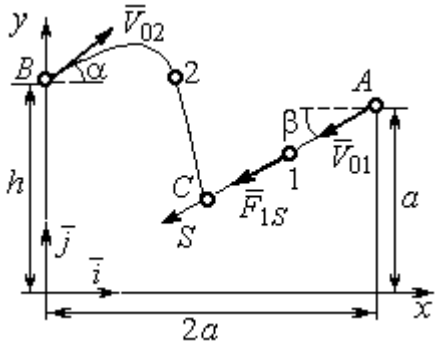
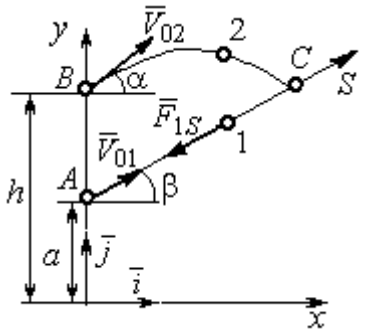
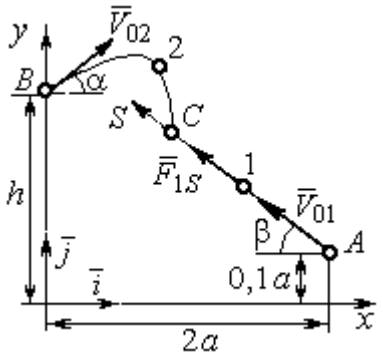
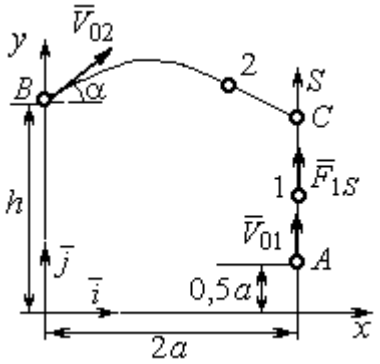
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Встреча в точке *C* в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	Встреча в точке *C*, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с	Встреча в точке *C* в момент максимального подъёма точки 1

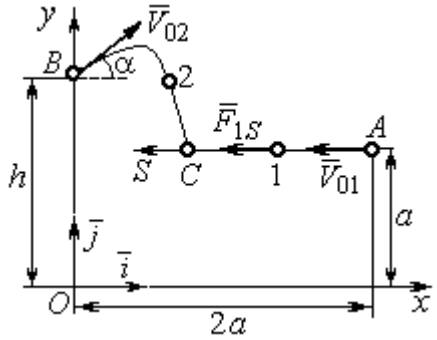
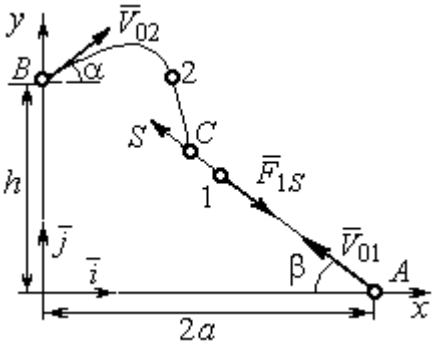
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с	Встреча в точке *C* в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1, кг	F_{1S}, Н	V_{01}, м/с	β, град	m_2, кг	$\vec{F}_2$, Н	a, м	h, м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i}+8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i}+2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i}+8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i}+2\vec{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i}+8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i}-4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i}+4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i}+10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i}-2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i}+2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^{\circ}$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

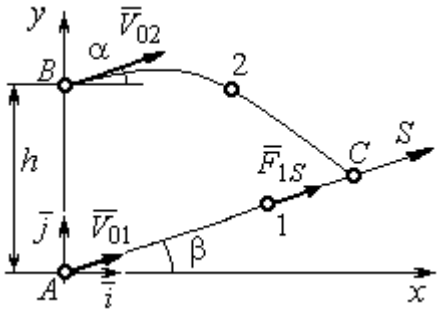


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x*, *y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2, дифференциальное уравнение движения точки 1

приводится к виду: $\frac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \frac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

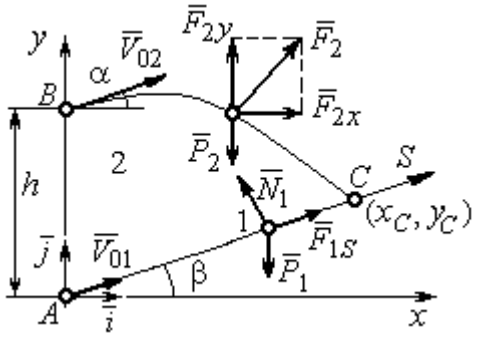


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \frac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние AC, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат $F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат *x*, *y* имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4\,, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5\,,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось *x* как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \dfrac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось *x* на производную от координаты $V_{2x} = \dfrac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси *x*, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси *x*: $x = t^2 + 1{,}85t$.

Закон движения точки 2 вдоль оси *y* находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\dfrac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось *y* от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось *y* производной от координаты $V_{2y} = \dfrac{dy}{dt}$, вто-

рично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси y описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C = 1{,}12$ м. Получим $C_6 = 1$, $C_5 = 2{,}43$. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{{V_{02x}}^2 + {V_{02y}}^2} = 3{,}05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64^\circ$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало

координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$;

$A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\text{tg}\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \dfrac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2

определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}$. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \dfrac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где a, p – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \dfrac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

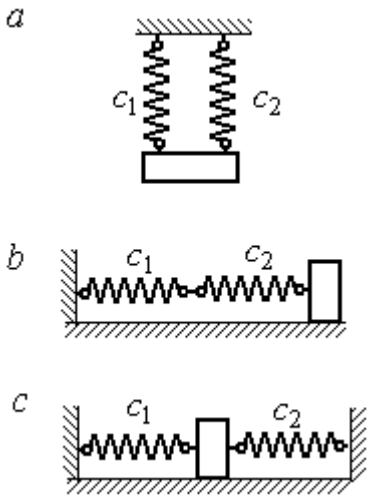


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
a – две параллельные пружины;
b – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалент-

ной жесткости $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{экв} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

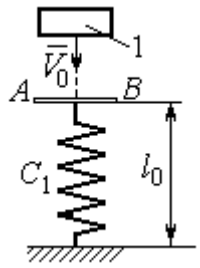
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu \vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

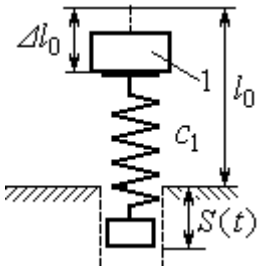
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

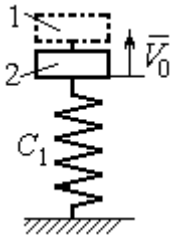
Задача 2



К верхнему концу пружины, сжатой на величину $\Delta\ell_0$, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

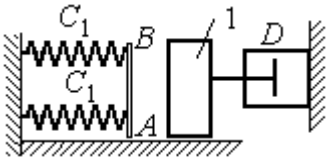
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх

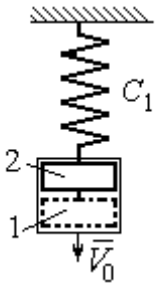
Задача 2



Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

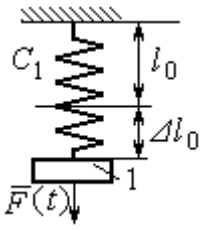
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укреплённого на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2

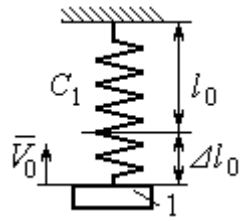


Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

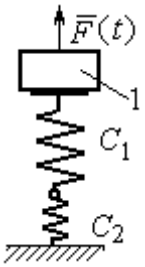
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вверх

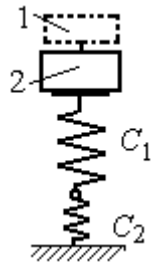
Задача 2



Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

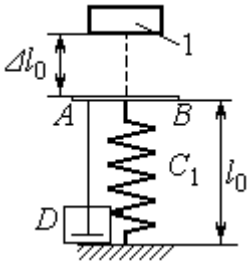
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укреплённых на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

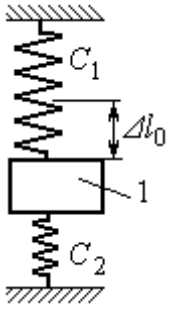
Задача 2



Груз 1 падает с высоты $\Delta\ell_0$ на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

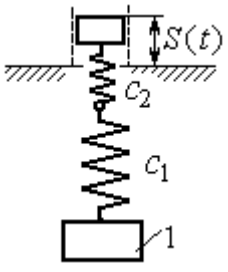
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости

Задача 2

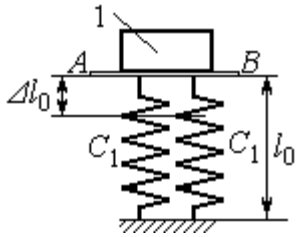


К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

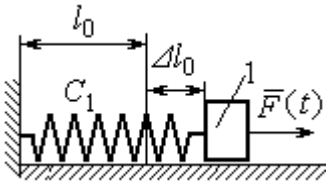
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вниз

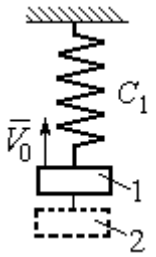
Задача 2



К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

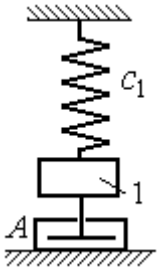
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх

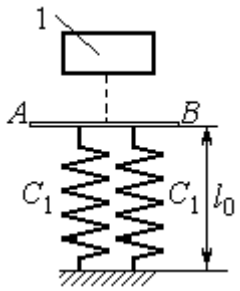
Задача 2



В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

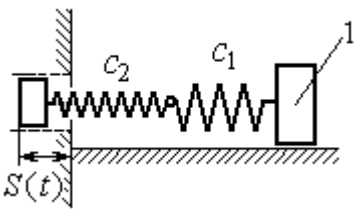
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2



