Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.01 ФИЛОСОФИЯ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Профиль:
Производство и реновация машин и оборудования

формы обучения: **очная, заочная**

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Философии и культурологии	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Беляев В.П.	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

Критерии оценки доклада, сообщения	*Количество баллов*
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу

_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.02 ИСТОРИЯ

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Специальность
Производство и реновация машин и оборудования

форма обучения: очная, заочная

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Управления персоналом	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Ветошкина Т.А	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 17.04.2019	Протокол № 7 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

Рабочая программа дисциплины согласована с выпускающей кафедрой эксплуатации горного оборудования

Заведующий кафедрой _____ Симисинов Д.И.

подпись

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	4
2	Методические указания по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	9
4	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	10
5	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	11
	Заключение	14
	Список использованных источников	15

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия,

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в

качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;
- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю; групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим метода

2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной

дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения

воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;

- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Профиль
Производство и реновация машин и оборудования

квалификация выпускника: **бакалавр**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2019

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Иностранных языков и деловой коммуникации	горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Юсупова Л. Г.	к.т.н., доцент Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 6 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям……... 3
1.1 Повторение материала практических занятий……..... 3
1.2 Чтение и перевод учебных текстов……. 42
1.3 Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций) ..……..... 60
1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения) ……. 73
1.5 Подготовка к контрольной работе 73

II. Другие виды самостоятельной работы……. 73
2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания:
2.1.1 Подготовка к ролевой игре……..... 73
2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию ……..... 74
2.1.3 Подготовка к опросу ……..... 75
2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного……. 75
2.3 Подготовка доклада…….. 94
2.4 Подготовка к тесту……..... 95
2.5 Подготовка к экзамену…….. 99

I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям

1. Повторение материала практических занятий

Практические занятия направлены на развитие умений иноязычного говорения в рамках заданных РПД тем: бытовая сфера общения (Я и моя семья); учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование); социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир); профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность).

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My family

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My student's life

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

Ekaterinburg – an Industrial Centre

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern

Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My speciality is Geology

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth's surface and on its surface.

2. Petrology which studies the rocks of the Earth.

3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.

4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.

5. Historic Geology which treats of the Earth's history.

6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.

7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

Практические занятия направлены также на формирование грамматического навыка по темам: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №1:

Таблица №1

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435

Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*	102-104	6-8
Оборот *there+be*	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

Повторите материал практических занятий!

Порядок слов в английском предложении

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

I	**II**	**III Дополнение**			**IV Обстоятельство**
Подлежащее	**Сказуемое**	**Косвенное без предлога**	**Прямое**	**Косвенное с предлогом**	
We Мы	study изучаем		math математику		
He Он	gives дает	us нам	lessons уроки		in this room. в этой комнате
She Она	reads читает		her notes свои заметки	to Peter Петру	every day. каждый день

Вопросительное предложение

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

Общие вопросы

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.
Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?
Примеры с модальными глаголами:
She can drive a car. – Она умеет водить машину.
Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot)

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.
Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?
Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

Ответы на общие вопросы

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not
Например: Are you a student? - Ты студент?
Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.
Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

Специальные вопросы

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.
Специальные вопросы могут начинаться словами:
who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?
when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?
how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?
how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

Вопрос к прямому дополнению:
What are you reading? Что ты читаешь?
What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

Вопрос к обстоятельству

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.
When will he come back? – Когда он вернется?
What did he do it for? Зачем он это сделал?
Where are you from?

Вопрос к определению

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?
Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

Вопрос к сказуемому

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: ”Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?”, например:
What does he do? Что он делает?

Специальные вопросы к подлежащему

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)
what - что (для неодушевленных существительных)
The teacher read an interesting story to the students yesterday.
Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):

Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

Альтернативные вопросы

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

Разделительные вопросы

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:

You speak French, don't you? You are looking for something, aren't you? Pete works at a plant, doesn't he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:

It is not very warm today, is it? John doesn't live in London, does he?

Безличные предложения

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

Местоимение. The Pronoun.
Классификации местоимений.

1	**personal**	личные
2	**possessive**	притяжательные
3	**demonstrative**	указательные
4	**indefinite and negative**	неопределенные и отрицательные
5	**quantifiers**	количественные
6	**reflexive**	возвратные
7	**reciprocal**	взаимные
8	**relative**	относительные
9	**defining**	определительные
10	**interrogative**	вопросительные

I. Личные (personal) местоимения

Общий падеж		**Объектный падеж**	
I	я	**me**	мне, меня
he	он	**him**	его, ему
she	она	**her**	ей, о ней
it	оно, это	**it**	ей, ему, этому
we	мы	**us**	нам, нас

they	они	**them**	им, их
you	ты, вы	**you**	тебе, вам

Внимание! He (он) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

he	**she**	**it**
a boy – мальчик **a man –** мужчина **brother –** брат **father –** отец **Nick –** Николай **Mr Grey –** мистер Грей	**a girl –** девочка **a woman –** женщина **sister – с**естра **motherч–** мама **Kate –** Катя **Mrs Grey –** миссис Грей	**a cat –** кот **a wall –** стена **rain –** дождь **love –** любовь **a hand –** рука **an apple -** яблоко

Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).

II. Притяжательные (possessive) местоимения

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы - основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
Whose pen is it? - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

Личное местоимение	**Основная форма**	**Абсолютная форма**
I – я **he –** он **she –** она **it – оно,** это **we –** мы **you –** ты, вы **they -** они	**my (toy) -** моя (игрушка) **his (toy) -** его (игрушка) **her (toy) -** ее (игрушка) **its (toy) -** его (не о человеке) **our (toy) -** наша (игрушка) **your (toy) -** ваша, твоя (игрушка) **their (toy) -** их (игрушка)	**his -** его **hers -** ее **its -** его (этого) **ours -** наша **yours -** ваша, твоя **theirs -** их

III. Указательные (demonstrative) местоимения

this (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения

Местоимения some, any, every, и их производные

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
I have/l have got three apples. *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

Производные от неопределенных местоимений

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

Thing используется для неодушевленных (что-то):

some	**thing**	**something –** *что-то, что-нибудь*
any		**anything -** *что-то, что-нибудь*
no		**nothing -** *ничего, ничто*

every	**everything** - *все*
Body/one - для одушевленных (кто-то):	
some	**somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь*
any	**anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь*
body/one	
no	**nobody / no one -** *никого, никто*
every	**everybody /everyone –** *все, каждый*
Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*	

somewhere - *где-нибудь, куда-нибудь*	**anywhere** - *где угодно*
nowhere - *нигде*	**everywhere** - *везде*

V. Количественные (quantifiers) местоимения

Many и much - оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.	
many girls - *много девочек* **many boys** - *много мальчиков* **many books** - *много книжек*	**much snow** - *много снега* **much money** - *много денег* **much time** - *много времени*
How many? } **сколько?** **How much?** } **сколько?**	**How many girls?** - *Сколько девочек?* **How much sugar?** - *Сколько сахара?* **How much sugar?** - *Сколько сахара?*
a lot of... - много - используется и с исчисляемыми, и с неисчисляемыми существительными a lot без (of) используется и без существительного.	girls – много девочек **a lot of** sugar - много сахара
Сравните: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.* He writes **a lot.** *Он много пишет.*	
<u>В утвердительных</u> предложениях используйте **a lot of.** <u>В отрицательных</u> и в вопросительных **many/much,** **Сравните:** (+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*. (-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?* Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":** Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.	

Few, little, a few, a little
С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало), а с исчисляемыми - few (мало).

few books - мало книг **few girls** - мало девочек **few boys** - мало мальчиков	**little time** - мало времени **little money** - мало денег **little snow** - мало снега
little } **мало (т.е. надо еще)** **few** } **мало (т.е. надо еще)**	**a little** } **немного (т.е. пока хватает)** **a few** } **немного (т.е. пока хватает)**

VI. Возвратные (reflexive) местоимения

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

Личное местоимение	**Возвратное местоимение**	**Пример**	**Перевод**
I	myself	I did it myself.	Я сделал это сам
he	himself	He did it himself.	Он сделал это сам.
she	herself	She did it herself.	Она сделала это сама
you	yourself	You did it yourself.	Вы сделали это сами.
they	themselves	They did it themselves.	Они сделали это сами.
we	ourselves	We did it ourselves.	Мы сделали это сами.

VII. Взаимные (reciprocal) местоимения

Each other - друг друга (относится к двум лицам или предметам).
One another - друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
They spoke to <u>each other</u> rather friendly. *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
They always help <u>one another</u>. *Они всегда помогают друг другу.*

VIII. Относительные (relative) местоимения

Who (whom), whose, which, that

who	**Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)** **The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.*
	Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение) **The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.*
which	**Для неодушевленных предметов и животных** **The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.*
whose	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.*
	Для неодушевленных существительных **We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.*
that	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.*
	Для неодушевленных существительных **This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.*

IX. Определительные (defining) местоимения

all

Употребление	**Примеры**	**Перевод**
определяет неисчисляемые	He spent **all his** time fishing on the	Он провел все свое время,

существительные	lake**.**	ловя рыбу на озере.
определяет исчисляемые существительные	**All the** boys like football. **(the после all!)**	Все мальчишки любят футбол.
all = everything	I know **all/everything.**	Я знаю всё.
all = everybody	**All** were hungry. **Everybody** was hungry.	Все были голодны. Все были голодны.
we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them	We **all** love you very much = **All** of us love you very much.	Мы все тебя очень любим

both

Употребление	Примеры	Перевод
определяет существительные	**Both (the/my) friends like football.**	Оба моих друга любят футбол
допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both	**Both these/the men are Russian.**	Оба (эти) мужчины - русские.
употребляется вместо существительного	**He gave me two apples. Both were sweet.**	Он дал мне два яблока. Оба были сладкими.
they both = both of them you both = both of you we both = both of us	**They both (both of them) came to visit us.**	Они оба пришли навестить нас.
в устойчивой конструкции **both...and.**	**Both mother father were at home**	И мама, и папа были дома.
в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither**	**Both of them know English. Neither of them know English.**	Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского.

either/neither

	Употребление	Примеры	Перевод
either	любой из двух (артикль не ставится)	**I've got 2 cakes. Take either cake.**	У меня 2 пирожных. Возьми любое.
	каждый, оба, и тот, и другой	**There are windows on either side of the house.**	С обеих сторон дома есть окна.
	заменяет существительное (глагол в ед. числе)	**Either of dogs is always hungry.**	Любая из собак вечно голодная.
neither	отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой)	**Neither of examples is correct.**	Ни один из примеров не верен.
	в констр. neither.. .nor (ни.. .ни)	**I like neither tea, nor coffee.**	Я не люблю ни чай, ни кофе.

other, another, the other, the others (другой, другие)

	Употребление	Примеры	Перевод
the other	другой (второй), другой из двух	**You've got 2 balls: one and the other.**	У тебя 2 мяча: один и другой.
another	другой из многих, еще один	**Take another ball.**	Возьми другой мяч. (Любой, но не этот.)
other	другие (любые), не последние	**Take other 2 balls.**	Возьми другие 2 мяча. (Из многих.)

the others	другие (определенные)	**There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.**	Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие.

X. Вопросительные (interrogative) местоимения

what	что	**What's this?**	Что это?
which	который	**Which of them?**	Который из них?
who	кто, кого	**Who was that?**	Кто это был?
whom	кого	**Whom did you meet?**	Кого ты встретил?
whose	чей	**Whose book is it?**	Чья это книга?

Имя существительное. The Noun

Категории	Существительное в русском языке	Существительное в английском языке
Число	**Изменяется**	**Изменяется**
Падеж	**Изменяется**	**Не изменяется**

The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

Способ образования	Примеры	Перевод
после глухих согласных	**a book - books** **a cup - cups**	**книга - книги** **чашка - чашки**
после звонких согласных и гласных -	a name - names a girl - girls	**имя - имена** **девочка - девочки**
после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es	a palace - palaces a bush - bushes a box - boxes a church - churches	дворец - дворцы куст - кусты коробка - коробки церковь - церкви
слово заканчивается на -y: 1) гласная +y	**a toy - toys** **a boy - boys**	игрушка - игрушки мальчик - мальчики
2) согласная **+** y	**a family - families** **a story - stories**	**семья - семьи** **история - истории**
слово заканчивается на *-file*	**a leaf - leaves** **a shelf - shelves**	лист - листья полка - полки

Особые случаи образования множественного числа

Ед. число	**Мн. число**	**Перевод**
man	men	мужчина - мужчины
woman	women	женщина - женщины
foot	feet	нога (стопа) - ноги (стопы)
child	children	ребенок - дети
goose	geese	гусь - гуси
mouse	mice	мышь - мыши
ox	oxen	**бык - быки**
tooth	teeth	**зуб - зубы**

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):

This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

Со словами one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.**	
What apple do you want? **Какое ты хочешь яблоко?** **The red one. Красное.**	**What apples do you want?** **Какие яблоки ты хочешь?** **The red ones. Красные.**

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски.	This girl speaks English well.
Р. п. Это собака той девочки.	It's a dog of that girl.
Д. п. Я дал яблоко той девочке. .	I gave an apple to that girl.
В. п. Я вижу маленькую девочку. .	1 can see a little girl.
Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой.	1 like to play with this girl.
П. п. Я часто думаю об этой девочке.	1 often think about this girl.

Притяжательный падеж. The Possessive Case
Образование притяжательного падежа

	Образование	**Примеры**	**Перевод**
существительные в единственном числе	**'s**	**bird's house** **child's ball**	домик птички мячик ребенка
существительные во множественном числе (группа исключений}	**'s**	**children's bail** **women's rights**	мячик детей права женщин
существительное во множественном числе	**'**	**girls' toy** **birds' house**	игрушка девочек домик птичек

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother's book - мамина книга,

this girl's bail - мячик девочки,

the bird's house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

Артикль. The Article

1. Неопределенный a/an (используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

2. Определенный the (может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово "an hour" (час) начинается с согласной буквы "h", но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю "a" также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

Использование неопределенного артикля a

один из множества (любой)	This is a cat.
первое упоминание в тексте	I see a bird.
при упоминании профессии	My brother is a pilot.
в восклицательных предложениях	What a good girl! What a surprise! Such a fine room!
вместо слова один	She is coming for a weak.
в определенных конструкциях there is a... I have a… he has a... I see a... this is a... that is a… It is a... Iama… he/she is a…	There is a book here. I have got a nice coat. He has a kind smile. I see a wolf. This is a dog. That is a doctor. It is a red pen. I am a good swimmer. He/she is a tourist
в ряде устойчивых словосочетаний at a quarter.., in a loud, (a low, an angry voice) to have a good time a lot of to go for a walk such a... after a while in a day (a month, a week, a year)	Come at a quarter to 8. Don't speak to him in an angry voice. We had a good time in the country. She has got a lot of presents. Let's go for a walk. He is such a clever boy. You'll see them after a while. We are living in a day.

Использование определенного артикля the

если речь идет о конкретном лице или предмете	The pen is on the table.
при повторном упоминании того же самого объекта	I see a cat. The cat is black.
если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света	the sun, the moon, the Earth
со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный)	The only man I love the main road to the left, to the right It was the right answer. the final test
с порядковыми числительными	the first, the tenth

с прилагательными в превосходной степени	the kindest, the most interesting the best
с музыкальными инструментами и танцами	to play the piano, to dance the tango
с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры)	The Britons keep their traditions.
с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов	the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street
с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of	the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard

Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний

in the middle, in the corner	The table is in the middle of the room.
in the morning, In the evening, in the afternoon	I never drink coffee in the evening.
what's the use?	What's the use of going there so late?
to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market	Do you like going to the theatre? He works at the shop.
at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market	The fact is that I have no money at all.
the fact is (was) that...	Where is the doctor?
where is the…?	We always spend summer in the country.
in the country, to the country	

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

Случаи, когда артикль не употребляется

если, перед существительным стоит притяжательное местоимение	a pen - my pen a dog - his dog the teacher - our teacher the apple - her apple
если перед существительным стоит указательное местоимение	the cats - those cats the books - these books a mouse - this mouse
если стоит другое существительное в притяжательном падеже	a car - father's car the horse - farmer's horse a bike - brother's bike the doll - sister's doll
если перед существительным стоит, количественное числительное	5 balls, 7 bananas, 2 cats
если перед существительным стоит отрицание "no"	She has no children. I see no birds.
перед именами	Mike, Kate, Jim, etc
с названиями дней недели	Sunday, Monday, etc.
с названиями месяцев	May, December, etc.
с названиями времен года	in spring, in winter
с названиями цветов	white, etc. I like green
с названиями спортивных игр	football, chess, etc.
с названиями блюд, напитков	tea, coffee, soup, etc,
с названиями праздников	Easter, Christmas, etc.

с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the	English, etc. I learn English, the English language
с названиями стран	Russia, France, etc HO: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo
с названиями городов	Moscow, Paris, etc.
с названиями улиц, площадей	Trafalgar Square
с названиями парков	St James' Park, Hyde Park
с названиями мостов	Tower Bridge
с названиями одиночных гор	Kilimanjaro
с названиями озер	Loch Ness
с названиями континентов	Asia, Australia, etc.
с названиями одиночных островов	Cyprus
если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное местоимение	what animals can swim? I know what thing you have lost!

ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

По своей структуре глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

По значению глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

Все формы глагола в английском языке делятся на личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

Глаголы в изъявительном наклонении выражают реальное действие, передают факты:

His son goes to school. Его сын учится в школе.

She has written an interesting article. Она написала интересную статью.

A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

Глаголы в повелительном наклонении выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:

"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.

Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

Глаголы в сослагательном наклонении выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

Глаголы в действительном залоге выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

Глаголы в страдательном залоге выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида. Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:

Он прочитал эту статью с интересом.

Глаголы несовершенного вида обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Am I?
I am	I'm	I am not	I'm not	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Is he?
He is	He's	He is not	He isn't	Is she?
She is	She's	She is not	She isn't	Is it?
It is	It's	It is not	It isn't	Are we?
We are	We're	We are not	We aren't	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Are they?
They are	They're	They are not	They aren't	

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I was	I was not	I wasn’t	Was I?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
He was	He was not	He wasn’t	Was he?

She was	She was not	She wasn’t	Was she?
It was	It was not	It wasn’t	Was it?
We were	We were not	We weren’t	Were we?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
They were	They were not	They weren’t	Were they?

ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there’s. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn’t …/There aren’t … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.

Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.

It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)

There are three books on the desk.

They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

Конструкция There was/There were

This is a modern town today.

There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.

This is the same town fifty years ago.

There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
There was	There was not	There wasn't	Was there?
There were	There were not	There weren't	Were there?

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.
б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.
в) в следующих высказываниях: I've got a headache. I've got a temperature. I've got a cough, I've got a toothache, I've got a cold, I've got a problem.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Have I (got)?
I have (got)	I've (got)	I have not (got)	I haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Has he (got)?
He has (got)	He's (got)	He has not (got)	He hasn't (got)	Has she (got)?
She has (got)	She's (got)	She has not (got)	She hasn't (got)	Has it (got)?
It has (got)	It's (got)	It has not (got)	It hasn't (got)	Have we (got)?
We have (got)	We've (got)	We have not (got)	We haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Have they (got)?
They have (got)	They've (got)	They have not (got)	They haven't (got)	

Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I had	I did not have	I didn't have	Did I have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
He had	He did not have	He didn't have	Did he have?
She had	She did not have	She didn't have	Did she have?
It had	It did not have	It didn't have	Did it have?
We had	We did not have	We didn't have	Did we have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
They had	They did not have	They didn't have	Did they have?

Имя прилагательное. The Adjective

Категории	**Прилагательное в русском языке**	**Прилагательное в английском языке**
Число	изменяется	не изменяется
Род	изменяется	не изменяется
Падеж	изменяется	не изменяется

Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе

ни приставок, ни суффиксов: small - *маленький*, **long** - *длинный*, **white** - *белый*.
К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

Суффиксальное образование имен прилагательных

Суффикс	Пример	Перевод
- ful	use**ful** doubt**ful**	**полезный** **сомневающийся**
- less	help**less** use**less**	**беспомощный** **бесполезный**
- ous	fam**ous** danger**ous**	**известный** **опасный**
- al	form**al** centr**al**	**формальный** **центральный**
- able	eat**able** cap**able**	**съедобный** **способный**

Приставочный способ образования имен прилагательных

Приставка	Пример	Перевод
un -	**un**cooked **un**imaginable	**невареный** **невообразимый**
in -	**in**capable **in**human	**неспособный** **негуманный**
il -	**il**legal **il**liberal	**нелегальный** **необразованный**
im -	**im**possible **im**practical	**невозможный** **непрактичный**
dis -	**dis**honest **dis**agreeble	**бесчестный** **неприятный**
ir -	**ir**regular **ir**responsible	**неправильный** **безответственный**
Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый, **snow-white –** белоснежный.		

Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing

- ed	**- ing**
Описывают чувства и состояния	**Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства**
interested – интересующийся, заинтересованный	**interesting** - интересный
bored - скучающий	**boring** - скучный
surprised - удивленный	**surprising** - удивительный

Степени сравнения прилагательных

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**
Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:
- положительная степень сравнения **(Positive Degree);**
- сравнительная степень сравнения **(Comparative Degree);**
- превосходная степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и

превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

1. -er. -est

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке - добавляем "е" (большой - больше, холодный - холоднее).

Превосходная степень образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
cold - холодный	cold**er** - холоднее	the cold**est** - самый холодный
big - большой	bigg**er** - больше	the bigg**est** - самый большой
kind - добрый	kind**er** - добрее	the kind**est** - самый добрый

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
clever — умный	clever**er - умнее**	**the** clever**est - самый умный**
easy - простой	eas**ier - проще**	**the** easi**est - самый простой**
able - способный	abl**er - способнее**	**the** abl**est - самый способный**
busy - занятой	bus**ier - более занятой**	**the** busi**est - самый занятой**

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **"e" ,** то при прибавлении **– er и – est немое "e" опускается:**

larg**e – larger - the** larg**est /** большой – больше – самый большой

brav**e – braver – the** brav**est /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

big – bigg**er – bigg**est /** большой – больше – самый большой

hot – hott**er –** hott**est /** горячий – горячее – самый горячий

thin – thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на "y" с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **"y" переходит в "i":**

busy – bus**ier – bus**iest / **занятой – более занятой – самый занятой**

easy – eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

2. more, the most

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
beautiful - красивый	**more beautiful** - красивее	**the most beautiful** - самый красивый
interesting – интересный	**more interesting** - интереснее	**the most interesting** - самый интересный
important - важный	**more important** - важнее	**the most important** - самый важный

Особые формы

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень

good - хороший **bad** - плохой **little** - маленький **much/many** - много **far** - далекий/далеко **old** - старый	**better** - лучше **worse** - хуже **less** - меньше **more** - больше **farther/further** - дальше **older/elder** - старше	**the best** - самый лучший **the worst** - самый плохой **the least** - самый маленький, меньше всего **the most** - больше всего **the farthest/furthest** - самый дальний **the oldest/eldest** - самый старый

3. less. the least

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
beautiful – красивый **interesting -** интересный **important** - важный	**less beautiful** - менее красивый **less interesting –** менее интересный **less important** - менее важный	**the least beautiful –** самый некрасивый **the least interesting –** самый неинтересный **the least important –** самый неважный

Другие средства сравнения двух предметов или лиц

Конструкция	Комментарий	Примеры
As…as (такой же, так же)	**Для сравнения двух объектов одинакового качества**	He is **as** a strong **as** a lion Он такой же сильный, как лев. She is **as** clever **as** an owl**.** Она такая же умная, как сова.
Not so…as (не такой, как)	**в отрицательных предложениях**	He is **not so** strong **as** a lion. Он не такой сильный, как лев**.** She is **not so** clever **as** an owl. Она не такая умная, как сова.
The…the (с двумя сравнительными степенями)	**показывает зависимость одного действия от другого**	**The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся. **The more** I learn this rule **the less** I understand it. Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю.

Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

Числительное. The numeral

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

126 – one hundred twenty six

1139 – one thousand one hundred and thirty nine

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

НО: окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **"of":**

hundreds of children – сотни детей

thousands of birds- тысячи птиц

millions of insects – миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

20+1=21 (twenty + one = **twenty one**)

60+7=67 (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

Как читать даты

1043	ten forty-three
1956	nineteen fifty-six
1601	sixteen o one
2003	two thousand three
В 2003 году	in two thousand three
1 сентября	the first of September
23 февраля	the twenty-third of February

ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:
224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

Образование видовременных форм глагола в активном залоге

Present Simple употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

Present Continuous употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],
Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

Present perfect употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

Present perfect continuous употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.

Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

Past simple употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn't use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

Past continuous употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday

afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

Past perfect употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,
They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,
She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

Future simple употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

Be going to употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,
Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
No. Why?
I need to make some photocopies.

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

Практическая работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: модальные глаголы и их эквиваленты, образование видовременных форм глагола в пассивном залоге, основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь, неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий, основные сведения о сослагательном наклонении.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице:

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Модальные глаголы и их эквиваленты	295	47
Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге	236	71, 115
Основные сведения о согласовании времён	323-328	269
Прямая и косвенная речь	324	268
Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий	311-322	132, 162, 173, 192, 193
Основные сведения о сослагательном наклонении	329	224

Модальные глаголы

Глаголы	**Значение**	**Примеры**
CAN	физическая или умственная возможность/умение	I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать.
	возможность	You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play

		football in the street. – На улице нельзя играть в футбол.
	вероятность	They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент.
	удивление	Can he have said that? – Неужели он это сказал?
	сомнение, недоверчивость	She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала.
	разрешение	Can we go home? — Нам можно пойти домой?
	вежливая просьба	Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час?
MAY	разрешение	May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу?
	предположение	She may not come. – Она, возможно, не придет.
	возможность	In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей.
	упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)**	You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать.
MUST	обязательство, необходимость	He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги.
	вероятность (сильная степень)	He must be sick. — Он, должно быть, заболел.
	запрет	Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке.
SHOULD OUGHT TO	моральное долженствование	You ought to be polite. – Вы должны быть любезными.
	совет	You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу.
	упрек, запрет	You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт.
SHALL	указ, обязанность	These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых обстоятельствах.
	угроза	You shall suffer. — Ты будешь страдать.
	просьба об указании	Shall I open the window? – Мне открыть окно?
WILL	готовность, нежелание/отказ	The door won't open. — Дверь не открывается.
	вежливая просьба	Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной?
WOULD	готовность, нежелание/отказ	He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос.
	вежливая просьба	Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной.
	повторяющееся/привычное действие	We would talk for hours. – Мы беседовали часами.
NEED	необходимость	Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать?
NEEDN'T	отсутствие необходимости	She needn't go there. — Ей не нужно туда идти.
DARE	Посметь	How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить?

Модальные единицы эквивалентного типа		
to be able (to) = can	Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент	She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию).
to be allowed (to) = may	Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения	My sister **is allowed to** play outdoors. (Моей сестре разрешается играть на улице).
to have (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах	They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело).
to be (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д.	We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника)

Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)
This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)
Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)
Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.
My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.
to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.
to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:
Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

Косвенный пассив (The Indirect Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.
б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить
to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять
to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить
to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать
to teach учить to tell сказать и др.
Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.
Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)
A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:
John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.
The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):
He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать
to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать
to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

Употребление Страдательного залога

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия (70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:
He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:
The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:
The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:
The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)
The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:
The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:
The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:
He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

Перевод глаголов в форме Passive

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:
I am invited to a party.
Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):
Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.
Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.
I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):
They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:
The experiments were made last year.
1) Опыты были проведены в прошлом году.
2) Опыты проводились в прошлом году.
3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:
It is said… Говорят… It was said… Говорили…
It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…
It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

Правило 1: Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

Правило 2: Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

Переход из одного времени в другое	Примеры	
Present Simple » Past Simple	He **can speak** French – Он говорит по-французски.	Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски.
Present Continuous » Past Continuous	They **are listening** to him – Они слушают его	I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его.
Present Perfect » Past Perfect	Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему.	Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему.
Past Simple » Past Perfect	I **invited** her – Я пригласил ее.	Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я

		пригласил ее.
Past Continuous » Past Perfect Continuous	She **was crying** – Она плакала	John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала.
Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous	It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час.	He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь.
Future Simple » Future in the Past	She **will show** us the map – Она покажет нам карту.	I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту.

Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

Перевод прямой речи в косвенную в английском языке

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

3. Согласовываем время

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

4. Меняем некоторые слова

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.

Давайте рассмотрим еще один пример:

She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»

She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.

Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

She said when I would come. Она сказала, когда я приду.

He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»

He asked where she worked. Он спросил, где она работает.

Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

Формы инфинитива

	Active Voice	Passive Voice
Simple	to write	to be written
Continuous	to be writing	
Perfect	to have written	to have been written
Perfect Continuous	to have been writing	

Глаголы, после которых используется инфинитив:

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать

to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть
Например:
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

Значение разных форм инфинитива в таблице

Формы инфинитива	**Чему я рад?**	
Simple	I am glad **to speak** to you.	Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами).
Continuous	I am glad **to be speaking** to you.	Рад, что сейчас разговариваю с вами.
Perfect	I am glad **to have spoken** to you.	Рад, что поговорил с вами.
Perfect Continuous	I am glad **to have been speaking** to you.	Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами.
Simple Passive	I am (always) glad **to be told** the news.	Всегда рад, когда мне рассказывают новости.
Perfect Passive	I am glad **to have been told** the news.	Рад, что мне рассказали новости.

Причастие. Participle

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

Формы причастия

		Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Participle I (Present Participle)	Simple	**writing**	**being written**
	Perfect	**having written**	**having been written**
Participle II (Past Participle)			**written**

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

Как переводить разные формы причастия на русский язык

Формы причастия	причастием	деепричастием
reading	читающий	читая

having read		прочитав
being read	читаемый	будучи читаемым
having been read		будучи прочитанным
read	прочитанный	
building	строящий	строя
having built		построив
being built	строящийся	будучи строящимся
having been built		будучи построенным
built	построенный	

Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

Формы герундия

	Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Simple	**writing**	**being written**
Perfect	**having written**	**having been written**

Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

Герундий после глаголов с предлогами

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),
keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

to be + прилагательное / причастие + герундий

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I’m tired of waiting. — *Я устал ждать.*

Основные сведения о сослагательном наклонении

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

Type 0 Conditionals: They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

Type 1 Conditionals: They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

Type 2 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

Type 3 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

	If-clause (hypothesis)	Main clause (result)	Use
Type 0 general truth	if + present simple	present simple	something which is always true
	If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice.		
Type 1 real present	if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous	future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive	real - likely to happen in the present or future
	If he doesn't pay the fine, he will go to prison. If you need help, come and see me. If you have finished your work, we can have a break. If you're ever in the area, you should come and visit us.		
Type 2 unreal present	if + past simple or past continuous	would/could/might + bare infinitive	imaginary situation contrary to facts in the present; also used to give advice
	If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice)		
Type 3 unreal past	if + past perfect or past perfect continuous	would/could/might + have + past participle	imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism
	If she had studied harder, she would have passed the test. If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished.		

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.

b) I'll give Tim his book if I see him.

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)

b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)

c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)

d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)

e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus. (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

e.g. If Rick was/were here, we could have a party.

We use If I were you ... when we want to give advice.

e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)

b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)

c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)

2. Чтение и перевод учебных текстов (по 2 текста на тему)

№1

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

appear - v появляться; казаться; *ant* **disappear** - исчезать

bed - *n* пласт, слой, подстилающие породы; *syn* **layer, seam; bedded** - *a* пластовый

call for - v требовать; *syn* **demand, require**

carry out - v проводить *(исследование, эксперимент);* выполнять *(план);* завершать; *syn* **conduct, make**

colliery - каменноугольная шахта

concentration (dressing) plant - обогатительная фабрика, обогатительная установка

department - *n* отделение, факультет, кафедра; *syn* **faculty**

direct - v руководить; направлять; управлять; *a* прямой, точный; **directly** - *adv* прямо, непосредственно

education - *n* образование; просвещение; **get an education** получать образование

establish - v основывать, создавать, учреждать; *syn* **found, set up**

ferrous metals - чёрные металлы **(non-ferrous metals** цветные металлы)

iron - *n* железо; **pig iron** чугун; **cast iron** чугун, чугунная отливка

open-cast mines - открытые разработки

ore - *n* руда; **iron ore** - железная руда; **ore mining** – разработка рудных месторождений

process - v обрабатывать; *syn* **work, treat; processing** - n обработка; разделение минералов

rapid - *a* быстрый

research - *n* научное исследование

technique - *n* техника, способ, метод, технический прием; **mining technique** - горная техника, методы ведения горных работ

train - v обучать, готовить *(к чему-л.);* **training** - обучение; подготовка

to be in need of - нуждаться в

to take part in - участвовать в

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 1: The First Mining School in Russia

The Moscow Mining Academy was established in 1918. The main task of the Academy was to train mining engineers and technicians, to popularize technological achievements among miners, to work on important problems of mining and metallurgical engineering arid to direct scientific research.

There were three departments in the Academy: mining, geological prospecting and metallurgy. The Moscow Mining Academy introduced a new course in coal mining mechanization which provided the basis for the development of mining engineering. The two scientists A.M. Terpigorev and M.M. Protodyakonov wrote the first textbook on machinery for mining bedded deposits.

Much credit for the establishment of the Moscow Mining Academy and the development of co-operation among outstanding scientists and educators is due to Academician I.M. Gubkin, a prominent geologist and oil expert.

In 1925 the Moscow Mining Academy was one of the best-known educational institutions in Russia. It had well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of Russian and foreign scientific books and journals.

The Academy established close contacts with the coal and ore mining industries. The scientists carried out scientific research and worked on important mining problems.

The rapid growth of the mining industry called for the training of more highly-qualified specialists and the establishment of new educational institutions.

New collieries and open-cast mines, concentration plants, metallurgical works and metal-working factories for processing non-ferrous and ferrous metals appeared in the country. The people took an active part in the construction of new industrial enterprises.

The Academy alone could not cope with the problem of training specialists. In 1930 the Moscow Mining Academy was transformed into six independent institutes. Among the new colleges which grew out of the Academy's departments were the Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting. Later, the scientific research Institute of Mining appeared near Moscow.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. There were four departments in the Academy.
2. The Academy introduced a new course in coal mining mechanization.
3. In 1925 the Academy had only several well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of books.
4. The Academy established close contacts with the coal industry.
5. In 1930 the Academy was transformed into six independent institutes.
6. The Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting were among the new colleges which grew out of the Academy's departments.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What was the main task of the Academy?
2. What new course did the Academy introduce?
3. Were there three or four departments at the Academy?
4. What industries did the Academy establish contacts with?
5. Who wrote the first textbook on machinery' for mining bedded deposits?
6. Why was the Academy transformed into six independent institutes?
7. Why was the Academy transformed?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) обогатительная фабрика
б) подготовка горных инженеров
в) разведка нефти
г) обработка цветных металлов

д) техническое образование
е) новый (учебный) курс по
ж) принимать активное участие
з) проводить исследования
и) направлять научную деятельность
к) горное оборудование
л) пластовые месторождения

№2

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

change - v изменяться, менять(ся); *syn.* **transform, alter;** *n* изменение, перемена; превращение

determine - v определить, устанавливать

engineering - *n* техника; технология; машиностроение**;** *syn.* **technics, technology, technique; machinery**

composition - *n* структура, состав

connect - v соединяться; *syn* **combine, link**

enterprise - *n* предприятие; предприимчивость

deal (dealt) v **(with) -** иметь дело с; рассматривать

environment - *n* окружающая обстановка**,** среда

demand - *n* спрос

field - *n* область, сфера деятельности; поле, участок, месторождение; бассейн; *syn* **basin, branch**

design - *n* проект; план, чертеж; конструкция; v проектировать, планировать; конструировать

graduate - v окончить (высшее учебное заведение), *амер.* окончить любое учебное заведение; *n* лицо, окончившее высшее учебное заведение; **undergraduate (student) -** студент последнего курса; **postgraduate (student) -** аспирант; **graduation paper -** дипломная работа

hardware - *n* аппаратура, (аппаратное) оборудование, аппаратные средства; техническое обеспечение

hydraulic - *a* гидравлический, гидротехнический

introduction - *n* введение, вступление

management - *n* управление**,** заведование**;** *syn.* **administration; direction**

offer - *v* предлагать *(помощь, работу);* предоставлять; *n* предложение

property - *n* свойство

protection - *n* защита, охрана

range - *n* область, сфера; предел; диапазон; радиус действия; ряд; серия

recreation - *n* отдых, восстановление сил; развлечение

reveal - v показывать, обнаруживать

rock - *n* горная порода

shape - *n* форма

software - *n* программное обеспечение; программные средства

skill - *n* мастерство; умение; **skilled -** *a* квалифицированный; опытный; умелый

survey - *n* съемка, маркшейдерская съемка; v производить маркшейдерскую или топографическую съемку, производить изыскания; *n* **surveying** съемка, маркшейдерские работы

value - *n* ценность, стоимость; величина; v ценить, оценивать; **valuable** *a* ценный

workshop - *n* мастерская, цех; семинар

to be of importance - иметь значение

to give an opportunity of - дать возможность

to meet the requirements - удовлетворять требованиям (потребности)

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 2: Mining and Geological Higher Education in Russia

In Russia young people get mining education at special institutes which train geologists and mining engineers for coal and ore mining. The total number of students of an institute includes full-time students, part-time students and postgraduate students.

Russian higher educational establishments offer different specializations for the students. Thus, at the geological institutes, the students specialize in geology, the science which deals with different problems connected with the Earth, its history, the study of rocks, their physical and chemical properties. One of the main tasks of geology is to prospect, discover and study the deposits of useful minerals.

Geology is both a theoretical and an applied science. Mining geology is of great importance to the mining engineer. As a rule, mining geology includes economic geology.

The outstanding Russian geologist V.A. Obruchev says that geology is the science of the Earth which reveals to us how the Earth took shape, its composition and its changes. Geology helps prospect for ores, coal, oil, salt and other useful minerals.

Higher mining schools (universities, academies, institutes and colleges) develop a wide range of courses and programmes that meet the requirements of the society .They offer courses in mining technology, machinery and transport, hydraulic engineering, electrical engineering, industrial electronics, automation, surveying, geodesy, information technology, etc.

The main trend in the development of higher mining education is the introduction of courses in environmental protection, management (environmental human resources), economics and management of mining enterprises, marketing studies, computer-aided design (CAD) and others.

Computer science is also of great importance. The course aims at providing students with understanding how software and hardware technology helps solving problems.

Laboratory work is an important part in training specialists. Experiments in laboratories and workshops will help students to develop their practical skills. They have a short period of field work to gain working experience.

The students go through practical training at mines, plants and other industrial enterprises.. They become familiar with all stages of production and every job from worker to engineer. Here they get practical knowledge and experience necessary for their diploma (graduation) papers.

A lot of students belong to students' scientific groups. They take part in the research projects which their departments usually conduct. Postgraduates carry out research in different fields of science and engineering.

Sport centres give the students opportunities to play different sports such as tennis, football, basketball, volleyball, swimming, ' skiing, water polo, boxing, wrestling and others.

Students graduate from mining and geological higher schools as mining engineers, mining mechanical engineers, ecologists, mining electrical engineers, geologists, economists and managers for mining industry.

1. Переведите следующие сочетания слов.

а) широкий круг проблем
б) денные месторождения полезных ископаемых
в) горный инженер-механик
г) вести научно-исследовательскую работу
д) принимать форму
е) техническое и программное обеспечение
ж) студенты (последнего курса)
з) дипломная работа
и) физические и химические свойства
к) месторождение полезных ископаемых

1. оканчивать институт
2. поступать в университет
3. получать образование

4. готовить геологов и горних инженеров
5. высшие горные учебные заведения
6. приобретать опыт
7. студенческие научные общества
8. заниматься различными видами спорта

№3

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

accurate - *a* точный, правильный; **accuracy** - *n* точность

archive - *n* архив

attend - v посещать *(лекции, практические занятия, собрания)*

comprehensive - *a* всесторонний, исчерпывающий

concern - v касаться, относиться; иметь отношение к чему-л.; *n* дело, отношение; важность; **concerning** *prep* относительно, касательно

consider - v рассматривать; считать; **considerable** - значительный, важный; **consideration** - *n* рассмотрение; обсуждение

draw (drew, **drawn**) - v *зд,* чертить, рисовать; **draw the conclusion** делать вывод; *syn* **come to the conclusion**

employ - v применять, использовать; предоставлять *(работу); syn* **use, utilize, apply; employment** - *n* служба; занятие; применение, использование

familiarize - v знакомить; осваивать

fundamental - *n pl* основы *(наук)*

levelling - *n* нивелирование, сглаживание *(различий);* выравнивание

number - *n* число, количество, большое количество; *(порядковый)* номер, ряд

observe - v наблюдать, следить *(за чём-л.),* соблюдать *(правило, обычаи)*

obtain - v получать; достигать; добывать; *syn* **get, receive**

present - v преподносить, дарить; подавать, представлять; **presentation** - *n* изложение; предъявление

proximity - *n* близость, соседство; **in proximity to** поблизости, вблизи от *(чего-л.)*

require - v требовать; *syn* **call for; demand; meet the requirements** удовлетворять требованиям

traversing - *n* горизонтальная съемка

to keep in close touch with - поддерживать связь с

to touch upon (on) затрагивать, касаться вкратце *(вопроса)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 3: Mining Education in Great Britain

In Great Britain the students get mining education at special colleges and at mining departments of universities.

For example, the Mining Department at the University of Nottingham ranks as one of the foremost teaching and research mining schools in Great Britain. The students come to the University from all parts of the country and from abroad. The close proximity of Nottingham to mines extracting coal and different metals makes it possible for the University to keep in close touch with new achievements in mining.

The aim of training at the University is to give the student an understanding of applied science based on lectures, tutorial system, laboratory work and design classes. The laboratory work trains the student in accurate recording of observations, drawing of logical conclusions and presentation of scientific reports. Besides, it gives the student an understanding of experimental methods and familiarizes him (or her) with the characteristics of engineering materials, equipment and machines.

At Nottingham there are two types of laboratories, general and Specialized. General laboratories deal with the fundamentals of engineering science and specialized ones1 study the more specialized problems in different branches of engineering.

During the final two years of his course the student gets a comprehensive training in surveying. Practical work both in the field and in drawing classes forms an important part of this course. Besides, the students have practical work in survey camps during two weeks. The equipment available for carrying out traversing, levelling, tacheometric and astronomical surveying is of the latest design.

The practical and laboratory work throughout the three or four years of study forms a very important part of the course, so the students obtain the required standard in their laboratory course work before they graduate.

British educational system is fee-paying. The annual fee includes registration, tuition, examination, graduation and, in the case of full-time students, membership of the Union of Students.

Students from all over the world (nearly 100 countries) study at the University of Nottingham. For many years the University has had a thriving community of international students.

The University pays much attention to learning foreign languages. For individual study there is a 16-place self-access tape library with a tape archive of 3,000 tapes in 30 languages. There are also 16 video work stations where the students play back video tapes or watch TV broadcasts in a variety of languages.

1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. In Great Britain the students can get mining education only at special colleges.
2. The training at universities is based on tutorial system.
3. The laboratory work familiarizes the student with modern equipment.
4. There are three types of laboratories at the University of Nottingham.
5. When the students study surveying, they have practical work both in the field and in drawing classes.
6. The students from abroad don't study at Nottingham.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. Where can one get mining education in Great Britain?
2. Is the Mining Department at the University of Nottingham one of the foremost research mining schools in Great Britain?
3. What makes it possible for the University to keep in close touch with the, achievements in mining?
4. What are the students supposed to do in the laboratories?
5. Will the students have practical work in survey camps or in the laboratories?
6. What do the students use surveying equipment for?
7. What can you say about studying foreign languages at the University?

№4

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

advance - *n* прогресс, успех; продвижение вперед; v делать успехи, развиваться, продвигаться вперед; **advanced courses** курсы по расширенной программе

authority - *n* администрация; начальство

differ - v (from) отличаться (от); **difference** *n* различие; разница; **different** *a* различный; *syn* **various**

excavate - v добывать *(уголь);* вырабатывать полезное ископаемое открытым способом; вынимать *(грунт);* **excavation** - *n* открытая разработка карьером; разрез, карьер; **surface excavation** открытая разработка; *syn* **open-cast (opencast)**

experience - *n* жизненный опыт; опыт работы; стаж

found - v основывать**; *syn* establish, set up; foundation** - *n* основание; учреждение; основа; **lay the foundation** положить начало чему-л , заложить основу чего-л.

manage - v управлять, заведовать, справляться, уметь обращаться; **management** - *n* управление, заведование; правление, дирекция; **management studies** - наука об управлении

mean (meant) - *v* значить, иметь значение, подразумевать; намереваться, иметь в виду; **means** - *n, pl* средства, **meaning** - *n* значение, **by means of** посредством (чего-л)

metalliferous – *a* содержащий металл, рудоносный

preliminary - *a* предварительный**; preliminary course** подготовительные курсы

realize - v представлять, себе; понимать *(во всех деталях); **syn*** **understand**

recognize - *v* признавать; узнавать

work out -v разрабатывать *(план);* решать задачу

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 4: Mining Education in Great Britain (continued)

At present in Great Britain there are a number of universities and colleges which give instruction in mechanical engineering, mining, metallurgy, etc. These institutions provide full-time and part-time education. It should be noted that technical colleges confer diplomas' on college graduates.

A university graduate leaves with the degree of Bachelor of Arts or Bachelor of Science, which is an academic qualification awarded by universities.

For example, the University in Cardiff has become one of the largest in Wales. It is one of the four colleges which together with the Welsh National School of Medicine form the University of Wales. There is the Mining Engineering Department in the University of Wales. The Department deals with the whole range of extractive industries such as coal and metalliferous mining, quarrying and oil technology.

After graduating from the college a student can be recommended for entry to the university by a college authority and he can apply for admission to the university.

At the Mining Department students may take several courses such as geology, mining engineering, mine surveying, quarrying, management studies and others. It has become a tradition that the courses are based on an intensive tutorial system. It means that students are allotted to members of the teaching staff for individual tuition separately in mining, in quarrying and in mine surveying. The system is founded on that of the older universities of Great Britain.

At the Department of Mining Engineering of the Newcastle University mining has now become a technically advanced profession. The Department of Mining Engineering trains industrially experienced engineers through various advanced courses in rock mechanics and surface excavation. For many years the Mining Engineering Department at Newcastle has recognized the need for highly-qualified engineers and realized that the courses in rock mechanics and surface excavation are of great importance for mining engineers.

At the University a student studies for three or four years. The organization of the academic year is based on a three-term system which usually runs from about the beginning of October to the middle of December, from the middle of January to the end of March and from the middle of April to the end of June or the beginning of July.

Students course is designed on a modular basis. Modules are self-contained 'units' of study, which are taught and assessed independently of each other. When a student passes a module, he (she) gains a credit. All modules carry a number of credits. At the end of the term, the number of credits a student gets, determines the award he (she) receives. Each module is continuously assessed by coursework and/or end-of-term examinations.

Admission to the British universities is by examination and selection. The minimum age for admission to the four-year course is normally 18 years. Departments usually interview all the candidates. The aim of the interview is to select better candidates.

Just over half of all university students live in colleges, halls of residence, or other accommodation provided by their university, another third lives in lodgings or privately rented accommodation; and the rest live at home.

1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. At present there are about a hundred technical institutions in Great Britain.
2. It should be noted that British colleges confer degrees.
3. As a rule a college authority recommends the graduates for entry to the university.
4. At the Mining Engineering Department of the University of Wales the students study only metalliferous mining.
5. At the Mining Engineering Department the courses are based on an intensive tutorial system.
6. The Mining Engineering Department at the Newcastle University has recognized the importance of teaching rock mechanics and surface excavation (open-cast mining).

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. Are there many technical institutions in Great Britain?
2. What is the difference between colleges and universities?
3. Is the Mining Engineering Department the only one in the University of Wales?
4. Does the Mining Engineering Department deal only with metalliferous mining?
5. Can a student enter the university after he has graduated from the college?
6. What courses are of special importance for mining engineers?
7. What do you know about the organization of the academic year at British universities?
8. When do the students take their examinations?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) курсы по расширенной программе
б) рудоносные отложения
в) средства производства
г) горный факультет
д) открытые горные работы
е) опытный инженер
ж) администрация колледжа
з) поощрять студентов
и) отвечать требованиям университета
к) наука об управлении

1. зависеть от условий
2. значить, означать
3. признать необходимость (чего-л.)
4. ежегодная производительность (шахты)
5. начальник шахты
6. добывающая промышленность
7. представлять особую важность
8. механика горных пород
9. единственный карьер
10. основывать факультет (школу, систему и т.д.)