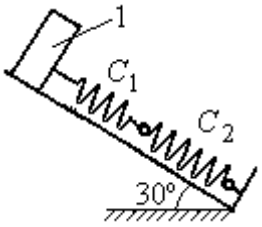
К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания Д2

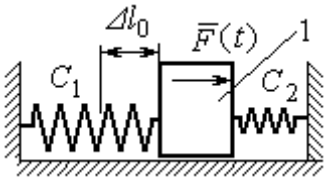
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



В положении статического равновесия груза 1, укреплённого на двух последовательно соединённых пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	–	2,0	200	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	210	–	0,1	–	–	0,02sin12t
2	1	1,5	2,0	4	250	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	4	220	–	–	1,0	–	–
3	1	2,0	1,5	3	250	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	–	200	–	0,14	–	12sin5t	–
4	1	2,0	–	3	180	–	0,1	–	–	–
	2	1,5	–	2	150	120	–	–	8sin12t	–
5	1	1,0	2,0	–	120	100	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	50	–	0,5	18	–	–
6	1	1,2	–	–	120	180	0,12	–	–	–
	2	1,4	–	2,4	120	180	–	–	–	0,03sin14t
7	1	1,6	–	3,2	140	–	0,15	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,12	–	12sin6t	–
8	1	1,0	2,0	3,0	150	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	3,5	120	–	–	15	–	–

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	–	–	100	–	–	–	–	–
	2	1,4	–	2,0	100	110	–	–	–	0,015sin8t
10	1	2,5	–	2,5	110	100	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	110	52	0,08	–	5sin9t	–
11	1	2,0	–	4,0	300	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	200	–	0,12	–	–	0,01sin4t
12	1	1,8	2,4	4	220	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	5	240	–	–	0,6	–	–
13	1	1,5	1,5	2	200	–	–	–	–	–
	2	1,8	–	–	180	–	0,08	–	10sin10t	–
14	1	2,0	–	2	200	–	0,12	–	–	–
	2	2,0	–	2	150	120	–	–	10sin8t	–
15	1	1,5	2,0	–	120	250	–	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,4	4	–	–
16	1	2,0	–	–	150	75	0,1	–	–	–
	2	2,0	–	2,5	150	75	–	–	–	0,01sin5t
17	1	1,5	–	2,1	160	–	0,11	–	–	–
	2	1,8	–	–	150	–	0,1	–	8sin12t	–
18	1	2,0	1,0	2,5	80	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	2,5	50	–	–	21	–	–
19	1	1,6	–	–	120	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	2,0	85	120	–	–	–	0,015sin7t
20	1	2,0	–	2,0	90	100	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	100	90	0,12	–	6sin10t	–
21	1	2,0	–	1,6	220	–	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	250	–	0,14	–	–	0,01sin10t
22	1	2,2	1,5	3	180	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	4	280	–	–	0,8	–	–
23	1	2,2	1,2	2	220	–	–	–	–	–
	2	1,6	–	–	200	–	0,12	–	5sin7t	–

Окончание табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	–	2,4	160	–	0,13	–	–	–
	2	1,0	–	3	150	300	–	–	6sin10t	–
25	1	0,8	1,2	–	120	80	–	–	–	–
	2	0,8	–	–	180	–	0,4	12	–	–
26	1	1,4	–	–	100	120	0,15	–	–	–
	2	1,8	–	2,2	150	120	–	–	–	0,015sin8t
27	1	2	–	4,0	150	–	0,12	–	–	–
	2	2	–	–	162	–	0,13	–	5sin9t	–
28	1	1,5	2,0	2,0	140	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	3,1	180	–	–	12	–	–
29	1	1,0	–	–	140	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	2,4	75	150	–	–	–	0,08sin5t
30	1	1,6	–	3	75	150	–	–	–	–
	2	1,5	–	3	80	70	0,15	–	8sin10t	–

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом P = 20 Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30º, коэффициент жесткости пружины c = 400 Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0$ = 0,1 м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

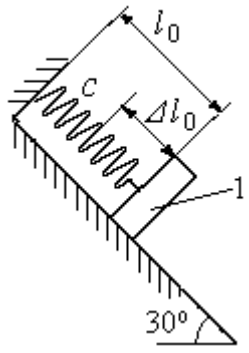


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение *x* относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

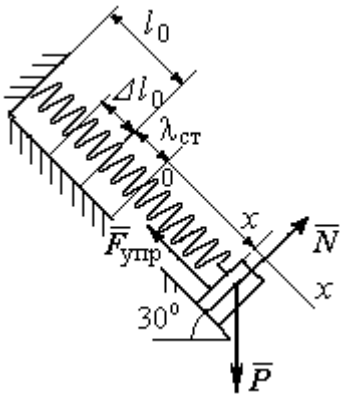


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось *x*: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}01$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси *Ox*.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c} = 0{,}025$ м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты x выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

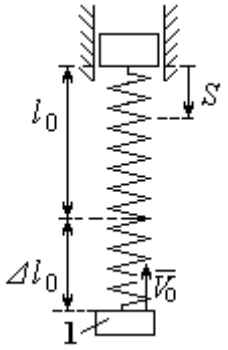


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

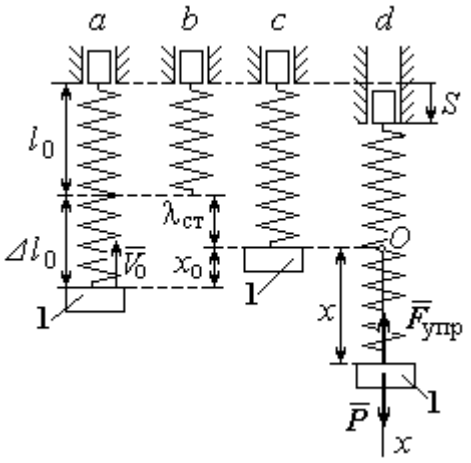


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*

$$F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение *x* относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, ω = 19,81 рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда x_0 = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2}\cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при t = 0 $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)}$ = – 0,11 м. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

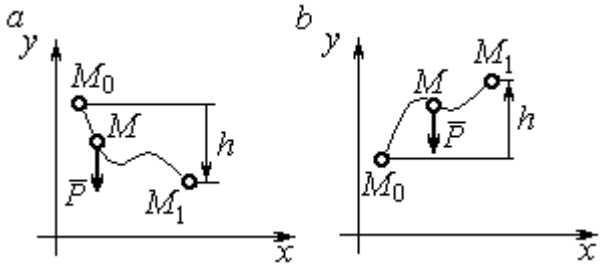


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0,

V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

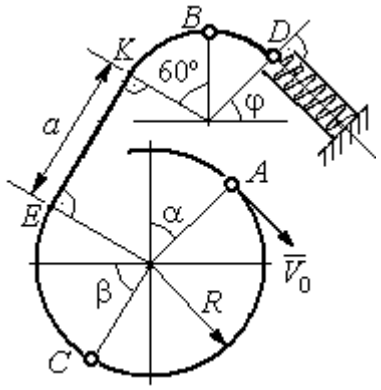
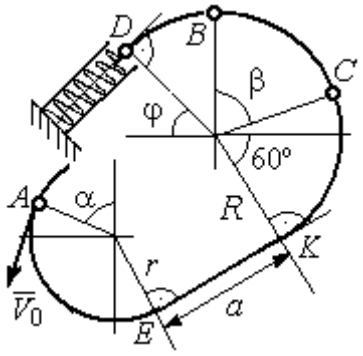
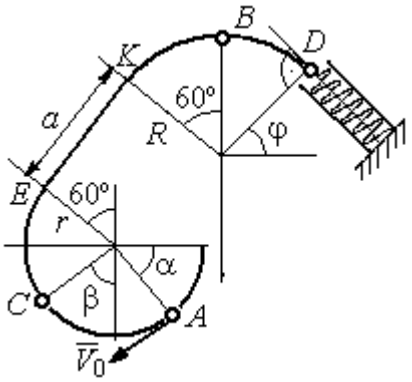
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой *m* расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами *r* и *R* = 2*r*, соединённых прямолинейным отрезком *EK*, сопряжённым с дугами окружностей в точках *E* и *K*. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка *EK* = *a*.

В точке *A*, положение которой на дуге окружности определяется углом α, шарику сообщают начальную скорость V_0. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f*. На участках с вертикальным отрезком *EK* считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки *D*, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью *c* и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки *D* определяется углом φ.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку *B* со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом β.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**	**Варианты № 3, 13, 23**
		

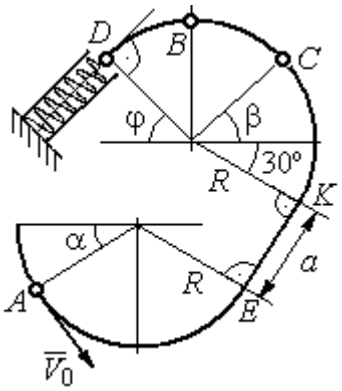
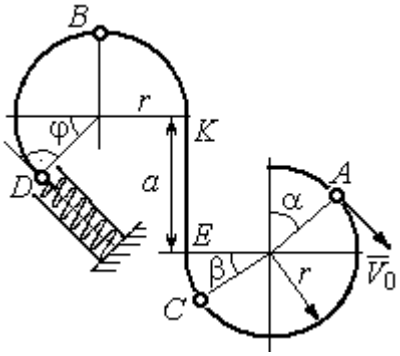
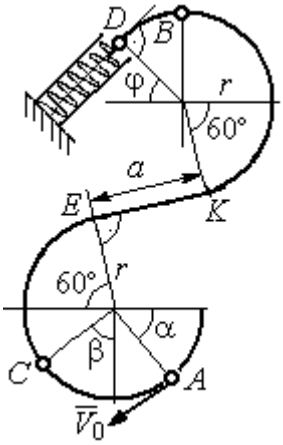
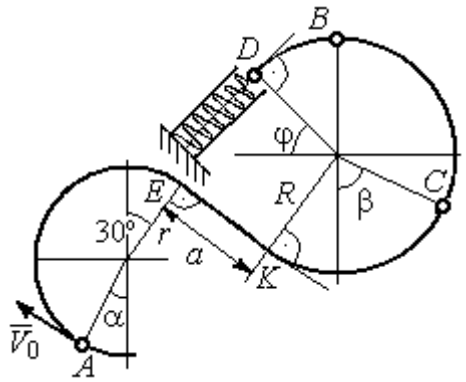
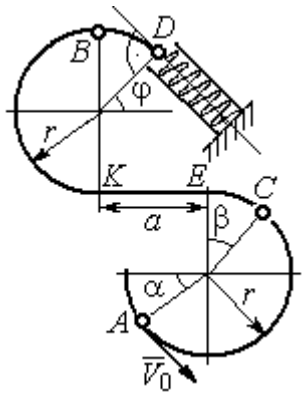
Варианты № 4, 14, 24	**Варианты № 5, 15, 25**	**Варианты № 6, 16, 26**
		