№5

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный
adjacent - *a* смежный, примыкающий
ash - *n* зола
belt - *n* пояс; лента; ремень
body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты
common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**
cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**
dust - *n* пыль
dyke – *n* дайка
extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*
fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines** - *n pl* мелочь; мелкий уголь
flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
fragmentary - *a* обломочный, пластический
glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 5: Igneous Rocks

Igneous rocks have crystallized from solidified magma.

Igneous rocks can be classified in a number of ways and one of (hem is based on mode of occurrence. They occur either as intrusive (below the surface) bodies or as extrusive masses solidified at the Earth's surface. The terms "intrusive" and "extrusive" refer to the place where rocks solidified.

The grain size of igneous rocks depends on their occurrence. The intrusive rocks generally cool more slowly than the extrusive rocks and crystallize to a larger grain size. The coarser-grained intrusive rocks with grain size of more than 0.5 mm called plutonic or abyssal are referred to as intrusive igneous rocks because they are intruded into older pre-existing rocks. Extrusive or volcanic rocks have even finer grains, less than 0.05 mm and are glassy.

Exposed igneous rocks are most numerous in mountain zones for two reasons. First, the mountain belts have been zones of major deformation. Second, uplifts in mountain belts have permitted plutonic masses to be formed.

The largest bodies of igneous rocks are called batholiths. Batholiths cooled very slowly. This slow cooling permitted large mineral grains to form. It is not surprising that batholiths are composed mainly of granitic rocks with large crystals called plutons. As is known, granites and diorites belong to the group of intrusive or plutonic rocks formed by solidification of igneous mass under the Earth's crust. Granites sometimes form smaller masses called stocks, when the occurrence has an irregular shape but smaller dimensions than the batholiths.

Laccoliths and sills, which are very similar, are intruded between sedimentary rocks. Sills are thin and they may be horizontal, inclined or vertical. Laccoliths are thicker bodies and in some cases they form mountains.

Dykes are also intrusive bodies. They range in thickness from a few inches to several thousand feet. Dykes are generally much longer than they are wide. Most dykes occupy cracks and have straight parallel walls. These bodies cool much more rapidly and are commonly fine-grained. For example, granite may occur in dykes that cut older rocks.

Pegmatites (quartz, orthoclase and mica) also belong to the group of plutonic or intrusive rocks. They occur in numerous veins which usually cut through other plutonites, most often granite, or adjacent rocks.

Extrusive igneous rocks have been formed from lava flows which come from fissures to the surface and form fields of volcanic rocks such as rhyolite, andesite, basalt, as well as volcanic ashes and dust, tuff, etc. As a rule, these rocks of volcanic origin cool rapidly and are fine-grained. It is interesting to note that basalt is the most abundant of all lavatypes. It is the principal rock type of the ocean floor.

Igneous rocks are rich in minerals that are important economically or have great scientific value. Igneous rocks and their veins are rich in iron, gold, zinc, nickel and other ferrous metals.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Igneous rocks have been formed by sedimentation.
2. Intrusive rocks have been formed by the cooling of rocks of the Earth's crust.
3. Extrusive rocks have been formed the same way.
4. The grain size of igneous rocks depends on mode of occurrence.
5. Exposed igneous rocks are numerous in mountain zones.
6. Granites and diorites belong to the group of extrusive rocks.
7. As a rule, granite may occur in dykes.
8. Pegmatites do not belong to the group of plutonic or intrusive rocks.

2). Ответьте на вопросы:

1. Have igneous rocks crystallized from magma or have they been formed by sedimentation?
2. Which types of igneous rocks do you know?
3. What does the grain size of igneous rocks depend on?
4. Can you give an example of intrusive or plutonic rocks?
5. Are diorites intrusive or extrusive formations?
6. What do you know about batholiths?
7. Do pegmatites belong to the group of plutonic or volcanic rocks?
8. How do pegmatites occur?
9. What minerals are igneous rocks rich in?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:

1.	adjacent layers	а) способ залегания
2.	abyssal rocks	б) крупнозернистый
3.	dimensions of crystals	в) зоны крупных нарушений
4.	valuable minerals	г) абиссальные (глубинные) породы
5.	shape and size of grains	д) смежные пласты (слои)
6.	mode of occurrence	е) размеры кристаллов
7.	coarse-grained	ж) взбросы
8.	uplifts	з) форма и размер зерен
9.	zones of major deformation	и) ценные минералы

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1.	затвердевшие массы	а) irregular shape
2.	обломочные породы	б) at a certain depth
3.	медленно остывать	в) economically important
4.	мелкозернистый	г) solidified masses
5.	многочисленные трещины	д) scientific value
6.	неправильная форма	е) to cool slowly
7.	на определенной глубине	ж) existing types of rocks
8.	экономически важный	з) fine-grained
9.	научная ценность	и) fragmentary rocks

10. существующие типы пород к) numerous cracks or fissures

№6

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 6: Metamorphic Rocks

The problem discussed concerns metamorphic rocks which compose the third large family of rocks. "Metamorphic" means "changed from". It shows that the original rock has been changed from its primary form to a new one. Being subjected to pressure, heat and chemically active fluids beneath the Earth's surface, various rocks in the Earth's crust undergo changes in texture, in mineral composition and structure and are transformed into metamorphic rocks. The process described is called metamorphism.

As is known, metamorphic rocks have been developed from earlier igneous and sedimentary rocks by the action of heat and pressure.

Gneisses, mica schists, phyllites, marbles, slate, quartz, etc. belong to the same group of rocks. Having the same mineral composition as granite, gneisses consist chiefly of quartz, orthoclase and mica. However unlike granite, they have a schistose structure. It means that their constituents are distributed in bands or layers and run parallel to each other in one direction. If disturbed the rock cleaves easily into separate plates.

The role of water in metamorphism is determined by at least four variable geologically related parameters: rock pressure, temperature, water pressure, and the amount of water present.

During a normal progressive metamorphism rock pressure and temperature are interdependent, and the amount of water and the pressure of water are related to the sediments and to the degree of metamorphism in such a way that, generally speaking, the low-grade metamorphic rocks are

characterized by the excess of water. The medium-grade rocks defined by some deficiency of water and the high-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.

Many of the metamorphic rocks mentioned above consist of flaky materials such as mica and chlorite. These minerals cause the rock to split into thin sheets, and rocks become foliated.

Slate, phyllite, schist and gneiss belong to the group of foliated metamorphic rocks. Marble and quartzite are non-foliated metamorphic rocks.

The structure of metamorphic rocks is of importance because it shows the nature of pre-existing rocks and the mechanism of metamorphic deformation. Every trace of original structure is of great importance to geologists. It gives an opportunity of analysing the causes of its metamorphism.

Being often called crystalline schists, metamorphic rocks such as gneisses and mica have a schistose structure. Metamorphic rocks represent the oldest portion of the Earth's crust. They are mostly found in the regions of mountain belts where great dislocations on the Earth once took place.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Generally speaking, metamorphic rocks have been developed from ores.
2. Marble, slate and phyllite belong to the group of metamorphic rocks.
3. As is known, unlike granite metamorphic rocks have a schistose structure.
4. It is quite obvious that the role of water in metamorphism is great.
5. As a rule, low-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.
6. Flaky materials cause the rock to split into thin sheets.
7. It should be noted that marble and quartzite are foliated metamorphic rocks.
8. The structure of metamorphic rocks shows the nature of older preexisting rocks and the mechanism of metamorphic deformation as well.
9. All metamorphic rocks are non-foliated.

2). Ответьте на вопросы:

1. Do you know how metamorphic rocks have been formed?
2. Which rocks belong to the group of metamorphic?
3. Does gneiss have the same structure as granite?
4. Is the role of water great in metamorphism?
5. What rocks do we call foliated? What can you say about non-foliated metamorphic rocks?
6. How can geologists trace the original structure of metamorphic rocks?
7. Why are metamorphic rocks often called crystalline schists?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. as a result of the chemical and physical changes
2. constituents of rocks
3. to be subjected to constant development
4. to undergo changes
5. excess of water
6. low-grade ores
7. coal band
8. to cleave into separate layers
9. traces of original structure
10. generally speaking

а) полоса (или прослоек) угля
б) составляющие пород
в) расщепляться на отдельные слои
г) вообще говоря

д) в результате химических и физических изменений
е) избыток воды
ж) изменяться
з) находиться в постоянном развитии
и) низкосортные руды
к) следы первоначальной структуры

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. иметь значение
2. упомянутые выше
3. сланцеватая структура
4. в отличие от гранита
5. недостаток воды
6. существовавшие ранее породы
7. слоистые породы
8. мрамор и сланец
9. гнейс
10. давать возможность
11. определять структуру

а) unlike granite
б) to be of importance
в) pre-existing rocks
г) mentioned above
д) schistose structure
е) to give an opportunity (of doing smth)
ж) to define (determine) rock texture
з) deficiency of water
и) flaky rocks
к) marble and slate
л) gneiss

№7

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory** - *a* разведочный; **exploration** - *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening** - *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved** - *a* разведанный, достоверный; **proving** - *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable** - *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working** - *n* разработка, горная выработка

country rock коренная (основная) порода

distinctive properties отличительные свойства

malleable metal ковкий металл

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 7: Prospecting

Mining activities include prospecting and exploration for a mineral deposit through finding, proving, developing, extracting and processing the ore. That is why it is possible to divide the mining activity into three major phases: 1) before mining which involves prospecting and exploration required to locate, characterize and prove a potential ore body; 2) mining which refers to actual coal or ore extraction. Extraction processes include underground or surface mining and dredging; 3) after mining which involves processing and preparing the raw ore for the end product.

As has already been said, before a mineral deposit can be worked, that is, before it can be extracted from the Earth for use by man, it must first be found. The search for economically useful mineral deposits is called prospecting. To establish the quality and quantity of a mineral deposit, the type of country rock, etc. means to prove it and this process is called proving. Prospecting and proving are only two different stages of mining geological exploration, the latter includes drilling and driving of openings.

Last century prospectors looked for visible evidence of mineralization on the surface of the Earth. To recognize valuable minerals it was necessary to know their various distinctive physical properties. For example, gold occurs in nature as a heavy malleable yellow metal. -Galena, the most important mineral containing lead, is dark grey, heavy and lustrous. The first ores of iron to be mined were deposits of magnetite, a black heavy mineral capable of attracting a piece of iron.

As the deposits of mineral that cropped out at the surface were mined, the search for additional supplies of minerals took place. The science of geology was used to explain the occurrence of ore deposits.

The aim of geological prospecting is to provide information on a preliminary estimation of the deposit and the costs of the geological investigations to be made. It also indicates whether it is available to continue the exploration or not.

Prospecting work includes three stages: 1) finding signs of the mineral; 2) finding the deposit; 3) exploring the deposit.

General indications of the possibility of exposing this or that mineral in a locality can be obtained by studying its general topographical relief, the type of ground and its general natural conditions. Thus, in mountainous regions where fissures were formed during the process of mountain formation, ore minerals could be expected in the fissure fillings. In hilly regions, sedimentary deposits would be expected.

Certain deposits are found only in a particular type of ground. Coal seams, for example, are found in sedimentary formations mainly consisting of sandstones and shales. Veins, on the other hand,

are found in crystalline (igneous) rocks, and the type of country rock usually determines the type of minerals.

At present, prospecting methods to be used are as follows:

1. Surface geological and mineralogical prospecting such as panning.
2. Geophysical, geochemical, geobotanical prospecting.
3. Aerial photography with geological interpretation of the data to be obtained is highly effective from aircraft or helicopter. Besides, successful development of space research has made it possible to explore the Earth's resources from space by satellites.

In modern prospecting the methods mentioned above are used together with the study of geological maps.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The search for economically useful mineral deposits is called proving.
2. Last century prospectors looked for visible evidence of mineral deposits.
3. The first ores of iron to be mined were deposits of galena.
4. The science of geology can explain the mode of occurrence of ore deposits.
5. As a rule prospecting includes four stages.
6. The study of general topographical relief and the type of ground makes it possible to expose this or that deposit.
7. Geologists know that certain deposits are only found in a particular type of ground.
8. As is known, veins are found in metamorphic rocks.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is prospecting?
2. What is proving?
3. How did prospectors find mineral deposits in the 19th century?
4. Does gold occur in nature as a heavy malleable yellow metal or as a heavy dark-grey one?
5. What metal is capable of attracting a piece of iron?
6. What does prospecting work provide?
7. What are the three main stages of prospecting?
8. Is it enough to know only the topographical relief of a locality for exposing this or that mineral?
9. What methods of prospecting do you know?
10. What are the most effective aerial methods of prospecting now?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1.	country rock	а) залегание рудных месторождений
2.	panning	б) блестящий металл
3.	the search for commercially useful deposits	в) коренная (основная) порода
4.	geological exploration	г) дополнительные запасы минералов
5.	to look for evidence of mineralization	д) промывка (золотоносного песка в лотке)
6.	distinctive properties	е) геологическая разведка (с попутной добычей)
7.	lustrous metal	ж) искать доказательства наличия месторождения
8.	capable of attracting a piece of iron	з) отличительные свойства
9.	additional supplies of minerals	и) поиски экономически полезных месторождений
10.	the occurrence of ore deposits	к) способный притягивать кусок металла

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. стоимость геологических исследований
2. выходить на поверхность (обнажаться)
3. произвести предварительную оценку (месторождения)
4. визуальные наблюдения с воздуха
5. полученные данные
6. галенит, песчаники и сланцы
7. общие показания
8. находить признаки месторождения
9. определенные рудные месторождения

а) the data obtained
б) galena, sandstones and shales
в) the cost of geological investigations
г) to crop out
д) certain ore deposits
е) to make a preliminary estimation (of a deposit)
ж) visual aerial observations
з) to find the signs of a deposit
и) general indications

№8

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit** - алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking** - проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping** - *a* наклонный; **gently sloping** - с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike** - вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 8: Exploration of Mineral Deposits

Exploration is known to include a whole complex of investigations carried out for determining the industrial importance of a deposit. The main task is to determine the quality and quantity of mineral and the natural and economic conditions in which it occurs. The exploration of the deposit is divided into three stages, namely preliminary exploration, detailed exploration and exploitation exploration.

The aim of preliminary exploration is to establish the general size of a deposit and to obtain an approximate idea of its shape, dimensions and quality. At this stage the geological map of the deposit is corrected and a detailed survey of its surface is completed.

The information on the preliminary exploration is expected to give an all-round description of the deposit which will enable the cost of its detailed exploration to be estimated.

The following points should be taken into consideration: 1) the shape and area of the deposit; 2) its depth and angles of dip and strike; 3) its thickness; 4) the properties of the surrounding rock and overburden; 5) the degree of uniformity of distribution of the mineral within the deposit and the country rock, etc.

Preliminary explorations can make use of exploratory openings such as trenches, prospecting pits, adits, crosscuts and boreholes. They are planned according to a definite system, and some are driven to a great depth.

All the exploratory workings are plotted on the plan. These data allow the geologist to establish the vertical section of the deposit.

The quality of the mineral deposit is determined on the basis of analyses and tests of samples taken from exploratory workings.

The method of exploration to be chosen in any particular case depends on the thickness of overburden, the angle of dip, the surface relief, the ground water conditions and the shape of the mineral deposit.

The task of the detailed exploration is to obtain reliable information on the mineral reserves, their grades and distribution in the different sectors of the deposit. Detailed exploration data provide a much more exact estimate of the mineral reserves.

Mine or exploitation exploration is known to begin as soon as mining operations start. It provides data for detailed estimates of the ore reserves of individual sections. It facilitates the planning of current production and calculating the balance of reserves and ore mined.

The searching and discovering of new mineralized areas are based on geological survey and regional geophysical prospecting. The results of these investigations provide data on iron-bearing formations and new deposits for commercial extraction.

In detailed exploration both underground workings and borehole survey are used. Core drilling with diamond and carbide bits is widely used. Non-core drilling is also used in loose rocks in combination with borehole geophysical survey.

One of the main methods to explore coal deposits is also core-drilling. Modern drilling equipment makes it possible to accurately measure bed thickness and determine structure of beds, faults and folds. Recording control instruments are attached to drilling rigs which allow the geologists to get reliable samples good for nearly all parameters of coal quality to be determined.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The purpose of preliminary exploration is to determine the mineral reserves and their distribution in the different sectors of the deposit.
2. The properties of the surrounding rock and overburden should be taken into consideration during the preliminary exploration.
3. The purpose of the detailed exploration is to find out the quantity (reserves) of the deposit.
4. Exploitation exploration facilitates the planning of current production.
5. Both core drilling and non-core drilling are widely used.

6. Recording control instruments allow geologists to get reliable ore samples.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What stages does exploration include?
2. What is the main purpose of preliminary exploration?
3. What should be taken into consideration by geologists during preliminary exploration?
4. What exploratory openings do you know?
5. Do you know how the quality of the mineral deposit is determined?
6. What is the aim of a detailed exploration?
7. Is core drilling used in prospecting for loose rocks?
8. What is drilling equipment used for?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1. bedded deposits
2. core drilling
3. the angle of dip of the seam
4. the thickness of overburden
5. exploratory workings
6. composition of minerals
7. pits and crosscuts
8. to exploit new oil deposits
9. sampling
10. geological section

а) мощность наносов
б) разрабатывать новые месторождения нефти
в) шурфы и квершлаги
г) пластовые месторождения
д) опробование (отбор) образцов
е) угол падения пласта
ж) колонковое бурение
з) геологический разрез (пород)
и) состав минералов
к) разведочные выработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1. буровые скважины
2. по простиранию пласта
3. равномерность распределения минерала в залежи
4. водоносность пород
5. карбидные и алмазные коронки
6. детальная разведка
7. использовать новые поисковые методы
8. проникать в залежь
9. коренная порода
10. свойства окружающих пород

а) ground water conditions
б) detailed exploration
в) boreholes
г) along the strike of the bed (seam)
д) carbide and diamond bits
е) the uniformity of mineral distribution in the deposit
ж) the properties of surrounding rocks
з) to make use of new prospecting methods
и) country rock
к) to penetrate into the deposit

3. Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций)

Грамматические конструкции представлены на стр. 6 – 40.

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

Семья. Family

родственник relative, relation
родители parents
мать (мама) mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
отец (папа) father (dad, daddy, papa, pa)
жена wife
муж husband
супруг(а) spouse
ребенок, дети child, children
дочь daughter
сын son
сестра sister
брат brother
единственный ребенок only child
близнец twin
близнецы, двойняшки twins
брат-близнец twin brother
сестра-близнец twin sister
однояйцевые близнецы identical twins
тройняшки triplets
бабушка и дедушка grandparents
бабушка grandmother (grandma, granny, grandmamma)
дедушка grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
внуки grandchildren
внучка granddaughter
внук grandson
прабабушка great-grandmother
прадедушка great-grandfather
прабабушка и прадедушка great-grandparents
правнуки great-grandchildren
тётя aunt
дядя uncle
крестный (отец) godfather
крестная (мать) godmother
отчим, приемный отец stepfather
мачеха, приемная мать stepmother
сводный брат stepbrother
сводная сестра stepsister
брат по одному из родителей half-brother
сестра по одному из родителей half-sister
приемный, усыновленный сын adopted son
приемная, удочеренная дочь adopted daughter
приемный ребенок adopted child
патронатная семья, приемная семья foster family
приемный отец foster father
приемная мать foster mother
приемные родители foster parents

приемный сын foster son
приемная дочь foster daughter
приемный ребенок foster child
неполная семья (с одним родителем) single-parent family
родня the kin, the folks
племянница niece
племянник nephew
двоюродный брат cousin (male)
двоюродная сестра cousin (female)
двоюродный брат (сестра), кузен (кузина) first cousin
троюродный брат (сестра) second cousin
четвероюродный брат (сестра) third cousin
родня со стороны мужа или жены in-laws
свекровь mother-in-law (husband's mother)
свёкор father-in-law (husband's father)
тёща mother-in-law (wife's mother)
тесть father-in-law (wife's father)
невестка, сноха daughter-in-law
зять son-in-law
шурин, свояк, зять, деверь brother-in-law
свояченица, золовка, невестка sister-in-law
семейное положение marital status
холостой, неженатый, незамужняя single
женатый, замужняя married
брак marriage
помолвка engagement
помолвленный, обрученный engaged
развод divorce
разведенный divorced
бывший муж ex-husband
бывшая жена ex-wife
расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей separated
вдова widow
вдовец widower
подружка, невеста girlfriend
друг, парень, ухажер boyfriend
любовник, любовница lover
ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный fiance
свадьба wedding
невеста на свадьбе bride
жених на свадьбе (bride)groom
медовый месяц honeymoon

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

The Ural State Mining University

Mining University – Горный университет; **higher educational institution** - высшее учебное заведение; **to provide** - зд. Предоставлять; **full-time education** - очное образование; **extramural education** - заочное	**scientific research centre** - центр научных исследований; **master of science** - кандидат наук; **capable** – способный; **to take part in** - принимать участие; **graduate** – выпускник; **to dedicate** – посвящать;

образование; **to award** – награждать; **post-graduate courses** – аспирантура;	**to carry out scientific work** - выполнять научную работу;

Faculty of Mining Technology - горно – технологический; **Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический; **Institute of World Economics** – Институт мировой экономики; **Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический; **Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты; **Faculty of City Economy** – городского хозяйства;	**Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики; **Faculty of extramural education** – заочный; **department** – кафедра; **dean** – декан; **to train specialists in** - готовить специалистов; **to consist of** - состоять из; **preparatory** – подготовительный; **additional** – дополнительный; **to offer** – предлагать;

to house - размещать /ся/; **building** – здание; **Rector's office** – ректорат; **Dean's office** – деканат; **department** – кафедра; **library** – библиотека; **reading hall** - читальный зал; **assembly hall** - актовый зал; **layout** - расположение, план; **administrative offices** - административные отделы;	**computation centre** - вычислительный центр; **canteen** – столовая; **to have meals** – питаться; **hostel** – общежитие; **to go in for sports** - заниматься спортом; **wrestling** – борьба; **weight lifting** - тяжелая атлетика; **skiing** - катание на лыжах; **skating** - катание на коньках; **chess** – шахматы;

academic work - учебный процесс; **academic year** - учебный год; **to consist of** - состоять из; **bachelor's degree** - степень бакалавра; **course of studies** - курс обучения; **to last** - длиться; **term** - семестр; **to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия; **period** - пара, 2 – х часовое занятие; **break** - перерыв; **subject** - предмет; **descriptive geometry** - начертательная геометрия;	**general geology** - общая геология; **foreign language** - иностранный язык; **to operate a computer** - работать на компьютере; **to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен; **to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен; **to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен; **to fail in chemistry** - не сдать химию; **holidays, vacations** - каникулы; **to present graduation paper** - представлять дипломные работы; **for approval** - к защите;

The Faculty of Mining Technology trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

The Institute of World Economics trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

The Faculty of Mining Mechanics trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

The Faculty of Geology & Geophysics trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My town

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist’s/a pharmacy/a drugstore - аптека

a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки
a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна

a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My speciality

The Earth's Crust and Useful Minerals

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

clay - *n* глина; глинозем

consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

crust - *n* кора; *геол.* земная кора

decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

dissolve v растворять

expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure** - *n* обнажение

external - *a* внешний

extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

glacier - *n* ледник, глетчер

grain - *n* зерно; **angular grains** - угловатые зерна *(минералов);* **grained** - *a* зернистый

gravel - *n* гравий, крупный песок

internal - *a* внутренний

intrusive - *a* интрузивный, плутонический

iron - *n* железо

layer - *n* пласт

like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

lime - *n* известь; **limestone** - *n* известняк

loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый

make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*

particle - *n* частица; включение

peat - *n* торф; торфяник

represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative** - *a* характерный, типичный

rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

sand - *n* песок

sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary** - *a* осадочный; **sedimentation** - *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose** - *a* сланцеватый, слоистый

shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay** - глинистый сланец; **combustible …, oil …** - горючий сланец

siltstone - *n* алеврит

stratification - *n* напластование, залегание

stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

substance - *n* вещество, материал; сущность

thickness - *n* толщина, мощность

value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable** - *a* ценный *(о руде)*

vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable** - *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

contain - v содержать *(в себе),* вмещать

crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

contract - v сжиматься; сокращаться

dust - *n* пыль

expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать

gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

lateral - *a* боковой

occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence** - *n* залегание; **mode of occurrence** - условия залегания

penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**

pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant** - *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

size - *n* размер; величина; класс *(угля)*

solution – *n* раствор; **soluble** - *a* растворимый; **solvent** - растворитель; *a* растворяющий

succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

uniform – *a* однородный; одинаковый

weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

to be subjected to подвергаться

Rocks of Earth's Crust

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

adjacent - *a* смежный, примыкающий

ash - *n* зола

belt - *n* пояс; лента; ремень

body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

dust - *n* пыль

dyke – *n* дайка

extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines** - *n pl* мелочь; мелкий уголь

flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы

fragmentary - *a* обломочный, пластический

glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток
band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated** - *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation** - *n* отношение; **relationship** - *n* родство; свойство; **relative** - *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing** – *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
in such a way таким образом

Fossil Fuels

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger** - n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
heat - v нагревать; *n* теплота
liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

mudstone - *n* аргиллит

purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

shale - *n* глинистый сланец

the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*

blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

continuity - *n* непрерывность, неразрывность

domestic - *a* внутренний; отечественный

estimate - v оценивать; *n* оценка; смета

fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding** - *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный

liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous** - *a* блестящий

matter - *n* вещество; материя

moisture - *n* влажность, сырость; влага

parting - *n* прослоек

plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

store - v запасать, хранить на складе; вмещать

strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*

uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Prospecting and Exploration

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory** - *a* разведочный; **exploration** - *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening** - *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved** - *a* разведанный, достоверный; **proving** - *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable** - *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working** - *n* разработка, горная выработка

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit** - алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking** - проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping** - *a* наклонный; **gently sloping** - с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike** - вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

General Information on Mining

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development** - *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently ~** наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal** - *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support** - крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss** - *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

goaf — завал; обрушенное пространство

double-ended drum bearer — комбайн с двойным барабаном

to identify — опознавать

appraisal — оценка

susceptibility — чувствительность

concealed — скрытый, не выходящий на поверхность

crusher — дробилка

concentration — обогащение

blending — смешивание; составление шихты

screen — сортировать (обыден. уголь); просеивать

froth floatation — пенная флотация

core drilling — колонковое бурение

to delineate — обрисовывать, описывать

lender — заимодавец

feasibility — возможность

in situ mining — повторная разработка месторождения в массиве

screening — просеивание; грохочение

processing — обработка, разделение минералов

Mining and Environment

break v **(broke, broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

(руды .или породы); расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

drill - *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение

dump -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

dumper опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

environment - *n* окружение; окружающая обстановка/среда

explode - v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive** - *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

friable - *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

handle - v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

heap - v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

hydraulicklng - *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

load - v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader** - *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader** - комбайн, комбинированная горная машина

lorry - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

mention - v упоминать

overcasting - *n* перелопачивание *(породы)*

pump - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

reclamation - *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

sidecastiag - *n* внешнее отвалообразование

site - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

slice - *n* слой; **slicing** - *n* выемка слоями, разработка слоями

strip - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper** - *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping** - *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

unit - *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

washery - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

to attract smb's attention привлекать чье-л. внимание

backhoe - *n* обратная лопата

blast - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

block out - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

clearing - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

crash - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

earth-mover - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

excavator - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket ~** многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

grab - *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

grabbing - погрузка грейфером; захватывание

hoist - *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

plough - *n* струг

power shovel - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

range - *n* колебание в определенных пределах

rate - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

remote - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

result - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

safety - *n* безопасность; техника безопасности

slope - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(руды)*

support - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения)

Самостоятельное изучение тем курса предполагает изучение тем практических занятий, представленных в разделе 1, 2, 3 данных методических указаний студентами заочной формы обучения в межсессионный период.

1.5 Подготовка к контрольной работе и 1.6 Написание контрольной работы

Для выполнения контрольной работы студентами кафедрой подготовлены *Методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов данной специальности.*

II. Другие виды самостоятельной работы

2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (Подготовка к ролевой игре, к практико-ориентированным заданиям, опросу)

2.1.1 Подготовка к ролевой игре

Студенты получают ролевые карточки. Им необходимо обдумать свою роль, стратегию своей роли, вопросы и ответы.

Role card 1

Sasha

The worst thing about your house is lack of privacy. You share your room with a younger sister. You think she goes through all your stuff. She asks you ambarrassing questions about boys, makes little nasty comments about you.

Your parents treat you like a baby. Your father is too much interested in your studying and homework. Your mother makes you do the work about the house alone. You are going to leave home as soon as you are old enough.

- Collect all the arguments to explain your attitude to your family.
- Listen to what the members of your family are saying.
- Don't interrupt them.
- Don't forget that both parents and children are to blame in conflict situations.
- Be polite and friendly

Role card 2

Mother

Your daughter has written a letter of complaint to the youth magazine. She is not satisfied with your attitude to her. You have read this letter. You are worried about the situation in the family and have decided to discuss the problems with a family therapist.

- Say why you have invited the therapist
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha

- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 3

Father

Your daughter is complaining that you treat her like a baby. You don't let her out at night during the week. You always ask her about the boys. You don't believe her when she says she doesn't have any homework to do. Your wife has invited a family therapist to discuss the problems of your family.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 4

Sister

Sasha is complaining that you don't help her with the work about the house. She also says that she can't keep anything secret in her room, you go through all her stuff. She is irritated by your behaviour. She is going to leave your home as soon as she is old enough.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 5

Family therapist

- Encourage all the members of the family to speak
- Take notes
- Ask questions
- Summarize what you have heard from all the members of the family
- Try to analyse the situation in a short report

2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию

Подготовьте устные высказывания по темам:

1. From the history of the Ural State Mining University.
2. Faculties and specialities of the University.
3. The layout of the Ural State Mining University.
4. Student's academic work.

Подготовьте письменные ответы на вопросы:

1. Where do you study?
2. What faculty do you study at?
3. How many faculties are there at the Ural State Mining University?
4. What year are you in?
5. What is your future speciality?
6. What specialities are there at your faculty?
7. When did you enter the University?

8. When was the Sverdlovsk Mining Institute founded?
9. When was it reorganized into the University?
10. In how many buildings is the Ural State Mining University housed?
11. In what building is your faculty housed?
12. Who is the dean of your faculty?
13. What books do you take from the library?
14. Where do you live?
15. Where do you usually have your meals?
16. How long does the course of studies for a bachelor's degree last?
17. How long do the students study for a Diplomate Engineer's course and a Magister's degree?
18. What subjects do you study this term?
19. What lectures and practical classes do you like to attend?
20. Where do the students have their practical work?
21. When do the students present their graduation papers for approval?
22. What graduates can enter the post-graduate courses?
23. What kind of sport do yon like?
24. Where do you go in for sports?

2.1.3 Подготовка к опросу

Ответьте на вопросы на иностранном языке:

1. What specialities does the geological faculty train geologic engineers in?
2. What problems does Geology study?
3. What branches is Geology divided into?
4. What does Economic Geology deal with?
5. What does mineralogy investigate?
6. What does paleontology deal with?
7. What is the practical importance of Geology?
8. Where do graduates of the geological faculty of the Mining University work?
9. What is your future speciality?
10. What kind of work do geologists-prospectors conduct?
11. What do geologists explore during the early stages of geological exploration?
12. What work do geologists conduct while working in. the field?
13. When do geologists start exploratory work?
14. What is the purpose of the exploratory work?
15. How is exploratory work conducted?
16. What contribution do geologists make to the development of the National Economy of our country?
17. What does hydrogeology deal with?
18. Where are ground waters used?
19. Where is thermal (hot) water used?
20. What must hydrogeologists do with ground waters which complicate construction work or mineral extraction?

2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного (по 2 текста на тему)

Text 1: A.M. Terpigorev (1873-1959)

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

to defend graduation paper (thesis) - защищать дипломную работу (диссертацию)

to pass an entrance examination - сдать вступительный экзамен

to get a higher education - получить высшее образование

to do one's best (one's utmost, all one can, everything in one's power) - сделать все возможное, не жалеть сил

to make contribution (to) - вносить вклад в *(науку, технику* и т.д.)

choose (chose, **chosen**) - v выбирать; **choice -** *n* выбор

collect - v собирать, коллекционировать

dangerous - *a* опасный

deposit - *n* месторождение, залежь; **bedded deposits -** пластовые месторождения

describe - v описывать, изображать; **description -** *n* описание; **descriptive -** *a* описательный

facility - *n (pl* **facilities)** средства; возможности; оборудование; устройства

fire damp - *n* рудничный газ, метан

harm - *n* вред; *v* вредить; **harmful -** *a* вредный

relate - v относиться, иметь отношение

safety - *n* безопасность; **mine safety** безопасность труда при горных работах; техника безопасности; **safety measures** меры безопасности; **safe -** *a* безопасный; надежный

seam - *n* пласт *(угля); syn* **bed, layer; flat seam** горизонтальный, пологопадающий пласт; **inclined seam** наклонный пласт; **steep seam** крутопадающий пласт; **thick seam** мощный пласт; **thin seam** тонкий пласт

state - *n* состояние; государство; штат; *a* государственный; v заявлять; констатировать; излагать

success - *v* успех; удача; **be a success** иметь успех; **successful** *a* успешный

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

Academician A.M. Terpigorev is a well-known mining engineer who successfully combined his practical experience with scientific research. He was bom in 1873 in Tambov. In 1892 he finished school with honours1 and decided to get a higher education. He chose the Mining Institute in St. Petersburg, passed all the entrance examinations successfully and became a student of the Mining Institute.

At the Institute he studied the full range of subjects2 relating to metallurgy, mining and mining mechanics.

At that time students' specialization was based on descriptive courses and elementary practical training. One of the best lecturers was A. P. Karpinsky. His lectures on historical geology were very popular.

During his practical training Terpigorev visited mines and saw that the miners' work was very difficult. While he was working in the Donbas he collected material for his graduation paper which he soon defended. The Mining of flat seams in the Donbas was carefully studied and described in it.

In 1897 Terpigorev graduated from the Institute with a first-class diploma of a mining engineer.

His first job as a mining engineer was at the Sulin mines where he worked for more than three years first as Assistant Manager and later as Manager.

From 1900 till 1922 Terpigorev worked at the Yekaterinoslav Mining Institute (now the Mining Institute in Dnepropetrovsk).

In 1922 he accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Academy and moved to Moscow. From 1930 he headed the chairs5 of Mining Transport and Mining of Bedded Deposits at the Moscow Mining Institute.

Academician Terpigorev took a particular interest in mine safety. As a result of his investigations a series of safety measures in gassy collieries was worked out. For some time he was working on the problem of fire damp, the most harmful and dangerous of all the gases in mines.

His two-volume work Coal Mining and Mine Transport Facilities is a full description of the state of mechanization and the economy of the Donbas. His other works are about mining transport facilities, mechanization of coal mining and mining machinery. He is one of the pioneers in scientific methods of coal gasification.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. After school Terpigorev decided to work in a mine.
2. Terpigorev collected material for his graduation paper which dealt with mining thick seams in the Donbas.
3. For more than three years Terpigorev worked at the Sulin mines.
4. In 1922 Terpigorev accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Institute.
5. He investigated the problems of mine safety.
6. He was one of the first to work on the problem of gasification of coal.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. When and where was Terpigorev born?
2. What institute did he graduate from?
3. What material did he collect while he was working in the Donbas?
4. Where did Terpigorev work from 1900 till 1922?
5. At what institute did Terpigorev head the chair of Mining Bedded Deposits?
6. What did Terpigorev take a particular interest in?
7. What works by Terpigorev do you know?
8. What problems do Terpigorev's works deal with?
9. What was the result of his investigations on mine safety?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) охрана труда в шахтах
б) подтверждать
в) добыча угля
г) эксплуатация месторождений
д) метан
е) принять предложение
ж) выполнить задачу, задание
з) горизонтальный пласт
и) собирать материал

1. поступить в институт
2. решать важные проблемы
3. выдающиеся исследователи
4. успешно провести эксперименты
5. выбрать профессию
6. описательный курс
7. происхождение железной руды
8. начальник шахты
9. мероприятия по охране труда

Text 2: A.P. Karpinsky (1847-1936)

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

abroad - *adv* за рубежом
confirm - v подтверждать; утверждать
consider - v считать, полагать, рассматривать
contribute - v вносить вклад; **contribution** вклад
crust - *n* земная кора
detailed - a подробный, детальный
elect - v избирать, выбирать *(голосованием);* назначать *(на должность)*
embrace - v охватывать; обнимать
entire - *a* весь, целый; полный; *syn* **whole**
exist – *v* существовать, быть, жить
foreign - *a* иностранный
former - *a* прежний

investigate - v исследовать; изучать

prominent - *a* знаменитый, выдающийся, известный; *syn* **remarkable, outstanding**

regularity - *n* закономерность

significant - *a* значительный; **significance -** *n* значение, важность; **exhaust the significance** исчерпывать значение

society – *n* общество

staff - *n* персонал; личный состав; штат

various - *a* различный, разный, разнообразный

to advance the view - высказывать мнение *(точку зрения)*

to be interested in - быть заинтересованным *(чём-л.),* интересоваться

to take (an) interest in - заинтересоваться *(чём-л.)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

V.A. Obruchev, I.M. Gubkin, A.Y. Fersman, V.I. Vernadsky and A. P. Karpinsky were the prominent Russian scientists who laid the foundation1 of the Russian school of geology and mining.

An entire epoch in the history of Russian geology is connected with Karpinsky's name. One of the greatest Russian geologists, he was a member and for some time President of the Academy of Sciences of the former USSR and a member of several Academies abroad. The Geological Society of London elected him a foreign member in 1901. His greatest contribution to geology was a new detailed geological map of the European part of Russia and the Urals.

For many years he headed the Russian Geological Committee the staff of which was made up of his pupils. He was one of those geologists who embraced the whole of geological science. He created the new stratigraphy of Russia. He studied the geological systems in various regions of the country and was the first to establish3 the regularity of the Earth's crust movement. His paleontological studies are of no less importance, especially those on palaeozoic ammonoids. He also took an interest in deposits of useful minerals and gave a classification of volcanic rocks. He advanced the view that petroleum deposits existed in Russian, which was confirmed later. He studied some ore and platinum deposits and may be justly considered5 the founder of practical geology of the Urals. He was the first Russian scientist who introduced microscope in the study of petrographic slides.

Karpinsky was a prominent scientist, an excellent man and citizen. He was one of the best lecturers at the Mining Institute in his time. He was also one of the greatest Russian scientists who later became the first elected President of the Academy of Sciences of the USSR. Students were attracted to him not only because he was a great scientist but also because of his charming personality and gentle manner.

Every geologist and every geology student knows very well Karpinsky's most significant work An Outline of the Physical and Geographical Conditions in European Russia in Past Geological Periods.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Karpinsky was the first President of the Academy of Sciences.
2. He worked at the Mining Institute in St.Petersburg.
3. Karpinsky was a member of many Academies abroad.
4. Karpinsky made up a detailed map of the Asian part of our country.
5. He headed the Russian Geological Committee.
6. Karpinsky created a new branch of geology, namely stratigraphy.
7. He only tried to establish the regularity of the Earth's crust movement.
8. Karpinsky may be justly considered the founder of the practical geology of the Urals.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What society elected Karpinsky a foreign member and when?
2. Did he head the Russian Geological Committee or was he a member of that Committee?

3. Did Karpinsky investigate various regions of the Russian territory?
4. Which of his works are the most remarkable?
5. What can you say about Karpinsky's investigations in petrology?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) земная кора
б) составить подробную карту
в) замечательные работы
г) выдающийся ученый
д) залежи полезных ископаемых
е) научное общество
ж) избирать председателя (президента)
з) заложить основы школы
и) интересоваться геологией
к) высказать точку зрения
л) возглавлять комитет

Text 3: Sedimentary Rocks

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**
clay - *n* глина; глинозем
consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**
crust - *n* кора; *геол.* земная кора
decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение
derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать
destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный
dissolve v растворять
expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure** - *n* обнажение
external - *a* внешний
extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*
force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие
glacier - *n* ледник, глетчер
grain - *n* зерно; **angular grains** - угловатые зерна *(минералов);* **grained** - *a* зернистый
gravel - *n* гравий, крупный песок
internal - *a* внутренний
intrusive - *a* интрузивный, плутонический
iron - *n* железо
layer - *n* пласт
like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно
lime - *n* известь; **limestone** - *n* известняк
loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый
make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*
particle - *n* частица; включение
peat - *n* торф; торфяник
represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative** - *a* характерный, типичный
rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода
sand - *n* песок
sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник
sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary** - *a* осадочный; **sedimentation** - *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose** - *a* сланцеватый, слоистый
shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay** - глинистый сланец; **combustible …, oil …** - горючий сланец
siltstone - *n* алеврит
stratification - *n* напластование, залегание
stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**
substance - *n* вещество, материал; сущность
thickness - *n* толщина, мощность
value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable** - *a* ценный *(о руде)*
vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable** - *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The rocks of the Earth's crust are divided into three main groups: sedimentary rocks, which consist of fragments or particles of pre-existing rocks; igneous rocks which have solidified from magma and metamorphic rocks. Metamorphic rocks have been derived from either igneous or sedimentary rocks.

Sedimentary rocks represent one of the three major groups of rocks that make up the crust of the Earth. Most sedimentary rocks have originated by sedimentation. They are layered or stratified. Thus, stratification is the most important characteristic of sediments and sedimentary rocks. It is necessary to note that the processes which lead to the formation of sedimentary rocks are going on around us.

Sediments are formed at or very near the surface of the Earth by the action of heat, water (rivers, glaciers, seas and lakes) and organisms.

It should be noted that 95 per cent of the Earth's crust is made up of igneous rocks and that only 5 per cent is sedimentary. In contrast, the amount of sedimentary rocks on the Earth's surface is three times that of igneous rocks.

Strictly speaking, sedimentary rocks form a very small proportion by volume of the rocks of the Earth's crust. On the contrary, about three quarters of the Earth's surface is occupied by sedimentary rocks. It means that most of sedimentary rocks are formed by sediments, accumulations of solid material on the Earth's surface.

The thickness of the layers of sedimentary rocks can vary greatly from place to place. They can be formed by the mechanical action of water, wind, frost and organic decay. Such sediments as gravel, sand and clay can be transformed into conglomerates, sandstones and clay schists as a result of the accumulation of materials achieved by the destructive mechanical action of water and wind.

Mechanical sediments can be unconsolidated and consolidated. For example, gravel, sand and clay form the group of unconsolidated mechanical sediments, because they consist of loose uncemented particles (grains).

On the Earth's surface we also find consolidated rocks, which are very similar to the loose sediments whose particles are firmly cemented to one another by some substance. The usual cementing substances are sand, clay, calcium carbonate and others. Thus sandstones are consolidated rocks composed of round or angular sand grains, more or less firmly consolidated. Like sand, sandstones can be divided into fine-grained, medium-grained and coarse-grained.

On the other hand, chemical sediments are the result of deposits or accumulations of substances achieved by the destructive chemical action of water. The minerals such as rock salt, gypsum and others are formed through sedimentation of mineral substances that are dissolved in water.

Sediments can also be formed by the decay of the remains of organisms, by the accumulation of plant relics.1 They are called organic sediments. Limestones, peat, coal, mineral oil and other sediments may serve as an example of organic sediments.

The most principal kinds of sedimentary rocks are conglomerate, sandstone, siltstone, shale, limestone and dolomite. Many other kinds with large practical value include common salt, gypsum, phosphate, iron oxide and coal.

As is known, water, wind and organisms are called external forces, because their action depends on the energy which our planet receives from the Sun.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The rocks of the Earth's crust are divided into two main groups.
2. Igneous rocks are composed of particles of pre-existing rocks.
3. Sedimentary rocks are stratified.
4. Sediments are formed by the action of glaciers.
5. Igneous rocks make up 75 per cent of exposed rocks.
6. Conglomerates are formed as a result of the accumulation of materials caused by the destructive mechanical action of water.
7. Sandstones are consolidated rocks.
8. Clays are unconsolidated mechanical sediments.
9. Chemical sediments are formed by the destructive chemical action of water.
10. Peat and coal are the organic sediments which are of great practical value.
11. Clay schist was formed at the beginning of the sedimentation period and clay was formed later.

2). Ответьте на вопросы:

1. What main groups of rocks do you know?
2. Do sedimentary rocks consist of particles of pre-existing rocks?
3. How were igneous rocks formed?
4. Do you know how sedimentary rocks have originated?
5. What is the most important characteristic feature of sediments?
6. Do sedimentary rocks account for 10 per cent of the Earth's crust?
7. Is gravel consolidated mechanical sediment? And what about sand and clay?
8. What are cementing substances? Can calcium carbonate be used as a cementing substance?
9. Are there only fine-grained sandstones?
10. What can you say about chemical sediments?
11. Can you give an example of organic sediments? How are they formed?

3) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.

1.	земная кора	а) sandstone
2.	растворяться в воде	б) fine-grained sand
3.	песчаник	в) the Earth's crust
4.	уплотненные осадки	г) exposed rocks
5.	изверженные породы	д) to dissolve in water
6.	мелкозернистый песок	е) like gypsum
7.	затвердевать	ж) consolidated sediments
8.	подобно гипсу	з) igneous rocks
9.	обнаженные породы	и) to solidify, to consolidate

б) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов.

1.	coarse-grained sand	а) разрушительная сила воды
2.	siltstone and shale	б) пластовые месторождения
3.	the destructive action of water	в) доледниковый период

4.	existing rocks	г) крупнозернистый (грубо- зернистый) песок
5.	chemical decay	д) частицы вещества
6.	sedimentary rocks	е) алеврит и сланец
7.	stratified deposits	ж) существующие породы
8.	pre-glacial period	з) осадочные породы
9.	particles of a substance	и) химический распад

Text 4: Weathering of Rocks

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

contain - v содержать *(в себе),* вмещать
crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться
contract - v сжиматься; сокращаться
dust - *n* пыль
expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**
fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель
fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*
freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать
gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно
hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом
hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф
influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*
lateral - *a* боковой
occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания
penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*
phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**
pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы
rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**
refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*
resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance -** *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся
size - *n* размер; величина; класс *(угля)*
solution – *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий
succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно
undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*
uniform – *a* однородный; одинаковый
weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*
to be subjected to подвергаться

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

All rocks which are exposed on the Earth's surface (high mountain peaks, deserts) are decomposed to a certain degree. The process of rock disintegration by the direct influence of local atmospheric conditions on the Earth's surface is called weathering. This phenomenon is often referred to in geology because weathering is an active process. It takes place in the upper layers of the Earth's crust.

The main cause of physical weathering is the change in temperature that takes place with the succession of day and night. This phenomenon can best be observed in the deserts and high mountains where the changes in temperature are common.

During the day under the influence of heat, rocks expand whereas at night they begin to contract. As rocks are generally composed of different minerals, their expansion and contraction do not occur uniformly. As a result of this rocks crack. At the beginning these cracks or fissures are hardly noticeable but gradually they become wider and deeper until the whole surface of rock is finally transformed into gravel, sand or dust.

In the regions of a moderate or cold climate, where the temperature in winter goes down to below 0 (zero), the decomposition of rocks is greatly facilitated by the action of water. When water freezes it increases in volume and develops enormous lateral pressure. Under the action of water, rocks decompose to pieces of varied forms and sizes.

The decomposition of rocks under the direct influence of heat and cold is called physical weathering.

Rocks are subjected not only to physical decomposition but also to chemical weathering, i.e. to the action of chemical agents, such as water, carbon dioxide and oxygen. In a general way, chemical weathering is an acid attack on the rocks of the Earth's crust, in particular an attack on the most abundant minerals — quartz (sand) and aluminosilicates (clays). Only few minerals and rocks are resistant to the action of natural waters. The solvent action of water is stronger when it contains carbon dioxide. Water causes more complex and varied changes. With the participation of oxygen and carbon dioxide up to 90 per cent of rocks is transformed into soluble minerals, which are carried away by the waters.