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д3

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

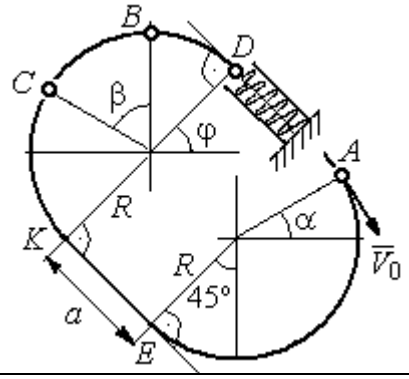
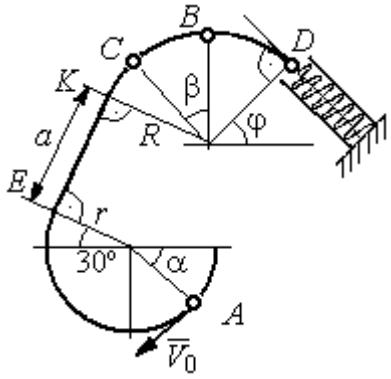
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
m, кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α, град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ, град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r, м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a, м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c, Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Окончание табл. 4.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m, кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α, град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ, град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r, м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a, м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c, Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках *E* и *K* с прямолинейным отрезком *EK* длиной *a* = 0,6 м (рис. 4.17). Радиусы окружностей *R* = 1 м и *r* = 0,5 м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках *E* и *K*, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой *m* = 0,5 кг. В точке *A*, положение которой на дуге радиуса *R* определяется углом α = 60° (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f* = 0,2. Достигнув точки *D* на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью *c* = 100 Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку *B*) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при *k* = 0,3. При

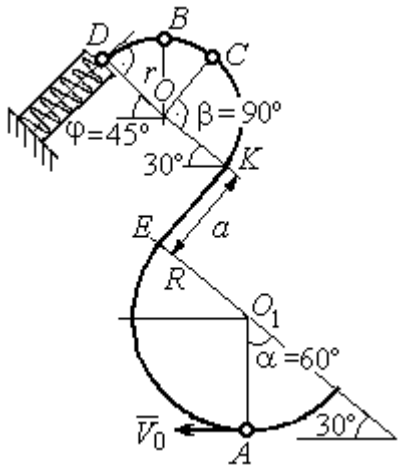


Рис. 4.17. Схема движения шарика

найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения *A* в наивысшее положение – точку *B*.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой *EK* на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.18, *b*). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

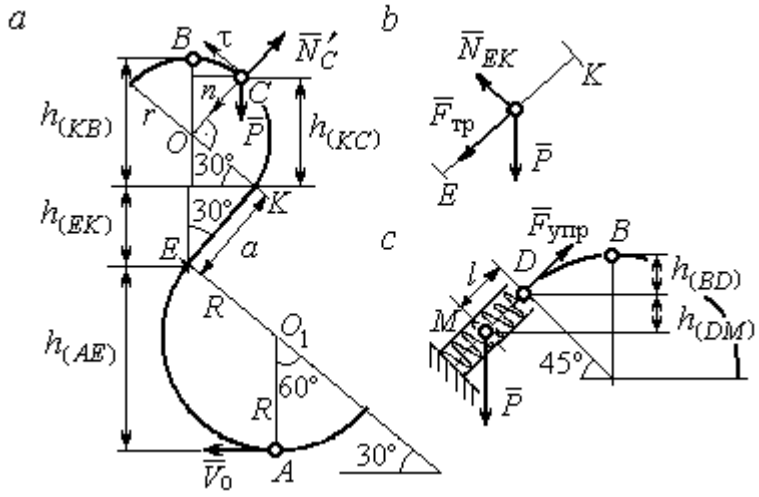


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек *A* и *B* на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке *A*, $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке *B*, $V_B = 0{,}3V_0$.

Для вычисления перепада высот точек *A* и *B* имеем выражение (рис. 4.18, *a*):

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} = R(1+\sin 30^\circ) + a\cos 30^\circ + r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *A* в положение *B*, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{тр}})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$,

$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения *AB* и силы трения на отрезке *EK*. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, *a*, *b*).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения *A* в конечное положение *B* принимает вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f \cdot \cos 60^\circ)\right]$.

После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: $V_0 = 7{,}81$ м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке *C*.

Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, *a*). Уравнение движения шарика в точке *C* в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке *C*, N'_C – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *a* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся тем, что скорость шарика в точке *B* уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения *C* в конечное положение *B*. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках *C* и *B*; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек *C* и *B*; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ) = 0{,}5r$ (см. рис. 4.18, *a*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0{,}3V_0 = 2{,}34$ м/с, найдём $V_C = 3{,}22$ м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} = -6{,}12$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке C (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке C равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки *B* до положения максимально сжатой пружины – точки *M*. Движение на этом участке происходит по дуге окружности *BD* и по прямой *DM*. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *B* в *M* получим: $\dfrac{mV_M^2}{2} - \dfrac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M, V_B – скорость шарика в точках *M* и *B*. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} =$ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке *DM* длиной *l*: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\dfrac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке *M* скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\dfrac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \dfrac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке *B* найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx},

F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

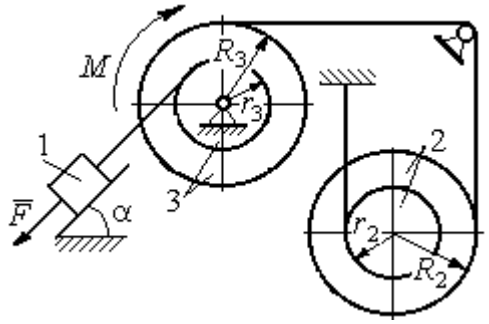
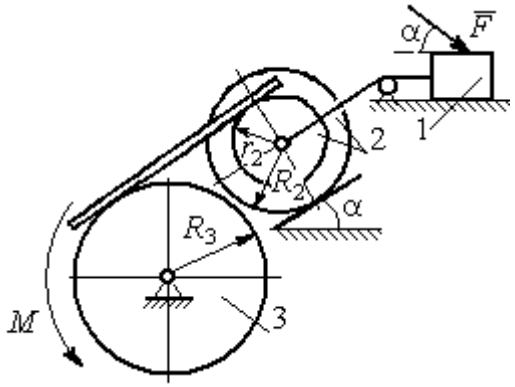
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

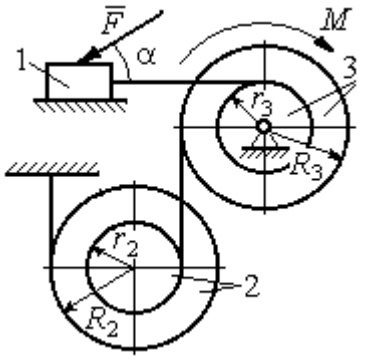
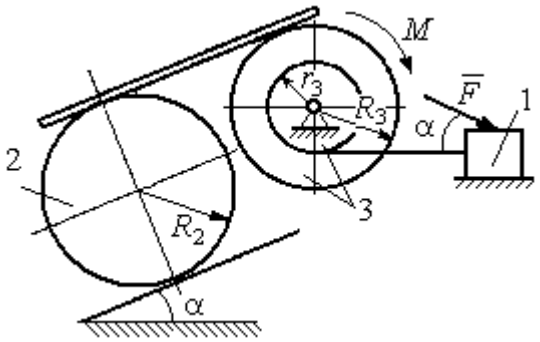
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3}.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

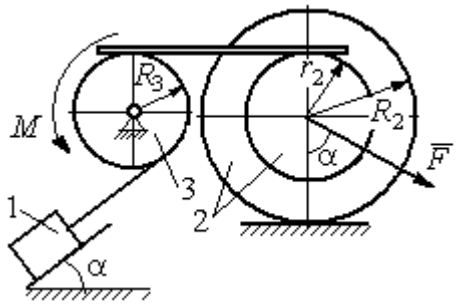
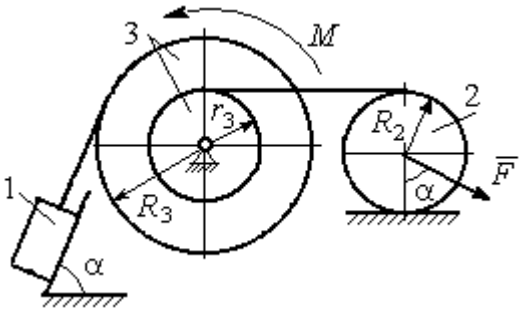
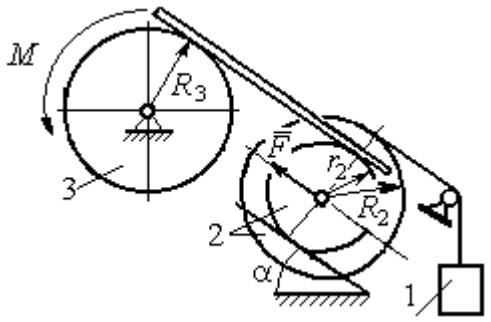
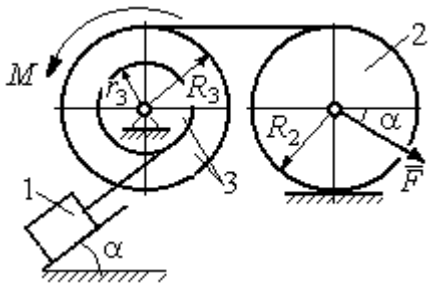
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д4

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

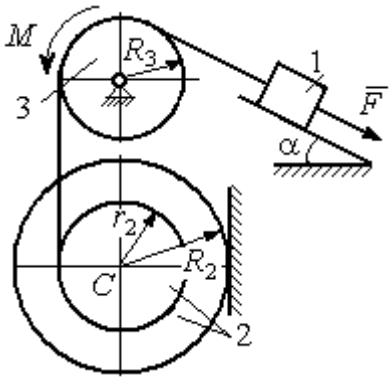
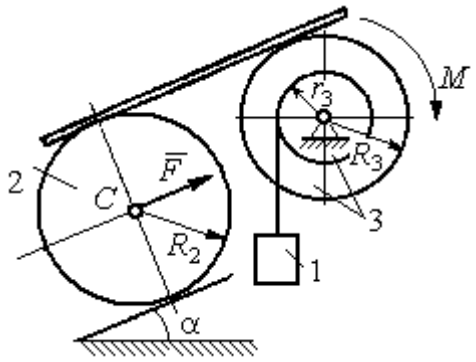
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	–	$2r$	–
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	–	$2r$	–
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	-	$r\sqrt{3}$	–

Окончание табл. 5.1

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	–	$r\sqrt{2}$	–
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	–	$r\sqrt{3}$	–
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$	–
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	-	$r\sqrt{3}$	
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	–	$2r$	–
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$2r$	–
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	–	$r\sqrt{3}$	–
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	-	$r\sqrt{3}$	
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	–	$2r$	–
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$,

приложенных к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

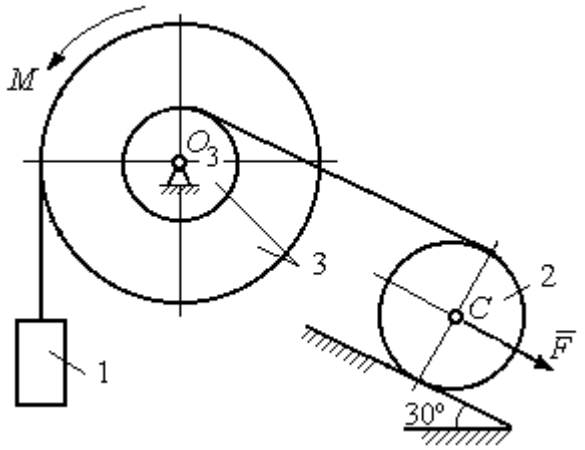


Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

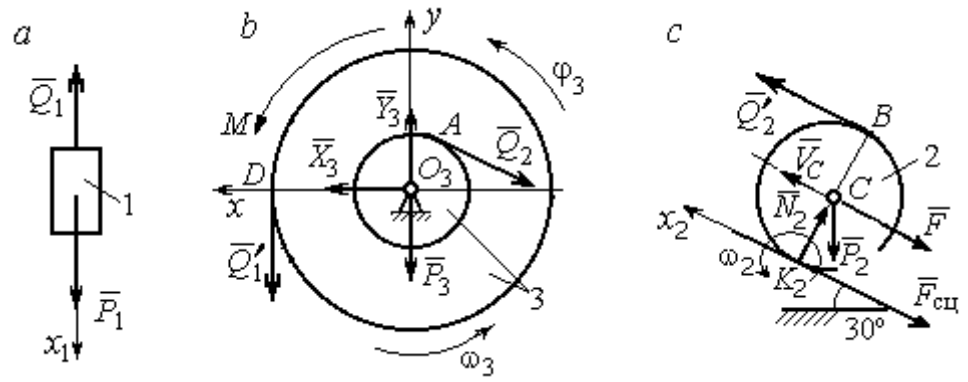


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
a – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
c – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1, a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через его центр масс O_3, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1' R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси *z*; ε_3 – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через

центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q_2' R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C, ε_2 – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P R_2^2}{g} = \frac{4 P r^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки *B* катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$.

Точка *B* катка 2 и точка *A* блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек *A* и *B*, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g} a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g} \varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g} \varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g} a_C = 7P - Q_2, \; \frac{3P}{g} a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \dfrac{10}{111} g$, $Q_2 = \dfrac{79}{37} P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \dfrac{34}{37} P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси x, y имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0,\ m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3, – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси x, y (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0{,}919P$ и $Q_2 = 2{,}135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа

положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V\cos\alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm F h_O \omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса *O*.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T, T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сум-

ма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

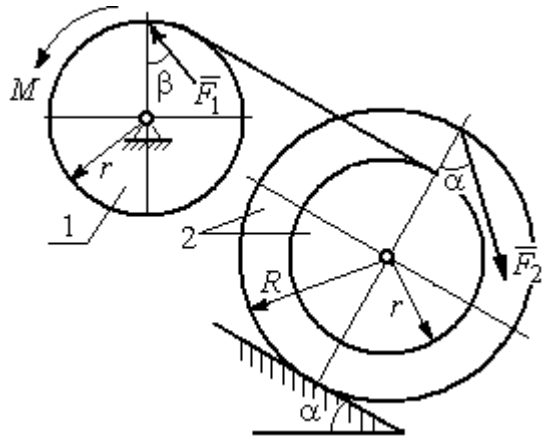
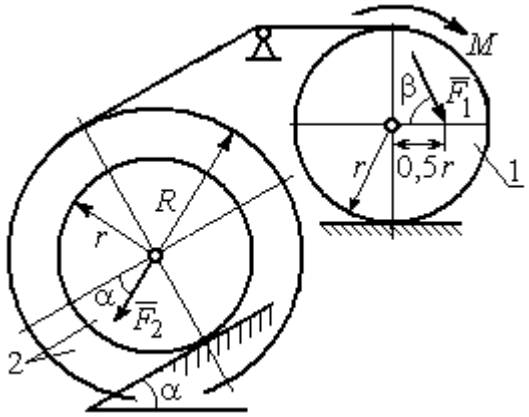
Вес дисков P_1 и P_2. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом *M*. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β, показанными на схемах механизмов.

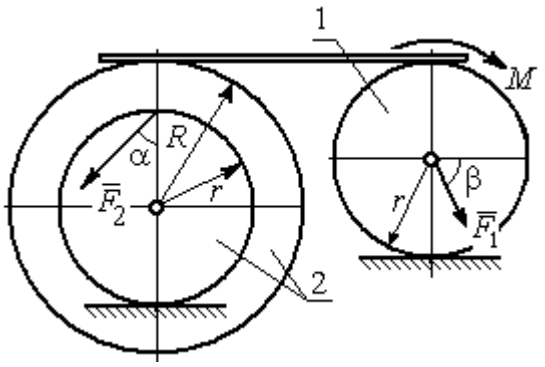
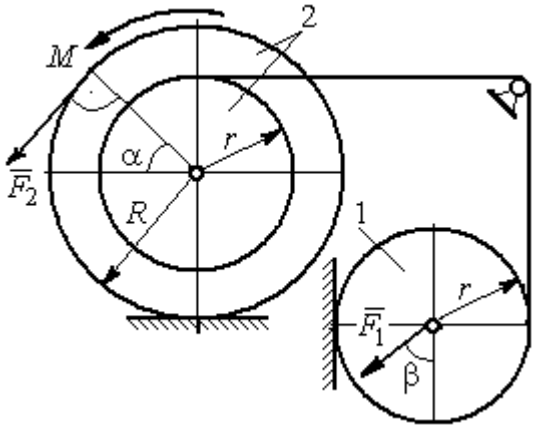
Радиус однородного диска *r*. Радиусы ступеней ступенчатого диска *R* и *r*. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

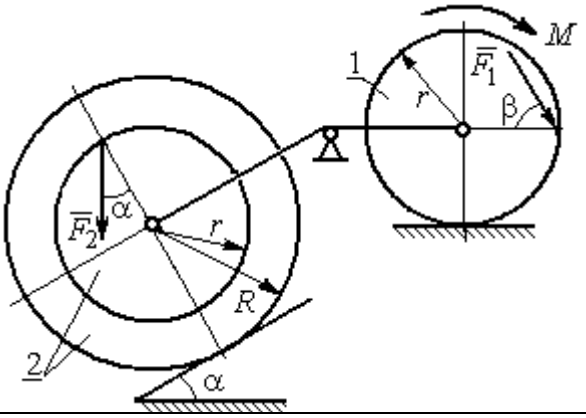
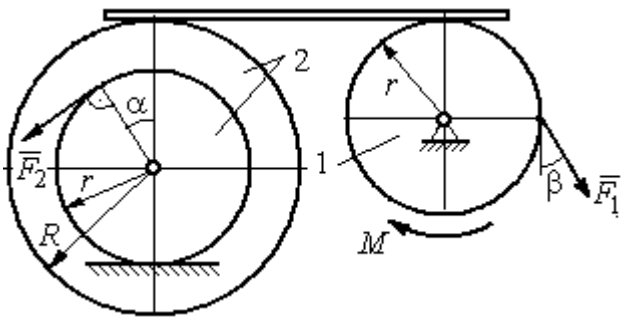
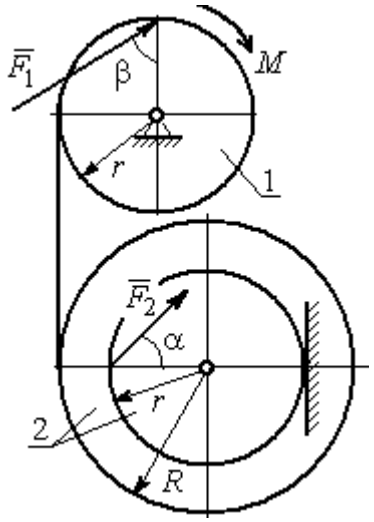
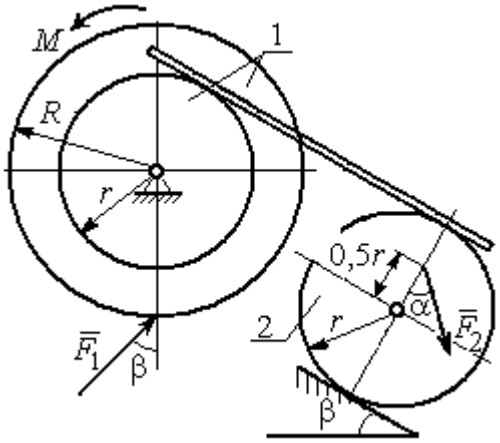
Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д5