Organisms and plants also take part in the disintegration of rocks. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks by making holes in them to live in. The action of plants can often be even more destructive. Their roots penetrate into the fissures of rocks and develop the lateral pressure which fractures and destroys rocks.

1. Укажите, какие предложены соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The process of sedimentation is called weathering.
2. The change in temperature causes physical weathering.
3. As a rule during the night rocks expand.
4. When freezing water decreases in volume and develops enormous lateral pressure.
5. The decomposition of rocks is due to the influence of heat and cold.
6. As a rule water contains dissolved mineral substances.
7. The solvent action of water is stronger when it does not contain carbon dioxide.
8. It should be noticed that the action of organisms and plants is destructive.
9. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What process is called weathering?
2. What process is called physical weathering?
3. Where can the phenomenon of physical weathering be best observed?
4. What process is called chemical weathering?
5. What substances can act as solvents?
6. Are all minerals and rocks resistant to the action of natural waters or only few minerals and rocks can resist the action of water?
7. How do organisms act on the destruction of rocks?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. the Earth's surface
2. to be composed of different minerals
3. the expansion of rocks
4. changes in temperature

5. under the influence of heat
6. weathering
7. destructive forces
8. a great number of fractures
9. to penetrate into fissures

а) под влиянием тепла
б) разрушительные силы
в) выветривание
г) большое количество трещин
д) состоять из различных минералов
е) расширение пород
ж) проникать в трещины
з) изменения температуры
и) поверхность земли

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. увеличиваться в объеме
2. развивать боковое давление
3. способствовать разрушению пород
4. подвергаться гниению
5. растворять вещества
6. сопротивляться (чему-л.)
7. некоторые органические вещества
8. ускорять процесс выветривания
9. куски породы различных размеров

а) to facilitate the decomposition of rocks
б) to increase in volume
в) to resist (smth)
г) rock pieces of varied (different) sizes
д) to accelerate the process of weathering
е) to be subjected to decay
ж) to dissolve substances
з) to develop lateral pressure
и) certain organic substances

Text 5: Fossil Fuels

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger** - n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
heat - v нагревать; *n* теплота
liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**
mudstone - *n* аргиллит
purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**
shale - *n* глинистый сланец
the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The chief sources of energy available to man today are oil, natural gas, coal, water power and atomic energy. Coal, gas and oil represent energy that has been concentrated by the decay of organic materials (plants and animals) accumulated in the geologic past. These fuels-are often referred to as fossil fuels.

The word fossil (derived from the Latin fodere "to dig up") originally referred to anything that was dug from the ground, particularly a mineral. Today the term fossil generally means any direct evidence of past life, for example, the footprints of ancient animals. Fossils are usually found in sedimentary rocks, although sometimes they may be found in igneous and metamorphic rocks as well. They are most abundant in mudstone, shale and limestone, but fossils are also found in sandstone, dolomite and conglomerate.

Most fuels are carbon-containing substances that are burned in air. In burning fuels give off heat which is used for different purposes.

Fuels may be solid, liquid and gaseous. Solid fuels may be divided into two main groups, natural and manufactured. The former category includes coal, wood, peat and other plant products. The latter category includes coke and charcoal obtained by heating coal in the absence of air.

Liquid fuels are derived almost from petroleum. In general, natural petroleum, or crude oil, as it is widely known, is the basis of practically all industrial fuels. Petroleum is a mixture of hundreds of different hydrocarbons — compounds composed of hydrogen and carbon — together with the small amount of other elements such as sulphur, oxygen and nitrogen. Petroleum is usually associated with water and natural gas. It is found in porous sedimentary rocks where the geological formation allowed the oil to collect from a wide area. Petroleum is one of the most efficient fuels and raw materials.

Of gaseous fuels the most important are those derived from natural gas, chiefly methane or petroleum. Using gaseous fuels makes it possible to obtain high thermal efficiency, ease of distribution and control. Gas is the most economical and convenient type of fuels. Today gas is widely utilized in the home and as a raw material for producing synthetics.

Scientists consider that a most promising source of natural resources may be the floor of the sea, a subject which now has become an important field of research.

Generally speaking, all types of fossil fuels described in the text are of great economic importance as they represent the sources of energy the man uses today.

1. Укажете, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Coal, water power and atomic energy are the only sources of energy available to man today.
2. Coal, wood and peat represent natural group of solid fuels.
3. As a rule fossil fuels are found in sedimentary rocks.
4. Crude oil is widely used for producing solid fuels.
5. Petroleum can be found in porous sedimentary rocks.
6. Gas is used to produce synthetic materials.
7. Not all types of fossil fuels burn.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What fuels are often referred to as fossil fuels?
2. What does the word fossil mean?
3. What rocks are most abundant hi fossil fuels?

4. What types of fossil fuels do you know?
5. Is coke a natural or manufactured solid fuel? And what can you say about coal and peat?
6. How are coke and charcoal produced?
7. What rocks is petroleum usually associated with?
8. What are the advantages of gaseous fuels?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов сочетаний слов.

1.	fossil fuel	а) дерево и торф
2.	raw material	б) небольшое количество аргиллита
3.	crude oil	в) органическое топливо
4.	the chief sources of energy	г) сланец и известняк
5.	to refer to	д) сырье
6.	any direct or indirect evidence of the deposit	е) материалы, содержащие углерод
7.	shale and limestone	ж) главные источники энергии
8.	carbon-containing materials	з) любые прямые или косвенные признаки месторождения
9.	wood and peat	и) сырая (неочищенная) нефть
10.	the small amount of mudstone	к) относиться к (чему-л.); ссылаться на (что-л.)

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.

1.	древесный уголь и кокс	а) to collect data
2.	жидкое топливо	б) charcoal and coke
3.	накапливать	в) to be composed of limestones
4.	собирать данные	г) liquid fuel
5.	происходить от	д) to accumulate
6.	получать хорошие результаты	е) to derive from
7.	богатый горючими сланцами	ж) to obtain good results
8.	состоять из известняков	з) abundant in oil shales

Text 6: Coal and Its Classification

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*
blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)
combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание
continuity - *n* непрерывность, неразрывность
domestic - *a* внутренний; отечественный
estimate - v оценивать; *n* оценка; смета
fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов
fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding** - *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва
inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя
intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный
liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*
luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous** - *a* блестящий
matter - *n* вещество; материя
moisture - *n* влажность, сырость; влага
parting - *n* прослоек
plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования
rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля
regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**
smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*
store - v запасать, хранить на складе; вмещать
strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**
thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*
uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие
utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**
volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

Coal is the product of vegetable matter that has been formed by the action of decay, weathering, the effects of pressure, temperature and time millions of years ago.

Although coal is not a true mineral, its formation processes are similar to those of sedimentary rocks.

Structurally coal beds are geological strata characterized by the same irregularities in thickness, uniformity and continuity as other strata of sedimentary origin. Coal beds may consist of essentially uniform continuous strata or like other sedimentary deposits may be made up of different bands or benches of varying thickness.

You can see a seam limited by two more or less parallel planes, a shape which is typical of sedimentary rocks. The benches may be separated by thin layers, of clay, shale, pyrite or other mineral matter, commonly called partings. Like other sedimentary rocks coal beds may be structurally disturbed by folding and faulting.

According to the amount of carbon coals are classified into: brown coals, bituminous coals and anthracite. Brown coals are in their turn subdivided into lignite and common brown coal. Although carbon is the most important element in coal, as many as 72 elements have been found in some coal deposits, including lithium, chromium, cobalt, copper, nickel, tungsten and others.

Lignite is intermediate in properties between peat and bituminous coal, containing when dry about 60 to 75 per cent of carbon and a variable proportion of ash. Lignite is a low-rank brown-to-black coal containing 30 to 40 per cent of moisture. Developing heat it gives from 2,500 to 4,500 calories. It is easily inflammable but burns with a smoky flame. Lignite is liable to spontaneous combustion. It has been estimated that about 50 per cent of the world's total coal reserves are lignitic.

Brown coal is harder than lignite, containing from 60 to 65 per cent of carbon and developing greater heat than lignite (4,000-7,000 calories). It is very combustible and gives a brown powder. Bituminous coal is the most abundant variety, varying from medium to high rank. It is a soft, black, usually banded coal. It gives a black powder and contains 75 to 90 per cent of carbon. It weathers only slightly and may be kept in open piles with little danger of spontaneous combustion if properly stored. Medium-to-low volatile bituminous coals may be of coking quality. Coal is used intensively in blast furnaces for smelting iron ore. There are non-coking varieties of coal.

As for the thickness, the beds of this kind of coal are not very thick (1-1.5 meters). The great quantities of bituminous coal are found in the Russian Federation.

Anthracite or "hard" coal has a brilliant lustre containing more than 90 per cent of carbon and low percentage of volatile matter. It is used primarily as a domestic fuel, although it can sometimes be blended with bituminous grades of coal to produce a mixture with improved coking qualities. The largest beds of anthracite are found in Russia, the USA and Great Britain.

Coal is still of great importance for the development of modern industry. It may be used for domestic and industrial purposes. Being the main source of coke, coal is widely used in the iron and steel industry. Lignite, for example either in the raw state or in briquetted form, is a source of industrial carbon and industrial gases.

There is a strong tendency now for increased research into new technologies to utilize coal. No doubt, coal will be used as a raw material for the chemical industry and petrochemical processes. All

these processes involve coal conversion which include gasification designed to produce synthetic gas from coal as the basis for hydrogen manufacture, liquefaction (разжижение) for making liquid fuel from coal and other processes.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Anthracite coals may be divided into lignite and common brown coal.
2. Coals are ranked according to the percentage of carbon they contain.
3. Peat, with the least amount of carbon is the lowest rank, then comes lignite or brown coal.
4. Brown coal is hard and it is not liable to spontaneous combustion.
5. Bituminous coal weathers rapidly and one cannot keep it in open piles.
6. Being intensively used in the iron and steel industry bituminous coal varies from medium to high rank.
7. Anthracite or hard coal, the highest in percentage of carbon, can be blended with bituminous grades of coal.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is the classification of coal based on?
2. Is carbon the only element in coal? (Prove it.)
3. Is lignite intermediate in properties between peat and bituminous coal?
4. What heat value does lignite develop when burnt?
5. What coals are liable to spontaneous combustion?
6. What is the difference between lignite and brown coal?
7. Is bituminous coal high- or low-volatile?
8. Does anthracite contain 90 per cent of carbon?
9. Where are the largest deposits of anthracite found? And what can you say about bituminous coal?
10. What do you know about the utilization of coal?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1.	spontaneous combustion	а) легковоспламеняющийся газ
2.	moisture and ash content	б) высокосортный уголь
3.	the most abundant variety	в) плавить железную руду
4.	in its turn	г) самовозгорание
5.	the amount of volatile matter	д) содержание влаги и золы
6.	easily inflammable gas	е) дымное пламя
7.	brilliant lustre	ж) наиболее широко распространенные угли
8.	to smelt iron ore	з) яркий блеск
9.	high-rank coal	и) в свою очередь
10.	a smoky flame	к) количество летучих веществ

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов н сочетаний слов:

1.	тип угля	а) heat value
2.	некоксующийся уголь	б) amount of carbon
3.	доменная печь	в) coal rank
4.	содержание углерода	г) to store coal
5.	смешиваться с другими углями	д) to weather rapidly
6.	улучшенного качества	е) non-coking coal
7.	складировать уголь	ж) blast furnace
8.	теплотворная способность	з) of improved quality
9.	быстро выветриваться	и) to blend with other coals

Text 7: General Information on Mining

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development** - *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently ~** наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal** - *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support** - крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

As has been said, mining refers to actual ore extraction. Broadly speaking, mining is the industrial process of removing a mineral-bearing substance from the place of its natural occurrence in the Earth's crust. The term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells; metal, non-metallic minerals, coal, peat, oil shale and other hydrocarbons from the earth. In other words, the work done to extract mineral, or to prepare for its extraction is called mining.

The tendency in mining has been towards the increased use of mining machinery so that modern mines are characterized by tremendous capacities. This has contributed to: 1) improving working conditions and raising labour productivity; 2) the exploitation of lower-grade metal-bearing substances and 3) the building of mines of great dimensions.

Mining can be done either as a surface operation (quarries, opencasts or open pits) or by an underground method. The mode of occurrence of the sought-for metallic substance governs to a large degree the type of mining that is practised. The problem of depth also affects the mining method. If the rock containing the metallic substance is at a shallow site and is massive, it may be economically excavated by a pit or quarry-like opening on the surface. If the metal-bearing mass is tabular, as a bed or vein, and goes to a great distance beneath the surface, then it will be worked by some method of underground mining.

Working or exploiting the deposit means the extraction of mineral. With this point in view a number of underground workings is driven in barren (waste) rock and in mineral. Mine workings vary in shape, dimensions, location and function.

Depending on their function mine workings are described as exploratory, if they are driven with a view to finding or proving mineral, and as productive if they are used for the immediate extraction of useful mineral. Productive mining can be divided into capital investment work, development work, and face or production work. Investment work aims at ensuring access to the deposit from the surface. Development work prepares for the face work, and mineral is extracted (or produced) in bulk.

The rock surfaces at the sides of workings are called the sides, or hi coal, the ribs. The surface above the workings is the roof in coal mining while in metal mining it is called the back. The surface below is called the floor.

The factors such as function, direct access to the surface, driving in mineral or in barren rock can be used for classifying mine workings:

I. Underground workings:

a) Long or deep by comparison with their cross-section may be: 1) vertical (shaft, blind pit); 2) sloping (slopes, sloping drifts, inclines); 3) horizontal (drifts, levels, drives, gate roads, adits, crosscuts).

b) Large openings having cross dimensions comparable with their length.

c) Production faces, whose dimensions depend on the thick ness of the deposit being worked, and on the method of mining it.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. As a rule, the term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells as well as coal, iron ores and other useful minerals from the earth.
2. The increased use of mining machinery has greatly contributed to raising labour productivity and improving working conditions.
3. It is quite obvious that the problem of depth is not always taken into consideration in choosing the mining method.
4. Productive workings are usually used for the immediate extraction of useful mineral.
5. Underground workings are driven in barren rock or in mineral.
6. A shaft is a vertical underground working which is long and deep in comparison with its cross-section.
7. The surface above the mine working is usually called the floor.
8. The rock surfaces at the sides of mine workings arc called the ribs.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is mining?
2. What has contributed to the better working conditions of the miners?
3. What factors influence the choice of the mining method?
4. In what case is useful mineral worked by open pits?
5. Are exploratory workings driven with a view to finding and proving mineral or are they driven for immediate extraction of mineral?
6. What is the difference between development and production work?
7. What main factors are used for classifying mine workings?
8. What do the dimensions of production faces depend on?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. direct access to the surface
2. open-cast mining
3. tabular (or bedded) deposits
4. oil well
5. underground workings
6. cross-section of a working
7. production face
8. the roof of the mine working
9. to drive mine workings in barren rock
10. to affect the mining method

а) нефтяная скважина
б) проходить горные выработки по пустой породе
в) влиять на метод разработки
г) прямой доступ к поверхности
д) пластовые месторождения
е) открытая разработка
ж) поперечное сечение выработки
з) подземные выработки
и) очистной забой
к) кровля горной выработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов сочетаний слов:

1. способствовать чему-л.
2. размер ствола
3. извлекать, добывать (уголь)
4. штреки и квершлаги
5. пустая порода
6. вообще говоря
7. удалять, перемещать (крепь, вскрышу и др.)
8. с целью ...
9. подготовительные работы
10. мощность пласта

а) thickness of a seam
б) shaft dimension
в) with a view to
г) to contribute to smth.
д) development work
е) to remove (timber, overburden, etc.)
ж) drifts (gate roads) and crosscuts
з) generally speaking

и) to recover (coal)
к) waste (barren) rock

Text 8: Methods of Working Bedded Deposits Underground

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss** - *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The method of working (or method of mining) includes a definite sequence and organization of development work of a deposit, its openings and its face work in certain geological conditions. It depends on the mining plan and machines and develops with their improvements. A rational method of working should satisfy the following requirements in any particular conditions: 1) safety of the man; 2) maximum output of mineral; 3) minimum development work (per 1,000 tons output); 4) minimum production cost and 5) minimum losses of mineral.

Notwithstanding the considerable number of mining methods in existence, they can be reduced to the following main types: 1. Methods of working with long faces (continuous mining); 2. Methods of working with short faces (room-and-pillar). The characteristic feature of the continuous mining is the absence of any development openings made in advance of production faces. The main advantage of long continuous faces is that they yield more mineral. Besides, they allow the maximum use of combines (shearers), cutting machines, powered supports and conveyers. The longwall method permits an almost 100 per cent recovery of mineral instead of 50 to 80 per cent obtainable in room-and-pillar methods.

The basic principle of room-and-pillar method is that rooms from 4 to 12 meters wide (usually 6-7) are driven from the entries, each room is separated from each other by a rib pillar. Rib pillars are recovered or robbed after the rooms are excavated. The main disadvantage of shortwall work is a considerable loss of mineral and the difficulty of ventilation. In working bedded deposits methods of mining mentioned above may be used either with stowing or with caving.

In Russia, Germany (the Ruhr coal-field), France and Belgium nearly all the faces are now long ones. In Britain longwall faces predominate.

The USA, Canada, Australia and to some extent India are developing shortwall faces and creating the machines for them. In these countries shortwall faces are widely used.

In Russia the thick seams are taken out to full thickness up to 4.5 m thick if they are steep, and up to 3.5 m thick if they are gently sloping or inclined. In the Kuznetsk coal-field long faces are worked to the dip with ashield protection, using a method proposed by N.Chinakal. In shield mining coal is delivered to the lower working by gravity so that additional haulage is not required.

It should also be noted that in Russia hydraulic mining is widely used as it is one of the most economic and advantageous methods of coal getting. New hydraulic mines are coming into use in a number of coal-fields. Hydraulic mining is developing in other countries as well.

The aim of hydraulic mining is to remove coal by the monitors (or giants) which win coal and transport it hydraulically from the place of work right to the surface. It is quite obvious that the choice of the method of mining will primarily depend on the depth and the shape and the general type of the deposit.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. A definite sequence and organization of development work is called mining.
2. Mining methods in existence can be reduced to the two main types.
3. The depth and the shape of the deposit influence the choice of the method of working.
4. As is known, in Belgium all the faces are short now, in Great Britain they amount to 84 per cent.
5. In Australian collieries shortwall faces are widely used.
6. The room-and-pillar method is characterized by the absence of any development openings.
7. High-capacity monitors win coal and transport it hydraulically right to the surface.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What factors does mining depend on?
2. What is mining?
3. What are the most important factors which affect the choice of the method of working?
4. Do short faces or long faces predominate in Russia? What can you say about the Ruhr coal-field?
5. Is Canada developing shortwall faces or longwall faces?
6. What are the main disadvantages of shortwall faces?
7. What are the two main methods of working?
8. What is the main advantage of long continuous faces?
9. What methods of mining long faces do you know?
10. What method of mining is characterized by the absence of development openings?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:

1.	development face	а) сплошная система разработки
2.	great losses	б) выемка целиков
3.	shield method of mining	в) подготовительный забой
4.	continuous mining	г) большие потери
5.	longwall advancing to the dip	д) удовлетворять требованиям
6.	the room-and-pillar method of mining	е) зависеть от геологических условий
7.	to open up a deposit	ж) выемка лавами прямым ходом по падению

8. pillar mining з) щитовая система разработки
9. to satisfy the requirements и) вскрывать месторождение
10. to depend upon the geological conditions к) камерно-столбовая система разработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. включать (в себя) а) safety
2. выемка лавами обратным ходом б) annual output
3. достигать 50% в) to involve
4. превышать 60% г) to propose a new method of mining
5. безопасность д) long wall retreating
6. годовая добыча е) in connection with difficulties
7. основной недостаток системы разработки ж) to exceed 60 per cent
8. под-этаж з) notwithstanding (in spite of)
9. крутопадающий пласт и) to reach 50 per cent
10. щитовая система разработки к) the main disadvantage of the method of mining
11. предложить новый способ разработки л) sublevel
12. в связи с трудностями м) the shield method of mining
13. несмотря на н) open up a deposit
14. вскрывать месторождение о) steep seam

2.3 Подготовка доклада

Подготовьте доклад по одной из предложенных тем.

1. Inigo Jones (1573-1652)
2. Christopher Wren (1632-1723)
3. Geoffrey Chaucer (1340-1400)
4. Samuel Johnson (1709-1784)
5. Alfred Tennyson (1809-1892)
6. Thomas Hardy (1840-1928)
7. John Milton (1608-1674)
8. William Makepeace Thackeray (1811-1863)
9. Henry Wadsworth Longfellow (1807 – 1882)
10. Joshua Reynolds (1723-1792)
11. Thomas More (1478 – 1535)
12. J.M.W. Turner (1775-1851)
13. Thomas Gainsborough (1727 – 1788)
14. Henry Moor (1898-1986)
15. Henry Irving (1838-1905)
16. William Gilbert (1836-1911)
17. Arthur Sullivan (1842-1900)
18. James Watt (1736 - 1819)
19. Thomas Telford (1757 - 1834)
20. Isambard Kingdom Brunel (1806 – 1859)
21. George Stephenson (1781 – 1848)
22. David Livingstone (1813 – 1873)
23. Tony Blair (1953)
24. Winston Churchill (1874 - 1965)
25. Margaret Hilda Thatcher (1925)
26. Sir Isaac Newton (1642 – 1727
27. Alexander Graham Bell (1847 - 1922)

28. Robert Burns (1759 – 1796)

Правила предоставления информации в докладе

Размер	**А4**
Шрифт	Текстовый редактор Microsoft Word, шрифт Times New Roman 12
Поля	слева – 2 см., сверху и справа – 1 см., снизу – 1
Абзацный отступ	1 см устанавливается автоматически
Стиль	Примеры выделяются курсивом
Интервал	межстрочный интервал – 1
Объем	1 -2 страницы (до 7 минут устного выступления)
Шапка доклада	***Иванова Мария Ивановна*** Екатеринбург, Россия ФГБОУ ВПО УГГУ, МД-13 НАЗВАНИЕ ДОКЛАДА
	Список использованной литературы

Краткое содержание статьи должно быть представлено на 7-10 слайдах, выполненных в PowerPoint.

2.4 Подготовка к тесту

Тест направлен на проверку страноведческих знаний и знаний межкультурной коммуникации. Для этого студентам необходимо повторить материал, представленный в *Социально-культурной сфере общения* по теме «Страны изучаемого языка» (Я и мир). Для успешного написания теста изучите следующий материал:

THE GEOGRAPHICAL POSITION OF GREAT BRITAIN

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland covers an area of some 244 thousand square miles. It is situated on the British Isles. The British Isles are separated from Europe by the Strait of Dover and the English Channel. The British Isles are washed by the North Sea in the east and the Atlantic Ocean in the west.

England is in the southern and central part of Great Britain. Scotland is in the north of the island. Wales is in the west. Northern Ireland is situated in the north-eastern part of Ireland.

England is the richest, the most fertile and most populated part in the country. There are mountains in the north and in the west of England, but all the rest of the territory is a vast plain. In the northwestern part of England there are many beautiful lakes. This part of the country is called Lake District.

Scotland is a land of mountains. The Highlands of Scotland are among the oldest mountains in the world. The highest mountain of Great Britain is in Scotland too. The chain of mountains in Scotland is called the Grampians. Its highest peak is Ben Nevis. It is the highest peak not only in Scotland but in the whole Great Britain as well. In England there is the Pennine Chain. In Wales there are the Cumbrian Mountains.

There are no great forests on the British Isles today. Historically, the most famous forest is Sherwood Forest in the east of England, to the north of London. It was the home of Robin Hood, the famous hero of a number of legends.

The British Isles have many rivers but they are not very long. The longest of the English rivers is the Severn. It flows into the Irish Sea. The most important river of Scotland is the Clyde. Glasgow stands on it. Many of the English and Scottish rivers are joined by canals, so that it is possible to travel by water from one end of Great Britain to the other.

The Thames is over 200 miles long. It flows through the rich agricultural and industrial districts of the country. London, the capital of Great Britain, stands on it. The Thames has a wide mouth, that's

why the big ocean liners can go up to the London port. Geographical position of Great Britain is rather good as the country lies on the crossways of the see routes from Europe to other parts of the world. The sea connects Britain with most European countries such as Belgium, Holland, Denmark, Norway and some other countries. The main sea route from Europe to America also passes through the English Channel.

United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland occupies the territory of the British Isles. They lie to the north-west of Europe.

Once upon a time the British Isles were an integral part of the mainland. As a result of sinking of the land surface they became segregated. Great Britain is separated from the continent by the English Channel. The country is washed by the waters of the Atlantic Ocean. Great Britain is separated from Belgium and Holland by the North Sea, and from Ireland — by the Irish Sea.

There are several islands along the coasts. The total area of the British Isles is 325 000 km2. The main islands are Great Britain and Ireland.

The surface of the country is much varied. Great Britain is the country of valleys and plains.

The insular geographical position of Great Britain promoted the development of shipbuilding, different trading contacts with other countries. It has also allowed the country to stay independent for quite a long period of time.

THE BRITISH PARLIAMENT

The British Parliament is the oldest in the world. It originated in the 12th century as Witenagemot, the body of wise councillors whom the King needed to consult pursuing his policy. The British Parliament consists of the House of Lords and the House of Commons and the Queen as its head.

The House of Commons plays the major role in law-making. It consists of Members of Parliament (called MPs for short). Each of them represents an area in England, Scotland, Wales and Ireland.

MPs are elected either at a general election or at a by-election following the death or retirement. Parliamentary elections are held every 5 years and it is the Prime Minister who decides on the exact day of the election. The minimum voting age is 18. And the voting is taken by secret ballot.

The election campaign lasts about 3 weeks, The British parliamentary system depends on political parties.

The party which wins the majority of seats forms the government and its leader usually becomes Prime Minister. The Prime Minister chooses about 20 MPs from his party to become the cabinet of ministers. Each minister is responsible for a particular area in the government. The second largest party becomes the official opposition with its own leader and «shadow cabinet». The leader of the opposition is a recognized post in the House of Commons.

The parliament and the monarch have different roles in the government and they only meet together on symbolic occasions, such as coronation of a new monarch or the opening of the parliament. In reality, the House of Commons is the one of three which has true power.

The House of Commons is made up of six hundred and fifty elected members, it is presided over by the speaker, a member acceptable to the whole house. MPs sit on two sides of the hall, one side for the governing party and the other for the opposition. The first 2 rows of seats are occupied by the leading members of both parties (called «front benches»). The back benches belong to the rank-and-life MPs.

Each session of the House of Commons lasts for 160-175 days. Parliament has intervals during his work. MPs are paid for their parliamentary work and have to attend the sittings.

As mention above, the House of Commons plays the major role in law making. The procedure is the following: a proposed law («a bill») has to go through three stages in order to become an act of Parliament; these are called «readings».

The first reading is a formality and is simply the publication of the proposal. The second reading involves debate on the principles of the bill; it is examination by parliamentary committee.

And the third reading is a report stage, when the work of the committee is reported on to the house. This is usually the most important stage in the process.

When the bill passes through the House of Commons, it is sent to the House of Lords for discussion, when the Lords agree it, the bill is taken to the Queen for royal assent, when the Queen sings the bill, it becomes act of the Parliament and the Law of the Land.

The House of Lords has more than 1000 members, although only about 250 take an active part in the work in the house. Members of this Upper House are not elected; they sit there because of their rank. The chairman of the House of Lords is the Lord Chancellor. And he sits on a special seat, called «Woolsack».

The members of the House of Lords debate the bill after it has been passed by the House of Commons. Some changes may be recommended and the agreement between the two houses is reached by negotiations.

BRITISH TRADITIONS AND CUSTOMS

British nation is considered to be the most conservative in Europe. It is not a secret that every nation and every country has its own customs and traditions. In Great Britain people attach greater importance to traditions and customs than in other European countries. Englishmen are proud of their traditions and carefully keep them up. The best examples are their queen, money system, their weights and measures.

There are many customs and some of them are very old. There is, for example, the Marble Championship, where the British Champion is crowned; he wins a silver cup known among folk dancers as Morris Dancing. Morris Dancing is an event where people, worn in beautiful clothes with ribbons and bells, dance with handkerchiefs or big sticks in their hands, while traditional music-sounds.

Another example is the Boat Race, which takes place on the river Thames, often on Easter Sunday. A boat with a team from Oxford University and one with a team from Cambridge University hold a race.

British people think that the Grand National horse race is the most exciting horse race in the world. It takes place near Liverpool every year. Sometimes it happens the same day as the Boat Race takes place, sometimes a week later. Amateur riders as well as professional jockeys can participate. It is a very famous event.

There are many celebrations in May, especially in the countryside.

Halloween is a day on which many children dress up in unusual costumes. In fact, this holiday has a Celtic origin. The day was originally called All Halloween's Eve, because it happens on October 31, the eve of all Saint's Day. The name was later shortened to Halloween. The Celts celebrated the coming of New Year on that day.

Another tradition is the holiday called Bonfire Night. On November 5, 1605, a man called Guy Fawkes planned to blow up the Houses of Parliament where the king James 1st was to open Parliament on that day. But Guy Fawkes was unable to realize his plan and was caught and later, hanged. The British still remember that Guy Fawkes' Night. It is another name for this holiday. This day one can see children with figures, made of sacks and straw and dressed in old clothes. On November 5th, children put their figures on the bonfire, burn them, and light their fireworks.

In the end of the year, there is the most famous New Year celebration. In London, many people go to Trafalgar Square on New Year's Eve. There is singing and dancing at 12 o'clock on December 31st.

A popular Scottish event is the Edinburgh Festival of music and drama, which takes place every year. A truly Welsh event is the Eisteddfod, a national festival of traditional poetry and music, with a competition for the best new poem in Welsh. If we look at English weights and measures, we can be convinced that the British are very conservative people. They do not use the internationally accepted measurements. They have conserved their old measures. There are nine essential measures. For general use, the smallest weight is one ounce, then 16 ounce is equal to a pound. Fourteen pounds is one stone.

The English always give people's weight in pounds and stones. Liquids they measure in pints, quarts and gallons. There are two pints in a quart and four quarts or eight pints are in one gallon. For length, they have inches: foot, yards and miles.

LONDON

As well as being the capital of England, London is the capital of the United Kingdom. London was founded by the Romans in 43 A.D. and was called Londinium. In 61 A.D. the town was burnt down and when it was rebuilt by the Romans it was surrounded by a wall. That area within the wall is now called the City of London. It is London's commercial and business centre. It contains the Bank of England, the Stock Exchange and the head offices of numerous companies and corporations. Here is situated the Tower of London.

The Tower was built by William the Conqueror who conquered England in 1066. He was crowned at Westminster Abbey. Now most of the Government buildings are located there.

During the Tudor period (16th century) London became an important economic and financial centre. The Londoners of the Elizabethan period built the first theatres. Nowadays the theatre land is stretched around Piccadilly Circus. Not far from it one can see the British Museum and the «Covent Garden» Opera House.

During the Victorian period (19th century) London was one of the most important centers of the Industrial Revolution and the centre of the British Empire. Today London is a great political centre, a great commercial centre, a paradise for theatre-goers and tourists, but it is also a very quiet place with its parks and its ancient buildings, museums and libraries.

LONDON

London is the capital of Great Britain, its political, economic and commercial center. It`s one of the largest cities in the world and the largest city in Europe. Its population is about 9 million. London is one of the oldest and most interesting cities in the world. Traditionally it`s divided into several parts: the City, Westminster, the West End and the East End.

They are very different from each other and seem to belong to different towns and epochs. The heart of London is the City, its financial and business center. Numerous banks, offices and firms are situated there, including the Bank of England, the Stock Exchange and the Old Bailey. Few people live here, but over a million people come to the City to work. There are some famous ancient buildings within the City. Perhaps the most striking of them in St. Paul`s Cathedral, the greatest of British churches. St. Paul`s Cathedral has always dominated the center of London. It stands on the site of former Saxon and Norman churches. They latter were destroyed in the Great Fire and the present building, completed in 1710, is the work of the eminent architect Sir Christopher Wren. It is an architectural masterpiece.

Londoners have a particular affection for St. Paul`s, which is the largest Protestant Church in England. Its high dome, containing the remarkable Whispering Gallery, is a prominent landmark towering above the multistoried buildings which line the river-bank.

The Tower of London was one of the first and most impressive castles built after the Norman invasion of England in 1066. Since the times of William I various kings have built and extended the Tower of London and used it for many purposes. The Tower has been used as a royal palace, an observatory, an arsenal, a state prison, and many famous and infamous people have been executed within its walls. It is now a museum. For many visitors the principal attraction is the Crown Jewels, the finest precious stones of the nation. A fine collection of armour is exhibited in the keep. The security of the Tower is ensured by a military garnison and by the Yeoman Warders or Beefeaters, who still wear their picturesque Tudor uniform.

Westminster is the historic, the governmental part of London. Westminster Abbey is a national shrine where the kings and queens are crowned and famous people are buried. Founded by Edward the Confessor in 1050, the Abbey was a monastery for along time. The present building dates largely from the times of Henry 3, who began to rebuild the church, a task which lasted nearly 300 years. The West towers were added in the eighteenth century. Since William I almost every English monarch has been

crowned in this great church, which contains the tombs and memorials of many of Britain`s most eminent citizens: Newton, Darwin, Chaucer, Dickens, Tennyson, Kipling and etc. One of the greatest treasures of the Abbey is the oaken Coronation Chair made in 1300. The Abbey is also known for its Poet`s Corner. Graves and memorials to many English poets and writers are clustered round about.

Across the road from Westminster Abbey is Westminster Palace, or the Houses of Parliament, the seat of the British Parliament. The Parliament of Great Britain and Northern Ireland consists of the House of Lords and the House of Commons. The House of Lords consists of just over 1,000 members of the different grades of nobility — dukes, marquises, earls, viscounts and barons.

The House of Commons consists of 650 members. They are elected by secret ballot by men and women aged 18 and over. Every Parliament is divided into Sessions. Each of these may last a year and usually begins early in November. The Clock Tower, which contains the hour-bell called Big Ben, is known over the world. The bell is named after Sir Benjamin Hall.

Buckingham Palace is the official residence of the Queen. The West End is the richest and most beautiful part of London. It is the symbol of wealth and luxury. The best hotels, shops, restaurants, clubs, and theatres are situated there. There are splendid houses and lovely gardens belonging to wealthy people.

Trafalgar Square is the geographical center of London. It was named in memory of Admiral Nelson`s victory in the battle of Trafalgar in 1805. The tall Nelson`s Column stands in the middle of the square. On the north side of Trafalgar Square is the National Gallery and the National Portrait Gallery.

Not far away is the British Museum — the biggest museum in London. It contains a priceless collection of ancient manuscripts, coins, sculptures, est., and is famous for its library.

The East End is the poorest district of London. There are a lot of factories, workshops and docks here. The streets are narrow, the buildings are unimpressive. The East End is densely populated by working class families.

PLACES OF INTERESTS IN GREAT BRITAIN

Britain is rich in its historic places which link the present with the past. The oldest part of London is Lud Hill, where the city is originated. About a mile west of it there is Westminster Palace, where the king lived and the Parliament met, and there is also Westminster Abby, the coronation church. Liverpool, the «city of ships», is England's second greatest port, ranking after London. The most interesting sight in the Liverpool is the docks. They occupy a river frontage of seven miles.

The University of Liverpool, established in 1903, is noted for its School of Tropical Medicine. And in the music world Liverpool is a well-known name, for it's the home town of «The Beatles».

Stratford-on-Avon lies 93 miles north-west of London. Shakespeare was born here in 1564, and here he died in 1616.

Cambridge and Oxford Universities are famous centers of learning. Stonehenge is a prehistoric monument, presumably built by Druids, members of an order of priests in ancient Britain. Tintagel Castle is King Arthur's reputed birthplace. Canterbury Cathedral is the seat of the Archbishop of Canterbury, head of the Church of England.

The British Museum is the largest and richest museum in the world. It was founded in 1753 and contains one of the world's richest collections of antiquities. The Egyptian Galleries contain human and animal mummies. Some parts of Athens' Parthenon are in the Greek section.

Madam Tussaud's Museum is an exhibition of hundreds of life-size wax models of famous people of yesterday and today. The collection was started by Madam Tussaud, a French modeller in wax, in the 18th century. Here you can meet Marilyn Monroe, Elton John, Picasso, the Royal Family, the Beatles and many others: writers, movie stars, singers, politicians, sportsmen, etc.

5. Подготовка к экзамену

Подготовка к экзамену включает в себя повторение всех изученных тем курса.

Билет на экзамен включает в себя тест и практико-ориентированное задание.

Наименование оценочного средства	*Характеристика оценочного средства*	*Методика применения оценочного средства*	*Наполнение оценочного средства в КОС*	*Составляющая компетенции, подлежащая оцениванию*
Экзамен:				
Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Тест состоит из 20 вопросов.	КОС - тестовые задания	Оценивание уровня знаний, умений, владений
Практико-ориентированное задание	Задание, в котором обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию	Количество заданий в билете – 1. Предлагаются задания по изученным темам в виде практических ситуаций.	КОС- Комплект заданий	Оценивание уровня знаний, умений и навыков

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине
Б1.Б.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки:
15.03.01 Машиностроение

Профиль
Производство и реновация машин и оборудования

форма обучения: очная, заочная

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Иностранных языков и деловой коммуникации	горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
к.п.н., доц. Юсупова Л. Г.	к.т.н., доцент Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 15.05.2018	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

Содержание

Цели и задачи дисциплины …….…….....3

Требования к оформлению контрольной работы ……..……..4

Содержание контрольной работы…….....4

Выполнение работы над ошибками……...…12

Критерии оценивания контрольной работы ……12

Образец титульного листа ……..…13

Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: повышение исходного уровня владения иностранным языком, достигнутого на предыдущей ступени образования, и достижение уровня иноязычной коммуникативной компетенции достаточного для общения в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах, а также для дальнейшего самообразования.

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:

общекультурные:

- способностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-5).

Для достижения указанной цели необходимо (задачи курса):

- владение иностранным языком как средством коммуникации в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах;
- развитие когнитивных и исследовательских умений с использованием ресурсов на иностранном языке;
- развитие информационной культуры;
- расширение кругозора и повышение общей гуманитарной культуры студентов;
- воспитание толерантности и уважения к духовным ценностям разных стран и народов.

Методические указания по выполнению контрольной работы предназначены для студентов очной и заочной формы обучения, обучающихся по специальности *15.03.01 Машиностроение.*

Письменная контрольная работа является обязательной формой *промежуточной аттестации.* Она отражает степень освоения студентом учебного материала по дисциплине Б1.Б.03 Иностранный язык. А именно, в результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- особенности фонетического строя иностранного языка;
- лексические единицы социально-бытовой и академической тематики, основы терминосистемы соответствующего направления подготовки;
- основные правила грамматической системы иностранного языка;
- особенности построения устных высказываний и письменных текстов разных стилей речи;
- правила речевого этикета в соответствии с ситуациями межличностного и межкультурного общения в социально-бытовой, академической и деловой сферах;
- основную страноведческую информацию о странах изучаемого языка;
- лексико-грамматические явления иностранного языка профессиональной сферы для решения задач профессиональной деятельности;

Уметь:

- вести диалог/полилог и строить монологическое высказывание в пределах изученных тем;
- понимать на слух иноязычные тексты монологического и диалогического характера с различной степенью понимания в зависимости от коммуникативной задачи;
- читать аутентичные тексты прагматического, публицистического, художественного и научного характера с целью получения значимой информации;
- передавать основное содержание прослушанного/прочитанного текста;
- записывать тезисы устного сообщения, писать эссе по изученной тематике, составлять аннотации текстов, вести личную и деловую переписку;
- использовать компенсаторные умения в процессе общения на иностранном языке;

- пользоваться иностранным языком в устной и письменной формах, как средством профессионального общения;

Владеть:

- основными приёмами организации самостоятельной работы с языковым материалом с использованием учебной и справочной литературы, электронных ресурсов;
- навыками выполнения проектных заданий на иностранном языке в соответствии с уровнем языковой подготовки;
- умением применять полученные знания иностранного языка в своей будущей профессиональной деятельности.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «Иностранный язык (английский)» представлено три варианта контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется для студентов в соответствии с начальными буквами их фамилий в алфавитном порядке. Например, студенты, у которых фамилии начинаются с букв А, выполняют контрольную работу № 1 и т.д. (см. таблицу №1).

Таблица №1

начальная буква фамилии студента	***№ варианта контрольной работы***
А, Г, Ж, К, Н, Р, У, Ц, Щ	№1
Б, Д, З, Л, О, С, Ф, Ч, Э, Я	№2
В, Е, И, М, П, Т, Х, Ш, Ю	№3

Содержание контрольной работы №1

Контрольная работа проводится по теме *1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)* и *теме 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435
Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*	102-104	6-8
Оборот *there+be*	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

Вариант №1

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Michael _____ everyone he meets because he is very sociable and easygoing. He has five brothers and two sisters, so that probably helped him learn how to deal with people.

A. gets divorced; **B. gets along well with;** C. gets married;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Заполните пропуски местоимениями some, any, no или их производными.

Пример: A: Is ***anything*** the matter with Dawn? She looks upset.

B: She had an argument with her friend today.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неопределённые местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски личными местоимениями (I, we, you, he, she, it, they, me, us, him, her, them).

Пример: My teacher is very nice. I like … . – I like **him**.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «личные и притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках, обращая при этом внимание на использованные в предложениях маркеры.

Пример: Every morning George **eats** (to eat) cereals, and his wife only **drinks** (to drink) a cup of coffee.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Paul was tired when he got home. – ***Was Paul tired when he got home? Yes, he was.***

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа
Вариант №2

Задание 1. Заполните пропуск, выбрав один вариант ответа.

Пример: A British university year is divided into three _____.

1) conferences; 2) sessions; **3) terms**; 4) periods;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите правильную форму глагола.

Пример: A: I have a Physics exam tomorrow.

B: Oh dear. Physics **is/**are a very difficult subject.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя существительное, функции и спряжение глаголов to be и to have».

Задание 3. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Continuous, Past Continuous или Future Continuous.

Пример: I **shall be studying** (study) Japanese online from 5 till 6 tomorrow evening.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 4. Составьте вопросы к словам, выделенным жирным шрифтом.

Пример: **The Petersons** have bought a dog. – *Who has bought a dog?*

The Petersons have bought **a dog. –** *What have the Petersons bought?*

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Задание 5. Подчеркните правильный вариант ответа.

Пример: A: You haven't seen my bag anywhere, haven't you/**have you**?

B: No. You didn't leave it in the car, **did you**/didn't you?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа
Вариант № 3

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: The University accepts around 2000 new ____ every year.

1) students; 2) teachers; 3) pupils; 4) groups;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Поставьте в предложения подходящие по смыслу фразы:

as red as a beet (свекла), as slow as a turtle, as sweet as honey, as busy as a bee, as clumsy as a bear (неуклюжий), as black as coal, as cold as ice, as slippery as an eel (изворотливый как угорь), as free as a bird, as smooth as silk (гладкий)

Пример: Your friend is so unemotional, he is **as cold as ice**.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя прилагательное и наречие».

Задание 3. Переведите следующие предложения на английский язык.

Пример: Это самая ценная картина в Русском музее. **This is the most valuable picture in Russian Museum.**

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «степени сравнения имени прилагательного и наречий».

Задание 4. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Perfect, Past Perfect или Future Perfect.

Пример: Sam **has lost** (lose) his keys. So he can't open the door.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Задайте вопросы к предложениям.

Пример: There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which *book is Sue's*?' 'The one on the table.'

b) 'Whose *book is on the table*?' 'Sue's.'

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Mein Bruder ... Arzt geworden

A. hat; **B. ist**; C. wird;

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Пассивный залог».

Задание 2. Вставьте подходящее вопросительное слово.

Пример: **Was** machen Sie am Wochenende?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски возвратными местоимениями в нужной форме.

Пример: Wo wohnen d**eine** Eltern?

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках.

Пример: **Kannst** du mir bitte die Marmelade geben? (können)

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Sie wohnen in Berlin.

Ответ: Wo wohnen Sie? Wer wohnt in Berlin?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по

теме «Вопросительные предложения».

ФРАНЦУЗСКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях следующими предлогами: de, à, chez, dans, pour, depuis. vers, avec, devant. en.

Пример: **Monsieur Dupont est en mission**.

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Предлоги».

Задание 2. Заполните пропуски, выберите правильно указательное прилагательное:

Пример: **Peux-tu me passer ces dictionnaires?**

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Указательные прилагательные».

Задание 3. Поставьте нужный артикль или предлог там, где это необходимо:

Пример: **C'est la salle des études**.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Употребление слитного артикля».

Задание 4. Выберите правильную форму глагола:

Пример: **Tous les matins, il s'est levé à 7 heures depuis un an.**

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Présent».

Задание 5. Ответьте на следующие вопросы:

Пример: **Où passez-vous vos vacances d'été? - Je les passe en Crimée.**

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Личные местоимения le, la, les».

Содержание контрольной работы №2

Контрольная работа проводится по теме 3. *Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) и теме 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: модальные глаголы и их эквиваленты, образование видовременных форм глагола в пассивном залоге, основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь, неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий, основные сведения о сослагательном наклонении.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Модальные глаголы и их эквиваленты	295	47

Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге	236	71, 115
Основные сведения о согласовании времён	323-328	269
Прямая и косвенная речь	324	268
Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий	311-322	132, 162, 173, 192, 193
Основные сведения о сослагательном наклонении	329	224

АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

Вариант №1

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: You: “Are you engaged?” Taxi driver: “_____”.

Варианты ответов:

1) Yes, I am having a rest.

2) Sorry, but I don’t.

3) No, sir. Where do you wish me to take you?

4) Yes, thank you.

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Перепишите предложения в страдательном залоге.

Пример: The people are discussing politics. **Politics is being discussed.**

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».

Задание 3. Вставьте модальные глаголы may (might) или can (could).

Пример: Can you help me?

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «модальные глаголы».

Задание 4. Употребите правильную форму глагола в пассивном залоге.

Пример: The roads **are covered** (cover) with the snow.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».

Задание 5. Вставьте модальный глагол may или might. Раскройте скобки, употребляя требующуюся форму инфинитива.

Пример: **May I ask** (to ask) you to take off your hat?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «модальные глаголы, инфинитив».

Вариант №2

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: The … of shafts is very expensive.

a) making; **b) driving;** c) building;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите подходящую форму глагола в каждом предложении.

Пример: If we **leave** (will leave/leave/leaves) at 7 o’clock, we **will arrive** (will arrive/arrive/arrives) on time.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по

теме «сослагательное наклонение».

Задание 3. Выберите из скобок требующуюся форму причастия.

Пример: We listened to the girls **singing** (singing, sung) folk songs.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «причастие».

Задание 4. Перепишите предложения в страдательном залоге.

Пример: The child has broken the crystal vase. The crystal vase has been broken by the child.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «страдательный залог».

Задание 5. Перефразируйте следующие предложения, употребляя модальный глагол need.

Пример: 1) It is not necessary to go there. **You need not go there.**

2) It was not necessary to go there. **You need not have gone there.**

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «модальные глаголы, инфинитив».

Вариант №3

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: A certain amount of ore … in incline sinking.

a) is extracted; b) is got; c) is mined;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите из скобок требующуюся форму причастия.

Пример: I picked up the pencil **lying** (lying, lain) on the floor.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неличные формы глагола: причастие».

Задание 3. Раскройте скобки, употребляя требующуюся форму инфинитива.

Пример: He seems **to read** (to read) a lot.

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неличные формы глагола: инфинитив».

Задание 4. Перепишите предложения в косвенной речи.

Пример: He said, 'I'm going to the station.' - ***He said (that) he was going to the station.***

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «прямая и косвенная речь, согласование времен».

Задание 5. Переведите на английский язык.

Пример: Если бы я знал французский, я бы уже давно поговорил с ней.

If I had known French, I would have spoken with her.

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «сослагательное наклонение».

НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски, поставив существительное из скобок в нужную форму во множественном числе.

Пример: Unsere (Gast) **Gäste** haben mehrere (Stunde) **Stunden** gebraucht, um uns zu finden.