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

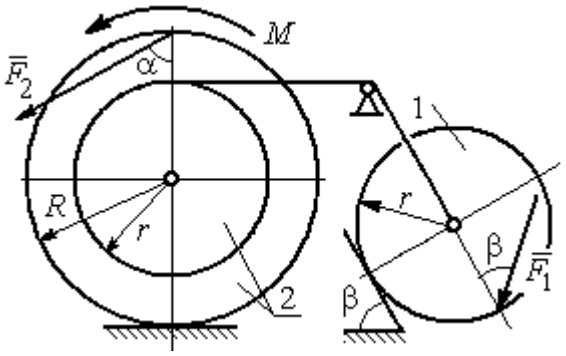
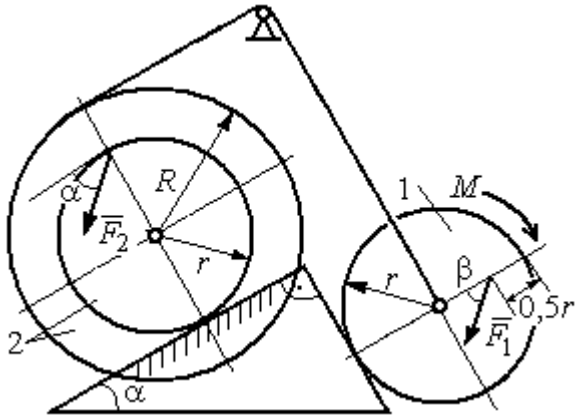
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты 10, 20, 30**
	

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Окончание табл. 5.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания.

Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

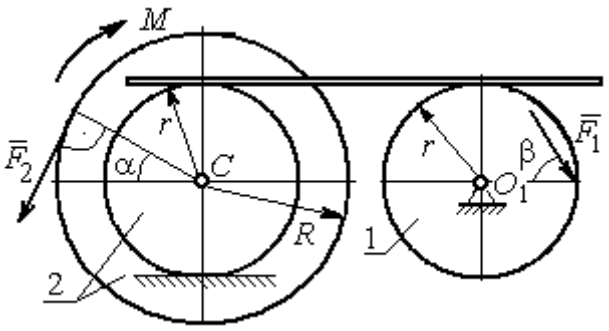


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н, $P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, радиусы дисков $R = 0{,}8$ м, $r = 0{,}6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0{,}4$ м.

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{сц}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

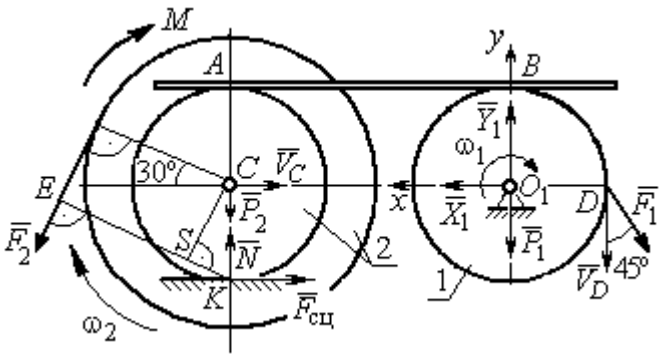


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C, ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка *K* на рис. 5.8). Тогда скорость точки *C* определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки *A* $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки *A* на диске 2 равна скорости точки *B* на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 .$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K; $\vec{\omega}_2$, ω_2 – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K. Мощ-

ность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке D, $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2}.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + \frac{M}{r} + F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1 + P_2\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с^2.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки *C* до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки *K* – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{r} = \frac{a_C}{r}$ = 11,42 рад/с^2. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с^2.

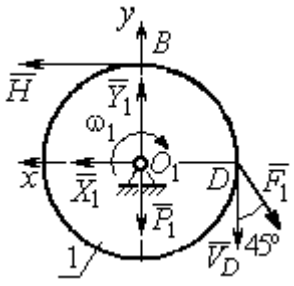


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси *z*, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси *z*.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси *z*: $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 ε_1 = 22,84 рад/с^2, найдем реакцию стержня *H* = 28,63 Н.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0, \quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28{,}63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27{,}94$ Н, $Y_1 = 96{,}57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100{,}53$ Н.

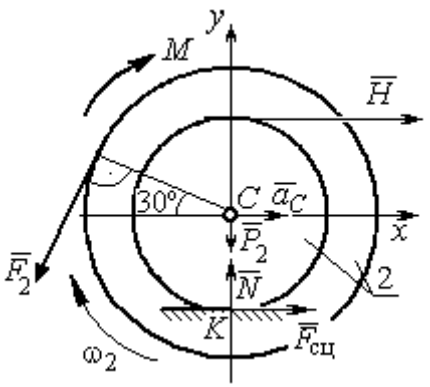


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат xCy показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2\cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2\cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с^2, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90{,}51$ Н.

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

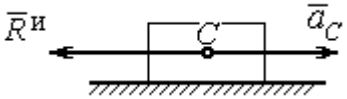


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$, равному по величине $R^{\text{и}} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

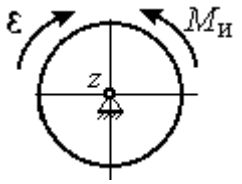


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{\text{и}}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси,

проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

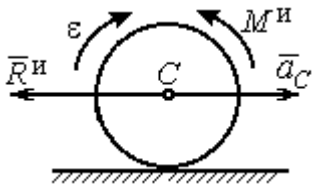


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма

элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

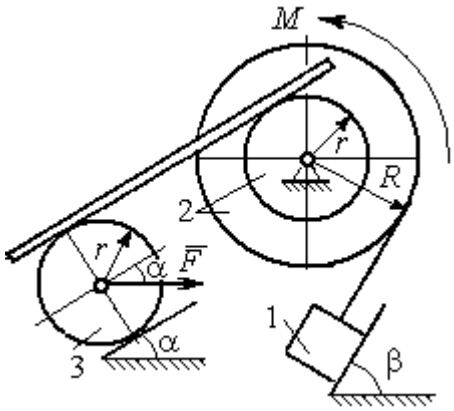
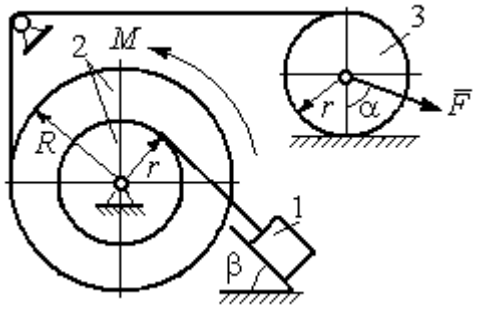
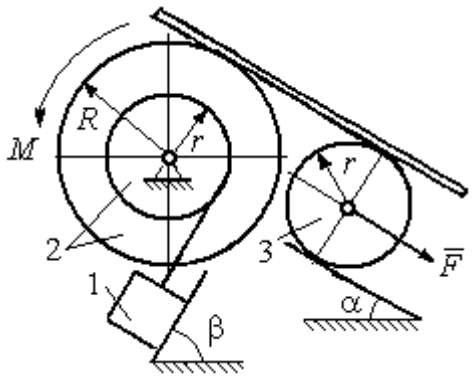
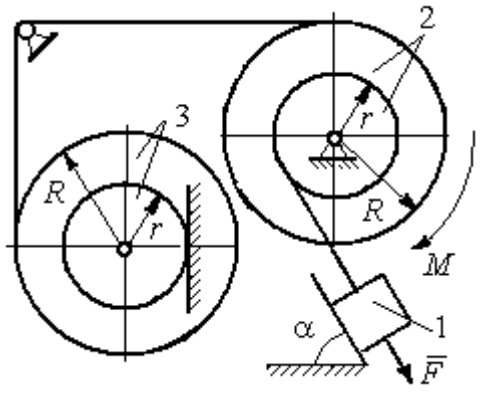
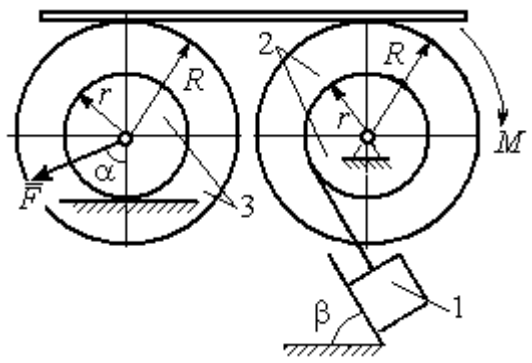
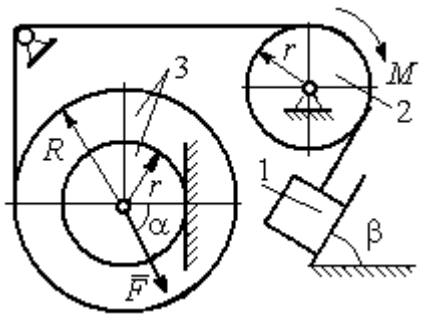
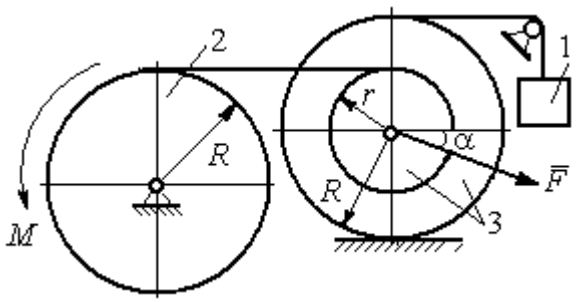
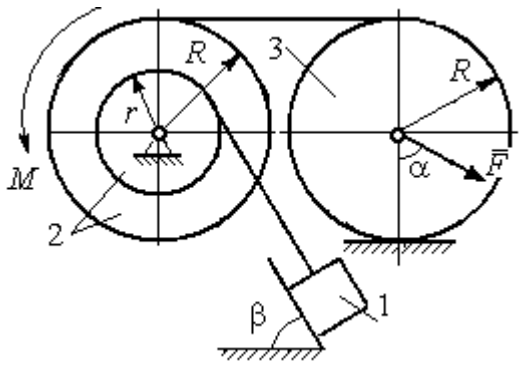
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

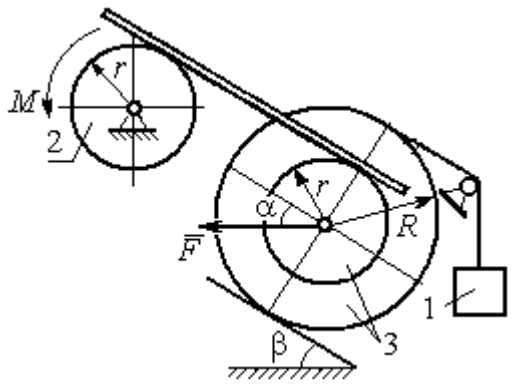
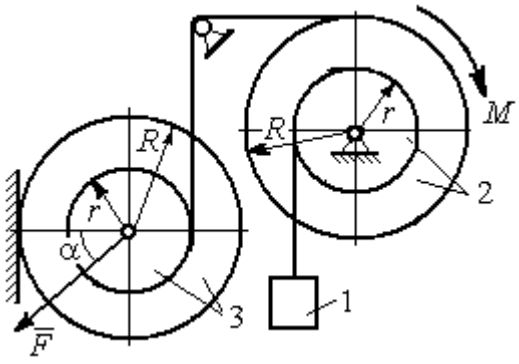
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+ t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+ t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилин-

дрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом M, приложенной к диску 3.

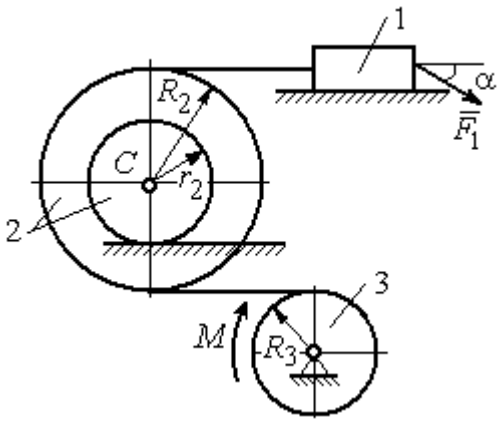


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент t = 1 с, если: P_1 = 10 Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 =$ 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; i_{2C} = 0,6 м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3, ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C, a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1, a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

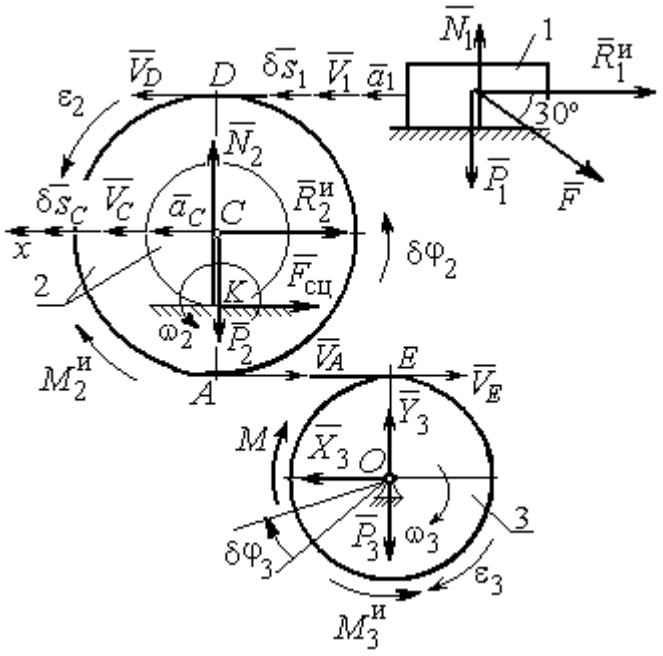


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^{\text{и}}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^{\text{и}} = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{\text{и}}$ в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой ра-

вен главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке *K* касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки *A* катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки *E* блока 3 равна скорости точки *A* катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки *D* катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0, \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ =$$

$$= \left[6(1 + 2t)\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2} \right) - 5(t + 1)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2} \right) 0{,}866 \right] \delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2g r_2}a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}}\delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}}\delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g}\left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2}\right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось x по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось x, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\dfrac{t^2}{2} + 1{,}29\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

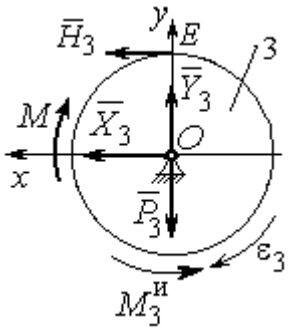


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3 R_3 - M_3^{и} = 0$, где $M_3^{и} = J_{3O}\varepsilon_3 = \dfrac{P_3 R_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2}$. Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2} = \frac{6(1 + 2t)}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2)}{2 g r_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с: $X_3 = -H_3$= – 41,04 Н, $Y_3 = P_3$= 15 Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 43,69 Н.

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$. Величина Q_k, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

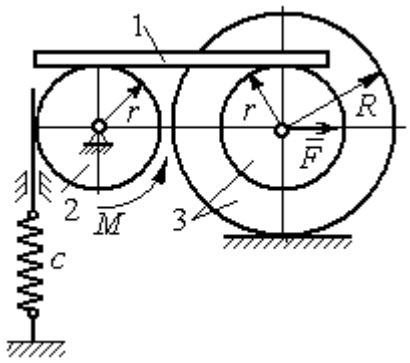
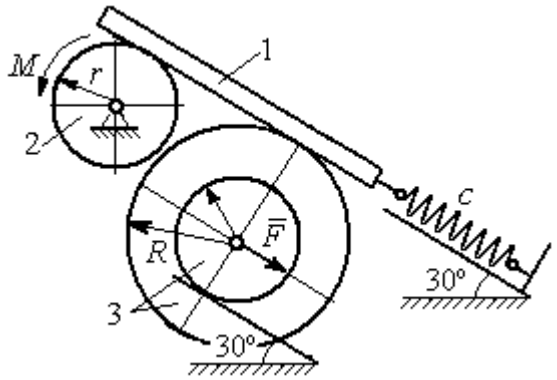
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

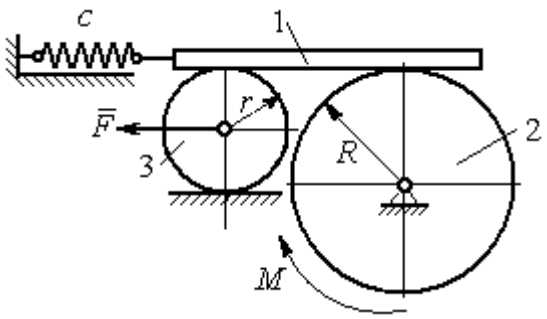
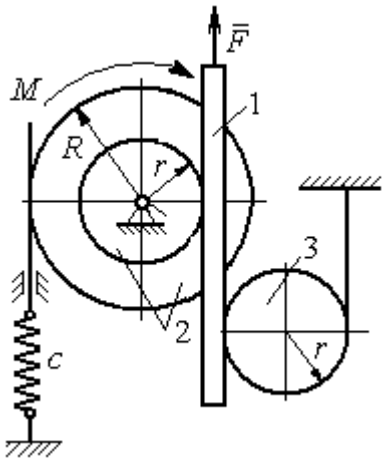
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20}, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