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Множественное число имен существительных».

Задание 2. Вставьте правильное окончание глаголов.

Пример: Ich komm**e** meistens gegen acht Uhr ins Büro und schalt**e** erst einmal den Computer ein.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глагола».

Задание 3. Вставьте модальные глаголы müssen, können, dürfen, möchten или wollen. Возможно несколько правильных вариантов:

Пример: In der Bibliothek: Sie **können** Bücher leihen.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».

Задание 4. Составьте Ja/Nein вопросы к данным ответам.

Пример: Nein, ich spreche kein Französisch.

Sprechen Sie Französisch? / Sprichst du Französisch?

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные предложения».

Задание 5. Составьте вопросы и ответьте на них.

Пример: wie • Sie •heißen •? **Wie heißen Sie?**

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Порядок слов в вопросительном предложении».

ФРАНЦУЗСКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Выберите правильный вариант ответа

Пример: **Permettez-moi de vous présenter…**

1) **Le vice-récteur de notre Université.**

2) Voici ma carte de visite.

3) Enchanté, je suis Robert Dupont.

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные прилагательные».

Задание 2. Замените инфинитив формой Futur simple или Présent:

Пример: **Si je n'ai pas mal à la tête, j'irai au cinéma avec mes amis.**

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Futur simple. Придаточное предложение условия».

Задание 3 Поставьте глаголы в Imparfait:

Пример: **Chaque année, ils partait camper en montagne.**

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Imparfait».

Задание 4. Поставьте глаголы в Conditionnel présent или Imparfait:

Пример: Nous irions demain à la campagne s'il faisait beau temps.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Conditionnel présent».

Задание 5. Поставьте вместо точек соответствующие местоимения:
Пример: **Vous irez à la campagne**.

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Futur simple».

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Работа с оценкой «неудовлетворительно» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 1 балл. Максимум 44 балла.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

40-44 балла (90-100%) - оценка «отлично»;
31-39 балла (70-89%) - оценка «хорошо»;
22-30 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;
0-21 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра иностранных языков и деловой коммуникации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки:
15.03.01 Машиностроение

Профиль
Производство и реновация машин и оборудования

формы обучения: очная, заочная

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа МШС-18

Преподаватель: Петров Петр Петрович,
к.т.н, доцент

Екатеринбург
2018

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Б1.Б.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Профиль
Производство и реновация машин и оборудования

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2019

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Иностранных языков и деловой коммуникации	горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
к.п.н., доц. Юсупова Л. Г.	к.т.н., доцент Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 15.05.2018	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)……..... 3
1.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 3
1.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 5
1.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 6

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование) ……..... 35
2.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 35
2.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 36
2.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 38

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) ……..... 53
3.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 53
3.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 54
3.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 58

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность) ……..... 74
4.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 74
4.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 82
4.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 82

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)

Тематика общения:

1. Я и моя семья.
2. Дом, жилищные условия.
3. Мой рабочий день.
4. Досуг и развлечения.

Проблематика общения:

1. Взаимоотношения в семье, семейные традиции.
2. Устройство квартиры/загородного дома.
3. Рабочий день студента.
4. Досуг в будние и выходные дни, активный и пассивный отдых.

1.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

родственник relative, relation
родители parents
мать (мама) mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
отец (папа) father (dad, daddy, papa, pa)
жена wife
муж husband
супруг(а) spouse
ребенок, дети child, children
дочь daughter
сын son
сестра sister
брат brother
единственный ребенок only child
близнец twin
близнецы, двойняшки twins
брат-близнец twin brother
сестра-близнец twin sister
однояйцевые близнецы identical twins
тройняшки triplets
бабушка и дедушка grandparents
бабушка grandmother (grandma, granny, grandmamma)
дедушка grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
внуки grandchildren
внучка granddaughter
внук grandson
прабабушка great-grandmother
прадедушка great-grandfather
прабабушка и прадедушка great-grandparents
правнуки great-grandchildren
тётя aunt
дядя uncle
крестный (отец) godfather
крестная (мать) godmother
отчим, приемный отец stepfather
мачеха, приемная мать stepmother
сводный брат stepbrother
сводная сестра stepsister
брат по одному из родителей half-brother
сестра по одному из родителей half-sister

приемный, усыновленный сын adopted son
приемная, удочеренная дочь adopted daughter
приемный ребенок adopted child
патронатная семья, приемная семья foster family
приемный отец foster father
приемная мать foster mother
приемные родители foster parents
приемный сын foster son
приемная дочь foster daughter
приемный ребенок foster child
неполная семья (с одним родителем) single-parent family
родня the kin, the folks
племянница niece
племянник nephew
двоюродный брат cousin (male)
двоюродная сестра cousin (female)
двоюродный брат (сестра), кузен (кузина) first cousin
троюродный брат (сестра) second cousin
четвероюродный брат (сестра) third cousin
родня со стороны мужа или жены in-laws
свекровь mother-in-law (husband's mother)
свёкор father-in-law (husband's father)
тёща mother-in-law (wife's mother)
тесть father-in-law (wife's father)
невестка, сноха daughter-in-law
зять son-in-law
шурин, свояк, зять, деверь brother-in-law
свояченица, золовка, невестка sister-in-law
семейное положение marital status
холостой, неженатый, незамужняя single
женатый, замужняя married
брак marriage
помолвка engagement
помолвленный, обрученный engaged
развод divorce
разведенный divorced
бывший муж ex-husband
бывшая жена ex-wife
расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей separated
вдова widow
вдовец widower
подружка, невеста girlfriend
друг, парень, ухажер boyfriend
любовник, любовница lover
ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный fiance
свадьба wedding
невеста на свадьбе bride
жених на свадьбе (bride)groom
медовый месяц honeymoon

1.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My family

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

My student's life

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV

programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

My flat

I live in Ekaterinburg in a sixteen-storied dwelling house in the center of the city.
Five years ago our old wooden house was pulled down & we moved here into three-room flat with all modern conveniences.

Now we have running water, gas, electricity, central heating & a refuse chute. We live on the top floor & from the balcony we have a good view of the park. Besides we needn't mount the staircase because there is a lift to take us up.

The entrance hall is rather small. There is a hallstand & a mirror-stand there.

The sitting-room is a spacious simply furnished room. The floor spacious is about 15 square meters. It is not overcrowded with furniture. Everything fits in well. Nothing is out of place here. Next to the window there is a sofa with a stand – lamp. The bookcase in the corner of the room is full of books. On the left there are two comfortable arm-chairs opposite the TV-set & leaf – table.

In the bedroom we have dark brown suite of furniture of the latest model & thick carpet. Near the wall there is a divan-bed. In the built-in-wardrobe we keep our clothes & bed linen.
The adjoining room is the children's room. The bright pattern of the curtains & of wall paper makes the room look gay. There is a writing desk with a desk lamp, a small sofa & a lot of toys there.

In the kitchen there is a fridge, a cupboard, a kitchen table & a gas-stove. Over the sink there is a plate-rack. All kitchen utensils are close at hand.

In the corridor there is a built-in-closet, where we keep our vacuum-cleaner, electric iron & other household objects.

In the bathroom there is a bath-tub & a shower, a towel-rack & a wash-basin with a shelf above it. There tooth-brushes, a cake of soap & some shaving articles on it. Near the bath-room there is a lavatory.

There is nothing special about our flat, no rich decorations but we are accustomed to it & cannot compare it to the old one.

1.3 Систематизация грамматического материала:

1. Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях. Порядок слов в вопросительном предложении. Безличные предложения.
2. Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные).
3. Имя существительное. Артикли (определенный, неопределенный, нулевой).
4. Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have.* Оборот *there+be.*
5. Имя прилагательное и наречие. Степени сравнения. Сравнительные конструкции.
6. Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат).

Порядок слов в английском предложении

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

I	II	III Дополнение	IV

					Обстоятельство
Подлежащее	**Сказуемое**	**Косвенное без предлога**	**Прямое**	**Косвенное с предлогом**	
We Мы	study изучаем		math математику		
He Он	gives дает	us нам	lessons уроки		in this room. в этой комнате
She Она	reads читает		her notes свои заметки	to Peter Петру	every day. каждый день

Вопросительное предложение

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

Общие вопросы

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.

Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?

Примеры с модальными глаголами:

She can drive a car. – Она умеет водить машину.

Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot)

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.

Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?

Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

Ответы на общие вопросы

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not

Например: Are you a student? - Ты студент?

Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.

Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

Специальные вопросы

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.

Специальные вопросы могут начинаться словами:

who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?

when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?

how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?

how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

Вопрос к прямому дополнению:

What are you reading? Что ты читаешь?

What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

Вопрос к обстоятельству

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.

When will he come back? – Когда он вернется?

What did he do it for? Зачем он это сделал?

Where are you from?

Вопрос к определению

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?

Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

Вопрос к сказуемому

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: "Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?", например:

What does he do? Что он делает?

Специальные вопросы к подлежащему

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)

what - что (для неодушевленных существительных)

The teacher read an interesting story to the students yesterday.

Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):
Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

Альтернативные вопросы

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

Разделительные вопросы

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:
You speak French, don’t you? You are looking for something, aren’t you? Pete works at a plant, doesn’t he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:
It is not very warm today, is it? John doesn’t live in London, does he?

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Write questions and answers for the following statements, as in the example.

1 Paul was tired when he got home.
…Was Paul tired when he got home? Yes, he was…
2 They live in London.
3 She can't play the piano.
4 The film starts at nine o'clock.
5 You had an English lesson last night.
6 She has got blue eyes.
7 We didn't want to go to the beach.
8 He should follow the doctor's advice.

2. Write the short form of the following negative questions

1 Can they not decide where to go on holiday?

...Can't they decide where to go on holiday?...

2 Did Claire not invite you to her party?

3 Do you not enjoy watching horror films?

4 Have you not finished your homework yet?

5 Can she not go to town on her own?

6 Does he not know where we live?

7 Has Sue not done the shopping for you?

8 Did he not give you any details?

3. Fill in the gaps with the correct question word(s).

A: Now for the general knowledge part of the quiz.

1) ...*What*... is the capital of Egypt?

B: Cairo.

A: That's correct. 2) … can you see the Mona Lisa?

B: In the Louvre, in Paris.

A: Well done, that's right. 3) … wrote 'Romeo and Juliet'?

B: Charles Dickens.

A: No, that's incorrect. It was Shakespeare. 4) … are the Olympic Games held?

B: Every four years.

A: Correct. 5) … did the Second World War begin?

B: I think it was in 1939.

A: Yes, you're right. And the final question in this round is: 6) … players are there in a hockey team?

B: Eleven.

A: Correct. Well, at the end of that round, Contestant 2 has the most points, so he goes through to the final round to play for our star prize.

4. Fill in who, whose, what, which, where, when, how long, how often, what time, why, how much or how many.

is your jacket?' 'It's the red one.'

1. '...*Which*... is your jacket?' 'It's the red one.'
2. '…is your birthday?' 'It's next week.'
3. '… is Mary?' 'She's in her bedroom.'
4. '… have you been waiting?' Only five minutes.'
5. '… do you go shopping?' Once a week.'
6. '… are you doing at the moment?' I'm watching TV.'
7. ' … are you writing to?' 'Uncle Tom.'
8. '…do you start work?' At nine o'clock in the morning.'
9. '… pieces of toast do you want?' Two, please.'
10. '… isn't she at work today?' Because she's ill.'
11. '… did you spend last month?' About £500.'
12. ' … party are you going tonight?' 'Alison's'

5. Fill in the gaps with what, which or how.

1 A: ...*What*... do you want to do when you leave school?
B: I'm not really sure. I'd like to be a vet.

2 A: … bag do you prefer - the black one or the brown one?
B: I like the black one best.

3 A: … old are you?
B: It was my birthday last week. Now I'm fifteen.

4 A: … did you get my telephone number?
B: I looked in the staff address book.

5 A: … shall we do on Saturday?
B: Let's just stay at home and watch a video.

6 A: … house did you prefer — the one we saw first or second?
B: I didn't like either. We'll have to keep looking.
7 A: … many pairs of shoes did you buy last year?
B: Only two. One in the summer and one in the winter.
8 A: … is your favourite food?
B: Roast chicken.

6. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The tiger** is the largest member of the cat family.
…Which is the largest member of the cat family?...
2 A mature male tiger weighs **between 160 and 230 kg**.
3 Tigers are usually **orange with black stripes**.
4 Tigers live **in Russia, China, India and South-East Asia.**
5 **The Javan tiger, the Bali tiger and the Caspian tiger** are extinct.
6 Tigers eat **a variety of smaller animals, including deer.**
7 Tigers can produce young **at any time of year.**
8 Tigers usually have **two or three** cubs at a time.
9 Tigers live **for an average of eleven years.**
10 Tigers are hunted **for sport or for their fur**.

7. Write questions to which the words in bold are the answers.

Claudette is **32 years old**. She lives **in Paris, France**, and has lived there **since she was 5 years old.** Claudette works as **a lawyer** for a successful law firm, and she travels to work **by car** every day. Claudette is married. Her husband's name is **Jean**. They have **two** dogs. She loves **to take the dogs for long walks** every evening **after work.** Claudette has several hobbies, such as **reading and playing the piano**, but her **favourite hobby is cooking**. Jean thinks this is good, too, **because he gets to eat the wonderful meals she makes.**

8. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The Petersons** have bought a dog.
…Who has bought a dog?...
2 The Petersons have bought **a dog.**
…What have the Petersons bought?...
3 Rachel is writing **a letter**.
4 **Rachel** is writing a letter.
5 **Brian** likes this car.
6 Brian likes **this car**.
7 Dad broke **the window**.
8 **Dad** broke the window.
9 **Mother** will make a birthday cake.
10 Mother will make **a birthday cake**.
11 **Robin** is going to bake some biscuits.
12 Robin is going to bake **some biscuits**.

9. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 Wendy doesn't agree with **her friend's decision**.
…What doesn't Wendy agree with?...
2 James is listening to **some old records**.
3 Sharon is waiting for **the bus**.
4 The boys were talking about **football**.
5 She has got a letter from **her pen-friend**.
6 Martin is thinking about **his holiday**.
7 This jacket belongs to **Stacey.**
8 Pauline was married to **Nigel.**

10. Complete the questions.

1 There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which …*book is Sue's*...?' 'The one on the table.'
b) 'Whose …*book is on the table*…?' 'Sue's.'
2 Steven wrote four letters.
a) 'Who … ?' 'Steven.'
b) 'How many … ?' 'Four.'
3 Teresa is going to wash the car.
a) 'Who … ?' Teresa.'
b) 'What … ?' 'The car.'
4 Kate visited John in hospital yesterday.
a) 'Who … ?' 'Kate.'
b) 'Who … ?' 'John.'
5 David has taken Frank's new CD.
a) 'Whose …?' 'Frank's.'
b) 'Who …?' 'David.'
6 Alice is going to the cinema tonight.
a) 'Who …?' 'Alice.'
b) 'Where …?'The cinema.'

Безличные предложения

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

Местоимение. The Pronoun.
Классификации местоимений.

1	**personal**	личные
2	**possessive**	притяжательные
3	**demonstrative**	указательные
4	**indefinite and negative**	неопределенные и отрицательные
5	**quantifiers**	количественные
6	**reflexive**	возвратные
7	**reciprocal**	взаимные
8	**relative**	относительные
9	**defining**	определительные
10	**interrogative**	вопросительные

I. Личные (personal) местоимения

Общий падеж		**Объектный падеж**	
I	я	**me**	мне, меня
he	он	**him**	его, ему

she	она	**her**	ей, о ней
it	оно, это	**it**	ей, ему, этому
we	мы	**us**	нам, нас
they	они	**them**	им, их
you	ты, вы	**you**	тебе, вам

Внимание! He (он) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

he	**she**	**it**
a boy – мальчик **a man –** мужчина **brother –** брат **father –** отец **Nick –** Николай **Mr Grey –** мистер Грей	**a girl –** девочка **a woman –** женщина **sister – с**естра **motherч–** мама **Kate –** Катя **Mrs Grey –** миссис Грей	**a cat –** кот **a wall –** стена **rain –** дождь **love –** любовь **a hand –** рука **an apple -** яблоко

Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).

II. Притяжательные (possessive) местоимения

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы - основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
Whose pen is it? - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

Личное местоимение	**Основная форма**	**Абсолютная форма**
I – я **he –** он **she –** она **it – оно,** это **we –** мы **you –** ты, вы **they -** они	**my (toy) -** моя (игрушка) **his (toy) -** его (игрушка) **her (toy) -** ее (игрушка) **its (toy) -** его (не о человеке) **our (toy) -** наша (игрушка) **your (toy) -** ваша, твоя (игрушка) **their (toy) -** их (игрушка)	**his -** его **hers -** ее **its -** его (этого) **ours -** наша **yours -** ваша, твоя **theirs -** их

III. Указательные (demonstrative) местоимения

this (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения

Местоимения some, any, every, и их производные

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
I have/l have got three apples. *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

Производные от неопределенных местоимений

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

Thing используется для неодушевленных (что-то):

some **something –** *что-то, что-нибудь*

any	**anything -** *что-то, что-нибудь*
thing	
no	**nothing -** *ничего, ничто*
every	**everything -** *все*
Body/one - для одушевленных (кто-то):	
some	**somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь*
any	**anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь*
body/one	
no	**nobody / no one -** *никого, никто*
every	**everybody /everyone –** *все, каждый*

Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*

somewhere - *где-нибудь, куда-нибудь*	**anywhere -** *где угодно*
nowhere - *нигде*	**everywhere -** *везде*

V. Количественные (quantifiers) местоимения

Many и much - оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.

many girls - *много девочек*	**much snow -** *много снега*
many boys - *много мальчиков*	**much money -** *много денег*
many books - *много книжек*	**much time -** *много времени*

How many? } **сколько?** **How many girls? -** *Сколько девочек?*
How much? } **сколько?** **How much sugar? -** *Сколько сахара?*
How much sugar? - *Сколько сахара?*

a lot of... - много - используется и с исчисляемыми, girls – много девочек
и с неисчисляемыми существительными **a lot of**
a lot без (of) используется и без существительного. sugar - много сахара
Сравните: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.*
He writes **a lot.** *Он много пишет.*

<u>В утвердительных</u> предложениях используйте **a lot of.**
<u>В отрицательных</u> и в вопросительных **many/much,**
Сравните:
(+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*.
(-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?*
Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":**
Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.

Few, little, a few, a little
С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало), а с исчисляемыми - few (мало).

few books - мало книг	**little time -** мало времени
few girls - мало девочек	**little money -** мало денег
few boys - мало мальчиков	**little snow -** мало снега
little } **мало (т.е. надо еще)**	**a little** } **немного (т.е. пока хватает)**

few	a few

VI. Возвратные (reflexive) местоимения

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

Личное местоимение	Возвратное местоимение	Пример	Перевод
I	myself	I did it myself.	Я сделал это сам
he	himself	He did it himself.	Он сделал это сам.
she	herself	She did it herself.	Она сделала это сама
you	yourself	You did it yourself.	Вы сделали это сами.
they	themselves	They did it themselves.	Они сделали это сами.
we	ourselves	We did it ourselves.	Мы сделали это сами.

VII. Взаимные (reciprocal) местоимения

Each other - друг друга (относится к двум лицам или предметам).
One another - друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
They spoke to <u>each other</u> rather friendly. *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
They always help <u>one another</u>. *Они всегда помогают друг другу.*

VIII. Относительные (relative) местоимения

Who (whom), whose, which, that

who	**Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)** **The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.*
	Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение) **The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.*
which	**Для неодушевленных предметов и животных** **The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.*
whose	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.*
	Для неодушевленных существительных **We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.*
that	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.*
	Для неодушевленных существительных **This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.*

IX. Определительные (defining) местоимения

all

Употребление	Примеры	Перевод
определяет неисчисляемые существительные	He spent **all his** time fishing on the lake**.**	Он провел все свое время, ловя рыбу на озере.
определяет исчисляемые существительные	**All the** boys like football. **(the после all!)**	Все мальчишки любят футбол.
all = everything	I know **all/everything.**	Я знаю всё.
all = everybody	**All** were hungry. **Everybody** was hungry.	Все были голодны. Все были голодны.
we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them	We **all** love you very much = **All** of us love you very much.	Мы все тебя очень любим

both

Употребление	Примеры	Перевод
определяет существительные	**Both (the/my) friends like football.**	Оба моих друга любят футбол
допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both	**Both these/the men are Russian.**	Оба (эти) мужчины - русские.
употребляется вместо существительного	**He gave me two apples. Both were sweet.**	Он дал мне два яблока. Оба были сладкими.
they both = both of them you both = both of you we both = both of us	**They both (both of them) came to visit us.**	Они оба пришли навестить нас.
в устойчивой конструкции **both...and.**	**Both mother father were at home**	И мама, и папа были дома.
в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither**	**Both of them know English. Neither of them know English.**	Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского.

either/neither

	Употребление	Примеры	Перевод
either	любой из двух (артикль не ставится)	**I've got 2 cakes. Take either cake.**	У меня 2 пирожных. Возьми любое.
	каждый, оба, и тот, и другой	**There are windows on either side of the house.**	С обеих сторон дома есть окна.
	заменяет существительное (глагол в ед. числе)	**Either of dogs is always hungry.**	Любая из собак вечно голодная.
neither	отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой)	**Neither of examples is correct.**	Ни один из примеров не верен.
	в констр. neither.. .nor (ни.. .ни)	**I like neither tea, nor coffee.**	Я не люблю ни чай, ни кофе.

other, another, the other, the others (другой, другие)

	Употребление	Примеры	Перевод
the other	другой (второй), другой из двух	**You've got 2 balls: one and the other.**	У тебя 2 мяча: один и другой.
another	другой из многих, еще один	**Take another ball.**	Возьми другой мяч.

			(Любой, но не этот.)
other	другие (любые), не последние	**Take other 2 balls.**	Возьми другие 2 мяча. (Из многих.)
the others	другие (определенные)	**There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.**	Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие.

X. Вопросительные (interrogative) местоимения

what	что	**What's this?**	Что это?
which	который	**Which of them?**	Который из них?
who	кто, кого	**Who was that?**	Кто это был?
whom	кого	**Whom did you meet?**	Кого ты встретил?
whose	чей	**Whose book is it?**	Чья это книга?

Имя существительное. The Noun

Категории	Существительное в русском языке	Существительное в английском языке
Число	**Изменяется**	**Изменяется**
Падеж	**Изменяется**	**Не изменяется**

Выполните упражнения на закрепление материала:

. Fill in the gaps with the correct subject or object pronoun.

1 A: Do your brothers play football?
B: Yes, ...*they*... play … all the time … think …'s a brilliant game.
2 A: Does Susan eat chocolate?
B: Yes … eats … all the time … says …'s her favourite food.
3 A: Do your parents know Mr. Jones?
B: Yes, … know … very well … lives next door to … .
4 A: Does Claire like David?
B: No, … doesn't like … very much. … says …'s too noisy.
5 A: Do you listen to rock music?
B: Yes, … listen to … all the time. … think …'s fantastic.
6 A: Does Tony enjoy fishing?
B: Oh, yes … enjoys … very much. .... says … relaxes him.

2. Fill in the gaps with there or it.

1 By the time I got home, ...*it*… was nearly ten o'clock.
2 'Is … your birthday today?" No, … was last week.'
3 Come here, Simon … is someone here to see you. I think … is your friend, Rod.
4 … wasn't warm enough to go to the beach, so we went to the cinema.
5 … wasn't very much money left after I had paid for the shopping.

3. Fill in the gaps with one or it.

1 A: I need a loaf of bread.
B: I'll buy ...*one*... this afternoon.
2 A: Is the phone ringing?
B: I can't hear … .
3 A: 'Titanic' is an amazing film.
B: I know. I've seen … twice.
4 A: When was the last time you read a book?
B: I haven't read … for months.

5 A: Have you got a car?
B: No. I can't afford … .
6 A: Do you like the new Rolling Stones CD?
B: I haven't heard … yet.
7 A: I need a dress for the party.
B: I'll lend you … .

4. Fill in the correct possessive adjective or pronoun.

1 A: Have you met ...*your*... new neighbours yet?
B: No. I've seen … children in the garden, though.
2 A: You took … coat home last night.
B: I know, I'm sorry. I thought it was … because they're both black.
3 A: What's wrong with Rosie?
B: Oh, she's been having problems with … back recently.
4 A: James is doing well at school.
B: I know … teacher says he's very advanced for his age.
5 A: Is this bag … ?
B: Oh, yes, thank you. I nearly forgot it.
6 A: Julie and Frank are so lucky … house is beautiful.
B: Yes, and it's so much bigger than … I envy them.
7 A: I like … shirt. It's like Sandra's.
B: Actually, it is … I borrowed it from her yesterday.
8 A: Why did you lend Tom … car?
B: Because … is being repaired at the moment.

5. Fill in its or it's.

1 The car is nice to drive, but I don't like ...its... colour.
2 This town is wonderful … got lots of shops!
3 I'm staying at home today because … cold outside.
4 Let's go in here … my favourite restaurant.
5 A bird has built … nest in our garden.
6 The company I work for has changed … name.

6. Fill in a possessive adjective or the.

1 A dog bit him on ...*the*... leg.
2 I banged … head on the cupboard door.
3 Karen put … arm around Jane's shoulder.
4 Don't put … feet on the tablel
5 You shouldn't have punched Tom in … stomach.
6 Paul patted Lisa on … shoulder.

7. Fill in the gaps with of where necessary, and my, your, etc. own.

1 John doesn't live with his parents any more. He's got a flat ...*of his own*...
2 She doesn't travel by bus any more because she's got … car.
3 I don't need to borrow your umbrella. I've got one … .
4 Haven't you got … pen? You're always borrowing mine.
5 My job includes doing research in … time.
6 Sam is tired of using his friend's computer, so he is going to buy one… .
7 The couple moved into … house after they got married.
8 Don't let the dog sleep on your bed. It's got a bed … .

8. Connect the nouns using -'s, -' or ...of…

1 car/Helen ...*Helen's car*…
2 the manager/the restaurant
3 shoes/women
4 the results/the test
5 bicycles/my daughters

6 secretary/the assistant manager
7 the corner/the room
8 house/their parents
9 the back/the classroom
10 shoes/William
11 walk/an hour
12 partner/Jim
13 Rome/the streets
14 UN/headquarters

9. Rewrite the sentences using the correct possessive form.

1 Nobody went to **the meeting last week**.

...Nobody went to last week's meeting....

2 The **drive** to the airport takes **two hours**.
3 They will get their exam results **six weeks from now**.
4 I look after **James - Karen — children**.
5 I received the letter in **the post - yesterday**.
6 It's autumn. **The tree - the leaves** are falling off.
7 Graham never listens to **his doctor - the advice.**
8 Are you going to **Jane - Paula - the party**?
9 He has never done a hard **day of work** in his life.
10 At the moment I'm staying with **a friend - my**.
11 I think I'll order **the special of today**.
12 The man knocked on **the house - the door**.
13 The ticket inspector looked at **the people – the tickets.**
14 **Mrs Jones - Miss Smith - cars** are being serviced.
15 **The sales target this month** is two million pounds.

10. Fill in the gaps with the correct reflexive pronoun.

1 The girl has hurt … *herself...* .
2 He put the fire out by …
3 She is looking at … in the mirror.
4 They are serving …
5 He cooked the food by …
6 They bought this house for …
7 They are enjoying …
8 He introduced …

The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

Способ образования	Примеры	Перевод
после глухих согласных	**a book - books** **a cup - cups**	**книга - книги** **чашка - чашки**
после звонких согласных и гласных -	a name - names a girl - girls	**имя - имена** **девочка - девочки**
после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es	a palace - palaces a bush - bushes a box - boxes a church - churches	дворец - дворцы куст - кусты коробка - коробки церковь - церкви
слово заканчивается на -y: 1) гласная +y	**a toy - toys** **a boy - boys**	игрушка - игрушки мальчик - мальчики

2) согласная + y	**a family - families** **a story - stories**	**семья - семьи** **история - истории**
слово заканчивается на *-file*	**a leaf - leaves** **a shelf - shelves**	лист - листья полка - полки

Особые случаи образования множественного числа

Ед. число	**Мн. число**	**Перевод**
man	men	мужчина - мужчины
woman	women	женщина - женщины
foot	feet	нога (стопа) - ноги (стопы)
child	children	ребенок - дети
goose	geese	гусь - гуси
mouse	mice	мышь - мыши
ox	oxen	**бык - быки**
tooth	teeth	**зуб - зубы**

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):
This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

Со словами one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.**	
What apple do you want? **Какое ты хочешь яблоко?** **The red one. Красное.**	**What apples do you want?** **Какие яблоки ты хочешь?** **The red ones. Красные.**

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски.	This girl speaks English well.
Р. п. Это собака той девочки.	It’s a dog of that girl.
Д. п. Я дал яблоко той девочке. .	I gave an apple to that girl.
В. п. Я вижу маленькую девочку. .	1 can see a little girl.
Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой.	1 like to play with this girl.
П. п. Я часто думаю об этой девочке.	1 often think about this girl.

Притяжательный падеж. The Possessive Case
Образование притяжательного падежа

	Образование	**Примеры**	**Перевод**
существительные в единственном числе	**’s**	**bird’s house** **child’s ball**	домик птички мячик ребенка
существительные во множественном числе (группа исключений}	**’s**	**children’s bail** **women’s rights**	мячик детей права женщин
существительное во множественном числе	**’**	**girls’ toy** **birds’ house**	игрушка девочек домик птичек

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother’s book - мамина книга,

this girl’s bail - мячик девочки,

the bird’s house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with an appropriate noun + of to indicate quantity.

1 a ... carton/glass/jug of ... orange juice
2 a … cheese
3 a … bread
4 a … coffee
5 a … water
6 a … wine
7 a … chocolate
8 a … crisps
9 a … honey
10 a … meat
11 a … spaghetti
12 a … flour

2. Fill the gaps with a, an, or some where necessary.

1 a) We had ...some... delicious food last night,
b) We had ...a... delicious meal last night.
2 a) There is … beautiful furniture in that shop,
b) There is … beautiful table in that shop.
3 a) I'm thirsty. I need … drink.
b) I'm thirsty. I need … water.
4 a) She's just bought … expensive clothes.
b) She's just bought … expensive dress.
5 a) They booked … room in advance.
b) They booked … accommodation in advance
6 a) The band played … lovely song.
b) The band played … lovely music.
7 a) We had … heatwave last week.
b) We had … hot weather last week.
8 a) I can't do this job alone. I need … assistant
b) I can't do this job alone. I need … help.
9 a) He has got … heavy luggage to carry.
b) He has got … heavy suitcase to carry.
10 a) I need … cutlery to eat this food with.
b) I need … knife and fork to eat this food with.
11 a) She has got … important job to do.
b) She has got … important work to do.
12 a) He found … coin on the ground.
b) He found … money on the ground.

3. Complete the sentences using the noun in brackets in the singular or plural form and a/an where necessary.

1. He gave me a box' of my favourite ...chocolates.... (chocolate)
2. His favourite food is … . (chocolate)
3. She bought … on her way to work. (paper)
4. He placed all the important … in his briefcase. (paper)
5. I need some … to write this message on. (paper)
6. Hurry up! We don't have much …. (time)
7. She has visited us several … this month. (time)
8. He has no … but he is keen to learn. (experience)
9. She had a lot of exciting … during her travels. (experience)
10. We went far a walk in the … after lunch. (wood)
11. His desk is made of ……. . (wood)
12. Jane is in her… reading a book. (room)
13. We have got plenty of … for a party in here. (room)
14. I am going to have my … cut tomorrow. (hair)
15. There was …in my soup. (hair)
16. I'm thirsty. I need … of water. (glass)
17. Susan only wears her … when she reads. (glass)
18. This ornament is made of coloured …. . (glass)
19. Helen bought … in the sale at the electrical store. (iron)
20. The old gate was made of … .(iron)

4. Cross out the expressions which cannot be used with the nouns, as in the example.

1 There are **several, many, <u>much,</u> plenty of, <u>too little</u>** things you can do to help.
2 He has met **a couple of, a few, very little, plenty of, too much** interesting people.
3 She earns **few, hardly any, plenty of, several, a great deal** of money.
4 We have got **no, many, lots of, a great deal of, a few** work to do.
5 Don't worry, there's **a little, plenty of, a couple of, many, a lot of** time.
6 **Both, Several, A large quantity of, Plenty of, Too much** students applied for the course.
7 He's got **no, hardly any, a little, some, a small amount of** qualifications.
8 She's got **hardly any, several, a little, a few, a lot of** experience in dealing with customers.
9 There is **too much, a lot of, hardly any, few, several** salt in this soup.
10 There is **a little, many, too much, a great number of, some** traffic on the roads today.

5. Underline the correct word.

1 A: I have a Physics exam tomorrow.
B: Oh dear. Physics **<u>is</u>/are** a very difficult subject.
2 A: My office is three miles from my house.
B: Three miles **is/are** a long way to walk to work.
3 A: My little brother has got measles.
B: Oh dear. Measles **is/are** quite a serious illness.
4 A: Jane looked nice today, didn't she?
B: Yes. Her clothes **were/was** very smart.
5 A: I've got two pounds. I'm going to buy a CD.
B: Two pounds **is/are** not enough to buy a CD.
6 A: The classroom was empty when I walked past.
B: Yes. The class **was/were** all on a school outing.
7 A: Have you just cleaned the stairs?
B: Yes, so be careful. They **is/are** very slippery.
8 A: Did you ask John to fix your car?
B: Yes. His advice **was/were** that I take it to a garage.

9 A: Did you enjoy your holiday?
B: Yes, thank you. The weather **was/were** wonderful.
10 A: These trousers **is/are** very old.
B: You should buy a new pair.
11 A: How **is/are** the company doing lately?
B: Great. We opened up two more branches.
12 A:' I am going to travel for two years when I finish school.
B: Two years **is/are** a long time to be away from home.

6. Finish the sentences, as in the example.

1 You need a lot of experience to do this job. A lot of experience ...is needed to do this job...
2 They gave us some interesting information. The information …
3 She likes Maths more than any other subject. Maths …
4 We had mild weather this winter. The weather …
5 We called the police immediately. The police …
6 I told them some exciting news. The news …
7 He was irritated because of the bad traffic. He was irritated because the …
8 I stayed in very luxurious accommodation. The accommodation …
9 The driver took the luggage out of the car. The luggage …
10 She gave me very sensible advice. The advice she gave me …
11 These shorts are too big for me. This pair of shorts …
12 The hotel is in magnificent surroundings. The hotel surroundings …
13 She's got long blonde hair. Her hair …

Артикль. The Article

1. Неопределенный a/an (используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

2. Определенный the (может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово “an hour” (час) начинается с согласной буквы “h”, но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю “a” также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

Использование неопределенного артикля a

один из множества (любой)	This is a cat.
первое упоминание в тексте	I see a bird.
при упоминании профессии	My brother is a pilot.
в восклицательных предложениях	What a good girl! What a surprise!

	Such a fine room!
вместо слова один	She is coming for a weak.
в определенных конструкциях there is a... I have a… he has a... I see a... this is a... that is a… It is a... Iama… he/she is a…	There is a book here. I have got a nice coat. He has a kind smile. I see a wolf. This is a dog. That is a doctor. It is a red pen. I am a good swimmer. He/she is a tourist
в ряде устойчивых словосочетаний at a quarter.., in a loud, (a low, an angry voice) to have a good time a lot of to go for a walk such a... after a while in a day (a month, a week, a year)	Come at a quarter to 8. Don't speak to him in an angry voice. We had a good time in the country. She has got a lot of presents. Let's go for a walk. He is such a clever boy. You'll see them after a while. We are living in a day.

Использование определенного артикля the

если речь идет о конкретном лице или предмете	The pen is on the table.
при повторном упоминании того же самого объекта	I see a cat. The cat is black.
если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света	the sun, the moon, the Earth
со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный)	The only man I love the main road to the left, to the right It was the right answer. the final test
с порядковыми числительными	the first, the tenth
с прилагательными в превосходной степени	the kindest, the most interesting the best
с музыкальными инструментами и танцами	to play the piano, to dance the tango
с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры)	The Britons keep their traditions.
с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов	the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street
с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of	the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard

Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний

in the middle, in the corner in the morning, In the evening, in the afternoon what’s the use? to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market	The table is in the middle of the room. I never drink coffee in the evening. What's the use of going there so late? Do you like going to the theatre? He works at the shop.

at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market the fact is (was) that... where is the…? in the country, to the country	The fact is that I have no money at all. Where is the doctor? We always spend summer in the country.

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

Случаи, когда артикль не употребляется

если, перед существительным стоит притяжательное местоимение	a pen - my pen a dog - his dog the teacher - our teacher the apple - her apple
если перед существительным стоит указательное местоимение	the cats - those cats the books - these books a mouse - this mouse
если стоит другое существительное в притяжательном падеже	a car - father's car the horse - farmer's horse a bike - brother's bike the doll - sister's doll
если перед существительным стоит, количественное числительное	5 balls, 7 bananas, 2 cats
если перед существительным стоит отрицание “no”	She has no children. I see no birds.
перед именами	Mike, Kate, Jim, etc
с названиями дней недели	Sunday, Monday, etc.
с названиями месяцев	May, December, etc.
с названиями времен года	in spring, in winter
с названиями цветов	white, etc. I like green
с названиями спортивных игр	football, chess, etc.
с названиями блюд, напитков	tea, coffee, soup, etc,
с названиями праздников	Easter, Christmas, etc.
с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the	English, etc. I learn English, the English language
с названиями стран	Russia, France, etc HO: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo
с названиями городов	Moscow, Paris, etc.
с названиями улиц, площадей	Trafalgar Square
с названиями парков	St James’ Park, Hyde Park
с названиями мостов	Tower Bridge
с названиями одиночных гор	Kilimanjaro
с названиями озер	Loch Ness
с названиями континентов	Asia, Australia, etc.
с названиями одиночных островов	Cyprus
если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное	what animals can swim? I know what thing you have lost!

местоимение	

ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

По своей структуре глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

По значению глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

Все формы глагола в английском языке делятся на личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

Глаголы в изъявительном наклонении выражают реальное действие, передают факты: His son goes to school. Его сын учится в школе.
She has written an interesting article. Она написала интересную статью.
A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

Глаголы в повелительном наклонении выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:
"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.
Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

Глаголы в сослагательном наклонении выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

Глаголы в действительном залоге выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

Глаголы в страдательном залоге выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида. Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:
Он прочитал эту статью с интересом.

Глаголы несовершенного вида обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Am I?

I am	I'm	I am not	I'm not	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Is he?
He is	He's	He is not	He isn't	Is she?
She is	She's	She is not	She isn't	Is it?
It is	It's	It is not	It isn't	Are we?
We are	We're	We are not	We aren't	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Are they?
They are	They're	They are not	They aren't	

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I was	I was not	I wasn’t	Was I?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
He was	He was not	He wasn’t	Was he?
She was	She was not	She wasn’t	Was she?
It was	It was not	It wasn’t	Was it?
We were	We were not	We weren’t	Were we?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
They were	They were not	They weren’t	Were they?

ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there’s. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn’t …/There aren’t … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.
Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.

It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)
There are three books on the desk.
They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

Конструкция There was/There were

This is a modern town today.
There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.
This is the same town fifty years ago.
There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
There was	There was not	There wasn't	Was there?
There were	There were not	There weren't	Were there?

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.

б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.

в) в следующих высказываниях: I’ve got a headache. I’ve got a temperature. I’ve got a cough, I’ve got a toothache, I’ve got a cold, I’ve got a problem.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Have I (got)?
I have (got)	I've (got)	I have not (got)	I haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Has he (got)?
He has (got)	He's (got)	He has not (got)	He hasn't (got)	Has she (got)?
She has (got)	She's (got)	She has not (got)	She hasn't (got)	Has it (got)?
It has (got)	It's (got)	It has not (got)	It hasn't (got)	Have we (got)?
We have (got)	We've (got)	We have not (got)	We haven't (got)	Have you (got)?

You have (got) They have (got)	You've (got) They've (got)	You have not (got) They have not (got)	You haven't (got) They haven't (got)	Have they (got)?

Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I had	I did not have	I didn't have	Did I have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
He had	He did not have	He didn't have	Did he have?
She had	She did not have	She didn't have	Did she have?
It had	It did not have	It didn't have	Did it have?
We had	We did not have	We didn't have	Did we have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
They had	They did not have	They didn't have	Did they have?

Имя прилагательное. The Adjective

Категории	**Прилагательное в русском языке**	**Прилагательное в английском языке**
Число	изменяется	не изменяется
Род	изменяется	не изменяется
Падеж	изменяется	не изменяется

Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе **ни приставок, ни суффиксов: small** - *маленький*, **long** - *длинный*, **white** - *белый*.

К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

Суффиксальное образование имен прилагательных

Суффикс	**Пример**	**Перевод**
- ful	use**ful** doubt**ful**	**полезный** **сомневающийся**
- less	help**less** use**less**	**беспомощный** **бесполезный**
- ous	fam**ous** danger**ous**	**известный** **опасный**
- al	form**al** centr**al**	**формальный** **центральный**
- able	eat**able** cap**able**	**съедобный** **способный**

Приставочный способ образования имен прилагательных

Приставка	Пример	Перевод
un -	**un**cooked **un**imaginable	**невареный** **невообразимый**
in -	**in**capable **in**human	**неспособный** **негуманный**
il -	**il**legal **il**liberal	**нелегальный** **необразованный**
im -	**im**possible **im**practical	**невозможный** **непрактичный**
dis -	**dis**honest **dis**agreeble	**бесчестный** **неприятный**
ir -	**ir**regular **ir**responsible	**неправильный** **безответственный**
Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый, **snow-white –** белоснежный.		

Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing

- ed	**- ing**
Описывают чувства и состояния	**Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства**
interested – интересующийся, заинтересованный	**interesting -** интересный
bored - скучающий	**boring -** скучный
surprised - удивленный	**surprising -** удивительный

Степени сравнения прилагательных

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**

Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:

- положительная степень сравнения **(Positive Degree);**

- сравнительная степень сравнения **(Comparative Degree);**

- превосходная степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

1. -er. -est

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке - добавляем “е” (большой - больше, холодный - холоднее).

Превосходная степень образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
cold - холодный	cold**er -** холоднее	the cold**est -** самый холодный
big - большой	bigg**er -** больше	the bigg**est -** самый большой
kind - добрый	kind**er -** добрее	the kind**est -** самый добрый

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень

clever — умный **easy -** простой **able -** способный **busy -** занятой	clever**er - умнее** eas**ier - проще** abl**er - способнее** bus**ier - более занятой**	**the** clever**est - самый умный** **the** easi**est - самый простой** **the** abl**est - самый способный** **the** busi**est - самый занятой**

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **“e” ,** то при прибавлении **– er и – est немое “e” опускается:**

larg**e – larg**er - **the** larg**est /** большой – больше – самый большой

brav**e – brav**er **– the** brav**est /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

big – big**ger –** big**gest /** большой – больше – самый большой

hot – hot**ter –** hot**test /** горячий – горячее – самый горячий

thin – thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на “y” с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **“y” переходит в “i”:**

busy – bus**ier – bus**iest / **занятой – более занятой – самый занятой**

easy – eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

2. more, the most

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful - красивый **interesting – интересный** **important - важный**	**more beautiful -** красивее **more interesting -** интереснее **more important -** важнее	**the most beautiful -** самый красивый **the most interesting -** самый интересный **the most important -** самый важный

Особые формы

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
good - хороший **bad -** плохой **little -** маленький **much/many -** много **far -** далекий/далеко **old -** старый	**better -** лучше **worse -** хуже **less -** меньше **more -** больше **farther/further -** дальше **older/elder -** старше	**the best -** самый лучший **the worst -** самый плохой **the least -** самый маленький, меньше всего **the most -** больше всего **the farthest/furthest -** самый дальний **the oldest/eldest -** самый старый

3. less. the least

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful – красивый **interesting -** интересный	**less beautiful -** менее красивый	**the least beautiful –** самый некрасивый

important - важный	**less interesting –** менее интересный **less important -** менее важный	**the least interesting –** самый неинтересный **the least important –** самый неважный

Другие средства сравнения двух предметов или лиц

Конструкция	Комментарий	Примеры
As…as (такой же, так же)	**Для сравнения двух объектов одинакового качества**	He is **as** a strong **as** a lion Он такой же сильный, как лев. She is **as** clever **as** an owl**.** Она такая же умная, как сова.
Not so…as (не такой, как)	**в отрицательных предложениях**	He is **not so** strong **as** a lion. Он не такой сильный, как лев**.** She is **not so** clever **as** an owl. Она не такая умная, как сова.
The…the (с двумя сравнительными степенями)	**показывает зависимость одного действия от другого**	**The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся. **The more** I learn this rule **the less** I understand it. Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю.

Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

Числительное. The numeral

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

126 – one hundred twenty six

1139 – one thousand one hundred and thirty nine

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

НО: окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **“of”:**

hundreds <u>of</u> children – сотни детей

thousands <u>of</u> birds- тысячи птиц

millions <u>of</u> insects – миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

20+1=21 (twenty + one = **twenty one**)

60+7=67 (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

Как читать даты

1043	ten forty-three
1956	nineteen fifty-six
1601	sixteen o one
2003	two thousand three
В 2003 году	in two thousand three
1 сентября	the first of September
23 февраля	the twenty-third of February

ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:

224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)

Тематика общения:

1. Высшее образование в России и за рубежом.
2. Мой вуз.
3. Студенческая жизнь.

Проблематика общения:

1. Уровни высшего образования.
2. Уральский государственный горный университет.
3. Учебная и научная работа студентов.
4. Культурная и спортивная жизнь студентов.

2.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

The Ural State Mining University

Mining University – Горный университет; **higher educational institution** - высшее учебное заведение; **to provide** - зд. Предоставлять; **full-time education** - очное образование; **extramural education** - заочное образование; **to award** – награждать; **post-graduate courses** – аспирантура;	**scientific research centre** - центр научных исследований; **master of science** - кандидат наук; **capable** – способный; **to take part in** - принимать участие; **graduate** – выпускник; **to dedicate** – посвящать; **to carry out scientific work** - выполнять научную работу;

Faculty of Mining Technology - горно – технологический; **Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический; **Institute of World Economics** – Институт мировой экономики; **Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический; **Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты; **Faculty of City Economy** – городского хозяйства;	**Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики; **Faculty of extramural education** – заочный; **department** – кафедра; **dean** – декан; **to train specialists in** - готовить специалистов; **to consist of** - состоять из; **preparatory** – подготовительный; **additional** – дополнительный; **to offer** – предлагать;

to house - размещать /ся/; **building** – здание; **Rector's office** – ректорат; **Dean's office** – деканат; **department** – кафедра; **library** – библиотека; **reading hall** - читальный зал; **assembly hall** - актовый зал; **layout** - расположение, план; **administrative offices** - административные отделы;	**computation centre** - вычислительный центр; **canteen** – столовая; **to have meals** – питаться; **hostel** – общежитие; **to go in for sports** - заниматься спортом; **wrestling** – борьба; **weight lifting** - тяжелая атлетика; **skiing** - катание на лыжах; **skating** - катание на коньках; **chess** – шахматы;

academic work - учебный процесс; **academic year** - учебный год; **to consist of** - состоять из; **bachelor's degree** - степень бакалавра;	**general geology** - общая геология; **foreign language** - иностранный язык; **to operate a computer** - работать на компьютере;

course of studies - курс обучения; **to last** - длиться; **term** - семестр; **to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия; **period** - пара, 2 – х часовое занятие; **break** - перерыв; **subject** - предмет; **descriptive geometry** - начертательная геометрия;	**to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен; **to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен; **to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен; **to fail in chemistry** - не сдать химию; **holidays, vacations** - каникулы; **to present graduation paper** - представлять дипломные работы; **for approval** - к защите;

The Faculty of Mining Technology trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

The Institute of World Economics trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

The Faculty of Mining Mechanics trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

The Faculty of Geology & Geophysics trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

2.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

This text is dedicated to the history of the Ural State Mining University formerly called the Sverdlovsk Mining Institute. It was founded in 1917. It is the oldest higher technical educational institution in the Urals. In 1920 the Mining Institute became a faculty of the Ural State University and in 1925 of the Ural Polytechnical Institute. In 1930 this faculty was reorganized into the Mining Institute. The Institute was named after V.V. Vakhrushev the USSR Coal Industry Minister in 1947. It was awarded the Order of the Red Banner of Labour in 1967.

In 1993 the Sverdlovsk Mining Institute was reorganized into The Ural State Academy of Wining and Geology. In 2004 The Ural State Academy of Mining and Geology was reorganized into The Ural State Mining University. The University provides full-time and extramural education in many specialities. There are post graduate courses at the University as well.

The University is an important scientific research center. Many doctors and masters of Science teach and carry out scientific work at the University. Capable students take part in research projects. The graduates of the University work all over the country.

There are six faculties at the Ural State Mining University: Faculty of Mining Technology; Faculty of Mining Mechanics; Faculty of Geology & Geophysics; Faculty of Civil Protection; Faculty of City Economy; Faculty of Extramural Education; and The Institute of World Economics.

Besides there is a Preparatory faculty where young people get special training before taking entrance exams. The Faculty of Additional Education offers an opportunity to get the second higher education.

Each faculty trains mining engineers in different specialities.

There are many specialities at the Faculty of Extramural Education where students have to combine work with studies. Very often the Ural State Mining University organizes training specialists in new modern specialities.

Faculties consist of Departments. Each faculty is headed by the Dean. The head of the Academy is the Rector.

The University is housed in four buildings. Building, One houses - the Rector's office, the Deans' offices, number of administrative offices, Faculty of City Economy, the Faculty or Mining Mechanics with its numerous departments and laboratories (labs).

Building Two houses the Faculty of Mining Technology, Faculty of Civil Protection, the Deans' offices, many departments, labs and the computation centre.

Building Three houses the Faculty of Geology & of Geophysics, the Faculty of Extramural Education, the Dean's offices, many departments and labs. The Ural Geological Museum, the Museum of the History of the Ural State Mining University and some administrative offices are also housed in this building.

Building Four houses The Institute of World Economics, the Dean's office, departments and labs, the library, reading halls, the Assembly hail, the students cultural centre and a large canteen where students can have their meals.

The library and the reading halls provide students with all kinds of reading: textbooks, reference books / справочники/ dictionaries, magazines and fiction/ художественная литература/.

Besides not far from the University there are four five-storied buildings of the student hostel, where most students live. Near the hostels there is a House of Sports. There students can go in for- different kinds of sports: chess, badminton, table tennis, boxing, wrestling, weight lifting, basketball, volleyball, handball.

The Ural State Mining University offers students three different programs of higher education such as: Bachelors, Diplomate Engineers and Magisters.

The course of studies for a bachelor's degree lasts four years. The academic year begins in September and ends in June. It consists of two terms - September to January and February to June. Students attend lectures and practical classes. As a rule, there are three or four periods of lectures and Classes a day with 20 minutes break between them.

During their first two years students take the following subjects: higher mathematics, physics, chemistry, theoretical air-mechanics, descriptive geometry, general geology, mineralogy, geodesy, history, a foreign language (English, French or German). Besides all the students learn to operate a computer.

Students take their tests and exams at the end of each term. After exams students have their holidays or vacations. At the end of the academic year the students of the academy have practical work at mines, mineral dressing plants, geological & geophysical parties. At the end of the final year students present their graduation papers for approval. After getting the Bachelor's degree the graduates have a possibility to continue their education. They can enter a Diplomate Engineer's course or studies

which lasts one academic year or the graduates can take a two-year program of Magister's degree. After defending final papers these graduates can enter the post-graduate courses.

2.3 Систематизация грамматического материала:

1. Образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Образование видовременных форм глагола в активном залоге

Present Simple употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

Present Continuous употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],

Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

Present perfect употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

Present perfect continuous употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.

Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the present simple or the present continuous.

1 A: *Do you know* (you/know) that man over there?
B: Actually, I do. He's Muriel's husband.

2 A: Are you doing anything tomorrow evening?
B: Yes. I … (see) Jack at nine o'clock.

3 A: I … (see) you're feeling better.
B: Yes, I am, thank you.

4 A: What's that noise?
B: The people next door … (have) a party.

5 A: Graham … (have) a new computer.
B: I know. I've already seen it.

6 A: This dress …. (not/fit) me any more.
B: Why don't you buy a new one?

7 A: Your perfume … (smell) nice. What is it?
B: It's a new perfume called Sunshine.

8 A: What is Jane doing?
B: She … (smell) the flowers in the garden.

9 A: What … (you/look) at?
B: Some photos I took during my holidays. They aren't very good, though.

10 A: You … (look) very pretty today.
B: Thank you. I've just had my hair cut.

11 A: I … (think) we're being followed.
B: Don't be silly! It's just your imagination.

12 A: Is anything wrong?
B: No. I … (just/think) about the party tonight.

13 A: This fabric … (feel) like silk.
B: It is silk, and it was very expensive.

14 A: What are you doing?

B: I … (feel) the radiator to see if it's getting warm.

15 A: She … (be) generous, isn't she?
B: Yes, she has never been a mean person.

16 A: He … (be) very quiet today, isn't he?
B: Yes, I think he has some problems.

17 A: Would you like some cherries?
B: Yes, please. I … (love) cherries. They're my favourite fruit.

18 A: I'm sorry, but I … (not understand) what you mean.
B: Shall I explain it again?

19 A: The children are making lots of noise today.
B: I know, but they … (have) fun.

20 A: This cake … (taste) awful.
B: I think I forgot to put the sugar in it!

2. Fill in the gaps with recently, how long, yet, for, always, ever, already, since, so far or just. Sometimes more than one answer is possible.

1 A: Has Tom finished his exams ...yet...?
B: No. He finishes them next Thursday.

2 A: … has Janet been working at the hospital?
B: She has been working there … she left school.

3 A: How are you finding your new job?
B: Great. I haven't had any problems … .

4 A: Is John at home, please?
B: No, I'm afraid he's … gone out.

5 A: Have you been waiting long?
B: Yes, I've been here … two hours.

6 A: Has Martin … been to Spain?
B: No. I don't think so.

7 A: Have you spoken to Matthew … ?
B: Yes. I phoned him last night.

8 A: Can you do the washing-up for me, please?
B: Don't worry. Mike has … done it.

9 A: Lucy has … been musical, hasn't she?
B: Yes, she started playing the piano when she was five years old.

10 A: Shall we go to that new restaurant tonight?
B: Yes. I have … been there. It's really nice.

11 A: Your dog's been barking … three hours!
B: I'm sorry. I'll take him inside.

12 A: Have you finished reading that bodk yet?
B: No. I've … started it.

3. Put the verbs in brackets into the present perfect or continuous, using short forms where appropriate.

1 A: How long ...*have you known*... (you/know) Alison?
B: We ... (be) friends since we were children.

2 A: Who … (use) the car?
B: I was. Is there a problem?

3 A: What are Andrew and David doing?
B: They … (work) in the garden for three hours.

4 A: Why is Sally upset?
B: She … (lose) her bag.

5 A: I … (always/believe) that exercise is good for you.

B: Of course, it's good to keep fit.

6 A: Emily … (teach) maths since she left university.
B: Yes, and she's a very good teacher, too.

7 A: Fred … (open) a new shop.
B: Really? Where is it?

8 A: This pie is delicious.
B: Is it? I … (not/taste) it yet.

9 A: Have you found your umbrella yet?
B: No, I … (look) for it for an hour now.

10 A: You look exhausted.
B: Well, I … (clean) the windows since 8 o'clock this morning.

11 A: Can I have some more lemonade, please?
B: Sorry, your brother … (just/drink) it all.

12 A: Have you got new neighbours?
B: Yes, they … (just/move) to the area.

4. Put the verbs in brackets into the present perfect or the present perfect continuous.

Dear Connie,

I hope you are enjoying yourself at university. I'm sure you 1)...*'ve been studying*... (study) hard. Everything is fine here at home. Billly 2) … (just/receive) his school report. It was bad, as usual. He 3) … (decide) to leave school next year and find a job. Fiona 4) … (go) to the gym every day for the past two weeks. She 5) … (try) to get in shape for the summer. She 6) … (already/plan) her holiday in the sun. Your father 7) … (sell) the old car and he 8) … (buy) a new one. It's lovely — much nicer than the old one.

Anyway, write soon.

Love, Mum

5. Fill in the gaps with have/has been (to) or have/has gone (to).

Jack: Hi, Jill. Where's Paul?

Jill: Oh, he 1) ...*has gone to*... London for a few days.

Jack: Really! I 2) … London recently. I came back yesterday. 3) … you … there?

Jill: No, I haven't. Paul 4) … twice before, though. Where's Sarah?

Jack: She 5) … Spain for two weeks with her parents. They 6) … there to visit some friends.

Jill: When is she coming back?

Jack: They'll all be back next weekend.

6. Choose the correct answer.

1 'What time does the train leave?'
'I think it ..*A*... at 2 o'clock.'
A leaves
B has been leaving
C has left

2 'Where are Tom and Pauline?'
They … e supermarket.'
A have just gone
B have been going
C go

3 What is Jill doing these days?'
She … for a job for six months.'
A is looking
B has been looking
C looks

4 Is Mandy watching TV?'
No. She … her homework right now.'
A is always doing
B is doing
C does

5 'Have you been for a walk?'
'Yes. I often … for walks in the evenings.'
A have gone
B am going
C go

6 'Have you seen any films lately?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have seen
B am seeing
C see

7 'What … ?'
'It's a piece of cherry pie. Mum made it yesterday.'
A are you eating
B do you eat
C have you eaten

8 'Are you going on holiday this summer?'
'Yes. I … enough money.'
A am saving
B have already saved
C save

9 'Is Todd reading the newspaper?'
'No. He … dinner at the moment.'
A has been making
B makes
C is making

10 'Have you bought any new CDs recently?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have bought
B have been buying
C am buying

11 'What time does the play start?'
'I think it … at 8 o'clock.'
A has been starting
B starts
C has started

12 'Where is Mark?'
'He … to the library to return some books.'
A has gone
B has been
C is going

13 'What … ?'
'It's a letter to my pen-friend. I'm telling her my news.'
A have'you written
B do you write
C are you writing

7. Underline the correct tense.

1. Liz and I are good friends. We **know/<u>have known</u>** each other for four years.
2. Sarah is very tired. She **has been working / is working** hard all day.
3. Where is John?' 'He's upstairs. He **does/is doing** his homework.'
4. I can't go to the party on Saturday. I **am leaving/ have been leaving** for Spain on Friday night.
5. Jane **has finished/is finishing** cleaning her room, and now she is going out with her friends.
6. I didn't recognise Tom. He **looks/is looking** so different in a suit.
7. I don't need to wash my car. Jim **washes/has washed** it for me already.
8. Ian **has been talking/is talking** to his boss for an hour now.
9. Claire's train **arrives/has arrived** at 3 o'clock. I must go and meet her at the station.
10. 'Would you like to borrow this book?' 'No, thanks. I **have read/have been reading** it before.'
11. 'Where **are you going/do you go**?' To the cinema. Would you like to come with me?'
12. Have you seen my bag? I **am searching/have been searching** for it all morning.
13. 'Is Colin here?' 'I don't know. I **haven't seen/ haven't been seeing** him all day.'
14. Sophie is very clever. She **is speaking/speaks** seven different languages.
15. We **are moving/have moved** house tomorrow. Everything is packed.

8. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 Who …*has been using* … (use) my toothbrush?
2 'What … (you/do)?' 'I … (write) a letter.'
3 Samantha … (play) tennis with friends every weekend.
4 Tim and Matilda … (be) married since 1991.
5 Uncle Bill … (just/decorate) the bathroom.
6 Pauline and Tom … (sing) in the school choir twice a week.
7 Who … (you/speak) to?
8 Sarah is very happy. She … (win) a poetry competition.
9 He … (drink) two cups of coffee this morning.
10 My friend … (live) in America at the moment.
11 They … (usually/change) jobs every five years.
12 I … (normally/cut) my hair myself.
13 Linda … (study) in the library for three hours.
14 We … (play) in a concert next weekend.
15 Who … (read) my diary?
16 Tim … (leave) the house at 7 o'clock every morning.
17 … (your mother/work) in a bank?
18 … (you/drink) coffee with your breakfast every day?
19 We … (make) plans for our summer holidays right now.
20 They… (move) house in September.

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What ...*are you doing*... (you/do)?
B: Nothing. I … (just/finish) my lunch.
2 A: Where … (you/be) all morning?
B: I … (clean) my house since 8 o'clock.
3 A: … (you/do) anything next weekend?
B: No, I … (not/make) any plans yet.
4 A: Jane looks great. … (she/lose) weight?
B: Yes, she … (exercise) a lot recently.
5 A: … (be/you) busy right now?
B: Yes, I … (just/start) typing this report.
6 A: Where is Peter?
B: He … (wash) the car at the moment.
7 A: Who … (be) your favourite actor?

B: I … (like) Sean Connery since I was a child.

8 A: … (you/do) your homework yet?

B: Almost; I … (do) it now.

10. Put the verbs in brackets into the correct tense.

Dear Nick,

This is just a short note to tell you I 1) ...*'m arriving/arrive*... (arrive) at the airport at 5 pm on Saturday, 10th December. I 2) … (be) very busy recently, and that's why I 3) … (not/write) to you for a while. I 4) … (plan) this trip for months, so now I 5) … (look forward) to spending some time with you and your family. I 6) … (hope) you will be able to meet me at the airport. Please give my love to your wife and the children.

See you soon,
James

Past simple употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn’t use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

Past continuous употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

Past perfect употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,

They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,

She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous. Which was the longer action in each sentence?

1. They ...*were cleaning*... (clean) the windows when it …*started*... (start) to rain.
Cleaning the windows was the longer action.
2. As he … (drive) to work, he … (remember) that his briefcase was still at home.
3. Melanie … (cook) dinner when her husband … (come) home.
4. I … (hear) a loud crash as I … (sit) in the garden.
5. She … (type) a letter when her boss … (arrive).
6. While the dog … (dig) in the garden, it … (find) a bone.
7. Mary … (ride) her bicycle when she … (notice) the tiny kitten.
8. While I … (do) my homework, the phone … (ring).

2. A policeman is asking Mrs Hutchinson about a car accident she happened to see yesterday. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

P: What 1) ...*were you doing*... (you/do) when you 2) … (see) the accident, madam?
H: I … (walk) down the street.
P: What exactly 4) … (you/see)?
H: Well, the driver of the car 5)… (drive) down the road when suddenly the old man just 5) … (step) in front of him! It 6) … (be) terrible!
P: 8) … (the driver/speed)?
H: No, not really, but the old man 9) … (not/look) both ways before he ... (try) to cross the road.
P: 11) ... (anyone else/see) the accident?
H: Yes, the lady in the post office.
P: Thank you very much.

3. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

A As soon as Margaret 1) ...*got*... (get) off the train, she 2) … (pull) her coat around her. Rain 3) … (fall) heavily and a cold wind 4) … (blow) across the platform. She 5) … (look) around, but no one 6)

… (wait) to meet her. She 7) … (turn) to leave when she 8) … (hear) footsteps. A man 9) … (walk) towards her. He 10) … (smile) at her, then he 11) … (say), 'You're finally here.'

B George 1) … (pick) up his bag then, 2) … (throw) it over his shoulder. It 3) … (get) dark and he 4) … (have) a long way to go. He wished that he had let someone know that he was coming. It 5) … (start) to rain, and he was feeling cold and tired from the long journey. Suddenly, he 6) … (hear) a noise, then he 7) … (see) two bright lights on the road ahead. A car 8) … (head) towards him. It slowed down and finally 9) … (stop) beside him. A man 10) … (sit) at the wheel. He 11) … (open) the door quickly and 12) … (say) 'Get in, George.'

C Andy 1) … (step) into the house and 2) … (close) the door behind him. Everything 3) … (be) quiet. His heart 4) … (beat) fast and his hands 5) … (shake) as he crept silently into the empty house, but he was trying not to panic. He soon 6) … (find) what he 7) … (look) for. He smiled with relief as he put on the clothes. The men who 8) … (follow) him would never recognise him now.

4. Imagine that you were present when these things happened, then, in pairs, ask and answer questions, as in the example.

SA: What were you doing when the burglar broke in?
SB: I was watching TV.
SA: What did you do?
SB: I called for help.

1 The burglar broke in.
2 The storm broke.
3 The lights went out.
4 The boat overturned.
5 The earthquake hit.
6 The building caught fire.

5. Rewrite each person's comment using used to or didn't use to.

1 Sally - 'I don't walk to work any more.'
I used to walk to work.
2 Gordon - 'I've got a dog now.'
3 Lisa - 'I don't eat junk food any more.'
4 Jane - 'I go to the gym every night now.'
5 Paul - 'I'm not shy any more.'
6 Edward - 'I live in a big house now.'
7 Helen - 'I haven't got long hair any more.'
8 Frank - 'I eat lots of vegetables now.'

6. Choose the correct answer.

1 'I find it hard to get up early.'
'You ...*3*... to getting up early once you start working.'
A are used
B will get used
C were used
2 'Do you often exercise now?'
'No, but I … to exercise a lot when I was at school.'
A used
B will get used
C am used
3 'Aren't you bothered by all that noise?'
'No, we … to noise. We live in the city centre.'
A were used
B will get used

C are used

4 'Does your sister travel a lot?'
'No, but she … to before she got married.'
A didn't use
B used
C wasn't used

5 'I don't like wearing a suit every day.'
'Don't worry, you … to it very soon.'
A are used
B will get used
C were used

6 'Sandra … to using a computer, but now she enjoys it.'
'It's a lot easier for her now.'
A isn't used
B will get used
C wasn't used

7 'Do you remember the things we … to do when we were kids?'
'Of course I do. How could I forget what fun we had!'
A used
B were used
C got used

8 'Do you like living in the city?'
'Well, I … to it yet, but it's okay.'
A am not used
B wasn't used
C am used

7. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the correct form. Use each verb twice.

wash, walk, play, work

1 I used to ...*work*... in a shop, but now I work in an office.
2 I can't concentrate. I'm not used to … in such a noisy office.
3 Tom lived in the country for years. He used to … miles every day.
4 I'm exhausted. I'm not used to … such long distances.
5 Mary used to … her clothes by hand, but now she uses a washing machine.
6 We haven't got a washing machine, so we're used to … our clothes by hand.
7 The children are bored with the bad weather. They're used to … outside.
8 When we were younger, we used to … cowboys and Indians.

8. Put the verbs in brackets into the past simple or the present perfect.

1. A: Do you know that man?
B: Oh yes. He's a very good friend of mine. I 1) ...*'ve known*... (know) him for about ten years.
A: I think I 2) … (meet) him at a business meeting last month.

2. A: Mum 1) … (lose) her purse.
B: Where 2) … (she/lose) it?
A: At the supermarket while she was shopping.

3. A: Who was on the telephone?
B: It 1) … (be) Jane.
A: Who is Jane?
B: Someone who 2) … (work) in my office for a few years. She's got a new job now, though.

4. A: Who is your favourite singer?
B: Freddie Mercury. He 1) … (have) a wonderful voice.
A: Yes, I agree. He 2) … (enjoy) performing live, too.

9. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the past perfect continuous.

read, scream, argue, try, eat, watch

1. Emily was angry. She ...*had been arguing*… with her parents for an hour.
2. Hannah felt sick. She … chocolates all afternoon.
3. Allan had a headache. His baby sister … for half an hour.
4. Emily was frightened. She … a horror film for half an hour.
5. Simon was confused. He … to win the game for hours.
6. John was very tired. He … all night.

10. Put the verbs in brackets into the correct past tense.

A: On Monday morning, Jo 1) ... *missed*... (miss) the bus and had to walk to school. When she 2) … (arrive), the bell 3) … (already/ring)', and lessons 4) … (start). The children 5) … (work) quietly when Jo 6) … (walk) into the'classroom.

B: When Jamie 1) … (get) to the party, a lot of people 2) … (dance) to pop music. Everyone 3) … (wear) jeans and T-shirts. Jamie 4) … (buy) a new suit for the party and he 5) … (wear) that. He 6) … (feel) quite silly because everyone 7) … (look) at him.

Future simple употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

Be going to употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,

Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
No. Why?
I need to make some photocopies.

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Tanya Smirnoff is a famous astrologer. She's been invited on a TV show to give her astrological predictions for next year. Using the prompts below, make sentences, as in the example.
e.g. An eartyhquake will strike Asia.

1 earthquake/strike/Asia
2 Tom Murray/win/elections
3 economy/not improve/significantly
4 number of road accidents/increase
5 America/establish/colony/on Mars
6 scientists/not discover/cure for common cold

2. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the examples.
SA: Are you going to pay the bill?
SB: Yes, that's what I'm going to do.
SA: Are you going to complain to the manager?
SB: No, that's not what I'm going to do.

1. pay the bill (√)
2. complain to the manager (X)
3. take the skirt back to the shop (√)
4. buy the jumper (√)
5. ask the bank manager for a loan (X)
6. order the food (√)
7. book the airline tickets (X)

3. Fill in the gaps with the correct form of will or be going to and the verb in brackets.

1 A: Why are you buying flour and eggs?
B: Because I ...*'m going to make*... (make) a cake.
2 A: I have decided what to buy Mum for her birthday.
B: Really. What … (you/buy) for her?
3 A: Did you ask Jackie to the party?
B: Oh no! I forgot! I … (ask) her tonight.
4 A: Could I speak to Jim, please?
B: Wait a minute. I … (get) him for you.
5 A: What are your plans for the weekend?

B: I … (spend) some time with my friends.

6 A: What are you doing on Friday night?
B: Oh, I … (probably/stay) at home with my family.

7 A: Have you tidied your room yet?
B: No, but I promise I … (do) it this afternoon.

8 A: Look at that boy!
B: Oh yes! He … (climb) the tree.

9 A: Jason is very clever for his age.
B: Yes. He says he … (become) a doctor when he grows up.

10 A: I'm too tired to cut the grass.
B: Don't worry! I (cut) it for you.

4. Fill in the gaps with shall, will or the correct form of be going to.

1 A: It's too hot in here.
B: You're right. I ...*will*... open a window.

2 A: … I put the baby to bed, now?
B: Yes, he looks a little tired.

3 A: Have you seen Lucy recently?
B: No, but I … meet her for lunch later today.

4 A: Have you done the shopping yet?
B: No, but I … probably do it tomorrow, after work.

5 A: … we ask Mr Perkins for help with the project?
B: That's a good idea. Let's ask him now.

5. Replace the words in bold with will/won't or shall I/we, as in the example.

1 I've asked Paul to talk to the landlord, but he **refuses to** do it.
I've asked Paul to talk to the landlord, but he won't do it.

2 **Do you want me** to make a reservation for you?

3 **Can** you call Barry for me, please?

4 **Why don't we** try this new dish?

5 Where **do you want me** to put these flowers?

6. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.

SA: *When will you do the gardening?*
SB: *I'll do it after I've done the shopping.*

1 do the gardening / do the shopping
2 post the letters / buy the stamps
3 iron the clothes / tidy the bedroom
4 water the plants / make the bed
5 do your homework / have my dinner
6 pay the bills / take the car to the garage

7. Put the verbs in brackets into the present simple or the future simple.

1 A: I'm going to the gym tonight.
B: Well, while you ...*are*... (be) there, I … (do) the shopping.

2 A: … (you/call) me when you … (get) home?
B: Yes, of course.

3 A: As soon as John … (come) in, tell him to come to my office.
B: Certainly, sir.

4 A: I'm exhausted.
B: Me too. I wonder if David … (come) to help tonight.

5 A: Are you going to visit Aunt Mabel this afternoon?

B: Yes, I ... (visit) her before I … (do) the shopping.

6 A: Is George going to eat dinner with us?
B: No, by the time he … (get) home it … (be) very late.

7 A: When … (you/pay) the rent?
B: When I … (get) my pay cheque.

8 A: What are your plans for the future?
B: I want to go to university after I … (finish) school.

9 A: If you … (pay) for dinner, I … (pay) for the theatre.
B: Okay, that's a good idea.

10 A: Can you give this message to Mike, please?
B: Well, I'll try, but I doubt if I … (see) him today.

8. Put the verbs in brackets into the future simple, the present simple or the present continuous.

1 A: I ...*am seeing*... (see) Roger at seven o'clock tonight.
B: Really? I thought he was out of town.

2 A: … (you/do) anything on Friday morning?
B: No, I'm free.

3 A: I … (go) to the cinema. There's a new film on. Do you want to come with me?
B: What time … (the film/start)?

4 A: Helen … (have) a party the day after tomorrow. … (you/go)?
B: As a matter of fact, I haven't been invited.

5 A: The new exhibition … (open) on April 3rd and … (finish) on May 31st.
B: I know. I … (go) on the first day.

6 A: Aunt Maggie … (come) to visit us tomorrow.
B: I know. What time … (she/arrive)?

7 A: Excuse me, what time … (the train/leave)?
B: At half past three, madam.

8 A: Michael Jackson … (give) a concert at the Olympic Stadium next week.
B: I know. I … (want) to get a ticket.

9 A: I'm really thirsty.
B: I … (get) you a glass of water.

10 A: Are you looking forward to your party?
B: Yes. I hope everyone … (enjoy) it.

11 A: How old is your sister?
B: She .. (be) twelve next month.

12 A: What are you doing tonight?
B: I … (probably/watch) TV after dinner.

9. A) Cliff Turner has his own business and it is doing well. He has already decided to expand. Look at the prompts and say what he is going to do, as in the example.

1. employ more staff

He's going to employ more staff.

2. advertise in newspapers and magazines
3. equip the office with computers
4. increase production
5. move to bigger premises
6. open an office abroad

B) Cliff is always busy. Look at his schedule and say what his arrangements are for the next few days. Make sentences, as in the example.

Wednesday 12th: fly to Montreal

He is flying to Montreal on Wednesday.
Thursday 13th: give an interview to The Financial Times
Friday 14th: have lunch with sales representatives
Saturday 15th: have a meeting with Japanese ambassador
Sunday 16th: play tennis with Carol

10. ln Pairs, ask and answer the following questions using I (don't) think/expect I will or I hope /'m sure/'m afraid I will/won't, as in the example.
SA: *Do you think you will pass your exams?*
SB: *I hope I will/I'm afraid I won't.*
1 pass/exams
2 move house
3 take up / new hobby
4 make / new friends
5 start having music lessons
6 have / party on / birthday
7 learn/drive

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир)

Тематика общения:

1. Екатеринбург – столица Урала.
2. Общее и различное в национальных культурах.

Проблематика общения:

1. Мой родной город.
2. Традиции и обычаи стран изучаемого языка.
3. Достопримечательности стран изучаемого языка.

3.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My town

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist's/a pharmacy/a drugstore - аптека
a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки

a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна
a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

3.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

Ekaterinburg – an Industrial Centre

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant

produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

The History of Ekaterinburg

The famous Soviet poet V. Mayakovsky called out city "A Worker and a Fighter" and these words most fully reflect the features of Ekaterinburg.

Ekaterinburg is nowadays one of the leading industrial cities of Russia, an administrative & cultural centre of the Sverdlovsk region. It is the capital of the Urals.

Ekaterinburg has sprung up in the upper reaches of the Iset River in the middle part of the Urals Mountains near the border of Europe and Asia. It stretches from North to South for 25 km. and 15 km. from East to West.

The history of our city is very interesting. It was founded at the beginning of the XVIII century as a fortress-factory in connection with the construction of the Urals iron works. The works was constructed under the supervision of Tatishchev, a mining engineer, who was sent to the Urals by Peter the first. It was put into operation in November 1723. This date is considered to be the date of the birthday of city. It was named Ekaterinburg. On the place of the first works there is the Historical Square now.

The town grew and developed as the centre of an important mining area where the mining administration office was located. Ekaterinburg was an ordinary provincial town like many others in Russia before the October Revolution. It had only one theatre, four hospitals, one mining school and not a single higher school.

At the end of the XIX century Ekaterinburg became one of the centres of the revolutionary struggle. Many squares, streets and houses of the city keep the memory of the revolutionary events and the Civil War in the Urals. They are: the 1905 Square, a traditional place of the revolutionary demonstrations of the working people, the rocks "Kamenniye Palatki", a memorial park now, which was the place of illegal meetings of Ekaterinburg workers, the Opera House where the Soviet power was proclaimed in November 8, 1917 and many others.

Ekaterinburg is closely connected with the life and activities of many famous people. Here Y.M. Sverdlov, the leader of the Urals Party organization before the Revolution and the first President of the Soviet state, carried out his revolutionary work. In 1924 Ekaterinburg was renamed in his memory.

The name of such a famous scientist and inventor of the radio as Popov, and the names of such writers as Mamin-Sibiriyak and Bazhov are also connected with Ekaterinburg.

After the October Socialist Revolution the town has changed beyond recognition. It grew quickly in the years of the first five-year plan periods. Nowadays our city is constantly growing and

developing. Modern Ekaterinburg is a city of wide straight streets, multistoried blocks of flats, big shops, beautiful palaces of culture, cinemas, fine parks and squares.

The centre of the city is 1905 Square with the monument to V.I. Lenin and the building of the City Soviet. The main street is Lenin Avenue. The total area of the city is over 400 sq. km. The population is about two million.

In connection with its 250th anniversary and for its outstanding achievements in the development of the national economy of our country Ekaterinburg was awarded the Order of Lenin.

Ekaterinburg – a Center of Science & Education

Ekaterinburg is one of the largest & most important centers of science & education in our country. The city has 15 higher schools. The oldest of them are the Mining & the Polytechnical Institutes, the Urals State University founded in 1920, the Medical & Pedagogical & many others. Ekaterinburg higher schools train specialists for practically all branches of industry, economy, education & science. The city has a student population of about 80 thousand. Besides, there are many secondary and vocational schools and over 50 technical schools (colleges). The oldest of them is the Mining Metallurgical College named after Polzunov, founded in 1847.

Much important scientific research work is carried on in Ekaterinburg. The Urals Branch of Sciences, now called the Urals Scientific Centre (UNZ), was founded in 1932. Its first chairman was the famous Soviet scientist, mineralogist and geochemist A.E. Fersman. UNZ is the main centre of scientific work now. It contains nine institutes which solve the most important theoretical and practical problems in the field of geology, mining, metallurgy, biology, economy and others.

The city has more than 120 research and designing institutions, among them Uralmechanobr, Unipromed, Nipigormash and others. It is worth mentioning that important scientific and research work is also carried on in educational establishments and at the industrial enterprises of the city, such as the Uralmash, Uralelectrotyazmash and others.

Thousands of research workers, among them 5 academicians, 10 Corresponding members of the Russian Academy of Sciences, many Doctors and Masters of Science are engaged in scientific and research work. Ekaterinburg has contributed greatly to the development of Russian science.

Ekaterinburg - a Cultural Centre

Ekaterinburg is not only an industrial and educational, but also a large cultural centre. There is a lot to be seen in the city. There are many theatres, cinemas, museums, clubs, libraries, palaces of culture, the Art Gallery and the Circus in it.

The Art Gallery houses a splendid collection of paintings of Russian and Soviet artists such as Repin, Polenov, Levitan, Perov, Slusarev, Burak, Pimenov and many others. Here you will see one of the world famous collections of metal castings made in Kasli and especially a cast Iron pavilion. It was shown in Paris at the World Exhibition and awarded the Highest Prize.

Ekaterinburg is famous for its theaters. They are the Opera & Ballet House, the Drama Theatre, the Musical Comedy, the Children's and Puppet Theatres, the Cinema and Concert Hall "Cosmos". The Opera House was built in 1912. Many famous singers such as S. Lemeshev, I. Koslovsky, I. Arkhipova, B. Shtokolov and many others sang in that theatre. Ekaterinburg has a Philharmonic Society, film and television studios, the Urals Russian Folk Choir which is well known both at home and abroad.

There are many museums in the city: the Museum of Local Studies, the Sverdlov Museum, the Museum of Mamin-Sibiriyak, the Bazhov Museum, the Museum of Architecture. But the Urals Geological Museum is the most famous one. It is a real treasure-house of the Urals riches. The museum was opened in 1937.

Ekaterinburg is a green city with its squares, gardens and parks. The largest and the best of the parks is the Central Park of Culture and Rest. The Central Square of the City is the 1905 Square. Besides, there are some others: the Labor Square, one of the oldest of the city, located in front of the House of Trade Unions, the Komsomolskaya Square with the monument to the Urals Komsomol, the Paris Commune Square with the monument to Y.M. Sverdlov.

There are lots of monuments in the city. They are: the monument dedicated to the students and teachers of the Urals Polytechnical Institute who perished in the Great Patriotic War, the monument to the Urals Tank Corps, the monuments to Bazhov, Popov, Ordjonikidze, Malishev and many others.

There are a lot of places of interest in our city. Any visitor who comes to our city is invited to take sightseeing around it. We will be shown the historical places such as the rocks "Kamenniye Palatki", the Pupils' Creation Palace, the Historical Square, the 1905 Square.

There are several memorials to those who gave their lives in the struggle against fascism, the obelisk in the Square of Communards with the eternal flame. Such famous places of interest at the city pond with granite-lined embankment, the Palace of Youth, the lake Shartash, the Uktus Mountains and some others are most popular with the citizens of Ekaterinburg as well as with its visitors.

Ekaterinburg is a city of sports. There are a lot of sports grounds, stadiums, sports halls and a beautiful Palace of Sport in it. Ekaterinburg is often called the Winter Sports Capital. All sorts of important skiing & skating events are held in the Uktus Mountains.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern

monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

3.3 Систематизация грамматического материала:

1. Модальные глаголы и их эквиваленты.
2. Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге.
3. Основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь.

Модальные глаголы

Глаголы	**Значение**	**Примеры**
CAN	физическая или умственная возможность/умение	I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать.
	возможность	You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play football in the street. – На улице нельзя играть в футбол.
	вероятность	They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент.
	удивление	Can he have said that? – Неужели он это сказал?
	сомнение, недоверчивость	She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала.
	разрешение	Can we go home? — Нам можно пойти домой?
	вежливая просьба	Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час?
MAY	разрешение	May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу?
	предположение	She may not come. – Она, возможно, не придет.
	возможность	In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей.
	упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)**	You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать.
MUST	обязательство, необходимость	He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги.
	вероятность (сильная степень)	He must be sick. — Он, должно быть, заболел.
	запрет	Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке.
SHOULD OUGHT TO	моральное долженствование	You ought to be polite. – Вы должны быть любезными.
	совет	You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу.
	упрек, запрет	You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт.
SHALL	указ, обязанность	These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых

		обстоятельствах.
	угроза	You shall suffer. — Ты будешь страдать.
	просьба об указании	Shall I open the window? – Мне открыть окно?
WILL	готовность, нежелание/отказ	The door won't open. — Дверь не открывается.
	вежливая просьба	Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной?
WOULD	готовность, нежелание/отказ	He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос.
	вежливая просьба	Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной.
	повторяющееся/привычное действие	We would talk for hours. – Мы беседовали часами.
NEED	необходимость	Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать?
NEEDN'T	отсутствие необходимости	She needn't go there. — Ей не нужно туда идти.
DARE	Посметь	How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить?

Модальные единицы эквивалентного типа		
to be able (to) = can	Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент	She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию).
to be allowed (to) = may	Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения	My sister **is allowed to** play outdoors. (Моей сестре разрешается играть на улице).
to have (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах	They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело).
to be (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д.	We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Rephrase the following sentences using must, mustn't, needn't, has to or doesn't have to.

1 **You aren't allowed** to park your car in the college car park.

...You mustn't park your car in the college car park...

2 **I strongly advise** you to speak to your parents about your decision.

3 **It isn't necessary** for Emma to attend tomorrow's staff meeting.

4 **Jack is obliged** to wear a suit and a tie at work because the manager says so.

5 **I'm sure** Antonio is from Milan.

6 **It's necessary** for Roger to find a job soon.

7 **It's forbidden** to use mobile phones inside the hospital.

8 Susan **is obliged to** work overtime because her boss says so.

2. Rephrase the following sentences using didn't need to or needn't have done.

1 It wasn't necessary for him to wash the car. It wasn't dirty.

…He didn't need to wash the car…

2 It wasn't necessary for her to buy so many oranges, but she did.

3 It wasn't necessary for us to take an umbrella. It wasn't raining.

4 It wasn't necessary for us to turn on the light. It wasn't dark.

5 It wasn't necessary for him to call me today, but he did.
6 It wasn't necessary for you to make sandwiches for me, but you did.
7 It wasn't necessary for them to make reservations at the restaurant, but they did.

3. Rewrite the sentences using the word in bold.

1 It isn't necessary for Mark to buy new clothes for the reception.
need ...*Mark doesn't need to/needn't buy new clothes for the reception…*
2 You aren't allowed to pick these flowers. **must**
3 Sarah is obliged to type her compositions at university. **has**
4 It wasn't necessary for Paula to make the beds. **need**
5 It is your duty to obey the law. **must**
6 It wasn't necessary for Bob to wait for me, but he did. **need**
7 It is forbidden to throw litter on the beach. **must**
8 I'm sure Ronald is at home. **must**
9 It wasn't necessary for Alice to bake a cake for the party. **need**
10 It wasn't necessary for George to stay at work late last night, but he did. **have**

4. Fill in the gaps with an appropriate modal verb.

1 A: ... *May/Can/Could*... I borrow your pen, please?
B: No, you … .I'm using it.
2 A: I'm bored. What shall we do?
B: We … go for a walk.
A: No, we … because it's raining.
B: Let's watch a video, then.
3 A: My parents told me I … go to the party tonight.
B: Never mind, I … go either. We … stay at home together, though.
4 A: Sir, … .I speak to you for a moment, please?
B: Certainly, but later today; I'm busy now.
5 A: Excuse me?
B: Yes?
A: … you tell me where the post office is, please?
B: Certainly. It's on the main road, next to the school.
6 A: Is anyone sitting on that chair?
B: No, you … take it if you want to.

5. Choose the correct answer.

1 " Todd was a very talented child.'
I know. He ..*B*... play the piano well when he was seven.'
A couldn't B could C can
2 I've just taken a loaf out of the oven.
Oh, that's why I … smell fresh bread when I came home.
A was able to B can't C could
3 'How was the test?'
Easy. All the children … pass it.'
A were able to B could C can't
4 What are you doing this summer?'
'I hope I'll … go on holiday with my friends.'
A could B be able to C can

6 Rewrite the sentences using the words in bold.

1 Do you mind if I leave the door open for a while?
can ...*Can I leave the door open for a while?*...

2 You're obliged to take notes during the lecture. **have**
3 I'm sorry, but you aren't allowed to enter this room. **must**
4 Jack managed to unlock the door. **able**
5 It wasn't necessary for Ann to cook dinner, but she did. **need**
6 Let's play a game of chess. **could**
7 I'm certain Sarah is bored with her work. **must**
8 I strongly advise you to take up sport. **must**
9 I'm certain Liz isn't interested in your ideas. **can**
10 You may take the car tonight if you want. **can**

7. Study the situations and respond to each one using an appropriate modal verb.

1 You want to go on holiday with your friends this year. Ask your parents for **permission.**
...Can I go on holiday with my friends this year?...
2 You are at a job interview. You type fast, you use computers and you speak two foreign languages. Tell the interviewer about your **abilities**.
3 Your brother is trying to decide what to buy your mother for her birthday. You **suggest** a box of chocolates.
4 Your jacket is dirty and you want to wear it next week. It is **necessary** to take it to the dry cleaner's.
5 You want to have a day off work next week. Ask for your boss' **permission.**
6 You are in the car with your uncle. It's hot and you want him to open the window. Make a **request.**
7 Your mother is going to the shops. She asks you if you want anything. You tell her it **isn't necessary** to get anything for you.

8. Complete the sentences using must or can't.

1 I'm certain they go to bed early on Sunday nights. They …*must go to bed early on Sunday nights…*
2 I'm sure John didn't stay late at the office. John **...***can't have stayed late at the office…*
3 I'm certain he hasn't arrived yet. He …
4 I'm certain they are working together. They …
5 I'm sure Amy hasn't finished her homework. Amy …
6 I'm certain she was having a bath when I rang. She …
7 I'm sure he hasn't won the prize. He …
8 I'm sure she is looking for a new house. She …
9 I'm certain Paul didn't invite Linda to the party. Paul …
10 I'm certain you have been planning the project. You …
11 I'm sure she was writing a letter. She …
12 I'm certain they hadn't paid the bill. They …
13 I'm sure he had been fixing the pipe. He …

9. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps Laura has left the phone off the hook. ***...****Laura may/might/could have left the phone off the hook…*
2 Surgeons are obliged to scrub their hands before operating on patients.
3 Do you mind if I open the window?
4 It wasn't necessary for Peter to wash the dog, so he didn't.
5 Emily managed to reach the top shelf, even though she didn't have a ladder.
6 It's forbidden to copy files without the manager's permission.
7 Why don't we spend this evening at home?
8 I'm certain Patrick misunderstood my instructions.
9 I'm sure Helen didn't know about her surprise party.

10. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps they are at work.

They ...*may/might/could be at work*…

2 Perhaps he is waiting outside. He …

3 It's possible she will work late tonight. She …

4 It's likely he was driving too fast. He …

5 It's possible they made a mistake. They …

6 Perhaps he has missed the bus. He …

7 It's possible she has been playing in the snow. She …

8 It's likely we will be leaving tomorrow. We …

9 It's likely he will stay there. He …

10 Perhaps she had been trying to call you. She …

11 It's likely they had seen the film already. They …

12 It's possible he is studying in the library. He …

Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)

This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)

Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)

Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.

My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.

to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.

to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:

Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

Косвенный пассив (The Indirect Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.

б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить

to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять

to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить

to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать

to teach учить to tell сказать и др.

Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.

Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)

A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:

John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.

The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):

He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать

to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать

to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

Употребление Страдательного залога

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия (70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:

He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:

The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:

The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:

The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)

The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:

The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:

The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:

He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

Перевод глаголов в форме Passive

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:

I am invited to a party.

Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):

Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.

Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.

I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):

They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:

The experiments were made last year.

1) Опыты были проведены в прошлом году.

2) Опыты проводились в прошлом году.

3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:

It is said… Говорят… It was said… Говорили…

It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…

It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. What happens to a car when it is taken for a service? Look at the prompts and make sentences using the present simple passive, as in the example.

1. the oil / change

The oil is changed.

2. the brakes / test

3. the filters / replace

4. air / put / in the tyres

5. the battery / check

6. the lights / test
7. broken parts / repair
8. it / take / for a test drive
9. the radiator / fill / with water

2. Mr Sullivan, who is a director, is preparing a scene for his new film. Read the orders and respond using the present continuous passive, as in the example.

1. Move that scenery, please.
It's being moved now, Mr Sullivan.
2. Put those props in place, please.
3. Call the actors, please.
4. Check their costumes, please.
5. Turn on the lights, please.

3. Detective Maguire is talking to a police officer about a burglary which happened early yesterday morning. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example

1. Have you dusted the house for fingerprints yet?
the house / dust / for fingerprints yesterday
Yes, the house was dusted for fingerprints yesterday.
2. Have you found any evidence yet?
a piece of material / find / this morning
3. Have you interviewed the house owners yet?
they / interview / last night
4. Have you questioned the neighbours yet?
they / question / this morning
5. Have you arrested any suspects yet?
two men / arrest / yesterday evening
6. Have you interrogated the suspects yet?
they / interrogate / last night
7. Have you recovered the stolen goods yet?
they / recover / this morning
8. Have you written your report yet?
it / complete / an hour ago

4. Helen and Chris moved house two years ago. Yesterday, they drove past their old house and saw that it looked very different. Describe the changes using the present perfect simple passive, as in the example.

1. the outside walls / paint
The outside walls have been painted.
2. new windows / put in
3. a garden pond / make
4. the trees / cut down
5. a lot of flowers / plant
6. the old gate / replace

5. A young actress is hoping to star in a new film. Her friend is asking her what is going to happen. Respond to her questions using the passive infinitive, as in the example.

1. Will they audition you for the new film?
Well, I hope to be auditioned.
2. Will they give you a leading role?
3. Will they pay you a lot of money?
4. Will they send you to Hollywood?

5. Will they introduce you to all the stars?
6. Will they ask you to give a TV interview?
7. Will they give you an award?

6. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

1. A: Who looks after your garden for you?
B: It ...*is looked after*... (look after) by my brother.
2. A: That's a beautiful dress. Where did you buy it?
B: Actually, it … (make) for me by my aunt.
3. A: Have you typed that letter yet, Miss Brown?
B: It … (type) right now, sir.
4. A: Did you make the coffee when you got to work this morning?
B: No, it …. (already/make) by the time I got there.
5. A: Are you going to pick up the children today?
B: No, they … (pick up) by Roger. I've already arranged it.
6. A: Where is your watch?
B: I broke it. It … (repair) at the moment.
7. A: Has the new furniture for my bedroom arrived?
B: No, it … (not/deliver) yet.
8. A: They are building a new sports centre in town.
B: I know. It … (open) by the mayor next month.

7. Rewrite the sentences in the passive, where possible.

1. John opened the door.
...*The door was opened by John.*
2. They didn't come home late last night.
...*It cannot be changed.*
3. Their nanny takes them to the park every day.
4. I left very early yesterday afternoon.
5. Meg asked the policeman for directions.
6. Charles is moving house next month.
7. The letter arrived two days ago.
8. Sam took these photographs.

8. Fill in by or with.

1. The lock was broken ...*with*... a hammer.
2. This book was written … my favourite author.
3. The cake was decorated… icing.
4. The tiger was shot … a gun.
5. Claire was shouted at … her teacher.
6. He was hit on the head … an umbrella.

9. Rewrite the sentences in the passive.

1. Someone is repairing the garden fence.
...*The garden fence is being repaired*....
2. Do they teach Latin at this school?
3. I don't like people pointing at me.
4. She hit him on the head with a tennis racquet.
5. Michael has made the preparations.
6. Is Tim cleaning the house?
7. Who built the Pyramids?
8. The boss is going to give us a pay rise.

9. I expect they will deliver my new car soon.
10. The police are questioning the suspects.
11. Did your next door neighbours see the thieves?
12. Paul remembers his teacher asking him to star in the school play.
13. A lot of children use computers nowadays.
14. Who smashed the kitchen window?
15. They won't have completed the work by the end of the month.
16. The children will post the letters.
17. People make wine from grapes.
18. Had Helen closed the windows before she left the house?
19. Jill hasn't done the housework yet.
20. They may not deliver the parcel today.

10. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

A: Do you still work at Browns and Co?
B: Yes, I do. I 1) ...*have been employed*... (employ) by Mr Brown for five years now, you know.
A: Oh. Do you still enjoy it?
B: Oh yes! I 2) … (give) a promotion last year and I'm very happy.
A: A promotion? So, what is your job now?
B: I 3) … (make) Head of European Sales.
A: So, what do you do?
B: Well, sometimes I 4) … (send) to other countries on business.
A: I see. Do they pay you well?
B: Well, I 5) … (pay) quite well and I expect I 6) … (give) a pay rise soon.
A: Good for you!

Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

Правило 1: Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

Правило 2: Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

Переход из одного времени в другое	Примеры	
Present Simple » Past Simple	He **can speak** French – Он говорит по-французски.	Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски.
Present Continuous » Past Continuous	They **are listening** to him – Они слушают его	I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его.
Present Perfect » Past Perfect	Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему.	Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему.

Past Simple » Past Perfect	I **invited** her – Я пригласил ее.	Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я пригласил ее.
Past Continuous » Past Perfect Continuous	She **was crying** – Она плакала	John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала.
Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous	It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час.	He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь.
Future Simple » Future in the Past	She **will show** us the map – Она покажет нам карту.	I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту.

Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

Перевод прямой речи в косвенную в английском языке

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

3. Согласовываем время

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

4. Меняем некоторые слова

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.

Давайте рассмотрим еще один пример:

She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»

She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.

Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

She said when I would come. Она сказала, когда я приду.

He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»

He asked where she worked. Он спросил, где она работает.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with the correct pronoun or possessive adjective.

1. James said, 'My boss wants me to go to London tomorrow.'
James said ...*his*... boss wanted to go to London the following day.
2. Mary said, 'I'm waiting for my son to come out of school.'
Mary said that … was waiting for … son to come out of school.
3. George said, 'I've bought a new car for my mum.'
George said … had bought a new car for … mum.
4. Julie said to me, 'I need you to help me with the shopping.'
Julie told me that … needed … to help … with the shopping.
5. John said, 'I'd like to take you out to dinner.'
John said … 'd like to take … out to dinner.
6. Helen said to Jane, 'I think your new haircut is lovely.'
Helen told Jane that … thought … new haircut was lovely.