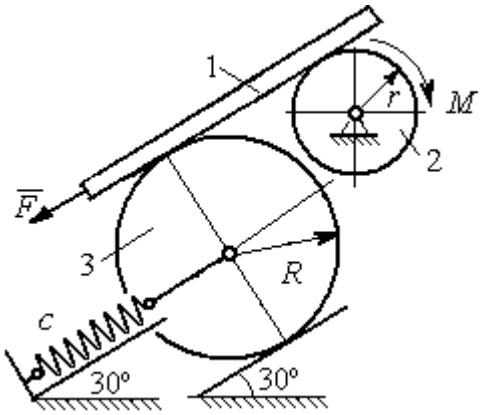
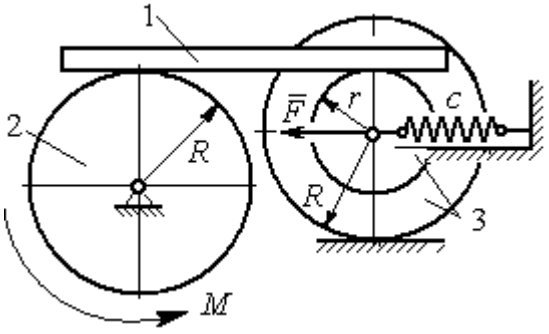
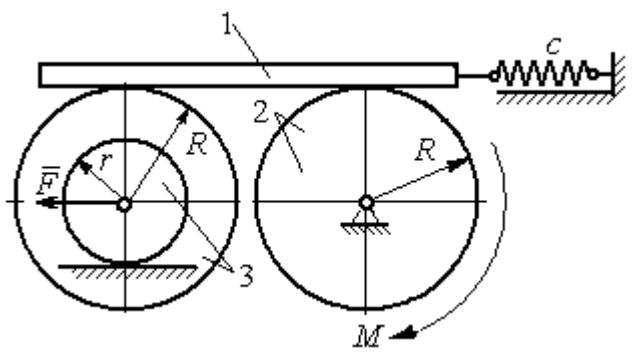
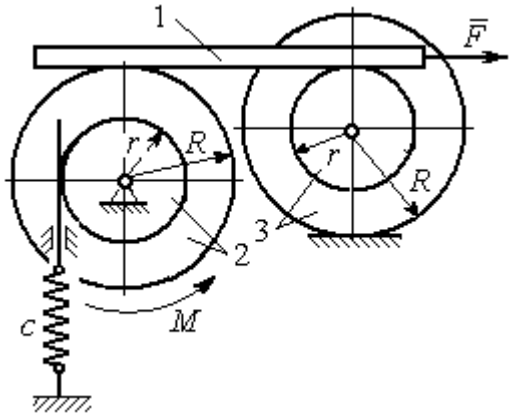
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

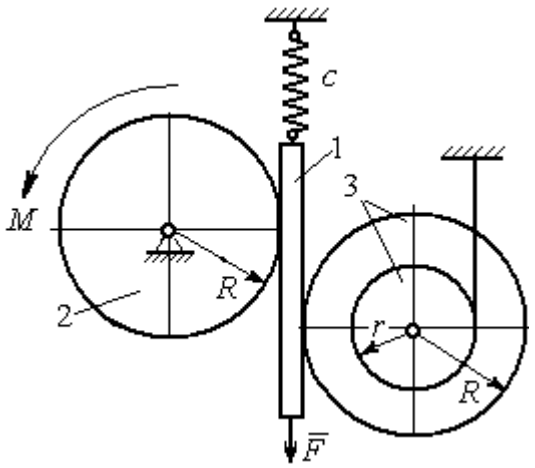
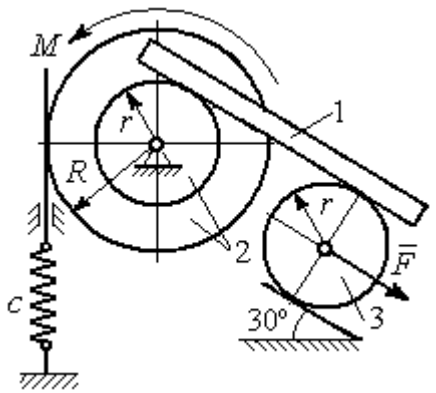
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	–
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	–

Окончание табл. 6.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	–10	–2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	–8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	–12	–4	65	0,4	0,6	0,5	–
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	–10	2	70	0,2	1,2	0,6	–
16	10	12	12	–5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	–6	–2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	–10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	–3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	–3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	–2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	–8	2	45	0,2	0,8	0,6	–
24	12	20	18	–4	–8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	–6	–2	60	0,1	1,4	0,7	–
26	8	12	10	10	–3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	–3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	–6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	–10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r, радиус однородного диска r. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует.

Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

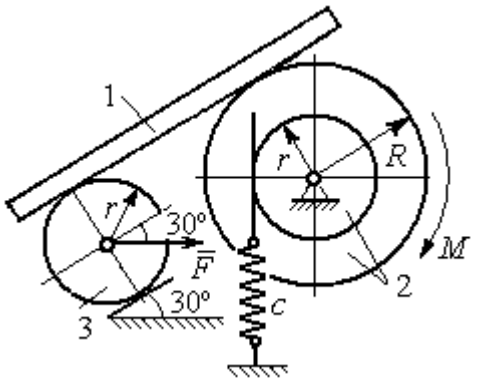


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

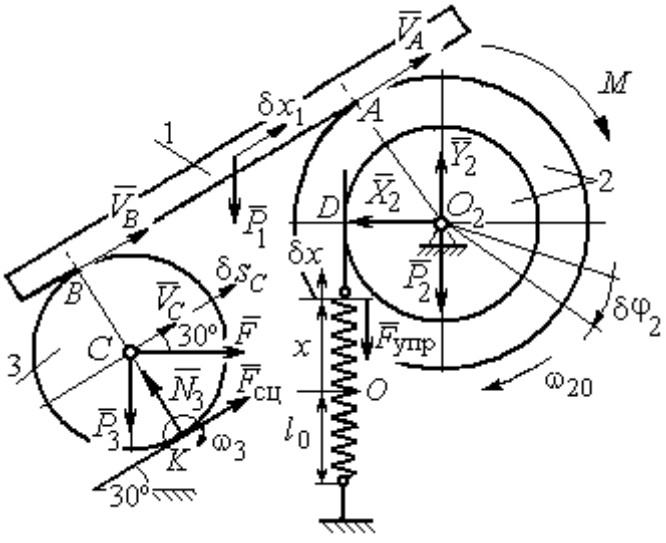


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T –

кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате *x*.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где m_1, V_1 – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси *z*, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; *r* – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2, ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки *A* блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_1^2=\frac{P}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{r}\right)^2=1{,}125\frac{P}{g}\dot{x}^2,\ \ T_2=\frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2=\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(r\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=2\frac{P}{g}\dot{x}^2,$$

$$T_3=\frac{1}{2}m_3V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2=0{,}422\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T=T_1+T_2+T_3=3{,}547\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой *x*, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси *x* (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2=\frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1: $\delta x_1=\frac{\delta xR}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C: $\delta S_C=\frac{\delta xR}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом *M*, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента *M*, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M)=M\delta\varphi_2=M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1)=P_1\delta x_1\cos120^\circ=-P_1\delta x_1\cos60^\circ=-\frac{P_1\delta xR}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы *F*: $\delta A(P_3)=P_3\delta s_C\cos120^\circ=-P_3\frac{\delta xR}{4r}$, $\delta A(F)=F\frac{\delta xR}{2r}\cos30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из неде-

формированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1\delta xR}{2r} - P_3\frac{\delta xR}{4r} + F\frac{\delta xR}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1\sin 2{,}63t + C_2\cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки *D* блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20}, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1 \cos 2{,}63t - 2{,}63C_2 \sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038 \sin 2{,}63t - 0{,}23 \cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\, x(t) = 0{,}057 \sin 2{,}63t - 0{,}34 \cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\, x(t) = 0{,}19 \sin 2{,}63t - 1{,}15 \cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны *R*. Найти уравнения движения системы в обоб-

щённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

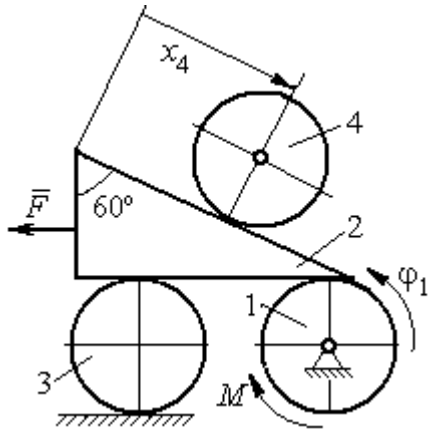
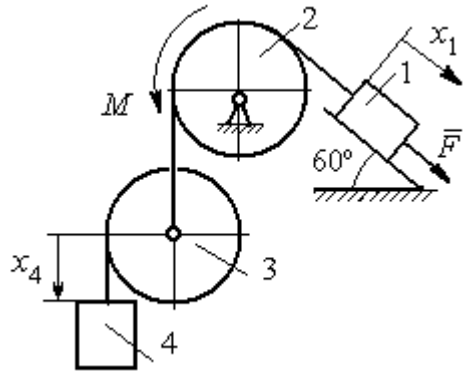
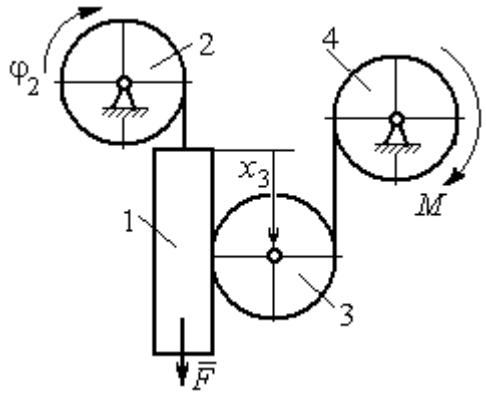
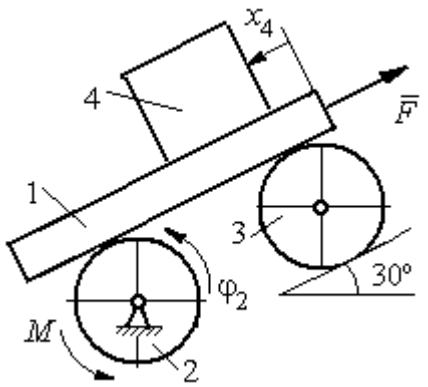
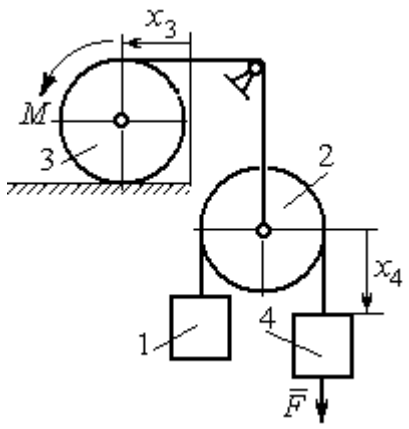
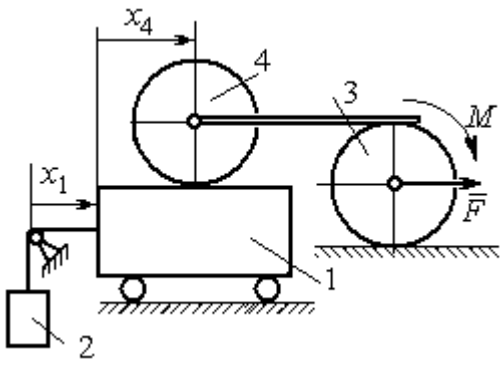
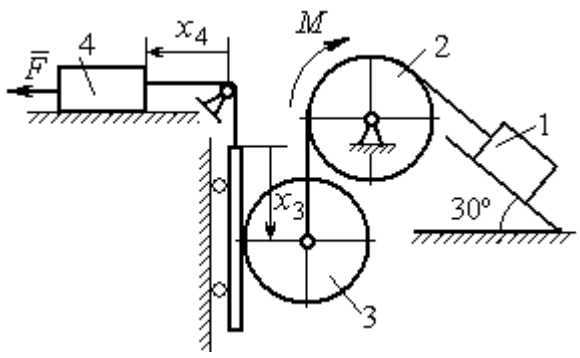
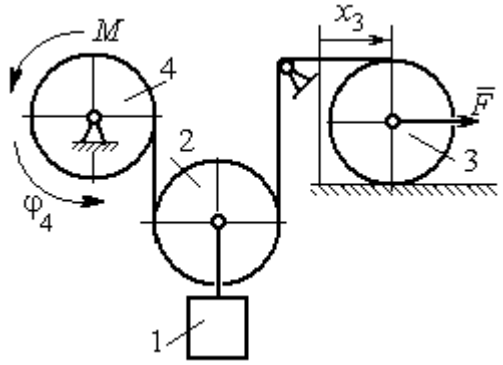
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д8