2. Turn the following sentences into reported speech.

1. Robin said, These biscuits taste delicious.' ...
Robin said (that) the biscuits tasted delicious....

2. “I can't see you this afternoon because I've got a lot to do,' Ann told me.
3. She came into the room holding some letters in her hand and said, 'I found these while I was tidying the desk drawers.'
4. Fiona said, That picture was painted by my great-grandfather.'
5. “Those were good times for my family,' Jack said.
6. 'I received a parcel this morning, but I haven't opened it yet,' Tom said.
7. "You mustn't do that again,' Mum said to Bob.
8. “These shoes are worn out. You'd better throw them away,' Mum said to me.

3. Turn the following sentences into reported speech.

1 He said, 'I'm going to the station.'

...He said (that) he was going to the station....

2 Tina said, 'You should exercise regularly.'
3 They said, 'We had booked the room before we left.'
4 Tom said, This meal is delicious.'
5 'I've written you a letter,' she said to her friend.
6 'We've decided to spend our holidays in Jordan,' they told us.
7 Jill said, “I’ll go to the bank tomorrow.'
8 She said to him, 'We've been invited to a wedding.'
9 She told me, 'You must leave early tomorrow.'
10 They've gone out for the evening,' Jessie said to me.
11 They said, 'We may visit Joe tonight.'
12 She said, 'I can meet you on Tuesday.'
13 Keith said, There is a letter for you on the table.'
14 'We won't be visiting Tom this evening,' Sam told us.
15 Eric said, They had been talking on the phone for an hour before I interrupted them.'
16 'I haven't spoken to Mary since last week,' Gloria said.
17 They delivered the letters this morning,' she said.
18 He said, 'I'd like to buy this jumper.'
19 They aren't going on holiday this year,' he said.
20 Jane said, 'I haven't finished my homework yet.'
21 'I'm going to bed early tonight,' Caroline said.
22 'My mother is coming to visit us,' I said.
23 'We don't want to watch a film tonight,' the children said.
24 'He's playing in the garden now,' his mother said.
25 She said, 'You must do your homework now.'

4. Turn the sentences into reported speech. In which of the following sentences do the tenses not change? In which do they not have to be changed? Why?

1 The article says, “The artist only uses oil paints.'

...The article says (that) the artist only uses oil paints....

... The tenses do not change because the introductory verb is in the present simple....

2 'They are working hard today,' he said.
3 'I've done the things you asked me to do,' Mary said.
4 The sun rises in the east,' she said.
5 'He broke the window,' they said.
6 'We've never been on holiday abroad,' they said.
7 Mum says, 'Dinner is ready.'
8 “I’ll start cooking at six o'clock,' she said.
9 'We went to the supermarket yesterday,' he said.
10 Mrs Jones says, 'My daughter is going to have a baby.'
11 'You're never going to get a job,' Dad always says.

12 'Fish live in water,' he said.
13 'We went to the beach last weekend,' they said.
14 'He showed me his photographs,' she said.
15 'I'm working on my project now,' Billy said.

5. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Seaweed grows in the sea,' the teacher said to the students.

...The teacher said to the students/told the students (that) seaweed grows/grew in the sea....

2 'I saw Amanda at the cinema,' she said, (up-to-date reporting)
3 They don't live here any more,' he said to me. (out-of-date reporting)
4 "Canada is a large country,' he said.
5 The Statue of Liberty is in America,' she said to us
6 "I'll help you with your homework,' he said, (out-of-date reporting)
7 'I would go on holiday if I had enough money,' Bill said, (up-to-date reporting)
8 'If I'm free, I'll call you,' Tom said, (up-to-date reporting)
9 'You should make a decision,' he said to us.
10 'You can ask John for advice,' she said, (up-to-date reporting)

6. Turn the following into reported questions.

1 'Where do you live?' I asked her.

...I asked her where she lived....

2 'How old will you be on your next birthday?" he asked me.
3 'Where is your umbrella?' she asked her daughter.
4 'Do you like playing football?' John asked us.
5 The boss asked, 'What time are you going home today?'
6 'Will you take the children to school today?' he asked.
7 'Who called you today?' she asked.
8 'When will you decorate the kitchen?' Martha asked.
9 'Who broke my vase?' I asked.
10 Father asked, 'Will you help me lift these boxes, please?'
11 'Can you speak a foreign language?' she asked her.
12 'Where is the tourist information centre?' we asked.

7. Yesterday, Marion met a couple who were on holiday in London. They were looking at a map. She asked them some questions. Turn them into reported questions.

1 'Are you lost?'

...Marion asked them if/whether they were lost....

2 'Can you speak English?'
3 'Where are you from?'
4 'Is your hotel near here?'
5 'Where do you want to go?'
6 'Were you looking for Big Ben?'
7 'Have you been to the British Museum?'
8 'Have you visited Buckingham Palace?'
9 'Do you like London?'

8. Fill in the gaps with the introductory verbs in the list in the correct form.

order, tell, ask, beg, suggest

1 'Please visit me in hospital,' Joan said to Colin.

Joan ...*asked*... Colin to visit her in hospital.

2 'Let's eat out this evening,' Paul said to her.

Paul … eating out that evening.

3 'Please, please be careful,' she said to him.
She … him to be careful.
4 'Don't go near the fire,' Dad said to us.
Dad … us not to go near the fire.
5 'Be quiet!' the commander said to the troops.
The commander … the troops to be quiet

9. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Let's try the exercise again.'
The ballet teacher suggested trying the exercise again.
2 'Lift your leg higher please, Rachel.'
3 'Turn your head a little more.'
4 'Don't lean back.'

10. Turn the following sentences into reported speech.

1 The doctor said to the patient, 'Come back to see me again next week.'
... The doctor told the patient to go back and see him again the following week/the week after.
2 The guard said to the driver, 'Stop!'
3 He said, 'Shall we go for a walk?'
4 She said to him, 'Please, please don't leave me!'
5 Jenny said to Dave, 'Please help me with this
6 She said to him, 'Open the window, please.'
7 Mother said, 'How about going for a drive?'
8 She said, 'Let's eat now.'

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)

Тематика общения:

1. Избранное направление профессиональной деятельности.

4.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My speciality

The Earth's Crust and Useful Minerals

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

clay - *n* глина; глинозем

consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

crust - *n* кора; *геол.* земная кора

decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

dissolve v растворять

expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure** - *n* обнажение

external - *a* внешний

extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

glacier - *n* ледник, глетчер

grain - *n* зерно; **angular grains** - угловатые зерна *(минералов);* **grained** - *a* зернистый

gravel - *n* гравий, крупный песок

internal - *a* внутренний

intrusive - *a* интрузивный, плутонический

iron - *n* железо

layer - *n* пласт

like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

lime - *n* известь; **limestone** - *n* известняк

loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый

make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*

particle - *n* частица; включение

peat - *n* торф; торфяник

represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative** - *a* характерный, типичный

rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

sand - *n* песок

sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary** - *a* осадочный; **sedimentation** - *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose** - *a* сланцеватый, слоистый

shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay** - глинистый сланец; **combustible …, oil …** - горючий сланец

siltstone - *n* алеврит

stratification - *n* напластование, залегание

stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

substance - *n* вещество, материал; сущность

thickness - *n* толщина, мощность

value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable** - *a* ценный *(о руде)*

vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable** - *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

contain - v содержать *(в себе),* вмещать

crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

contract - v сжиматься; сокращаться

dust - *n* пыль

expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать

gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

lateral - *a* боковой

occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence** - *n* залегание; **mode of occurrence** - условия залегания

penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**

pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant** - *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

size - *n* размер; величина; класс *(угля)*

solution – *n* раствор; **soluble** - *a* растворимый; **solvent** - растворитель; *a* растворяющий

succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

uniform – *a* однородный; одинаковый

weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

to be subjected to подвергаться

Rocks of Earth's Crust

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

adjacent - *a* смежный, примыкающий

ash - *n* зола

belt - *n* пояс; лента; ремень

body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

dust - *n* пыль

dyke – *n* дайка

extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines** - *n pl* мелочь; мелкий уголь

flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
fragmentary - *a* обломочный, пластический
glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток
band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
in such a way таким образом

Fossil Fuels

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость

heat - v нагревать; *n* теплота

liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

mudstone - *n* аргиллит

purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

shale - *n* глинистый сланец

the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*

blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

continuity - *n* непрерывность, неразрывность

domestic - *a* внутренний; отечественный

estimate - v оценивать; *n* оценка; смета

fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding** - *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный

liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous** - *a* блестящий

matter - *n* вещество; материя

moisture - *n* влажность, сырость; влага

parting - *n* прослоек

plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

store - v запасать, хранить на складе; вмещать

strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*

uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Prospecting and Exploration

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, driven) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory** - *a* разведочный; **exploration** - *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening** - *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved** - *a* разведанный, достоверный; **proving** - *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable** - *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working** - *n* разработка, горная выработка

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit** - алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking** - проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping** - *a* наклонный; **gently sloping** - с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike** - вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

General Information on Mining

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development** - *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently ~** наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal** - *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support** - крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss** - *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

goaf — завал; обрушенное пространство

double-ended drum bearer — комбайн с двойным барабаном

to identify — опознавать

appraisal — оценка

susceptibility — чувствительность

concealed — скрытый, не выходящий на поверхность

crusher — дробилка

concentration — обогащение

blending — смешивание; составление шихты

screen — сортировать (обыден. уголь); просеивать

froth floatation — пенная флотация

core drilling — колонковое бурение

to delineate — обрисовывать, описывать

lender — заимодавец

feasibility — возможность

in situ mining — повторная разработка месторождения в массиве

screening — просеивание; грохочение

processing — обработка, разделение минералов

Mining and Environment

break v **(broke, broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

(руды .или породы); расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

drill - *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение

dump -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

dumper опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

environment - *n* окружение; окружающая обстановка/среда

explode - v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive** - *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

friable - *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

handle - v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

heap - v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

hydraulicklng - *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

load - v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader** - *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader** - комбайн, комбинированная горная машина

lorry - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

mention - v упоминать

overcasting - *n* перелопачивание *(породы)*

pump - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

reclamation - *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

sidecastiag - *n* внешнее отвалообразование

site - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

slice - *n* слой; **slicing** - *n* выемка слоями, разработка слоями

strip - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper** - *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping** - *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

unit - *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

washery - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

to attract smb's attention привлекать чье-л. внимание

backhoe - *n* обратная лопата

blast - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

block out - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

clearing - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

crash - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

earth-mover - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

excavator - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket ~** многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

grab - *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

grabbing - погрузка грейфером; захватывание

hoist - *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

plough - *n* струг

power shovel - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

range - *n* колебание в определенных пределах

rate - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

remote - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

result - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

safety - *n* безопасность; техника безопасности

slope - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(рудЫ)*

support - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

4.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My speciality is Geology

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth's surface and on its surface.
2. Petrology which studies the rocks of the Earth.
3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.
4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.
5. Historic Geology which treats of the Earth's history.
6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.
7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

4.3 Систематизация грамматического материала:

1. Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий.
2. Основные сведения о сослагательном наклонении.

Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

Формы инфинитива

	Active Voice	Passive Voice
Simple	to write	to be written
Continuous	to be writing	
Perfect	to have written	to have been written
Perfect Continuous	to have been writing	

Глаголы, после которых используется инфинитив:

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать
to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть

Например:
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

Значение разных форм инфинитива в таблице

Формы инфинитива	**Чему я рад?**	
Simple	I am glad **to speak** to you.	Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами).
Continuous	I am glad **to be speaking** to you.	Рад, что сейчас разговариваю с вами.
Perfect	I am glad **to have spoken** to you.	Рад, что поговорил с вами.
Perfect Continuous	I am glad **to have been speaking** to you.	Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами.
Simple Passive	I am (always) glad **to be told** the news.	Всегда рад, когда мне рассказывают новости.

Perfect Passive	I am glad **to have been told** the news.	Рад, что мне рассказали новости.

Причастие. Participle

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

Формы причастия

		Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Participle I (Present Participle)	Simple	**writing**	**being written**
	Perfect	**having written**	**having been written**
Participle II (Past Participle)			**written**

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

Как переводить разные формы причастия на русский язык

Формы причастия	причастием	деепричастием
reading	читающий	читая
having read		прочитав
being read	читаемый	будучи читаемым
having been read		будучи прочитанным
read	прочитанный	
building	строящий	строя
having built		построив
being built	строящийся	будучи строящимся
having been built		будучи построенным
built	построенный	

Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

Формы герундия

	Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Simple	**writing**	**being written**
Perfect	**having written**	**having been written**

Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

Герундий после глаголов с предлогами

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),

keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

to be + прилагательное / причастие + герундий

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I'm tired of waiting. — *Я устал ждать.*

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Complete the sentences with the correct infinitive tense.

1 She has grown taller. She seems ...*to have grown taller*.
2 He is getting used to his new job. He appears
3 Kate makes friends easily. She tends
4 He has finished the report. He claims
5 It is raining over there. It seems
6 He is on a diet. He appears
7 They have sailed round the world. They claim
8 She is feeling better. She seems

2. Fill in the correct infinitive tense.

1 A: What would you like ...*to do*... (do) tonight?
B: Let's … (go) to an Italian restaurant.
2 A: What's Liz doing?
B: She seems … (look) for something in her bag.
3 A: Alan has been offered a new job!
B: No, he hasn't. He just pretended … (offer) a new job.
4 A: Colin claims … (meet) lots of famous people.
B: I know, but I don't believe him.
5 A: Look at those two men outside. What are they doing?
B: They appear … (empty) the rubbish bins.
6 A: Would you like to go to the cinema tonight?
B: Not really. I would prefer … (go) to the theatre.
7 A: Tara seems … (work) hard all morning.
B: Yes, she hasn't even stopped for a cup of coffee.
8 A: Why is Tom at work so early this morning?
B: He wants … (finish) early so that he can go to the concert tonight.

3. Rephrase the following sentences, as in the example.

1 He must wash the car. I want ...*him to wash the car*...
2 You mustn't be late for work. I don't want …
3 Claire must tidy her bedroom. I want …

4 She mustn't go to the disco. I don't want …
5 They must go to school tomorrow. I want …
6 Gary mustn't make so much noise. I don't want …
7 You mustn't make a mess. I don't want …
8 He must mend his bike. I want …

4. Complete the sentences with too or enough and the adjective in brackets.

1 A: Would you like to come to the disco?
B: Oh no. I'm ...*too tired*... to go to a disco, (tired)
2 A: Can you reach that top shelf?
B: No, I'm not … to reach it. (tall)
3 A: Did they go on a picnic yesterday?
B: No. It was … to go on a picnic, (cold)
4 A: Did Jane enjoy the horror film?
B: No. She was … to enjoy it. (scared)
5 A: Does Tom go to school?
B: No. He isn't … to go to school yet. (old)
6 A: Will you go to London by bus?
B: No. The bus is … . I'll take the train, (slow)
7 A: Did she like the dress you bought?
B: Yes, but it was … .(big)
8 A: Take a photograph of me!
B: I can't. It isn't … in here, (bright)

5. Rewrite the sentences using too.

1 This music is so slow that I can't dance to it.
...This music, is too slow for me to dance to…
2 The bird is so weak that it can't fly.
3 She's so busy that she can't come out with us.
4 The car was so expensive that he couldn't buy it.
5 These shoes are so small that they don't fit me.
6 The book is so boring that she can't read it.
7 I was so tired that I couldn't keep my eyes open.
8 The coffee was so strong that he couldn't drink it.

6. Underline the correct preposition and fill in the gaps with the -ing form of the verb in brackets.

1 He is ill. He is complaining **with/<u>about</u>** ...*having*... (have) a headache.
2 Marcus went out instead **for/of** … (do) his homework.
3 Tracy was very excited **with/about** … (go) to the party.
4 I hope you have a good excuse **of/for** … (be) so late.
5 Sam is interested **in/for** … (take up)French lessons.
6 You can't stop him **to/from** … (take)the job if he wants to.
7 Susie ran because she was worried **about/of** … (miss) the bus.
8 Thank you **to/for** … (help) me with my homework.
9 She felt tired because she wasn't used **to/with** … (work) so hard.
10 His boss blamed him **for/of** … (lose) the deal.
11 I am in charge **in/of** … (make) the Christmas deliveries.
12 We are thinking **of/from** … (buy) a new car next month.
13 Sandra apologised **for/about** … (ruin) the performance.
14 Ian was talking **with/about** … (open) a shop in York.

7. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 It's no use ...*talking*… (talk) to Bob; he won't change his mind.
2 She will … (return) the books next weekend.
3 It was good of you … (help) me fix my bicycle.
4 The man suggested … (call) the police in, to investigate.
5 I can't get used to … (live) in such a hot country.
6 He admitted … (rob) the bank.
7 You had better … (hurry), or you'll be late for work.
8 They refused … (give) me my money back.
9 She is too short … (become) a fashion model.
10 My parents let me … (stay) up late at weekends.
11 Our teacher makes us … (do) homework every evening.
12 The kitchen windows need … (clean).
13 They have begun … (make) preparations for the party.
14 He advised her … (speak) to her boss.
15 I dislike … (go) to the theatre alone.
16 Mr. Roberts was seen … (leave) his house at 12:15 last night.
17 My sister can't stand … (watch) horror films. She gets terribly scared.
18 Can you imagine … (spend) your holidays on the moon?
19 There's no point in … (call) again. There's no one at home.
20 I don't allow people … (smoke) in my house.
21 It was silly of you … (forget) to lock the door.
22 He risks … (lose) his wallet when he leaves it on his desk.

8. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 A: Is Anne in the room?
B: Yes. I can see her ...dancing... (dance) with her husband over there.
2 A: Did you see the robber?
B: Yes. I saw him … (get) into the car and drive away.
3 A: Is John here today?
B: Yes. I heard him … (talk) on the phone as I walked past his office.
4 A: Colin is good at speaking in public, isn't he?
B: Yes. I heard him … (make) a speech last month. It was excellent.
5 A: I walked past the sports centre today.
B: So did I, and I stopped for a moment to watch some boys … (play) football.
6 A: Your hair looks great today.
B: Thanks. I watched the hairdresser … (dry) it so I could learn how to do it myself.
7 A: That's a music school, isn't it?
B: That's right. I often hear the students … (sing) as I walk past.
8 A: Did you stay until the end of the contest?
B: Yes. I listened to the chairman … (announce) the results before I went home.
9 A: How do you know Tim is at home?
B: I saw him … (cut) the grass as I was driving home.
10 A: How do you know that man stole the watch?
B: I saw him … (put) it in his pocket and leave the shop without paying.

9. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 I'll never forget ...*sailing*... (sail) down the Danube on that warm spring night last year.
2 Please don't forget … (pay) the bill.
3 John said he remembers … (buy) the newspaper, but now he can't find it.
4 Did you remember … (post) my letters today?
5 Gloria regrets … (shout) at her sister.
6 I regret … (inform) you that we cannot give you your money back.

7 The students went on … (write) for another hour.
8 After cleaning the windows, he went on … (wash) the car.
9 We are sorry … (announce) that the 7:15 train to Liverpool has been cancelled.
10 I'm sorry for … (miss) your birth day party; I'll make it up to you.
11 She stopped … (go) to the gym after she had got back into shape.
12 They stopped … (have) a rest before they continued their journey.
13 They tried … (open) the door, but it was stuck.
14 You should try … (make) your own clothes. It's much cheaper.
15 I'm sorry. I didn't mean … (break) your vase.
16 Being a teacher means … (correct) a lot of homework.
17 I like … (tidy) my room at week ends because I don't have time during the week.
18 They like … (play) in the sea on hot days.

10. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

My neighbour, Mr. Mason, loves 1) …*spending*… (spend) time in his garden. He would rather 2) … (work) outside than stay indoors, even when it is snowing! Early in the morning, you can 3) … (see) Mr. Mason 4) … (eat) breakfast in his garden, and late at night he is there again, with a cup of cocoa in his hand. I'd like 5) … (help) sometimes when there is lots of work to do, but Mr. Mason prefers 6) … (do) everything himself. He doesn't mind 7) … (get) cold and wet in the winter, and his wife says it's no use 8) … (try) to make him wear a waterproof jacket because he hates 9) … (wear) them! Mr. Mason says he will go on 10) … (garden) until he is too old 11) … (do) it!

Основные сведения о сослагательном наклонении

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

Type 0 Conditionals: They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

Type 1 Conditionals: They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

Type 2 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

Type 3 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

	If-clause (hypothesis)	Main clause (result)	Use
Type 0 general truth	if + present simple	present simple	something which is always true
	If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice.		
Type 1 real present	if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous	future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive	real - likely to happen in the present or future
	If he doesn't pay the fine, he will go to prison. If you need help, come and see me. If you have finished your work, we can have a break. If you're ever in the area, you should come and visit us.		
Type 2 unreal present	if + past simple or past continuous	would/could/might + bare infinitive	imaginary situation contrary

			to facts in the present; also used to give advice
	If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice)		
Type 3 unreal past	if + past perfect or past perfect continuous	would/could/might + have + past participle	imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism
	If she had studied harder, she would have passed the test. If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished.		

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.

b) I'll give Tim his book if I see him.

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)

b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)

c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)

d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)

e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus. (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

e.g. If Rick was/were here, we could have a party.

We use If I were you ... when we want to give advice.

e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)

b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)

c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Look at the prompts and make Type 1 conditional sentences, as in the example.
e.g. If we cut down all the forests, the world's climate will change.
1 cut down/ all forests / world's climate / change
2 not stop/use / aerosols /destroy / ozone layer
3 find / alternative sources of energy / solve / some of our environmental problems
4 temperatures / go up / by a few degrees /sea levels / rise
5 recycle / waste / save / natural resources
6 population / continue to increase / not be enough food for everyone

2. Lisa is trying to decide where to go on holiday. She would like to go to one of these places. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.
A) SPAIN FOR A WEEK
£180 Inclusive!!
2-star hotel beach
Free water sports

B) A TWO WEEK CAMPING HOLIDAY IN THE SOUTH OF FRANCE
ONLY £280 per person
Self-catering

1. How long / be away / choose / Spain?
SA: How long will she be away if she chooses Spain?
SB: If she chooses Spain, she'll be away for a week.
2. Where / go / like / camping?
3. How much / pay / go to / France?
4. What / do / go to / Spain?
5. Where / go / want / cheap holiday?

3. Study the situations, then make Type 2 conditional sentences, as in the example.
I don't have a car, so I have to wait for the bus every day.
1. If I ...had... (have) a car, I ...wouldn't have to... (not/have to) wait for the bus every day.
I never do my homework, so my teacher always gets angry with me.
2. If I … (do) my homework, my teacher … (not/get) angry with me.
I live in a small house, so I can't invite friends over.
3. If I … (live) in a bigger house, I … (be able to) invite friends over.
I never get up early, so I y am always late for school.
4. If I … (get up) earlier, I … (not/be) late for school.

4. Complete the sentences to make Type 3 conditional sentences, as in the example.
1. If he ...hadn't noticed... (not/notice) the mould in one of his glass dishes, Alexander Fleming ...would never have discovered... (never/discover) penicillin.
2. If he … (sell) some of his paintings, Van Gogh … (get) some recognition during his lifetime.
3. If Barbara Streisand … (change) the shape of her nose, her career … (never/be) the same.
4. If Anne Sullivan … (not/teach) her, Helen Keller … (not/be able to) communicate.
5. If Naomi Campbell … (not/be) so beautiful, she … (never/become) a supermodel.

5. Read the story below and make Type 3 conditional sentences, as in the example.
e.g. 1) ...if Sally hadn't been in a hurry, she would nave left some important notes at home....
Sally had a terrible day yesterday. She was in a hurry, so she left some important notes at home. She wasn't prepared for her meeting with a new client, so the meeting was a disaster. The client was

disappointed, and as a result he refused to do business with the company. The boss shouted at Sally, so she got upset.

6. Match the items in column A with those in column B in order to make correct Type 0 conditional sentences, as in the example.

e.g. 1 - c ...if you add sugar to a cup of coffee, the coffee tastes sweeter...

A

1. Add sugar to a cup of coffee.
2. Throw salt onto snow.
3. Put an apple in a bowl of water.
4. Water plants regularly.
5. Lie in the sun too long.
6. Take regular exercise.

B

a The apple floats.
b Your skin turns red.
c The coffee tastes sweeter.
d You feel healthy.
e The plants grow.
f The snow melts.

7. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What time will you be home tonight?
B: I'm not sure. If I ...have to... (have to) work late. I ...'ll call... (call) you.
2 A: I felt very tired at work today.
B: Well, if you … (not/watch) the late film, you … (not/feel) so tired
3 A: Should I buy that car?
B: Why not? If I … (have) the money, I … (buy) it myself.
4 A: If you … (pass) a chemist's, … (you/get) me some cough medicine?
B: Yes, certainly.
5 A: My sister seems very upset at the moment.
B: Were I you, I … (talk) to her about it.
6 A: Unless you … (hurry), you … (be) late again.
B: No, I won't. There's plenty of time.
7 A: Oh! I forgot to ask Sarah over for dinner.
B: If I … (speak) to her today, I … (ask) her for you.
8 A: May I join the club, please?
B: Provided you … (be) over eighteen, you can join the club.
9 A: What a lovely restaurant! I'm glad we came here.
B: If you … (not/burn) the dinner, we … (not/come) here!
10 A: Just think. If I … (not/move) to York, I … (never/meet) you.
B: I know, wasn't it lucky?
11 A: Jo doesn't spend enough time with me.
B: Well, if she … (have) the time, I'm sure she … (try), but she's very busy.
12 A: Did you give Bill the message?
B: No, but when I … (see) him, I … (tell) him the news.

8. Choose the correct answer.

1 'If you ...C... that plate, you'll burn your fingers.'

'Why? Has it been in the oven?'
A would touch
B will touch
C touch
2 ‘ … you're busy, we'll talk now.'
‘That's fine. I'm not busy at the moment.'
A If
B Provided
C Unless
3 'If you watch the news, you … a lot.'
'I know. I watch it every day.'
A learn
B were learning
C would learn
4 '… you wear warm clothes, you won't get cold.'
'I'll wear an extra jumper.'
A Unless
B Providing
C Supposing
5 'Shall I invite John to the party?'
'Well, were I you, I … him.'
A would invite
B will invite
C am inviting
6 '… the teacher comes back now, what will you do?'
'I don't know.'
A When
B Providing
C Supposing
7 'Could I see the menu, please?'
'Yes, sir. If you … a seat, I will fetch it for you.'
A take
B had taken
C have taken
8 'Don't cry. Everything will be alright.'
'Yes, but if I … the bus, I wouldn't have been late for school.'
A didn't miss
B hadn't missed
C don't miss
9 'When water boils, it … steam.'
'Yes, I know; and the steam is hot, too.'
A would produce
B produce
C produces
10 'Can you help me, please?'
'Well, if I wasn't studying, I … you.'
A would help
B help
C will help
11 'John crashed his car yesterday.'
'I know, but if he hadn't been changing the cassette, he …'
A won't crash

B wouldn't crash
C wouldn't have crashed
12 'Can I have some chocolate, please?'
'If you behave yourself, I you some later.'
A would buy
B might buy
C buy
13 'Should you see Colin … and tell me.'
'I will.'
A come
B to come
C will come
14 'If we were rich, we … expensive clothes.'
'Well, unfortunately we aren't rich!'
A could afford
B can afford
C afford

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 If I ...were... (be) you, I wouldn't drive in the snow.
2 Peter … (be able to) help you if he was here.
3 If I had closed the window, the cat … (not/jump) out.
4 I … (call) for help if I got stuck in a lift.
5 Had I known him, I … (talk) to him.
6 John … (may/lose) his job if he is rude to the boss.
7 If you … (save) some money, you would have been able to go on holiday last year.
8 You may win if you … (take) part in the contest.
9 If I had toothache, I … (go) to the dentist.
10 They would have helped us move house if we … (ask) them.
11 If Jane … (be) older, she could live by herself.
12 We would have changed our plans if we … (hear) the weather forecast.
13 Emma … (send) a card if she had remembered it was their anniversary.
14 Robert … (feel) better if you talked to him.
15 If Sam was still living nearby, you … (can/invite) him for dinner.
16 If you … (put) your money in your wallet, you will not lose it.
17 If you … (like) chocolate, you will love this cake.
18 If Bill … (come) home early, he will eat dinner with us.
19 Sandra will join us later unless she … (have) a lot of work to do.

10. Fill in the gaps using when or if.

1 A: Have you phoned Paul yet?
B: No, I'll phone him ...when... I get home.
2 A: … I get a new job soon, I may have a party.
B: That's a good idea.
3 A: I really liked that dress we saw.
B: Well, you can buy it … you get paid.
4 A: Shall we go somewhere this weekend?
B: Yes … it's sunny, we could go to the beach.
5 A: Did you make this cake yourself?
B: Yes … you like it, I'll give you the recipe.
6 A: Is Jane still asleep?
B: Yes … she wakes up, I'll tell her you're here.

7 A: Have you done your homework?
B: No. I'll do it … we've finished dinner.
8 A: We've run out of milk.
B: Well, … I go to the shops, I'll buy some more.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по дисциплине
БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Авторы: Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Безопасности горного производства	Горно-механический
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Елохин В.А.	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА……..…..4
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ……..……....….5
ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ……...……..5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ
СИТУАЦИЯХ……...5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ……...……..5
ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ…….5
УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ…….5
СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ…….,……..5
НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА……. ……..5
ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА…… ……..6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ…….……,,,,,……7
ЗАКЛЮЧЕНИЕ…….,,…..11
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……,,..12

ВВЕДЕНИЕ

Современный человек живет в мире различного рода опасностей, т.е. явлений, процессов, объектов, постоянно угрожающих его здоровью и самой жизни. Не проходит и дня, чтобы газеты, радио и телевидение не принесли тревожные сообщения об очередной аварии, катастрофе, стихийном бедствии, социальном конфликте или криминальном происшествии, повлекших за собой гибель людей и громадный материальный ущерб.

По мнению специалистов, одной из причин создавшейся ситуации является недостаточный уровень образования – обучения и воспитания – человека в области обеспечения безопасной деятельности. Только постоянное формирование в людях разумного отношения к опасностям, пропаганда обязательности выполнения требований безопасности может гарантировать им нормальные условия жизни и деятельности.

В курсе БЖД излагаются теория и практика защиты человека от опасных и вредных факторов природного и антропогенного происхождения в сфере деятельности.

Данный курс предназначен для формирования у будущих специалистов сознательного и ответственного отношения к вопросам безопасности, для привития им теоретических знаний и практических навыков, необходимых для создания безопасных и безвредных условий деятельности в системе «человек – среда», проектирования новой безопасной техники и безопасных технологий, прогнозирования и принятия грамотных решений в условиях нормальных и чрезвычайных ситуаций.

В процессе изучения курса БЖД студенту предстоит решить следующие задачи: усвоить теоретические основы БЖД; ознакомиться с естественной системой защиты человека от опасностей; изучить систему искусственной защиты в условиях нормальных (штатных) и чрезвычайных (экстремальных) ситуаций; ознакомиться с проблемами заболеваемости и травматизма на производстве; изучить вопросы управления безопасностью деятельности.

Успешное изучение курса студентами возможно при наличии соответствующей учебной литературы. Предлагаемое вниманию студентов и преподавателей учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой курса БЖД для студентов всех направлений и специальностей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В последующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Безопасность жизнедеятельности». Она содержит названия разделов с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов на зачет. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Для углубленного освоения темы рекомендуется дополнительная литература. При освоении указанных ниже тем рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента.

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебникам освойте каждый структурный элемент темы.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы и упражнения.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Основные понятия и определения. Характеристика форм трудовой деятельности. Опасности среды обитания. Основные положения теории риска. Системный анализ безопасности. Принципы, методы и средства обеспечения безопасности.

ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ

Анатомо-физиологическая характеристика человека. Анализаторы человека. Защитные механизмы организма.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ

Гелиофизические и метеорологические факторы. Производственная пыль. Механические опасности. Опасности при эксплуатации сосудов, работающих под давлением. Механические колебания и волны. Электробезопасность. Электромагнитные излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Химические опасности. Биологические опасности. Психологические опасности. Экологические опасности. Социальные опасности. Санитарно-гигиенические требования к устройству и содержанию предприятий.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

Общая характеристика чрезвычайных ситуаций. Стихийные бедствия. Аварии на особо опасных объектах экономики. Аварии на объектах горной промышленности и подземных геологоразведочных работ. Чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения. Прогнозирование и оценка обстановки при чрезвычайных ситуациях. Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций. Устойчивость функционирования объектов экономики в чрезвычайных ситуациях. Ликвидация последствий чрезвычайных ситуаций. Единая государственная система предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций.

ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Заболеваемость. Травматизм. Методы анализа травматизма.

УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Правовые основы обеспечения безопасности деятельности. Обязанности работодателя по обеспечению безопасных условий труда. Время отдыха. Подготовка работников к безопасному труду. Система управления охраной труда на предприятии. Экономические аспекты охраны труда.

СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ

НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА

• КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные термины теории безопасности деятельности, дайте их определения.
2. Охарактеризуйте основные формы трудовой деятельности.
3. Что понимают под опасностью среды обитания? Как классифицируют опасности?
4. Сформулируйте аксиому о потенциальной опасности деятельности.
5. В чем состоит идентификация (распознавание) опасности?
6. Что такое квантификация опасностей?
7. Назовите методы анализа безопасности деятельности.
8. Приведите примеры расчета производственного риска.
9. В чем заключается концепция приемлемого риска?
10. Что такое управление риском?
11. Охарактеризуйте системный анализ безопасности деятельности.
12. Перечислите принципы, методы и средства обеспечения безопасности.
13. Изложите сущность естественной системы защиты человека от опасностей.
14. Дайте анатомо-физиологическую характеристику человека.
15. Какова роль анализаторов человека в обеспечении безопасности его деятельности?
16. Опишите зрительный, слуховой и обонятельный анализаторы.
17. Опишите вестибулярный, кинестетический и кожный анализаторы.
18. Что понимают под защитными механизмами человеческого организма?
19. Охарактеризуйте действие гелиофизических и метеорологических факторов на человека.
20. Какое действие оказывают высокие и низкие температуры, повышенная и пониженная влажность на организм человека?
21. Как действуют на организм человека вредные газы и пары?
22. В чем заключается вредное действие производственной пыли на организм? Как ведется борьба с пылью?
23. Назовите средства индивидуальной защиты работающих от пыли.
24. Как классифицируют механические опасности?
25. Перечислите методы и средства защиты от механических опасностей.
26. Укажите, как обеспечивается безопасность при эксплуатации сосудов, работающих под давлением.
27. Охарактеризуйте действие инфразвука и ультразвука на организм и меры защиты от них.
28. Объясните действие шума на организм. Перечислите методы и средства коллективной и индивидуальной защиты от шума.
29. Как борются с вибрацией на горных предприятиях?
30. Объясните действие электрического тока на организм человека.

31. Укажите опасности, связанные с применением электрического тока на горных предприятиях.
32. Назовите основные меры безопасности при эксплуатации электроустановок.
33. Перечислите средства индивидуальной защиты от поражения электрическим током.
34. В чем состоит молниезащита зданий и сооружений?
35. Назовите способы защиты работающих от воздействия электрических и электромагнитных полей.
36. Укажите меры защиты от инфракрасного, ультрафиолетового и лазерного излучений.
37. Как влияет освещение на условия труда? Перечислите виды освещения.
38. Укажите средства нормализации освещения производственных помещений, рабочих мест и горных выработок.
39. Охарактеризуйте виды ионизирующих излучений.
40. Назовите общие принципы защиты от ионизирующих излучений.
41. Охарактеризуйте методы и средства защиты от ионизирующих излучений.
42. Перечислите химические опасности (вредные вещества) и укажите меры защиты от них.
43. Назовите биологические опасности и меры защиты от них.
44. Что понимают под психологическими опасностями?
45. Какие естественные факторы воздействуют на биосферу Земли?
46. В чем заключается антропогенное воздействие на природу?
47. Назовите методы и средства обеспечения экологической безопасности на горных предприятиях.
48. Какие санитарно-гигиенические требования предъявляются к устройству и содержанию предприятий?
49. Что такое чрезвычайная ситуация?
50. Перечислите признаки, характеризующие чрезвычайные ситуации.
51. Как классифицируют чрезвычайные ситуации по причинам возникновения?
52. Охарактеризуйте стихийные бедствия. Укажите мероприятия по предупреждению и ликвидации последствий стихийных бедствий.
53. Перечислите виды аварий на особо опасных объектах экономики (народного хозяйства). В чем заключается профилактика возникновения аварий на таких объектах?
54. Какие аварии происходят на объектах горной промышленности? Укажите методы профилактики и ликвидации таких аварий.
55. Охарактеризуйте чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения.
56. Перечислите основные принципы и способы защиты населения от чрезвычайных ситуаций.

57. Какие действия надлежит выполнить населению при стихийных бедствиях и авариях?
58. Укажите действия населения при возникновении угрозы нападения противника.
59. Какие действия должно выполнять население в очагах поражения и после выхода из них?
60. Какие факторы влияют на устойчивость функционирования объектов экономики?
61. Перечислите основные мероприятия по повышению устойчивости функционирования объектов экономики.
62. Назовите принципы организации и проведения аварийно-спасательных и других неотложных работ (АСиДНР) в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени.
63. Какие приемы и способы проведения АСиДНР используются в очагах поражения?
64. Перечислите меры безопасности при проведении АСиДНР.
65. По каким признакам классифицируют травмы и несчастные случаи на производстве?
66. Перечислите причины травматизма.
67. Укажите причины несчастных случаев на шахтах.
68. Опишите порядок расследования и учета несчастных случаев на производстве.
69. В чем заключается профилактика травматизма?
70. Какие методы используются при анализе травматизма?
71. Как расследуются профессиональные заболевания?
72. Кто назначает комиссию по расследованию профессионального заболевания?
73. Каким образом определяется окончательный диагноз острого профессионального заболевания?
74. Назовите меры профилактики профессиональных заболеваний.
75. Назовите меры профилактики производственного травматизма.
76. Изложите правовые основы обеспечения безопасности деятельности.
77. Какие обязанности возложены на администрацию предприятия по обеспечению охраны труда?
78. Перечислите виды подготовки работников к безопасному труду.
79. Что понимают под системой управления охраной труда на предприятиях?
80. Назовите основные нормативные документы, обеспечивающие безопасность деятельности.
81. Какова продолжительность ежедневной работы?
82. Какова профессиональная подготовка работников к безопасному труду?
83. Опишите систему управления охраной труда.
84. Назовите фонды охраны труда.

85. Чем обусловливается эффективность мероприятий по охране труда?
86. Опишите медицинское обслуживание работников.
87. Какие существуют льготы и компенсации за вредные и опасные условия труда?
88. Поясните суть обязательного социального страхования от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний.
89. Назовите обязательные принципы обязательного страхования от несчастных случаев на производстве и профзаболеваний.
90. Кто имеет право на получение страховых выплат в случае смерти застрахованного?
91. Как осуществляются страховые выплаты по социальному страхованию?
92. Как начисляется пособие по временной нетрудоспособности?
93. Каков порядок привлечения к дисциплинарной ответственности?
94. Кто может привлекать к дисциплинарной ответственности.
95. Кто может привлекать к административной ответственности?
96. В каких случаях привлекают к уголовной ответственности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В среде обитания человека постоянно присутствуют естественные, техногенные и антропогенные опасности.

Полностью устранить негативное влияние естественных опасностей человечеству до настоящего времени не удается. Реальные успехи в защите человека от стихийных явлений сводятся к определению наиболее вероятных зон их действия и ликвидации возникающих последствий.

Мир техногенных опасностей вполне познаваем, и у человека есть достаточно способов и средств для защиты.

Антропогенные опасности во многом обусловлены недостаточным вниманием человека к проблеме безопасности, склонностью к риску и пренебрежению опасностью. Часто это связано с ограниченными знаниями человека о мире опасностей и негативных последствиях их проявления. Воздействие антропогенных опасностей может быть сведено к минимуму за счет обучения населения и работающих основам безопасности жизнедеятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Безопасность жизнедеятельности [Текст]: учебное пособие / В.В. Токмаков, Ю.Ф. Килин, А.М. Кузнецов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский государственный горный университет. - 4-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 272 с.

Безопасность жизнедеятельности: учебное пособие / В.А. Подюков, В.В. Токмаков, В.М. Куликов ; под ред. В.В. Токмакова ; Уральский государственный горный уни-верситет. - 3-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург : УГГУ, 2007. - 314 с.

Белов С. В. Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды (техносферная безопасность): учебник. 5-е изд., исправл. и доп. – М.: Изд-во «Юрай», 2015. – 702с.

Безопасность жизнедеятельности: энциклопедический словарь / под ред. проф. Русака О. Н. – СПб.: Инф-изд. агент «Лик», 2003.

Безопасность жизнедеятельности: Учебник для вузов / К. З. Ушаков, Н. О. Каледина, Б. Ф. Кирин, М. А. Сребный / под ред. К. З. Ушакова. – М.: Изд-во МГГУ, 2000. – 430 с.

Воронов Е. Т., Резник Ю. Н., Бондарь И. А. Безопасность жизнедеятельности. Теоретические основы БЖД. Охрана труда: учебное пособие. – Чита: Изд-во ЧитГУ, 2010. – 390 с.

Занько Н. К., Малаян К. Р., Русак О. Н. Безопасность жизнедеятельности: учебник. – М.: Лань, 2012. – 672 с.

Субботин А. И. Управление безопасностью труда: учебное пособие. – М.: Изд-во МГГУ, 2014. – 266 с.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

по дисциплине

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Авторы: Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Безопасности горного производства	Горно-механический
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Елохин В.А.	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1. РАСЧЕТ ПОТРЕБНОГО ВОЗДУХООБМЕНА

Цель практического занятия — закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Человек и среда обитания: воздействия негативных факторов окружающей среды на человека», и формирование практических навыков расчета воздухообмена в производственных помещениях необходимого для очистки воздуха от вредностей: для удаления вредных веществ (выделяющихся вредных газов, паров и пыли); для удаления излишних водяных паров; для удаления избыточного тепла.

Общие сведения. Среда обитания — это окружающая человека среда, осуществляющая через совокупность факторов (физических, биологических, химических и социальных) прямое или косвенное воздействие на жизнедеятельность человека, его здоровье, трудоспособность и потомство. В жизненном цикле человек и окружающая среда обитания непрерывно взаимодействуют и образуют постоянно действующую систему «человек — среда обитания», в которой человек реализует свои физиологические и социальные потребности. В составе окружающей среды выделяют природную, техногенную, производственную и бытовую среду. Каждая среда может представлять опасность для человека. В данной работе рассматривается расчет потребного воздухообмена (L м^3/ч), для очистки воздуха от вредных газов и паров и для удаления избыточного тепла с помощью механической общеобменной вентиляции.

Задание. В помещении объемом V работают n человек со средней производительностью a каждый. Они производят покраску и шпаклевку изделий нитро- (на основе ацетона) красками, эмалями и шпаклевками, для чего используется ручное и механизированное оборудование. В этом же помещении производится пайка N контактов припоем ПОС-60. Источники тепловыделения

– оборудование мощностью Рном и осветительная сеть мощностью Роев из люминесцентных ламп. Расчеты вести для холодного периода года. Помещение имеет *К* окон направленных на север размерами 2,5х1,75 м с двойным остеклением и деревянными рамами. Категория работ – III (тяжелая).

Рассчитать потребный воздухообмен и определить кратность воздухообмена для: 1) испарений растворителей и лаков; 2) при пайке припоем ПОС-60; 3) удаления выделяемой людьми углекислоты; 4) удаления избыточного тепла.

Методика и порядок расчета воздухообмена для очистки воздуха.

Потребный воздухообмен определяется по формуле

$$L = \frac{G \times 1000}{x_н - x_в}, \text{ м}^3/\text{ч}, \qquad (1.1)$$

где *L*, м^3/ч – потребный воздухообмен; *G*, г/ч – количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения; $x_в$, мг/м^3 – предельно допустимая концентрация вредности в воздухе рабочей зоны помещения, согласно ГОСТ 12.1.005-88 [1]; $x_н$, мг/м^3 – максимально возможная концентрация той же вредности в воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338- 03) □4□.

Применяется также понятие кратности воздухообмена (n), которая показывает сколько раз в течение одного часа воздух полностью сменяется в помещении. Значение n □ □ может быть достигнуто естественным воздухообменом без устройства механической вентиляции.

Кратность воздухообмена определяется по формуле

$$n = \frac{L}{V_n}, \text{ ч}^{-1}, \qquad (1.2)$$

где n, раз/ч – кратность воздухообмена; *L*, м^3/ч – потребный воздухообмен; V_n – внутренний объем помещения, м^3.

Согласно СП 2.2.1.1312-03, кратность воздухообмена n > 10 недопустима.

Так как $x_н$ определяется по табл. 1.1 прил.1, а $x_в$ по табл. 1.2 прил.1, то для расчета потребного воздухообмена необходимо в каждом случае определять

количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения.

Таблица 1.0

Исходные данные для расчёта потребного воздухообмена

№ вар.	*a*, м²/ч	Материал	*n* чел.	*V* м3	*N* шт/час	Местность	$P_{ном.}$ кВт	$P_{осв.}$ кВт	*m* окон
1	2	Бесцветный аэролак, окраска кистью	1	100	40	Сельские населенные пункты	10	0,5	2
2	1,5		2	200	35		20	0,5	3
3	1		3	300	400		30	1	4
4	2		4	400	45	Малые города	40	1	5
5	3	Цветной аэролак, окраска механизир.	1	500	305		200	1	6
6	4		1	600	48		150	1,5	6
7	3,5		1	700	450	Большие города	200	1	6
8	5		1	800	480		100	2	8
9	0,2	Шпаклевка кистью	3	80	325		10	0,5	2
10	0,3		4	200	420	Сельские населенные пункты	20	1	4
11	1,5	Шпаклевка механизир,	1	200	250		30	1	3
12	1		2	300	450		40	1,5	4
13	0,8	Бесцветный аэролак, окраска кистью	1	150	300	Малые города	50	0,6	2
14	1		2	150	48		60	0,8	3
15	1,2		1	120	335		70	1	2
16	0,7		2	200	400	Большие города	80	1,2	4
17	2	Цветной аэролак, окраска механизир.	1	200	280		90	0,6	4
18	2,5		2	400	480		100	0,8	6
19	2,2		1	400	290	Сельские населенные пункты	150	1,2	8
20	1,8		2	600	300		200	1,5	8
21	0,3	Шпаклевка кистью	1	80	200		250	0,5	I
22	0,4		2	100	250	Малые города	300	0,6	2
23	1	Шпаклевка механизир.	1	150	242		60	1	2
24	1		2	400	440	Большие города	80	1	3
25	1,5	Шпаклевка	1	100	270		100	1,2	4

26	2	кистью	3	200	180		150	0,5	6

Рассмотрим отдельные характерные случаи выделения вредных веществ в воздух помещения и определения потребного воздухообмена.

1.1. Определение воздухообмена при испарении растворителей и лаков

Испарение растворителей и лаков обычно происходит при покраске различных изделий. Количество летучих растворителей, выделяющихся в воздухе помещений можно определить по следующей формуле

$$G = \frac{a \times A \times m \times n}{100}, \text{ г/ч}, \qquad (1.3)$$

где a, м^2/ч – средняя производительность по покраске одного рабочего (при ручной покраске кистью – 12 м^2/ч, пульверизатором – 50 м^2/ч); A, г/м^2 – расход лакокрасочных материалов; m, % – процент летучих растворителей, содержащихся в лакокрасочных материалах; n – число рабочих, одновременно занятых на покраске.

Численные значения величин A и m определяются по табл. 1.3 прил. 1.

Пример. Определить количество выделяющихся в воздух помещения летучих растворителей.

Решение:

По табл. 3 прил. 1 для цветного аэролака при окраске распылением находим, что A = 180 г/м^2, m = 75 %, тогда G = 50·180·75·2/100 = 13500 г/ч. Далее определяем потребный воздухообмен в помещении по формуле (1.3). Находим для ацетона из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1, что $x_в$ = 200 мг/м^3, $x_н$= 0,35 мг/м^3, тогда L = 13500·1000/(200 - 0,35) = 67500 м^3/ч.

Ответ: L = 67500 м^3/ч.

1.2. Определение потребного воздухообмена при пайке электронных схем

Пайка осуществляется свинцово-оловянным припоем ПОС-60, который содержит C = 0,4 доли объема свинца и 60 % олова. Наиболее ядовиты аэрозоли (пары) свинца.

В процессе пайки из припоя испаряется до B = 0,1 % свинца, а на 1 пайку расходуется 10 мг припоя. При числе паек – N, количество выделяемых паров свинца определяется по формуле

$$G = C \times B \times N, \text{ мг/ч}, \quad (1.4)$$

где G, г/ч – количество выделяемых паров свинца; C – содержание свинца; B – % свинца; N – число паек.

Пример. В помещении объемом $V_п$ = 1050 м^3 три человека осуществляют пайку припоем ПОС-40 с производительностью по 100 контактов в час. Найти требуемую кратность воздухообмена.

Решение:

По формуле (1.4) определяем количество аэрозолей свинца, выделяемых в воздух: G = 0,6·0,001·10·100·3 = 1,8 мг/ч. Далее определяем потребный воздухообмен по формуле (1.1). Находим из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1 для свинца и его соединений $x_в$ = 0,01 мг/м^3; $x_н$ = 0,001 мг/м^3. Тогда L = 1,8 / (0,01- 0,001) = 200,0 м^3/ч.

Ответ: L = 185,5 м^3/ч.

1.3. Определение воздухообмена в жилых и общественных помещениях

В жилых и общественных помещениях постоянным вредным выделением является выдыхаемая людьми углекислота (CO_2). Определение потребного воздухообмена производится по количеству углекислоты, выделяемой человеком и по допустимой концентрации её.

Количество углекислоты в зависимости от возраста человека и

выполняемой работы, а также допустимые концентрации углекислоты для различных помещений приведены в табл. 1.4 и 1.5 прил. 1.

Содержание углекислоты в атмосферном воздухе можно определить по химическому составу воздуха. Однако, учитывая повышенное содержание углекислоты в атмосфере населенных пунктов, следует принимать при расчете содержания CO_2 следующие значения: для сельских населенных пунктов – 0,33 л/м^3, для малых городов (до 300 тыс. жителей) – 0,4 л/м^3, для больших городов (свыше 300 тыс. жителей) – 0,5 л/м^3.

Пример. Определить потребную кратность воздухообмена в помещении, где работают 3 человека.

Решение:

По табл. 1.4 прил.1 определяем количество CO_2, выделяемой одним человеком g = 23 л/ч. По табл. 1.5 прил. 1 определяем допустимую концентрацию CO_2. Тогда $x_в$ = 1 л/м3 и содержание CO_2 в наружном воздухе для больших городов $x_н$ = 0,5 л/м^3 .Определяем потребный воздухообмен по формуле (1.1) L = 23·3/(1- 0,5) = 138 м^3/ч. Ответ: L = 138 м^3/ч.

1.4. Определение потребного воздухообмена при выделении газов (паров) через неплотности аппаратуры, находящейся под давлением

Производственная аппаратура, работающая под давлением, как правило, не является вполне герметичной. Степень герметичности аппаратуры уменьшается по мере ее износа. Считая, что просачивание газов через неплотности подчиняется тем же законам, что и истечение через небольшие отверстия, и, предполагая, что истечение происходит адиабатически, количество газов, просочившихся через неплотности, можно определить по формуле

$$G = k \times c \times \sqrt[v]{\frac{M}{T}}, \text{ кг/ч,} \qquad (1.5)$$

где k – коэффициент, учитывающий повышение утечки от износа оборудования (k = 1–2); c – коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате; v – внутренний объем аппаратуры и трубопроводов, находящихся под давлением, м^3; M – молекулярный вес газов, находящихся в аппаратуре; T – абсолютная температура газов в аппаратуре, К.

Таблица 1.2

Коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате

Давление p, атм	до 2	2	7	17	41	161
c	0,121	0,166	0,182	0,189	0,25	0,29

Пример. Система, состоящая из аппаратов и трубопроводов, заполнена сероводородом. Рабочее давление в аппаратуре p_a = 3 атм, а в проводящих трубопроводах $p_а$=4 атм. Внутренний объем аппаратуры v_a = 5 м^3, объём трубопроводов, $v_{тр}$ = 1,2 м^3. Температура газа в аппаратуре – $t_а$ = 120 °С, в трубопроводе – $t_{тр}$ = 25 °С. Определить потребный воздухообмен в помещении.

Решение:

Определяем величины утечек сероводорода (H_2S) из аппаратуры и трубопроводов. Принимаем k = 1,5; c = 0,169 (по табл. 1.2); M = 34, для H_2S; Утечка газа из аппаратуры составляет:

$$G_а = 1{,}5 \times 0{,}169 \times \sqrt[5]{\frac{34}{393}} = 0{,}372$$

Утечка газа из трубопроводов составляет:

$$G_{ТР} = 1{,}5 \times 0{,}172 \times 1{,}2 = 0{,}104$$

$$G = G_а + G_{ТР} = 0{,}372 + 0{,}104 = 0{,}476, кг/ч$$

Используя данные табл. 1.1 прил. 1, находим, что для сероводорода $x_в$ =10 мг/м^3; $x_н$ = 0,008 мг/м^3. Потребный воздухообмен равен

$$L = \frac{4761000}{(10 - 0{,}008)} = 47638{,}1 \ {м^3}/{ч}$$

Ответ: $L = 47638{,}1$ м^3/ч

Вывод: В воздух помещения одновременно могут выделяться несколько вредных веществ. По действию на организм человека они могут быть однонаправленными и разнонаправленными. Для однонаправленных веществ расчетные значения потребного воздухообмена суммируются, а для разнонаправленных веществ выбирается наибольшее значение потребного воздухообмена.

Пример. Для первой вредности в воздухе рабочей зоны – вредных (токсичны) веществ в рассмотренных примерах все относятся к веществам разнонаправленного действия, поэтому принимаем к дальнейшему расчету максимальное из полученных значений, т. е. $L = 67500$ м^3/ч (потребный воздухообмен для паров растворителей при окраске).

Для проверки соответствия требованиям устройства вентиляции определим кратность воздухообмена $n = 67500/4800 = 14{,}1$ ч$^{-1}$. Данное значение превышает установленную величину – 10 ч$^{-1}$, поэтому необходимо принять дополнительное решение по устройству вентиляции в помещении. Например, таким решением может быть исключение распространения от двух мест окраски растворителей по всему помещению за счет применения местной вытяжной вентиляции.

Расчет объёма воздуха удаляемого местной вентиляцией определяется по формуле

$$\mathrm{L_{MB}} = \mathrm{F} \times \mathrm{v} \times 3600, {}^{\mathrm{м}^3}\!/_{\mathrm{ч}}\,, \qquad (1.6)$$

где F – площадь сечения всасывающих отверстий, м^2; v – скорость воздуха в сечении вытяжной вентиляции, м/с. Рекомендуется принимать значение скорости в интервале 0,8-1,5 м/с.

Таким образом, потребный воздухообмен для оставшихся вредных веществ принимаем для выделений сероводорода: $L = 47638{,}1$ м^3/ч.

Проверка:

$$n = 47638,\ 1/4800 = 9,\ 9\ \text{ч}^{-1}.$$

1.5. Расчёт потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла

Расчет потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла производится по формуле

$$L = \frac{Q_{\text{изб}}}{\gamma_B \times c\Delta t},\ \text{м}^3/\text{ч}, \qquad (1.7)$$

где L, м^3/ч – потребный воздухообмен; $Q_{изб}$, ккал/ч – избыточное тепло; $\gamma_в$ = 1,206 кг/м^3 – удельная масса приточного воздуха; $c_в$ = 0,24 ккал/кг□град – теплоемкость воздуха;

$$\Delta t = t_{\text{вых}} - t_{\text{пр}},\ ^{\circ}\text{C} \qquad (1.8)$$

где $t_{вых}$, °С – температура удаляемого воздуха; $t_{пр}$, °С – температура приточного воздуха.

Величина Δt при расчетах выбирается в зависимости от теплонапряженности воздуха – $Q_н$: при $Q_н \leq 20$ ккал/м^3·ч Δt = 6 °С; при $Q_н > 20$ ккал/м^3·ч Δt = 8 °С;

$$\text{Q}_\text{н} = \frac{\text{Q}_{\text{изб}}}{\text{V}_\text{n}},\ \text{ккал/ м}^3\cdot\text{ч}, \qquad (1.9)$$

где V_n, м^3 – внутренний объем помещения.

Таким образом, для определения потребного воздухообмена необходимо определить количество избыточного тепла по формуле

$$\text{Q}_{\text{изб}} = \text{Q}_{\text{об}} + \text{Q}_{\text{осв}} + \text{Q}_\text{л} + \text{Q}_\text{р} - \text{Q}_{\text{отд}},\ \text{ккал/ч}, \qquad (1.10)$$

где $Q_{об}$, ккал/ч – тепло, выделяемое оборудованием; $Q_{осв}$, ккал/ч – тепло, выделяемое системой освещения; $Q_л$, ккал/ч – тепло, выделяемое людьми в помещении; $Q_р$, ккал/ч – тепло, вносимое за счет солнечной радиации; $Q_{отд}$, ккал/ч – теплоотдача естественным путем.

Определяем количество тепла, выделяемого оборудованием

$$Q_{об} = 860 \times P_{об} \times y_1 \text{ , ккал/ч} \quad (1.11)$$

где Y_1 – коэффициент перехода тепла в помещение, зависящий от вида оборудования; $P_{об}$, кВт – мощность, потребляемая оборудованием;

$$P_{об} = P_{ном} \times y_2 \times y_3 \times y_4 \text{ , кВт,} \quad (1.12)$$

где $P_{ном}$, кВт – номинальная (установленная) мощность электрооборудования помещения; Y_2 – коэффициент использования установленной мощности, учитывающий превышение номинальной мощности над фактически необходимой; Y_3 – коэффициент загрузки, т.е. отношение величины среднего потребления мощности (во времени) к максимально необходимой; Y_4 – коэффициент одновременности работы оборудования.

При ориентировочных расчетах произведение всех четырех коэффициентов можно принимать равным:

$$y_1 \times y_2 \times y_3 \times y_4 = 0{,}25 \quad (1.13)$$

Определяем количество тепла, выделяемого системой освещения

$$Q_{осв} = 860 \times P_{осв} \times \alpha\beta \times \cos(\varphi), \quad (1.14)$$

где α – коэф. перевода электрической энергии в тепловую для лампы накаливания α = 0,92 – 0,97, люминесцентной лампы α = 0,46 – 0,48; b – коэффициент одновременности работы (при работе всех светильников b = 1); cos (φ) = 0,7 – 0,8 – коэффициент мощности; $P_{осв}$, кВт – мощность осветительной установки.

Определяем количество тепла, выделяемого находящимися в помещении людьми

$$Q_л = N \times q_л, \quad (1.15)$$

где N – количество людей в помещении; $q_л$, ккал/ч – тепловыделения одного человека табл. 1.6 прил. 1.

Определяем количество тепла, вносимого за счет солнечной радиации

$$Q_p = K \times S \times q_{ост} \text{ , } \quad (1.16)$$

где K – количество окон; S, м^2 – площадь одного окна; $q_{ост}$, ккал/ч – солнечная радиация через остекленную поверхность табл. 1.7 прил. 1.

Определяем теплоотдачу, происходящую естественным путем. Если нет дополнительных условий, то можно считать ориентировочно, что $Q_{отд} = Q_р$ для холодного и переходного периодов года (среднесуточная температура наружного воздуха ниже +10 ^{o}C). Для теплого периода года (среднесуточная температура воздуха выше +10 ^{o}C) принимаем $Q_{отд} = 0$.

Общий вывод: Среди полученных расчетных значений потребного воздухообмена для вредных веществ и удаления избыточного тепла выбирается наибольшее значение потребного воздухообмена.

Приложение 1

Таблица 1.1

Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в атмосферном воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338-03)

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м^3	ПДКс.с., мг/м^3	Агрегатн состояние
Азота диоксид	0,085	0,04	п
Азота оксид	0,6	0,06	п
Акролеин	0,03	0,03	п
Амилацетат	0,10	0,10	п
Аммиак	0,2	0,04	п
Ацетон	0,35	0,35	п
Бензин (углеводороды)	5,0	1,5	п
Бензол	1,5	0,1	п
Бутан	200	-	п
Бутилацетат	0,1	0,1	п
Винилацетат	0,15	0,15	п
Дихлорэтан	3,0	1,0	п
Ксилол	0,2	0,2	п
Марганец и его соединения	0,01	0,001	а
Метилацетат	0,07	0,07	п
Мышьяк и его неорг. соединения	-	0,003	а
Озон	0,16	0,03	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	0,15	0,05	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	0,5	0,15	а
Ртути хлорид (сулема)	-	0,0003	а
Сажа	0,15	0,05	а
Свинец и его соединения	0,001	0,0003	а
Сернистый ангидрид	0,5	0,15	п
Серная кислота	0,3	0,1	а

Продолжение табл. 1.1

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м^3	ПДКс.с., мг/м^3	Агрегатн состояние
Сероводород	0,008	-	п
Сероуглерод	0,03	0,005	п
Спирт бутиловый	0,16	-	п
Спирт изобутиловый	0,1	0,1	п
Спирт метиловый	1,0	0,5	п
Спирт этиловый	5	5	п
Стирол	0,04	0,002	п
Толуол	0,6	0,6	п
Углерода оксид	5,0	3,0	п
Фенол	0,01	0,003	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,02	0,005	п
Хлор	0,1	0,03	п
Хлористый водород	0,2	0,2	п
Этилацетат	0,1	0,1	п

Примечание: п – пары и/или газы; а – аэрозоль

Таблица 1.2

Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в воздухерабочей зоны (ГОСТ 12.1.005-88)

Наименование вредных веществ	ПДК., мг/м^3	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Азота диоксид	2,0	3	п
Азота оксиды	5,0	3	п
Акролеин	0,2	2	п
Амилацетат	100	4	п
Аммиак	20	4	п
Ацетон	200	4	п
Бензин (углеводороды)	100	4	п
Бензол	15/5	2	п
Бутан	300	4	п
Бутилацетат	200	4	п
Винилацетат	10,0	4	п
Дихлорэтан	10,0	2	п
Ксилол	50,0	3	п
Марганец и его соединения (от 2-30 %)	0,1	2	а
Метилацетат	100	4	п
Мышьяк и его неорг. соединения	0,04/0,01	2	а
Озон	0,1	1	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	1,5	4	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	4,0	4	а
Ртути хлорид (сулема)	0,2/0,05	1	а
Сажа	4,0	3	а
Свинец и его соединения	0,01/0,005	1	а
Серная кислота	1,0	2	а
Сернистый ангидрид	10	3	п
Сероводород	10,0	3	п

Продолжение табл. 1.2

Наименование вредных веществ	ПДК., мг/м^3	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Сероуглерод	1,0	3	п
Спирт бутиловый	10,0	3	п
Спирт изобутиловый	10,0	3	п
Спирт метиловый	5,0	3	п
Спирт этиловый	1000	4	п
Стирол	30/10	3	п
Толуол	50	3	п
Углерода оксид	20	4	п
Фенол	0,3	2	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,5/0,1	2	п
Хлор	1,0	2	п
Хлористый водород	5,0	1	п
Этилацетат	200	4	п

Примечание: значение в числителе – максимально разовые; в знаменателе – среднесменные

Таблица 1.3

Расходы лакокрасочных материалов на один слой покрытия изделий и содержание в них летучих растворителей

Наименование лакокрасочных материалов/способ нанесения краски	Расход лакокрасочных материалов, *A*, г/м^2	Содержание летучей час- ти, *m*, %
Нитролаки и краски		
Бесцветный аэролак /кистью	200	92
Цветные аэролаки/распыление пульверизатором	180	75
Нитрошпаклевка /кистью	100-180	10-35
Нитроклей /кистью	160	80-85
Масляные лаки и эмали		
Окраска распылением	60-90	35

Таблица 1.4

Количество углекислоты, выделяемой человеком при разной работе

Возраст человека и характер работы	Количество CO_2	
	в л/ч	в г/ч
Взрослые:		
при физической работе	45	68
при легкой работе (в учреждениях)	23	35
в состоянии покоя	23	35
Дети до 12 лет	12	18

Таблица 1.5

Предельно-допустимые концентрации углекислоты

Наименование помещений	Количество CO_2	
	в л/ч	в г/кг
Для постоянного пребывания людей (жилые ком.)	1	1,5
Для пребывания детей и больных	0,7	1
Для учреждений	1,25	1,75
Для кратковременного пребывания людей	2	3

Таблица 1.6

Количество тепловыделений одним человеком при различной работе

Категория тяжести работы		Количество тепловыделений $q_л$, ккал/ч в зависимости от окружающей температуры воздуха			
		15 ºС	20 ºС	25 ºС	30 ºС
Легкая	I	100	70	50	30
Средней тяжести	II-а	100	70	60	30
Средней тяжести	II-б	110	80	70	35
Тяжелая	III	110	80	80	35

Таблица 1.7

Солнечная радиация через остекленную поверхность

	Солнечная радиация, $q_{ост}$, ккал/ч от стороны света и широты, град.														
	ЮГ			ЮГО-ВОСТОК ЮГО-ЗАПАД				ВОСТОК ЗАПАД				СЕВЕР, СЕВЕР. ВОСТОК СЕВЕРО-ЗАПАД			
	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65
Окна с двойным остеклением и деревянными рамами	125	125	145	85	110	125	145	125	125	145	145	65	65	65	60
Окна с двойным остеклением и металлическими рамами	160	160	180	110	140	160	180	160	160	180	180	80	80	80	70
Фо- нарь с двойным остеклением и металлическими переплет.	130	160	170	110	140	170	170	160	160	180	180	85	85	85	70

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин П.А. Справочник по технике безопасности. – М.: Энергоиздат, 1982. – 342 с.

2. Каменев П.Н. Отопление и вентиляция. Часть II. Вентиляция. – М.: Издательство литературы по строительству, 1966. – 289 с.

3. ГОСТ 12.1.005-88 ССБТ. Санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны.

4. ГН2.1.6.1338-03. Предельно допустимые концентрации (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. ОЦЕНКА РИСКА

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Основы теории безопасности: системный анализ безопасности», и формирование практических навыков расчета индивидуального и группового (социального) риска в конкретных ситуациях.

Общие сведения. Опасность – одно из центральных понятий безопасности жизнедеятельности (БЖД).

Опасность хранят все системы, имеющие энергию, химически или биологически активные компоненты, а также характеристики (параметры), несоответствующие условиям жизнедеятельности человека. Можно сказать, что опасность – это риск неблагоприятного воздействия.

Практика свидетельствует, что абсолютная безопасность недостижима. Стремление к абсолютной безопасности часто вступает в антагонистические противоречия с законами техносферы.

В сентябре 1990 г. в г. Кельне состоялся первый Всемирный конгресс по безопасности жизнедеятельности человека как научной дисциплине. Девиз конгресса: «Жизнь в безопасности». Участники конгресса постоянно оперировали понятием «риск».

Возможны следующие определения риска:

1. Это количественная оценка опасности, вероятность реализации опасности;

2. При наличии статистических данных, это частота реализации опасностей.

Различают опасности реальные и потенциальные. В качестве аксиомы принимаются, что любая деятельность человека потенциально опасна. Реализация потенциальной опасности происходит через ПРИЧИНЫ и приводит к НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫМ ПОСЛЕДСТВИЯМ.

Сейчас перед специалистами ставится задача – не исключение до нуля

безопасности (что в принципе невозможно). А достижение заранее заданной величины риска реализации опасности. При этом сопоставлять затраты и получаемую от снижения риска выгоду. Во многих западных странах для более объективной оценки риска и получаемых при этом затрат и выгод, вводят финансовую меру человеческой жизни. Заметим, что такой подход имеет противников, их довод – человеческая жизнь свята, бесценна и какие-то финансовые оценки недопустимы. Тем не менее, по зарубежным исследованиям, человеческая жизнь оценивается, что позволяет более объективно рассчитывать ставки страховых тарифов при страховании и обосновывать суммы выплат.

Поскольку абсолютная безопасность (нулевой риск) невозможна, современный мир пришел к концепции приемлемого (допустимого) риска.

Суть концепции заключается в стремлении к такой безопасности, которую принимает общество в данное время. При этом учитывается уровень технического развития, экономические, социальные, политические и др. возможности. Приемлемый риск – это компромисс между уровнем безопасности и возможностями ее достижения. Это можно рассмотреть в следующей ситуации. После крупной аварии на Чернобыльской АЭС, правительство СССР решило повысить надежность всех ядерных реакторов. Средства были взяты из госбюджета и, следовательно, уменьшилось финансирование социальных программ здравоохранения, образования и культуры, что в свою очередь привело к увеличению социально-экономического риска. Поэтому следует всесторонне оценивать ситуацию и находить компромисс – между затратами и величиной риска.

Переход к «риску» дает дополнительные возможности повышения безопасности техносферы. К техническим, организационным, административным добавляются и экономические методы управления риском (страхование, денежные компенсации ущерба, платежи за риск и др.). Есть здравый смысл в том, чтобы законодательно ввести квоты за риск. При этом

возникает проблема расчета риска: статистический, вероятностный, моделирование, экспертных оценок, социологических опросов и др. Все эти методы дают приблизительную оценку, поэтому целесообразно создавать базы и банки данных по рискам в условиях предприятий, регионов и т.д.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с общими сведениями. Записать определения.
2. Выполнить практические задачи.

Практические задачи

Задача 1. В таблице 2.0 приведен ряд профессий по степени индивидуального риска фатального исхода в год. Используя данные табл.1 методом экспертных оценок охарактеризуйте вашу настоящую деятельность и условия вашей будущей работы.

Таблица 2.0

Классификация профессиональной безопасности

Категория	Условия профессиональной деятельности	Риск смерти (на человека в год)	Профессия
1	Безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$	Текстильщики, обувщики, работники лесной промышленности, бумажного производства и др.
2	Относительно безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$ до $1 \cdot 10^{-3}$	Шахтеры, металлурги, судостроители и др.
3	Опасные	$1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-2}$	Рыбопромысловики, верхолазы, трактористы и др.
4	Особо опасные	больше $1 \cdot 10^{-2}$	Летчики-испытатели, летчики реактивных самолетов.

После обсуждения письменно сформулируйте свою оценку.

Для решения следующих задач используйте формулу определения индивидуального риска

$$P = \frac{h}{H}, \qquad (2.1)$$

где P – индивидуальный риск (травмы, гибели, болезни и пр.); h – количество реализации опасности с нежелательными последствиями за определенный период времени (день, год и т.д.); H – общее число участников (людей, приборов и пр.), на которых распространяется опасность.

Пример решения задачи по формуле (2.1).

Пример. Задача 1. Ежегодно неестественной смертью гибнет 250 тыс. человек. Определить индивидуальный риск гибели жителя страны при населении в 150 млн. человек.

Решение.

$Рж = 2{,}5 \cdot 10^5 / 1{,}5 \cdot 10^8 = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$

Или будет 0,0017. Иначе можно сказать, что ежегодно примерно 17 человек 10000 погибает неестественной смертью. Если пофантазировать и предположить, что срок биологической жизни человека равен 1000 лет, то по нашим данным оказывается, что уже через 588 лет (1:0,0017) вероятность гибели человека неестественной смертью близка к 1 (или 100%).

Примечание. Здесь и в задачах №2,3 данные приближены к России.

Задача 2. Опасность гибели человека на производстве реализуется в год 7 тыс. раз. Определить индивидуальный риск погибших на производстве при условии, что всего работающих 60 млн. человек. Сравните полученный результат с вашей экспертной оценкой из задачи 1.

Задача 3. Определить риск погибших в дорожно-транспортном происшествии (ДТП), если известно, что ежегодно гибнет в ДТП 40 тыс. человек при населении 150 млн. человек.

Задача 4. Используя данные индивидуального риска фатального исхода в год для населения США (данных по России нет), определите свой

индивидуальный риск фатального исхода на конкретный год. При этом можно субъективно менять коэффициенты и набор опасностей.

Таблица 2.1

Индивидуальный иск гибели в год

Причина	Риск	Причина	Риск
Автомобильный транспорт	$3 \cdot 10^{-4}$	Воздушный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$
Падения	$9 \cdot 10^{-5}$	Падающие предметы	$6 \cdot 10^{-6}$
Пожар и ожог	$4 \cdot 10^{-5}$	Электрический ток	$6 \cdot 10^{-6}$
Утопление	$3 \cdot 10^{-5}$	Железная дорога	$4 \cdot 10^{-6}$
Отравление	$2 \cdot 10^{-5}$	Молния	$5 \cdot 10^{-7}$
Огнестрельное оружие	$1 \cdot 10^{-5}$	Все прочие	$4 \cdot 10^{-5}$
Станочное оборудование	$1 \cdot 10^{-5}$	Ядерная энергетика	$2 \cdot 10^{-10}$
Водный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$	(пренебрегаемо мал. риск)	

Риск общий для американца: $P_{общ} = 6 \cdot 10^{-4}$

Сравнить полученный результат с результатом примера решения.

Задачи на риск гибели неестественной смертью в России и с риском гибели в год для американца ($P_{общ}$).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русак О.Н. Труд без опасности. Л. «Лениздат», 1986, 191 с.

2. Береговой Г.Т. и др. Безопасность космических полетов. М., «Машиностроение», 1977, 320 с.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МИКРОКЛИМАТА РАБОЧЕЙ ЗОНЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Цель практического занятия :закрепление теоретических знаний, полученных при изучении раздела “Гелиофизические и метеорологические фактора: микроклимат производственных помещений”, и формирование практических навыков расчета метеорологических условий в производственном помещении и гигиенической оценки параметров микроклимата.

Общие сведения:

Одним из основных условий эффективной производственной деятельности человека является обеспечение нормальных метеорологических условий в помещениях. Параметры микроклимата оказывают существенное влияние на терморегуляцию организма человека и могут привести кпереохлаждение или перегреву тела

Микроклимат производственных помещений - это климат внутренней среды этих помещений, определяемый действующими на организм человека факторами: сочетанием температуры воздуха, относительной влажности, скорости движения воздуха, интенсивности теплового облучения, температуры поверхности ограждающих конструкций (стены, пол, потолок, технологическое оборудование и т.д

Под рабочей зоной понимается пространство высотой до 2м над уровнем пола или площадки, на которых находятся места постоянного или временного пребывания рабочих.

Причиной ряда заболеваний является местное и общее охлаждение. Переохлаждение организма ведет к простудным заболеваниям: ангине, катару верхних дыхательных путей, пневмонии. Установлено, что при переохлаждении

ног и туловища возникает спазм сосудов слизистых оболочек дыхательного тракта.

Перегревание возникает при избыточном накоплении тепла в организме, которое возникает при действии повышенных температур. Основными признаками перегревания являются повышение температуры тела до 38°Си более, обильное потоотделение, слабость, головная боль, учащение дыхания и пульса, изменение артериального давления и состав крови, шум в ушах, искажение цветового восприятия

Тепловой удар – это быстрое повышение температуры тела 40°С и выше. В этом случае падает артериальное давление, потоотделение прекращается, человек теряет сознание.

Организм человека обладает свойством терморегуляции – поддержание температуры тела в определенных границах (36,1…37,2°С) Терморегуляция обеспечивает равновесие между количеством тепла, непрерывно образующегося в организме человека в процессе обмена веществ, теплопродукцией и излишком тепла, непрерывно выделяемого в окружающую среду, - теплоотдачей, т.е сохраняет тепловой баланс организма человека. Количество выделившейся теплоты меняется от 8Вт до 50 Вт.

Теплопродукция. Тепло вырабатывается всем организмом, но в наибольшей степени в мышцах и печени. В процессе работы в организме происходят различные биохимические процессы, связанные с деятельностью мышечного аппарата и нервной системы. Энергозатраты человека, выполняющего различную работу, могут быть классифицированы на категории.

Разграничение работ по категориям осуществляется на основе интенсивности общих энергозатрат организма: легкие физические работы, средние физические работы, тяжелые физические работы.

К категории 1а относятся работы с интенсивностью энергозатрат до 139 Вт, выполняемые сидя и сопровождающиеся незначительным физическим напряжением.

К категории 1б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 140…174 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой и сопровождающиеся некоторым физическим напряжением (в полиграфической промышленности, на часовом, швейном производствах, в сфере управления)

К категории 2а относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233…232 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой, перемещением мелких изделий или предметов в положении стоя или сидя и требующие определенного физического напряжения.

К категории 2б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233…290 Вт, связанные с ходьбой, перемещением и переноской тяжестей до 10 кг и сопровождающиеся умеренным физическим напряжением.

К категории 3 относятся работы с интенсивностью энергозатрат более 290 Вт, связанные с постоянными передвижениями, перемещением и переноской значительных (свыше 10 кг) тяжестей и требующие больших физических усилий.

Теплоотдача. Количество тепла, отдаваемого организмом человека, зависит от температуры, относительной влажности и скорости движения воздуха. Теплоотдача осуществляется путем радиации, конвекции, испарения пота и дыхания. Для человека, находящегося в состояние покоя и одетого в обычную комнатную одежду, соотношение составляющих теплоотдачи имеет следующие распределения, % радиацией – 45, конвекцией – 30, испарением и дыханием – 25.

Основное значение имеет регулирование теплоотдачи, так как она является наиболее изменчивой и управляемой. Комфортные тепло ощущения у человека возникают при наличии теплового баланса организма, а также при условии его некоторого нарушения. Это обеспечивается тем, что в организме человека имеется некоторый резерв тепла, который используется им в случае охлаждения. Этот потенциальный запас тепла составляет в среднем 8360 кДж и находится главным образом во внешних слоях тканей организма на глубине 2-3 см от кожи. При известном уменьшении запаса тепла у человека появляются субъективно

ощущения «прохлады», которые, если охлаждение продолжается, сменяются ощущениями «холодно», «очень холодно»

Действующими нормативными документами, регламентирующими метеорологические условия производственной среды, являются ГОСТ 12.1.005-88 «ССБТ. Общие санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны» и СанПиН 2.2.4.548-96 «Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений» Этими документами установлены влажности и скорости движения воздуха в рабочей зоне производственных помещений с учетом избытков явного тепла, тяжести выполняемой работы и сезонов года.

В соответствии с вышеуказанным стандартом теплым периодом года считается сезон, характеризуемый среднесуточной температурой наружного воздуха +10 °С.

Допустимыми считаются такие параметры микроклимата, которые при длительном воздействии могут вызывать напряжения реакции терморегуляции человека, но к нарушению состояния здоровья не приводят.

Оптимальными являются такие микроклиматические параметры, которые не вызывают напряжения реакций терморегуляции и обеспечивают высокую работоспособность человека.

Расчет показателей микроклимата базируются на опытных данных о давлении, температуре и скорости движения воздуха на рабочем месте полученных при замерах на нем с помощью соответствующих приборов

Показатели микроклимата вычисляются в следующей последовательности:

1. Атмосферное давление В, Па, на рабочем месте, измеренное с помощью барометра-анероида БАММ-1

$$В = В_{п} + В_{ш} + В_{т} + В_{д}\ , \qquad (3.1)$$

где В– исправленное значение замеренного давления, Па; Вп – отсчет по прибору, Па; Вш – шкаловая поправка;Вт – температурная поправка, равная

произведению температуры прибора на удельную температуру поправки прибора; Вд – добавочная поправка, Па.

Рис. 3.1 Барометр-анероид «БААМ-1»

Барометр-анероид «БААМ-1» измеряет атмосферное давление в наземных условиях в диапазоне температур от 0 до +40 С° и при относительной влажности воздуха более 80%

2. Температура воздушной среды измеряется с помощью ртутных или спиртовых термометров, а также с помощью термографов, обеспечивающих непрерывную запись температуры на ленте за определенный период времени. Температуру воздушной среды можно измерить также с помощью психрометров и термометров

3. Влажность воздуха – абсолютная и относительная определяется с помощью психрометров. Психрометр состоит из сухого и влажного термометров. Резервуар влажного термометра покрыт тканью, которая опущена в мензурку с водой. Испаряясь, вода охлаждает влажный термометр, поэтому его показания всегда ниже показания сухого.

Психрометры бывают типа Августа (Рис 3.2) и переносными, типа Ассмана (Рис 3.3). Психрометр Ассмана является более совершенным и точным прибором по сравнению с психрометром Августа. Принцип его устройства тот же, но термометры заключены в металлическую оправу, шарики термометра находятся в двойных металлических гильзах, а в головке прибора помещается вентилятор с постоянно скоростью 4 м/с.

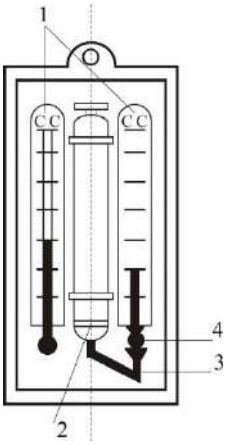


Рис. 3.2 Психрометры Августа

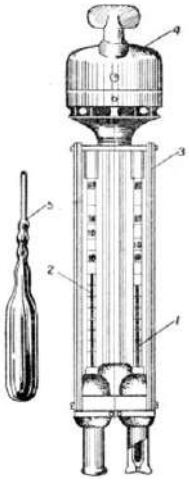


Рис. 3.3 Психрометр Ассмана

Влажность воздуха может быть рассчитана: 1) по давлению водяного пара, находящегося в воздухе или 2) по плотности водяного пара

При первом способе сначала определяется давление водяного параЮ находящегося в воздухе при данной температуре

$$P_{в.п} = P_{н.в} - c(T_c - T_B)B \qquad (3.2)$$

где Рн.в– давление насыщенного водяного пара при температуре tв, зафиксированной влажным термометром, Па;с–коэффициент психрометра, зависящий от скорости движения воздуха около шарика мокрого термометра (при скорости движения воздуха до 4 м/с принимают с = 0.00074, свыше 4 м/с – 0,00066) tc и tв – температура сухого и влажного термометра,В–барометрическое давление воздуха в момент измерения температур психрометром, Па

Определив порациональнее давление водяного пара, находят относительную влажность воздуха

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot 100\% \,, \qquad (3.3)$$

где $P_{\text{н.с}}$– давление насыщенного водяного пара при температуре t_c, зафиксированной влажным термометром,

При расчете влажности воздуха по плотности водяного пара определяются:

а) абсолютная влажность воздуха (масса водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре)

$$F = \frac{(1000 * P_{\text{в.п}})}{(461{,}5(273 + t_c))} \,, \qquad (3.4)$$

где 461,5 – удельная газовая постоянная водяного пара Дж/(кг *К);

б) максимальная абсолютная влажность воздуха

$$\text{A}_{\text{max}} = \frac{1000 * P_{\text{н.с}}}{461{,}5 * (273 + t_c)} \,, \qquad (3.5)$$

в) относительная влажность воздуха φ

$$\varphi = \frac{A}{A_{max}} * 100 \,, \qquad (3.6)$$

Таблица 3.0

Давление насыщенного водяного пара Р, Па при температуре воздуха

t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па
0	611	10	1228	20	2328	30	4242
1	657	11	1312	21	2486	31	4493
2	705	12	1403	22	2644	32	4754
3	759	13	1497	23	2809	33	5030
4	813	14	1599	24	2894	34	5320
5	872	15	1705	25	3168	35	5624
6	935	16	1817	26	3361	36	5941
7	1001	17	1937	27	3565	37	6275
8	1073	18	2064	28	3780	38	6625
9	1148	19	2197	29	4005	39	6991

Значение относительной влажности φ, найденного описанными способами, может быть проверено по данным психометрической таблицы

4. Скорость движения воздуха измеряется с помощью крыльчатых или чашечных анемометров (Рис 3.4). Крыльчатый анемометр принимается для измерения скорости воздуха до 10 м/с, а чашечный – до 30м/с. Принцип действия анемометров обоих типов основан на том, что частоты вращения крыльчатки тем больше, чем больше скорость движения воздуха. Вращение крыльчатки передается на счетный механизм. Разница в показаниях до и после измерения, деленная на время наблюдения, показывает число делений в 1 с. Специальный тарировочный паспорт, предлагаемый к каждому прибору позволяет по вычисленной величине делений определить скорость движения воздуха.

Рис 3.4 Чашечный анемометр

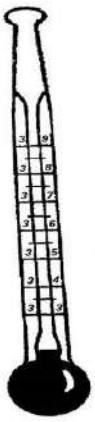


Рис. 3.5 Кататермометр

Скорость движения воздуха в интервале величин от 0.1 до 0.5 м/с можно определить с помощью кататермометра (Рис.3.5). Шаровой кататермометр представляет собой стартовый термометр с двумя резервуарами: шаровым внизу и цилиндрическим вверху. Шкала кататермометра имеет давление от 31 до 41 градуса. Для работы с этим прибором его предварительно нагревают на водяной бане, затем вытирают насухо и помещают в исследуемое место. По величине падения столба спирта в единицу времени на кататермометре при его охлаждении судят о скорости движения воздуха. Для измерения малых скоростей (от 0.03 до 5 м/с) при температуре в производственных помещениях не ниже 10С применяется термоанемометр. Это электрический прибор на полупроводниках, принцип его действия основан на измерении величины сопротивления датчика при изменении температуры и скорости движения воздуха.

Таблица 3.1

Значения относительной влажности

t_c℃	Разность показаний сухого и влажного термометров t_c - t_b℃									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Относительная влажность φ, %									
0	100	81	63	45	28	11				

1	100	83	65	48	32	16				
2	100	84	68	51	35	20				
3	100	84	69	54	39	24	10			
4	100	85	70	56	42	28	14			
5	100	86	72	58	45	32	19	6		
6	100	86	73	60	47	35	23	10		
7	100	87	74	61	49	37	26	14		
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7	
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11	
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5

Продолжение табл. 3.1

11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41

28	100	93	85	78	71	65	59	52	48	42
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

Скорость движения воздуха V, м/с , при замере ее анемометром АСО-3 подсчитывается по формуле

$$V = an + b, \quad (3.7)$$

где n число делений в 1 с; $n = \frac{n_к - n_н}{t_{зам}}$; $n_н$ и $n_к$ – начальный и конечный отсчеты по анемометру; t зам – продолжительность замера по прибору.

При выполнении настоящего практического занятия рекомендуется использовать формулу:

$$V = 0{,}45n + 0{,}01$$

5. Гигиеническая оценка результатов расчета параметров микроклимата: производится по санитарным нормам, приведенным в ГОСТ 12.1.005-88.

Таблица 3.2

Оптимальные нормы температуры, относительно влажности и скорости движения воздуха по рабочей зоне производственных помещений

Период Года	Категория Работ	Температура, ℃	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха м/с не более
Холодный (температура наружного воздуха ниже +10℃)	Легкая – 1	22-24	40-60	0,1
	Легкая – 1б	21-23	40-60	0,1
	Средней тяжести – Па	18-20	40-60	0,2
		17-19	40-60	0,2
	Средней тяжести – Пб	16-18	40-60	0,3
	Тяжелая – III			

Теплый (температура наружного воздуха +10℃ и выше)	Легкая – 1а	23-25	40-60	0,1
	Легкая – 1б	22-24	40-60	0,2
	Средней тяжести – Па	21-23	40-60	0,3
	Средней тяжести – Пб	20-22	40-60	0,3
	Тяжелая - III	18-20	40-60	0,4

Пример расчета:

Исходный данные: B_n= 87937 Па,$B_ш$ = -50 Па, t_c = 22 ℃, t_c = 16 ℃, $\Delta t = -\frac{10Па}{℃}$, $B_д$ = +100 Па, $n_н$=6000, t зам= 200с, период года – теплый.

Решение:

1. Атмосферное давление на рабочем месте (при температурной поправке)

$$B_т = t_c * \Delta t = 22(-10) = -220 \text{ Па}$$

$$B = B_n + B_ш + B_т + B_д = 87837 - 50 - 220 + 110 = 87667 \text{ Па}.$$

2. Скорость движения воздуха по исходным данным, полученным при помощи анемометра АСО-3. При числе давлений в 1с

$$n = \frac{n_к - n_н}{t_{зам}} = 6040 - \frac{6000}{200} = 0{,}2 \text{ дел/с}$$

Скорость движения воздуха составляет;

$$V = 0{,}45n + 0{,}01 = 0{,}45 * 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}10 \text{ м/с}$$

3. Относительная влажность воздуха по давлению водяного пара. При давлении насыщенного водяного пара при температуре сухого термометра Рн.с = 2644 Па и температуре влажного термометра Р н.в = 1817 Па и парциальном давлении водяного пара в воздухе:

$$P_{в.п} = P_{н.в} - C(t_c - t_в) * B = 1817 - 0{,}00074 * (22 - 16) * 87837 = 1427 \text{ Па}$$

относительная влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{P_{\text{в.п}}}{P_{\text{н.с}}} 100 = \frac{1427}{2644} 100 = 54\%$$

3б. Относительная влажность воздуха по плотности (массе) водяного пара. При абсолютной влажности воздуха:

$$A = \frac{1000 * P_{\text{в.п}}}{461{,}5(273 + t_c)} = \frac{1000 * 1527}{461{,}5(273 + 22)} = 10{,}48 \text{ г/м}^3$$

И максимальной влажности воздуха:

$A_{max} = \frac{1000 * P_{\text{н.с}}}{461{,}5(273 + t_{\text{с}})} = \frac{1000 * 2644}{461{,}5(273 + 22)} = 19{,}42$ г/м^{3}относительная влажность воздуха равна:

$$\varphi = \frac{A}{A_{max}} 100 = \frac{10{,}48}{19{,}42} 100 = 54\%$$

3в. Правильность произведенных подсчетов φ подтверждают данные таблицы. При разности показаний сухого и влажного термометров Тс – Тв = 22 – 16 = 6 ℃ относительная влажность воздуха φравна 54%

Варианты заданий

Для выполнения задания даются следующие показатели: отсчет по барометру Вп Температура воздуха по сухому (Тс) и влажному (Тв) термометрам психрометра, начальный (Nн) и конечный (Nк) отсчеты по анемометру, продолжительность замера скорости движения воздуха Тзам, период года (холодный, теплый) Для отсчета скорости движения воздуха использовать формулу

$$V = 0{,}45n + 0{,}01$$

Интенсивность теплового излучения на рабочем месте полагать равной 50 Вт/м^2. Числовые значения исходных данных приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Числовые значения поправок к барометру

вариант	Вв, Па	Вш, Па	$\Delta t, Па$ /℃	Ва, Па	Тс, ℃	Тв,℃	Nн	Nк	Т зам, ℃	Период года
1	110146	-100	-10	+100	23	18	6000	6246	140	Холодный
2	105752	-100	-10	+100	22	16	6107	6138	155	То же
3	97989	+75	-10	+100	18	13	6357	6407	160	То же
4	90498	+25	-10	+100	17	11	6841	6909	170	То же
5	94232	+150	-10	+100	16	11	6944	7051	200	То же
6	103379	-50	-10	+100	24	17	6107	6387	150	Теплый
7	107509	-100	-10	+100	23	17	6305	6696	187	То же
8	89371	0	-10	+100	22	15	6421	6501	190	То же
9	94263	+150	-10	+100	20	15	6725	6830	175	То же
10	96946	+100	-10	+100	19	12	6100	6176	11	То же

Порядок выполнения работы

1. Расчет и оформление практической работы провести в соответствии с примером расчета. Варианты заданий определяются пр-ем.

2. Результаты расчетов микроклимата на рабочем месте в производственном помещении занести в таблицу.

Таблица 3.4

Пример заполнения таблицы

Температура воздуха		Относительная влажность %		Скорость движения воздуха	
Фактически данная	Оптимальная по нормам	Фактически рассчитанная	Оптимальная по нормам	Фактически рассчитанная	Оптимальная по нормам

3. На основании полученных результатов определить категорию работ, в соответствии с периодом года.

4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под микроклиматом производственных помещений?

2. Опишите характер действия климатических факторов на организм человека.

3. В чем состоит нормирование воздействий климатических факторов на человека?

4. Как определяют давление, температуру, относительную влажность и скорость движения воздуха?

5. Назовите способы и средства нормализации микроклимата на рабочих местах.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЙ И БОРЬБА С ИЗБЫТОЧНЫМ ТЕПЛОМ В ШАХТАХ

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Комфортные условия жизнедеятельности», и овладение методикой расчета тепловыделений в выработки глубоких шахт и выбора технических решений по борьбе с избыточным теплом.

Общие сведения. Климатические условия в подземных выработках, особенно в глубоких шахтах, как правило, отличаются от климатических условий на земной поверхности. Микроклимат горных выработок (т. е. действующее в них на организм человека сочетание температуры, влажности, скорости движения воздуха, его давления и температуры окружающих поверхностей) в значительной степени зависит от теплообменных процессов, происходящих на пути движения воздуха. Под воздействием этих процессов температура шахтного воздуха в выработках существенно повышается с увеличением глубины ведения горных работ.

Нагревание воздуха, движущегося по горным выработкам, происходит в результате:

- теплообмена между потоком шахтного воздуха и окружающим выработки массивом горных пород, т. е. охлаждения пород;
- естественного адиабатического сжатия воздуха при движении его вниз по вертикальным и наклонным выработкам;
- изменения содержания влаги в воздухе;
- теплообмена между воздухом и подземной водой, текущей по выработкам;
- окисления угля, угольной пыли, сульфидных руд, крепежного леса и некоторых других веществ;
- охлаждения отбитых и транспортируемых масс угля и породы;
- работы горных машин и механизмов;
- выделения тепла осветительными установками, электрическими кабелями, трубопроводами сжатого воздуха, телом человека, а также действия других второстепенных факторов.
- Вызванное перечисленными факторами приращение температуры шахтного воздуха (оС = К), может быть определено из выражения

$$\Delta t = \frac{\Sigma Q_i}{C_p \rho V}, \qquad (4.1)$$

где ΣQ_i - суммарное количество теплоты, идущее на нагревание воздуха, кДж/ч; C_p - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К); ρ - плотность воздуха, кг/м^3; V - объемный расход воздуха, м^3/ч.

Шахтный воздух уже при температуре свыше 25 °С оказывает отрицательное тепловое воздействие на физиологию и гигиену труда подземных рабочих. При задержке отдачи телом человека накопившегося в нем тепла возникает перегрев организма, осложняющий протекание жизненных процессов. Чрезмерный перегрев организма вызывает ухудшение самочувствия человека, приводит к серьезным заболеваниям (в наиболее тяжелых случаях - к тепловому

удару, или стрессу, или даже к смерти), увеличивает вероятность травматизма, снижает производительность труда.

Изменение температуры воздуха (и других параметров микроклимата) в подземных выработках оказывает влияние также на физико-механические свойства горных пород и на безопасное состояние сооружений и выработок.

Расчет выделения теплоты в выработки глубоких шахт ведется по следующим зависимостям.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород. Количество теплоты $Q_{охл}$, кДж/ч, выделяющееся вследствие охлаждения окружающих выработку горных пород, описывается уравнением Ньютона для конвективного теплообмена

$$Q_{охл} = K_\tau P l (t_п - t_в), \quad (4.2)$$

где K_τ - коэффициент нестационарного теплообмена между массивом горных пород и воздухом, кДж/(м^2·ч·К) (рассчитывается по формуле, приводимой ниже); P и l - периметр и длина выработки, м; $t_п$ - естественная температура неохлажденных пород на данной глубине, (^{o}C = K, расчет приводится ниже); $t_в = t_{пб}$ - допустимая температура воздуха в выработке, ^{o}C (принимается согласно Правилам безопасности).

Коэффициент K_τ, кДж/(м^2·ч·К) определяется по формуле

$$K_\tau = \frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{2\alpha_0 R_э}} \cdot \left[\frac{1}{2R_э} + \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha\tau(1+\frac{\lambda}{2\alpha_0 R_э})}}\right], \quad (4.5)$$

где λ - коэффициент теплопроводности породы, кДж/(м·ч·К) (принимается по табл. 3.1); α_0 - суммарный коэффициент теплоотдачи от стен шахтной выработки к воздуху, кДж/(м^2·ч·К) (расчет ниже); $R_э$ - эквивалентный радиус выработки, м: $R_э = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0.564\sqrt{S}$, a - коэффициент температуропроводности породы, м^2/ч:

$\alpha = \frac{\lambda}{c_п \cdot \rho_п}$ (принимается по табл. 3.1); $c_п$ - удельная теплоемкость породы, кДж/(кг·К) (принимается по табл. 3.1); $\rho_п$ - плотность породы, кг/м^3 (принимается по табл. 3.1); τ - расчетное время процесса теполообмена, ч (например, при длительности процесса теплообмена 4 года значение $\tau = 4 \cdot 365 \cdot 24 =$ = 35040 ч).