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

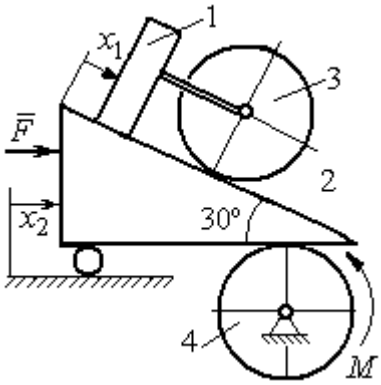
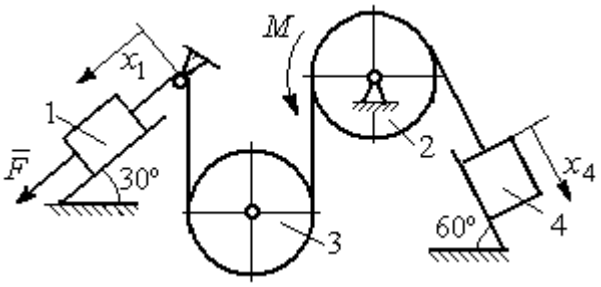
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P_1, Н	P	$2P$	P	$1{,}5P$	P	$3P$	P	$1{,}2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
P_2, Н	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
P_4, Н	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
R, м	$2r$	$1{,}5r$	$2{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	r	$1{,}5r$	r	$2r$	r	$1{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	$2r$	$2r$
F, Н	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$
M, Н·м	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Окончание табл. 6.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P_1, Н	4P	1,5P	P	2P	P	P	1,5P	1,5P	2P	P	P	2P	1,2P	3P	1,2P
P_2, Н	2P	2P	2P	4P	3P	4P	3P	4P	3P	2P	2P	1,2P	2P	3P	2P
P_3, Н	2P	2P	3P	2P	2P	3P	2P	2P	P	2P	3P	2P	P	P	3P
P_4, Н	1,5P	2P	3P	P	2P	2P	2P	P	2P	3P	P	P	2P	P	2P
R, м	1,5r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r	1,5r	2r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r
F, Н	2P	2P	P	3P	4P	2P	3P	2P	3P	P	3P	1,5P	4P	2P	3P
M, Н·м	3Pr	2Pr	4Pr	Pr	4Pr	4Pr	2Pr	Pr	4Pr	2Pr	4Pr	2Pr	2Pr	3Pr	2Pr

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, перекинутому через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

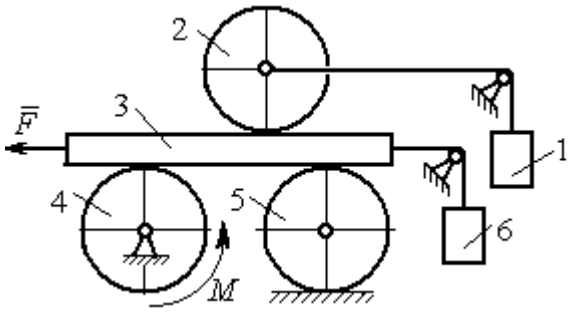


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение

катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

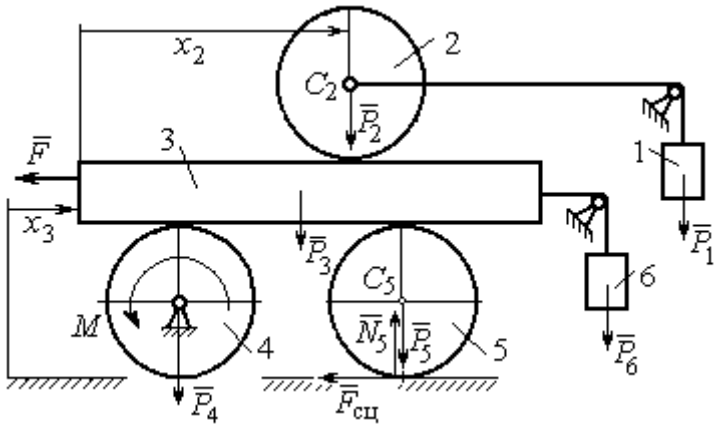


Рис. 6.16. Действующие силы
и обобщённые координаты механической системы

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где J_4, ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5 = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5, V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка *K* касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

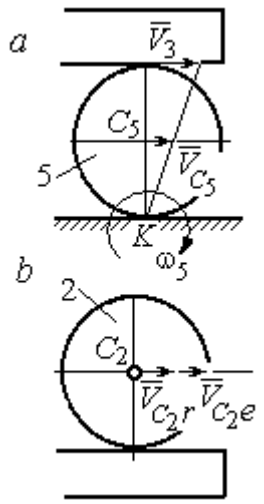


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном

движении: $\omega_2 = \dfrac{V_{C_2 r}}{R_2} = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \dfrac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \dfrac{P_1}{2g}V_1^2$, $T_6 = \dfrac{P_6}{2g}V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{P_3}{2g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2 + \frac{P_6}{2g}V_6^2,$$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \dfrac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \dfrac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \dfrac{P_2 R_2^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \dfrac{P_4 R_4^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \dfrac{P_5 R_5^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_2 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2 стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_3$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\vec{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

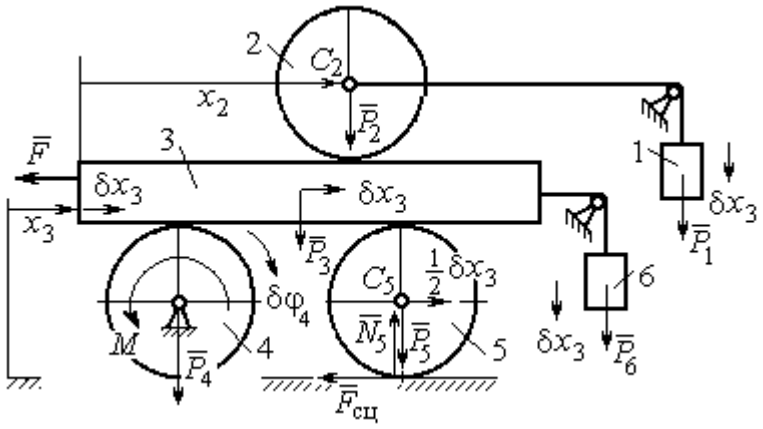


Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении δx_3: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \dfrac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении δx_3 с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -\dfrac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0, \delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2: $Q_{x_2} = P$.

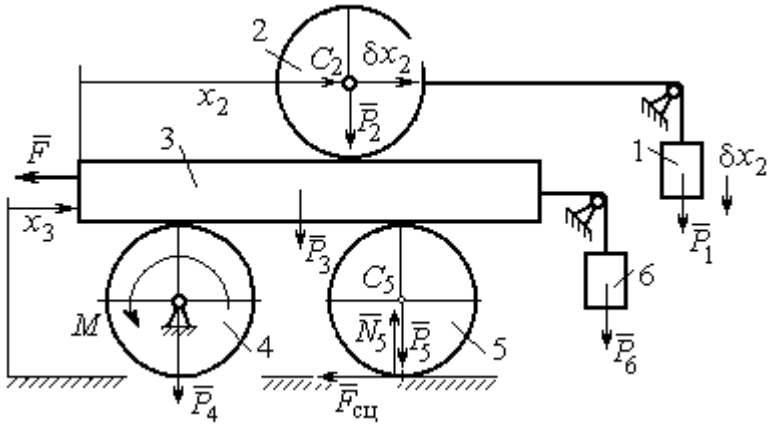


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}x_2 = \frac{1}{2r}x_2 = 0{,}097\frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4}x_3 = \frac{1}{2r}x_3 = -0{,}047\frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2}x_3 = -0{,}047gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024\frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев С. А*. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 9,75 Уч. изд. л. 6,5 Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет.
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы
с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы
с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155