Таблица 4.0

Тепловая характеристика пород

Порода	ρ, кг/м^3	$c_п$, кДж/(кг·К)	λ, кДж/(м·ч·К)	a, м^2/ч
Песчаник (Центральный Донбасс)	2475	0,854	9,211	0,00436
Глинистые и песчанистые сланцы (там же)	2450	0,904	6,363	0,00287
Уголь (там же)	1225	1,184	1,051	0,00073
Бурый уголь (Челябинский бассейн)	1210	1,130	0,913	0,00067
Каменный уголь (Карагандинский бассейн)	1275	1,055	0,963	0,00072
Углистый сланец	1765	1,021	3,006	0,00167
Глинистый сланец	2433	0,992	3,354	0.00139
Змеевик	2690	0,950	5,694	0,00223
Гранит	2722	0,917	7,972	0.00319
Серный колчедан (Дегтярское месторождение)	4620	0,908	15,010	0,00358
Медный колчедан (там же)	4716	0,862	15,165	0,00373

Суммарный коэффициент теплоотдачи с поверхности горной выработки α_0, кДж/(м^2·ч·К), находится их выражения

$$\alpha_0 = \alpha_к + \alpha_и,$$

где $\alpha_к$ - конвективный коэффициент теплоотдачи от стен выработки к воздуху, кДж/(м^2·ч·К)

$$\alpha_к = 2{,}9 \cdot 4{,}1868 \frac{V^{0.8}}{Д_э^{0,2}} = 12{,}14 \frac{V^{0.8}}{Д_э^{0,2}}$$

где v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; $Д_э$ - эквивалентный диаметр выработки, м: $Д_э = \frac{4S}{P}$; $\alpha_и$ - коэффициент, учитывающий испарения влаги с мокрых стен выработки, кДж/(м^2·ч·К)

$$\alpha_и = 1{,}3\beta \cdot r\,,$$

где β - коэффициент массоотдачи (коэффициент испарения), кг/(м^2·ч·К), принимается равным 0,01 - для стволов, 0,15 - для капитальных выработок, 0,03 - для лав; r - теплота парообразования воды, принимается r = 2256 кДж/кг.

Температура горных пород в массиве $t_п$, ºС, на заданной глубине H, м, от земной поверхности определяется по формулам:

$$t_п = h \cdot t_н + \frac{H - H_0}{Г_{ст}} \text{ или } t_п = h \cdot t_н + (H - H_0)\delta, \qquad (4.6)$$

где $t_п$ - температура пород нейтрального слоя (зоны с постоянной температурой пород) в данной местности; принимается примерно равной среднегодовой температуре воздуха на земной поверхности в данном районе, ºС; $t_н$ = 8,5; 2,5; 2,5; 3,0 °С для условий соответственно Донбасса, Кузбасса, Караганды и Мосбасса; H_0 - глубина (толщина) нейтрального слоя, м: H_0 = 20-40 м; $Г_{ст}$ - геотермическая ступень данного района, м/ºС: в среднем $Г_{ст}$ составляет для угольных месторождений 30–40 м/ ºС, рудных 50-140 м/ ºС, нефтяных 15-20 м/ ºС; δ - геотермический градиент, ºС/м.

2. Тепловыделение при сжатии воздуха. Количество теплоты $Q_{сж}$, кДж/ч, выделяющееся при движении воздуха вниз по вертикальным и наклонным выработкам, определяется выражением

$$Q_{сж} = 9{,}81 \cdot \rho \frac{V_в \cdot H}{1000} = 0{,}00981 \cdot \rho \cdot V_в \cdot H, \qquad (4.7)$$

где ρ - плотность воздуха, кг/м^3; $V_в$ - количество воздуха, проходящего по выработке (объемный часовой расход воздуха), м^3/ч: $V_в = 3600 \cdot \nu \cdot S$;

v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; S - площадь поперечного сечения выработки, м^2; H - глубина расположения выработки, м; для наклонной выработки

$$H = l_{\text{н}} \cdot sin\ \psi, \tag{4.8}$$

где $l_{\text{н}}$ - длина наклонной выработки; ψ - угол наклона выработки, град.

3. Тепловыделение при окислительных процессах. Количество теплоты $Q_{\text{ок}}$, кДж/ч, образующееся при окислении угля, угленосных сланцев, сульфидных руд и древесины, подсчитывается по формуле А. Ф. Воропаева

$$\text{Q}_{\text{ок}} = \text{q}_{\text{ок}} \cdot \text{V}^{0,8} \cdot \text{P} \cdot \text{l}, \tag{4.9}$$

где $q_{\text{ок}}$ - тепловыделение в результате окислительных процессов, приведенное к скорости движения воздуха в выработке, V = 1 м/с, кДж/(м^2·ч); $q_{\text{ок}}$ можно принимать равным 12-21 кДж/(м^2·ч).

4. Тепловыделение от местных источников. К местным источникам теплоты относят электродвигатели, трансформаторы, светильники, электрические кабели, трубопроводы сжатого воздуха, пневматические двигатели, другие тепловыделяющие машины, механизмы и устройства, а также работы, производимые с применением бетона на участке выработки или в призабойной зоне, когда тепло выделяется при его отвердении.

Расчетные формулы для определения количества теплоты от местных источников имеют следующий вид:

4.1. Тепловыделение при работе ***электродвигателей*** горных машин и освещения $Q_{\text{эд}}$, кДж/ч

$$\text{Q}_{\text{эд}} = \frac{3600 \cdot \text{N}_{\text{потр}} \cdot \text{k}_{\text{з}}}{\eta_{\text{з}}}, \tag{4.10}$$

где $N_{\text{потр}}$ - потребляемая мощность электродвигателей и осветительных установок, кВт; $k_{\text{з}}$ - коэффициент загрузки оборудования во времени: $k_{\text{з}}$ = 0,8; $\eta_{\text{э}}$ - к. п. д. электродвигателя: $\eta_{\text{э}}$ = 0,95.

4.2. Тепловыделение в выработку (ствол, уклон, бремсберг и др.) при эксплуатации ***лебедок*** $Q_л$, кДж/ч:

- при подъеме груза лебедкой $Q_{лп} = 3600 \cdot N_л \cdot k_з(1 - \eta_м)$;

- при спуске груза лебедкой $Q_{лс} = 3600 \cdot N_л \cdot k_з$.

где $N_л$ - установленная мощность электродвигателя лебедки, кВт; $\eta_м$ - механический к. п. д.: $\eta_м = 0{,}8$.

4.3. Тепловыделение при работе ***трансформатора*** $Q_{тр}$, кДж/ч

$$Q_{тр} = 3600 \cdot N_{тр} \cdot p_{тр}, \quad (4.11)$$

где $N_{тр}$ - мощность трансформатора, кВт; $p_{тр}$ - тепловые потери трансформатора: $p_{тр} = 0{,}04 \div 0{,}05$.

4.4. Тепловыделение при затвердевании монолитной ***бетонной крепи*** $Q_б$, кДж/ч

$$Q_б = q_б \cdot P \cdot l_ц, \quad (4.12)$$

где $q_б$ - удельное выделение теплоты при отвердевании бетона, кДж/(м^2·ч); принимается $q_б$ = 200÷400 кДж/(м^2/ч); P - периметр выработки, м; $l_ц$ - длина участка бетонирования, контактирующего с вентиляционной струей за один цикл проходки, м.

4.5. Тепловыделение при ***взрыве ВВ***. В выработке большого сечения при использовании более 100 кт ВВ тепловыделение при взрыве $Q_{взр}$, кДж/ч, рассчитывается по формуле

$$Q_{взр} = 0{,}8 \cdot q_{взр} \cdot m_з, \quad (4.13)$$

где $q_{взр}$ - удельное тепловыделение при взрыве 1 кг ВВ, кДж/кт; $m_з$ - масса заряда, кг.

Таблица 4.1

Рекомендуемые значения $q_{взр}$ для применяемых ВВ

Аммонит ПЖВ-20	3360		Аммонит АП-5ЖВ	3780

Угленит Э-6	2570		Аммонит скальный №1	5400
Победит ВП-4	3810		Аммонит № 6 ЖВ	4290
Аммонит АП-4ЖВ	3560		Игданит	3790

4.6. Тепловыделение при работе шахтных ***вентиляторов*** происходит в результате работы электродвигателя, внутренних потерь энергии в вентиляторе и аэродинамического сжатия воздуха. Количество теплоты $Q_{вен}$, кДж/ч, поступающее в выработку при работе вентилятора, выражается формулой

$$Q_{вен} = 3600 \cdot V_{вс} \frac{h_в}{1000\eta_{ву}} = 3{,}6 \cdot V_{вс} \frac{h_в}{\eta_{ву}}, \quad (4.14)$$

где $V_{вс}$ - количество воздуха, проходящего по выработке (секундный расход), м^3/с; $h_в$ - депрессия выработки, Па;

$$h_в = \alpha_в \cdot P \cdot l \frac{v^2}{S}, \quad (4.15)$$

где $\alpha_в$ - коэффициент аэродинамического сопротивления трения выработки, Н·с^2/м^4 = Па· с^2/м^2; P, l, S - периметр, длина и площадь поперечного сечения выработки, м, м, м^2; v - средняя скорость движения воздуха по выработке, м/с;

$$\eta_{ву} = \eta_в \cdot \eta_{дв} \cdot \eta_п, \quad (4.16)$$

$\eta_в$ = 0,6÷0,8; $\eta_{дв}$ = 0,85÷0,95 и $\eta_п$ - к. п. д. соответственно вентиляторной установки, вентилятора, двигателя и редукторной ($\eta_п$ = 1) или ременной ($\eta_п$ = = 0,9÷0,95) передач.

Подставляя (4.15) в (4.16) и учитывая, что

$$V_{вс} = v \cdot S \text{ м}^3/\text{с}, \quad (4.17)$$

получим (кДж/ч)

$$Q_{вен} = 3{,}6 \cdot \alpha_в \cdot P \cdot l \frac{v^3}{\eta_{ву}}. \quad (4.18)$$

4.7. Тепловыделение при работе ***людей*** $Q_л$, кДж/ч

$$Q_л = q_л \cdot n_л, \quad (4.19)$$

где $q_л$ - количество теплоты, выделяемое работающим человеком, кДж/ч·чел $q_л$ = 1050÷2500 кДж/ч·чел.; $n_л$ - число одновременно работающих людей в выработке.

5. Общее тепловыделение в выработку $Q_{общ}$, кДж/ч, находится суммированием всех частных выделений теплоты

$$Q_{общ} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \quad (4.20)$$

Способы искусственного охлаждения шахтного воздуха

Целью искусственного охлаждения шахтного воздуха является отвод определенного («излишнего») количества теплоты от него при помощи охлаждающего вещества. Тепло от воздуха можно отвести путем соприкосновения последнего с какой-либо холодной поверхностью или путем смешения его с газообразной струей, имеющей температуру ниже температуры воздуха.

Борьба с избыточным выделением теплоты в горные выработки ведется по нескольким направлениям:

- предохранение воздуха от нагревания при его движении к местам потребления;
- охлаждение воздуха без применения специальных холодильных машин;
- охлаждение воздуха с применением холодильных машин (кондиционирование).

Способы предупреждения нагревания шахтного воздуха включают в себя следующее:

- увеличение количества подаваемого в выработки воздуха путем повышения мощности вентиляторных установок, увеличения скорости движения воздуха, расширения сечений воздухоподающих выработок;

- замена машин с электроприводам машинами с пневматическим приводом;
- тепло- и гидроизоляция стен выработок;
- теплоизоляция и тщательное уплотнение воздухоподающих трубопроводов;
- предупреждение возникновения интенсивных окислительных процессов;
- сокращение пути движения воздуха к местам потребления путем выбора соответствующей схемы проветривания, проведения дополнительных выработок и скважин;
- подача воздуха к местам потребления по специально пройденным выработкам, где скорость движения воздуха может быть существенно увеличена;
- замена восходящего проветривания очистных выработок нисходящим проветриванием (при соблюдении соответствующих требований ПБ).

Для предотвращения нагревания воздуха без применения холодильных машин используются следующие способы:

- осушение воздуха сорбентами, т. е. веществами, способными поглощать влагу из воздуха (например, хлористым кальцием);
- охлаждение воздуха льдом;
- охлаждение воздуха жидким воздухам, при испарении которого поглощается значительное количество теплоты;
- охлаждение воздуха сжатым воздухам (например, от пневмо-кондиционеров);
- охлаждение воздуха водой: путем непосредственного соприкосновения охлаждающей воды с воздухом либо через поверхность труб, где воздух охлаждается в специальных теплообменниках;

- пропускание воздуха через тепловыравнивающие каналы путем подвода воздуха к стволу по горизонтальным выработкам, пройденным на глубине среднегодовой температуры.

Наиболее эффективным является искусственное охлаждение воздуха в системах кондиционирования: в компрессорных и абсорбционных холодильных установках. Холодильные установки бывают передвижные и стационарные. Передвижные установки предназначены для охлаждения воздуха в тупиковых выработках или в отдаленных очистных забоях. Стационарные установки располагаются как на земной поверхности, так и в подземных условиях.

Хладопроизводительность (холодильная мощность) **отечественных шахтных холодильных агрегатов и кондиционеров составляет:**

- передвижных кондиционеров ВК-230 - 230 кВт, КПШ-3 – 105 кВт, КПШ-40 - 47 кВт, КПШ-40П с пневмоприводом - 52 кВт;
- турбокомпрессионных холодильных машин ШХТМ-1300 - 1500 кВт, ХТМФ-235М-2000 - 2325 кВт, ХТМФ-248-4000 - 4650 кВт;
- поршневой холодильной машины МФ-220-1РШ - 255 кВт;
- абсорбционной холодильной машины АБХА-2500-2В – 2800 кВт.

Для стационарной работы на поверхности используются машины ХТМФ-235-2000, ХТМФ-248-4000, АБХА-2500-2В, а машины ШХТМ-1300 и МФ-220-1РШ устанавливаются на глубоких горизонтах.

Охлаждение шахтного воздуха с применением холодильных машин становится необходимым, когда общее тепловыделение в выработку $Q_{общ}$ превышает тепловыделение в нее, допускаемое Правилами безопасности, $Q_{пб}$, т. е. при условии

$$Q_{общ} > Q_{пб}.$$

Поскольку эти количества теплоты описываются формулами:

$Q_{общ} = c_р \cdot \rho \cdot V_{теп} \cdot (t_{пб} - t_н)$ и $Q_{пб} = c_р \cdot \rho \cdot V_в \cdot (t_{пб} - t_н)$,

то критерий необходимости кондиционирования воздуха в выработке может быть записан в виде соотношения

$$V_{\text{теп}} > V_{\text{в}},$$

где $V_{\text{теп}}$ - количество воздуха, которое необходимо подать в выработку по тепловому фактору без охлаждения воздуха, м^3/ч;

$$\mathrm{V_{теп}} = \frac{\mathrm{Q_{общ}}}{\mathrm{c_р \cdot \rho \cdot \Delta t}}, \qquad (4.21)$$

где $c_{\text{р}}$ - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К) $c_{\text{р}}$ = 0,241 ккал/(кг·К)·4,1868 кДж/ккал = 1,009 кДж/(кг·К); ρ - плотность воздуха, кг/м^3; Δt - перепад температур между выходящим (отработанным) и входящим (свежим) воздухам, проходящим по выработке, К (°С):

для стволов $\Delta t = t_{\text{в}} - t_{\text{н}}$, для подземных выработок $\Delta t = t_{\text{п}} - t_{\text{в}}$.

При необходимости кондиционирования воздуха следует выбрать тип кондиционера, рассчитать потребное количество кондиционеров и проверить правильность их установки.

Требуемая хладопроизводительность кондиционера $N_{\text{к}}'$, кВт, находится по формуле

$$N_{\text{к}}^{/} = \frac{c_h \cdot \rho \cdot V_d (t_{\text{н}} - t_{\text{пб}})}{3600} \qquad (4.22)$$

К установке принимают кондиционер хладопроизводительностью

$$N_K \geq N_K^{/}$$

При установке кондиционера в выработке (обычно одного) температура смеси за кондиционером $t_{\text{см}}$, °С (=К), определяется соотношением

$$\mathrm{t_{см}} = \mathrm{t_п} - 3600\,\frac{\mathrm{N_К}}{\mathrm{C_р \cdot \rho \cdot V_в}} \qquad (4.23)$$

Достаточность установки кондиционера проверяется по условию

$$t_{\text{см}} < t_{\text{в}}$$

Если $t_{\text{см}} > t_{\text{в}}$, то необходимо установить более мощный кондиционер.

Пример расчета. Исходные данные:

выработка - ствол шахты,

$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 38{,}5$ м^2,

$r_э = 3{,}5$ м,

$d = d_э = 7$ м,

$P = \pi \cdot d = 22$ м,

$l = H = 1200$ м,

$\alpha = 0^o$,

$H_0 = 20$ м,

$\delta = \frac{1}{\Gamma_{ст}} = 0{,}035$ м/^{o}C,

порода - песчаник,

$\rho_п = 2400$ кг/м^3,

$c_п = 0{,}858$ кДж/(кг·К),

$\lambda = 9{,}21$ кДж/(м·ч·К),

$a = \frac{\lambda}{c_п \cdot \rho_п} = 0{,}00477$ м^2/ч,

v = 2 м/с,

$\tau = 7$ лет $= 7 \cdot 365 \cdot 24 = 61320$ ч,

$t_н = 8{,}5$ ^{o}C,

$t_в = t_{пб} = 24$ ^{o}C,

$N_{потр} = 100$ кВт,

$N_п = 90$ кВт,

$\alpha_6 = 0{,}0040$ кгс·с^2/м^4 =

$= 0{,}0392$ Па· с^2/м^2,

$N_{тр} = 100$ кВт,

$n = 7$ человек.

Для обеспечения возможности выполнения расчета тепловыделений по приведенным выше формулам принимаем дополнительно следующие данные (параметры):

$\beta = 0{,}01$ кг/(м^2·ч·К),

$r = 2256$ кДж/кг,

$\rho = 1{,}25$ кг/м^3,

$q_{ок} = 16$ кДж/(м^2·ч),

$\kappa_з = 0{,}8$,

$\eta_{дв} = 0{,}95$,

$P_{тр} = 0{,}05$,

$q_б = 200$ кДж/(м^2·ч),

$l_ц = 5$ м,

$q_п = 2000$ кДж/(ч·чел),

$\eta_{ву} = \eta_у \cdot \eta_{дв} \cdot \eta_п = 0{,}7 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}95 = 0{,}56$,

$c_р = 1{,}009$ кДж/(кг·К).

Подсчитываем количества теплоты, выделяющиеся в выработку.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород

$$\alpha_k = 12.4 \cdot \frac{V^{0.8}}{d_э^{0.2}} = 12.4 \cdot \frac{2^{0.8}}{7^{0.2}} = 14.32, \text{ кДж/(м}^2\text{·ч·К;}$$

$$\alpha_и = 1.3 \cdot \beta \cdot r = 1{,}3 \cdot 0{,}001 \cdot 2256 = 29{,}33, \text{ кДж/(м}^2\text{·ч·К);}$$

$$\alpha_0 = \alpha_k + \alpha_и = 14{,}32 + 29{,}33 = 43{,}65, \text{ кДж/(м}^2\text{·ч·К);}$$

$$K_\tau = \frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{2\alpha_0 \cdot R_э}} \cdot \left[\frac{1}{2R_э} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau}\left(1+\frac{\lambda}{2\alpha_0 \cdot R_э}\right)}\right] = \frac{9{,}211}{1+\frac{9{,}211}{2 \cdot 43{,}65 \cdot 3{,}5}} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 3{,}5} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0{,}00447 \cdot 61320}\left(1+\frac{9{,}211}{2 \cdot 43{,}65 \cdot 3{,}5}\right)}\right] = 1{,}57, \text{ кДж/(м}^2\text{·ч·К);}$$

$$t_п = t_Н + (H - H_0)\delta = 8{,}5 + (1200 - 20)0{,}035 = 50\ °C;$$

$$Q_{охл} = K_\tau \cdot P \cdot l(t_п - t_в) = 1{,}57 \cdot 22 \cdot 1200(50 - 24) = 107764 \text{ кДж/ч.}$$

2. Тепловыделение при сжатии шахтного воздуха

$$V_и = 3600 \cdot v \cdot S = 3600 \cdot 2 \cdot 38{,}5 = 277200 \text{ м}^3\text{/ч;}$$

$$Q_{сж} = 0{,}00981 \cdot \rho \cdot V_В \cdot H = 0{,}00981 \cdot 1.25 \cdot 277200 \cdot 1200 = 4078998 \text{ кДж/ч.}$$

3. Тепловыделение при окислительных процессах

$$Q_{ОК} = q_{ОК} \cdot V^{0{,}8} \cdot P \cdot l = 16 \cdot 2^{0{,}8} \cdot 22 \cdot 1200 = 735441 \text{ кДж/ч.}$$

4. Тепловыделение от местных источников:

- при работе электродвигателей горных машин и освещения

$$Q_{ЭД} = \frac{3600 \cdot N_{потр} \cdot K_з}{\eta_{ДВ}} = \frac{3600 \cdot 100 \cdot 0{,}8}{0{,}95} = 303158 \text{ кДж/ч;}$$

- при спуске груза лебедкой

$$Q_{ЛС} = 3600 \cdot N_п \cdot K_з = 3600 \cdot 90 \cdot 0{,}8 = 259200 \text{ кДж/ч;}$$

- при работе трансформатора

$$Q_{ТР} = 3600 \cdot N_{ТР} \cdot P_{ТР} = 3600 \cdot 100 \cdot 0{,}5 = 18000 \text{ кДж/ч;}$$

- при работе шахтных вентиляторов

$$Q_{ВЕН} = 3{,}6 \cdot \alpha_В \cdot P \cdot l \frac{V^3}{\eta_{ВУ}} = 3{,}6 \cdot 0{,}0392 \cdot 22 \cdot 1200 \frac{2^3}{0{,}565} = 52751 \text{ кДж/ч;}$$

- при затвердевании монолитной бетонной крепи

$$Q_б = q_б \cdot P \cdot l_ц = 200 \cdot 22 \cdot 5 = 22000 \text{ кДж/ч};$$

- при работе людей

$$Q_Л = q_л \cdot n_л = 2000 \cdot 7 = 14000 \text{ кДж/ч}.$$

5. Общее тепловыделение в ствол

$$Q_{общ} = \sum_{i-1}^{n} Q_i = Q_{охл} + Q_{сж} + Q_{ок} + Q_{эд} + Q_{лс} + Q_{тр} + Q_{вен} + Q_б + Q_л =$$

$$1077648 + 4078998 + 735441 + 303158 + 259200 + 18000 + 52751 +$$

$$22000 + 14000 = 6561196 \text{ кДж/ч}.$$

Находим количество воздуха, необходимое для проветривания выработки по тепловому фактору без охлаждения воздуха

$$V_{теп} = \frac{Q_{общ}}{C_p \cdot \rho (t_{пб} - t_H)} = \frac{6561196}{1{,}009 \cdot 1{,}25(24-8{,}5)} = 335611 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Проверяем условие достаточности расхода воздуха по тепловому фактору $V_{теп} \langle V_в$.

В рассматриваемом случае это условие не выполняется, так как

$$V_{теп} = 335611 < V_В = 277200$$

Следовательно, требуется искусственное охлаждение воздуха при помощи холодильных машин.

Определяем требуемую хладопроизводительность холодильной машины

$$N_k = \frac{C_p \cdot \rho \cdot V_В (t_П - t_{пб})}{3600} = \frac{1{,}009 \cdot 1{,}25 \cdot 277200 (50-24)}{3600} = 2525 \text{ кВт}.$$

Принимаем $N_к$ = 2550 кВт. Температура смеси теплого и охлажденного воздуха за кондиционером составит

$$t_{см} = t_п - \frac{3600 \cdot N_k}{c_p \cdot \rho \cdot V_B} = 50 - \frac{3600 \cdot 2550}{1{,}009 \cdot 1{,}25 \cdot 277200} = 23{,}7\ ^\circ$$

что удовлетворяет требованиям ПБ.

Варианты заданий

Перечень вариантов заданий к расчету тепловыделений в горные выработки приведен в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Исходные данные для расчетов тепловыделений

	Величины	Номер варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Выработка	Штрек		Уклон		Квершлаг		Бремберг		Ствол	
2	S, м^2	8	10	7	6	12	14	10	12	44,2	33,2
3	P, м	11,8	13,2	11,0	10,2	14,4	15,6	13,2	14,4	23,6	20,4
4	L, м	900	1000	300	500	700	600	1000	900	1100	1200
5	α, °	6	8	40	50	10	8	15	20	90	90
6	H, м	800	900	600	700	1000	800	1200	1500	1100	1200

Продолжение табл. 4.2

7	H_0, м	20	21	22	23	24	25	30	35	28	30
8	$\Gamma_{ст}$, м/°С	30	25	26	27	31	29	32	28	34	27
9	Порода	Бурый уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Песчаник	Песчаник	Каменный уголь	Каменный уголь	Глинистый и песчанистый сланец	Песчаник
10	V, м/с	0,5	0,75	1,0	1,5	1,0	2,0	1,5	2,0	1,0	0,5
11	τ, м/с	3	2	6	8	5	9	10	7	6	4
12	$t_н$, °С	8,5	2,5	3,0	2,5	7,5	8,3	7,9	4,2	8,0	7,5
13	$t_в = t_{пб}$, °С	24	23	20	25	23	25	24	26	24	23
14	$N_{потр}$, кВт	70	60	50	40	100	90	50	50	100	100
15	$N_л$, кВт	-	-	50	50	-	-	-	-	-	100
16	$N_{тр}$, кВт	5	10	-	-	5	5	5	5	10	10
17	$\alpha_в$, Па·с^2/м^2	0,017	0,019	0,018	0,016	0,015	0,014	0,013	0,020	0,049	0,049

18	$n_л$, чел.	7	6	3	3	6	5	6	6	5	8

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте климатические условия в горных выработках глубоких шахт.

2. Как осуществляется теплоотдача тела человека в окружающую среду?

3. Какой микроклимат в выработках глубоких шахт считается допустимым?

4. Перечислите виды (формы) нагревания воздуха, движущегося по горным выработкам.

5. Как выполняется тепловое кондиционирование воздуха в горных выработках?

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. ЦВЕТА СИГНАЛЬНЫЕ И ЗНАКИ БЕЗОПАСНОСТИ

Цель работы – ривить практические навыки в применении сигнальных цветов и знаков безопасности; изучить назначение, характеристики и порядок применения сигнальных цветов и знаков безопасности.

Теоретические положения.

Для предупреждения многих несчастных случаев на производстве и в быту эффективным средством является цветовое оформление машин, приборов, помещений и рациональное применение сигнальных цветов и знаков безопасности, которые устанавливает ГОСТ Р 12.4.026–01 [1].

Различают прямое психологическое воздействие цвета на челове- ка, вызывающее, например, чувство радости или печали, создающее впе- чатление легкости или тяжести какого-либо предмета, удаленности или близости его, и вторичное воздействие, связанное с ассоциациями. Напри- мер, красный, оранжевый и желтый цвета ассоциируются с огнем, солн- цем, т. е. теплом. Такие цвета создают впечатление тепла и называются те- плыми цветами. Белый, голубой, зеленый и некоторые другие цвета ассо- циируются с холодом и называются холодными цветами.

Сигнальные цвета применяются для окраски поверхностей конст- рукций, приспособлений и элементов производственного оборудования, которые могут служить источником опасности для работающих.

ГОСТом установлены красный, желтый, зеленый и синий сигналь- ные цвета. Для усиления контраста сигнальных цветов они применяются на фоне контрастных цветов. Контрастные цвета применяются также для выполнения символов и поясняющих надписей.

Красный сигнальный цвет применяется: для запрещающих знаков; надписей и символов на знаках пожарной безопасности, обозначений от- ключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных; внут-

ренних поверхностей открывающихся кожухов и корпусов, ограждающих движущиеся элементы механизмов и машин и их крышек; рукояток кранов аварийного сброса давления; корпусов масляных выключателей, находя- щихся в рабочем состоянии под напряжением, и обозначения пожарной техники.

Желтый сигнальный цвет используется: для предупреждающих знаков элементов строительных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм (низкие балки, выступы и перепады в полости пола, малозаметные ступени, пандусы), мест, в которых существует опасность падения, сужений проездов, колонн, стоянок и опор производствен- ного оборудования (открытые движущиеся части оборудования); кромок штампов, прессов, ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, и т. п. элементов внутрицехового и межцехового транспорта, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, кабин и ограждений кранов, боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек и постоянных и временных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных и временных ограждений лестниц, перекрытий строящихся зданий; балконов и других мест, где возможно падение с высоты, емкостей, содержащих вещества с опасными и вредными свойствами, на которые предупреждающую окраску наносят в виде полосы шириной 50–100 мм в зависимости от размещения емкости; границ подходов к эвакуационным или запасным выходам.

Зеленый сигнальный цвет применяется для предписывающих знаков дверей и светового табло эвакуационных или запасных выходов, сигнальных ламп.

Синий сигнальный цвет используется для указательных знаков. Символ на знаках безопасности – это простое, всем понятное изображение характера опасности, мер предосторожности, инструктивных указаний или информации по безопасности. Знаки должны быть установлены в местах, пребывание в которых

связано с возможной опасностью для работающих, а также на производственном оборудовании, являющемся источником такой опасности. Знаки безопасности, устанавливаемые на воротах и входных дверях помещений, обозначают, что зона их действия – все помещение. При необходимости ограничения зоны действия знака приводятся соответствующие указания с вышеуказанным ГОСТом. Они контрастно выделются на окружающем их фоне и находятся в поле зрения людей, для которых предназначены. На местах и участках, являющихся временно опасными, устанавливаются переносные знаки и временные ограждения, окрашенные в сигнальный цвет. Всего предусмотрено четыре группы знаков безопасности:

1 запрещающий (в виде круга);

2 предупреждающий (в виде треугольника);

3 предписывающий (в виде квадрата);

4 указательный (в виде вертикального прямоугольника).

Для более полного усвоения формы символов на знаках и мест их установки следует дополнительно изучить раздел 3 ГОСТ Р 12.4.026-01 [1]. Для этого ниже дается необходимая выдержка из данного ГОСТа.

Стандарт не распространяется:

- на цвета, применяемые для световой сигнализации всех видов транспорта, транспортных средств и дорожного движения;
- цвета, знаки и маркировочные щитки баллонов, трубопроводов, емкостей для хранения и транспортирования газов и жидкостей;
- дорожные знаки и разметку, путевые и сигнальные знаки железных дорог, знаки для обеспечения безопасности движения всех видов транспорта (кроме знаков безопасности для подъемно-транспортных меха- низмов, внутризаводского, пассажирского и общественного транспорта);
- знаки и маркировку опасных грузов, грузовых единиц, требующих специальных условий транспортирования и хранения;
- знаки для электротехники.

Назначение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки состоит в обеспечении однозначного понимания определенных требований, касающихся безопасности, сохранения жизни и здоровья людей, снижения материального ущерба без применения слов или с их минимальным количеством.

Сигнальные цвета, знаки безопасности и сигнальную разметку следует применять для привлечения внимания людей, находящихся на производственных, общественных объектах и в иных местах, к опасности, опасной ситуации, предостережения в целях избегания опасности, сообщения о возможном исходе в случае пренебрежения опасностью, предписания или требования определенных действий, а также для сообщения необходимой информации.

Применение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки на производственных, общественных объектах и в иных местах не заменяет необходимости проведения организационных и технических мероприятий по обеспечению условий безопасности, использования средств индивидуальной и коллективной защиты, обучения и инструктажа по технике безопасности.

Размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах должна проводить организация-изготовитель. При необходимости дополнительное размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах, находящихся в эксплуатации, проводит эксплуатирующая их организация.

Графические символы и поясняющие надписи на знаках безопасности отраслевого назначения, не предусмотренные настоящим стандартом, необходимо устанавливать в отраслевых стандартах, нормах, правилах с соблюдением требований настоящего стандарта.

Назначение и правила применения сигнальных цветов.

Стандарт устанавливает следующие сигнальные цвета: красный, желтый, зеленый, синий. Для усиления зрительного восприятия цветографических изображений знаков безопасности и сигнальной разметки сигнальные цвета следует применять в сочетании с контрастными цветами – белым или черным. Контрастные цвета необходимо использовать для выполнения графических символов и поясняющих надписей.

Сигнальные цвета необходимо применять:

- для обозначения поверхностей, конструкций (или элементов конструкций), приспособлений, узлов и элементов оборудования, машин, механизмов и т. п., которые могут служить источниками опасности для лю- дей, поверхности ограждений и других защитных устройств, систем бло- кировок и т. п.;
- обозначения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов;
- знаков безопасности, сигнальной разметки, планов эвакуации и других визуальных средств обеспечения безопасности;
- светящихся (световых) средств безопасности (сигнальные лампы, табло и др.);
- обозначения пути эвакуации.

Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и соответствующие им контрастные цвета установлены в табл. 5.0.

Красный сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения отключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных;
- внутренних поверхностей крышек (дверец) шкафов с открытыми токоведущими элементами оборудования, машин, механизмов и т. п. (если оборудование, машины, механизмы имеют красный цвет, то внутренние поверхности крышек (дверец) должны быть окрашены лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета);

- рукояток кранов аварийного сброса давления;

- корпусов масляных выключателей, находящихся в рабочем состоянии под напряжением;

- обозначения различных видов пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов, требующих оперативного опознания (пожарные машины, наземные части гидрант-колонок, огнетушители, баллоны, устройства ручного пуска систем (установок) пожарной автоматики, средств оповещения, телефоны прямой связи с пожарной охраной, насосы, пожарные стенды, бочки для воды, ящики для песка, а также ведра, лопа- ты, топоры и т. п.);

- окантовки пожарных щитов белого цвета для крепления пожарного инструмента и огнетушителей. Ширина окантовки – 30–100 мм (допускается выполнять окантовку пожарных щитов в виде чередующихся наклонных под углом 45–60° полос красного сигнального и белого контра- стного цветов);

- орнаментовки элементов строительных конструкций (стены, колонны) в виде отрезка горизонтально расположенной полосы для обозначения мест нахождения огнетушителя, установки пожаротушения с ручным пуском, кнопки пожарной сигнализации и т. п. Ширина полос – 150–300 мм. Полосы должны располагаться в верхней части стен и колонн на высоте, удобной для зрительного восприятия с рабочих мест, проходов и т. п. В состав орнаментовки, как правило, следует включать знак пожарной безопасности с соответствующим графическим символом средства противопожарной защиты;

- сигнальных ламп и табло с информацией, извещающей о нару- шении технологического процесса или нарушении условий безопасности:

«Тревога», «Неисправность» и др.;

- обозначения захватных устройств промышленных установок и промышленных роботов;

Таблица 5.0

Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и соответствующие им контрастные цвета

Сигнальный цвет	Смысловое значение	Область применения	Контрастный цвет
Красный	Непосредственная опасность Аварийная или опасная ситуация Пожарная техника, средства противо-пож. защиты, их элементы	Запрещение опасного поведения или действия.Обозначение непо-средственной опасности Сообщение об аварийном отключении или аварийном состоянии оборудования (техноло- гического процесса) Обозначение и определение мест нахождения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов	Белый
Желтый	Возможная опас-ность	Обозначение возможной опасно- сти, опасной ситуации. Преду- преждение о возможной опасно-сти	Черный
Зеленый	Безопасность, безопасные усло-вия	Сообщение о нормальной работе оборудования, нормальном со- стоянии технологического про-цесса	Белый
	Помощь, спасение	Обозначение пути эвакуации, аптечек, кабинетов, средств по оказанию первой медицинской помощи	
Синий	Предписание во избежание опасно-сти	Требование обязательных дейст- вий в целях обеспечения безо-пасности	Белый
	Указание	Разрешение определенных дей-ствий	

- обозначения временных ограждений или элементов временных ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, терри- торий,

ям, котлованов, временных ограждений мест химического, бактериологического и радиационного загрязнения, а также ограждений других мест, зон, участков, вход на которые временно запрещен.

Поверхность временных ограждений должна быть целиком окра- шена красным сигнальным цветом или иметь чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы красного сигнального и белого контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос крас- ного и белого цветов от 1:1 до 1,5:1,0;

- запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности.

Не допускается использовать красный сигнальный цвет:

- для обозначения стационарно устанавливаемых средств противопожарной защиты (их элементов), не требующих оперативного опознания (пожарные извещатели, пожарные трубопроводы, оросители установок пожаротушения и т. п.);

- на пути эвакуации во избежание путаницы и замешательства (кроме запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности).

Желтый сигнальный цвет следует применять:

а) для обозначения элементов строительных и иных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм работающими: низких балок, выступов и перепадов в плоскости пола, малозаметных ступеней, пандусов, мест, в которых существует опасность падения (кромки погрузочных платформ, грузовых поддонов, неогражденных площадок, люков, проемов и т. д.), сужений проездов, малозаметных распорок, узлов, колонн, стоек и опор в местах интенсивного движения внутризаводского транспорта и т. д.;

б) обозначения узлов и элементов оборудования, машин и механизмов, неосторожное обращение с которыми представляет опасность для людей: открытых движущихся узлов, кромок оградительных устройств, не полностью закрывающих движущиеся элементы (шлифовальные круги, фрезы, зубчатые

колеса, приводные ремни, цепи и т. п.), ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, а также постоянно подвешенных к потолку или стенам технологической арматуры и механизмов, выступающих в рабочее пространство;

в) обозначения опасных при эксплуатации элементов транспортных средств, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, площадок грузоподъемников, бамперов и боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек, поворотных платформ и боковых поверхностей стрел экскаваторов, захватов и площадок автопогрузчиков, рабочих органов сельскохозяйственных машин, элементов грузоподъемных кранов, обойм грузовых крюков и др.;

г) подвижных монтажных устройств, их элементов и элементов грузозахватных приспособлений, подвижных частей кантователей, траверс, подъемников, подвижных частей монтажных вышек и лестниц;

д) внутренних поверхностей крышек, дверец, кожухов и других ограждений, закрывающих места расположения движущихся узлов и элементов оборудования, машин, механизмов, требующих периодического доступа для контроля, ремонта, регулировки и т. п.

Если указанные узлы и элементы закрыты съемными ограждениями, то окрашиванию лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета подлежат сами движущиеся узлы, элементы и (или) поверхности смежных с ними неподвижных деталей, закрываемые ограждениями;

е) постоянных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, территорий: у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных ограждений лестниц, балконов, перекрытий и других мест, в которых возможно падение с высоты.

Поверхность ограждения должна быть целиком окрашена лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

ж) обозначения емкостей и технологического оборудования, содержащих опасные или вредные вещества.

Поверхность емкости должна быть целиком окрашена лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 50–300 мм в зависимости от размера емкости при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

з) обозначения площадей, которые должны быть всегда свободными на случай эвакуации (площадки у эвакуационных выходов и подходы к ним, возле мест подачи пожарной тревоги, возле мест подхода к средствам противопожарной защиты, средствам оповещения, пунктам оказания первой медицинской помощи, пожарным лестницам и др.).

Границы этих площадей должны быть обозначены сплошными линиями желтого сигнального цвета, а сами площади – чередующимися наклонными под углом 45–60° полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина линий и полос – 50 – 100 мм;

и) предупреждающих знаков безопасности.

На поверхность объектов и элементов, перечисленных в а) и в), допускается наносить чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 50– 300 мм в зависимости от размера объекта и расстояния, с которого должно быть видно предупреждение.

Если оборудование, машины и механизмы окрашены лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета, то перечисления б) и д), их узлы и элементы должны быть обозначены чередующимися наклонными под углом 45–60° полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм в зависимости от размера узла (элемента) оборудования при

соотношении ширины полос желтого и черного цветов от 1:1 до 1,5:1,0.

Для строительно-дорожных машин и подъемно-транспортного оборудования, которые могут находиться на проезжей части, допускается применять предупреждающую окраску в виде чередующихся красных и белых полос.

Синий сигнальный цвет следует применять:

- для окрашивания светящихся (световых) сигнальных индикаторов и других сигнальных устройств указательного или разрешающего назначения;
- предписывающих и указательных знаков безопасности.

Зеленый сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения безопасности (безопасных мест, зон безопасного состояния);
- сигнальных ламп, извещающих о нормальном режиме работы оборудования, нормальном состоянии технологических процессов и т. п.;
- обозначения пути эвакуации;
- эвакуационных знаков безопасности и знаков безопасности медицинского и санитарного назначения.

Характеристики сигнальных и контрастных цветов.

Знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в поле зрения людей, для которых они предназначены.

Знаки безопасности должны быть расположены таким образом, чтобы они были хорошо видны, не отвлекали внимания и не создавали неудобств при выполнении людьми своей профессиональной или иной деятельности, не загораживали проход, проезд, не препятствовали перемещению грузов.

Знаки безопасности, размещенные на воротах и на (над) входных(ми) дверях(ми) помещений, означают, что зона действия этих знаков распространяется на всю территорию и площадь за воротами и дверями.

Размещение знаков безопасности на воротах и дверях следует выполнять таким образом, чтобы зрительное восприятие знака не зависело от положения

ворот или дверей (открыто, закрыто). Эвакуационные знаки безопасности Е 22 «Выход» и Е 23 «Запасный выход» должны размещаться только над дверями, ведущими к выходу.

Знаки безопасности, установленные у въезда (входа) на объект (участок), означают, что их действие распространяется на объект (участок) в целом.

При необходимости ограничить зону действия знака безопасности соответствующее указание следует приводить в поясняющей надписи на дополнительном знаке.

Знаки безопасности, изготовленные на основе несветящихся материалов, следует применять в условиях хорошего и достаточного освеще- ния.

Знаки безопасности с внешним или внутренним освещением следует применять в условиях отсутствия или недостаточного освещения.

Световозвращающие знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в местах, где отсутствует освещение или имеется низкий уровень фонового освещения (менее 20 лк по СНиП 23-05-95): при проведении работ с использованием индивидуальных источников света, фонарей (например, в туннелях, шахтах и т. п.), а также для обеспечения безопасности при проведении работ на дорогах, автомобильных трассах, в аэропортах и т. п.

Фотолюминесцентные знаки безопасности следует применять там, где возможно аварийное отключение источников света, а также в качестве элементов фотолюминесцентных эвакуационных систем для обеспечения самостоятельного выхода людей из опасных зон в случае возникновения аварий, пожара или других чрезвычайных ситуаций.

Для возбуждения фотолюминесцентного свечения знаков безопасности необходимо наличие в помещении, где они установлены, искусст- венного или естественного освещения.

Освещенность поверхности фотолюминесцентных знаков безопасности источниками света должна быть не менее 25 лк.

Основные и дополнительные знаки безопасности.

Основные знаки безопасности необходимо разделять на следующие группы: запрещающие знаки; предупреждающие знаки; знаки пожарной безопасности; предписывающие знаки; эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения; указательные знаки.

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности должны соответствовать приведенным в табл. 5.1

Таблица 5.1

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности

Группа	Геометрическая форма <*>	Сигнальный цвет	Смысловое значение
Запрещающие знаки	Круг с поперечной полосой	Красный	Запрещение опасного пове- дения или действия
Предупреждающие знаки	Треугольник	Желтый	Предупреждение о возмож- ной опасности. Осторож- ность. Внимание
Предписывающие знаки	Круг	Синий	Предписание обязательных действий во избежание опасности
Знаки пожарной безопасности <**>	Квадрат или прямоугольник	Красный	Обозначение и указание мест нахождения средств проти- вопожарной защиты, их эле- ментов
Эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения	Квадрат или прямоугольник	Зеленый	Обозначение направления движения при эвакуации. Спасение, первая помощь при авариях или пожарах. Надпись, информация для обеспечения безопасности
Указательные знаки	Квадрат или прямоугольник	Синий	Разрешение. Указание. Над- пись или информация

Примечание: <*> Рисунки не приводятся. <**> К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: P 01 «Запрещается курить», P 02 «Запрещается пользо- ваться открытым огнем», P 04 «Запрещается тушить водой», P 12 «Запрещается загромождать проходы (или) складировать» (табл. 5.2);

- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся ве- щества», W 02 «Взрывоопасно», W 11

«Пожароопасно. Окислитель» (табл. 5.3).

Таблица 5.2

Запрещающие знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 01		Запрещается курить	Использовать, когда курение мо- жет стать причиной пожара. На дверях и стенах помещений, уча- стках, где имеются горючие и лег- ковоспламеняющиеся вещества, или в помещениях, где курить запрещается
Р 02		Запрещается пользоваться открытым огнем и курить	Использовать, когда открытый огонь и курение могут стать при- чиной пожара. На входных дверях, стенах помещений, участках, ра- бочих местах, емкостях, производ- ственной таре
Р 03		Проход запрещен	У входа в опасные зоны, помеще- ния, участки и др.
Р 04		Запрещается тушить водой	В местах расположения электро- оборудования, складах и других местах, где нельзя применять воду при тушении горения или пожара
Р 05		Запрещается использовать в качестве питьевой воды	На техническом водопроводе и емкостях с технической водой, не- пригодной для питья и бытовых нужд
Р 06		Доступ посторонним запрещен	На дверях помещений, у входа на объекты, участки и т. п. для обо- значения запрета на вход (проход) в опасные зоны или для обозначе- ния служебного входа (прохода)

Продолжение таблицы 5.2

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 07		Запрещается движение средств наполь- ного транспорта	В местах, где запрещается применять средства напольного транс- порта (например, погрузчики или напольные транспортеры)
Р 08		Запрещается прикасаться. Опасно	На оборудовании (узлах оборудо- вания), дверцах, щитах или других поверхностях, прикосновение к которым опасно
Р 09		Запрещается прикасаться. Корпус под на- пряжением	На поверхности корпусов, щитов и т. п., где есть возможность пора- жения электрическим током
Р 10		Не включать!	На пультах управления и включе- ния оборудования или механизмов при ремонтных и пусконаладоч- ных работах
Р 11		Запрещается работа (присутствие) людей со стимуляторами сердечной деятельности	В местах и на оборудовании, где запрещено работать или находить- ся людям с вживленными стиму- ляторами сердечной деятельности
Р 12		Запрещается за- громождать про- ходы и (или) складировать	На пути эвакуации, у выходов, в местах размещения средств про- тивопожарной защиты, аптечек первой медицинской помощи и других местах
Р 13		Запрещается подъем (спуск) людей по шахтному стволу (запрещается транспортировка пассажиров)	На дверях грузовых лифтов и дру- гих подъемных механизмов

Продолжение табл. 5.2

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 14		Запрещается вход (проход) с животными	На воротах и дверях зданий, со- оружений, помещений, объектов, территорий и т. п., где не должны находиться животные, где запре- щен вход (проход) вместе с жи- вотными
Р 16		Запрещается работа (присутствие) людей, имеющих металлические имплантанты	На местах, участках и оборудова- нии, где запрещено работать или находиться людям с вживленными металлическими имплантантами
Р 17		Запрещается разбрызгивать воду	На местах и участках, где запре- щено разбрызгивать воду
Р 18		Запрещается пользоваться мобильным (сотовым) телефоном или переносной рацией	На дверях помещений, у входа на объекты, где запрещено пользоваться средствами связи, имею- щими собственные радиочастот- ные электромагнитные поля
Р 21		Запрещение (прочие опасности или опасные действия)	Применять для обозначения опасности, не предусмотренной настоящим стандартом. Знак необходимо использовать вместе с поясняющей надписью или с дополнительным знаком безопасности с поясняющей надписью
Р 27		Запрещается иметь при (на) себе металлические предметы (часы и т. п.)	При входе на объекты, на рабочих местах, оборудовании, приборах и т. п. Область применения знака может быть расширена
Р 30		Запрещается принимать пищу	На местах и участках работ с вредными для здоровья веществами, а также в местах, где прием пищи запрещен. Область применения знака может быть расшире- на

Окончание табл. 5.2

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 32		Запрещается подходить к элементам оборудования с маховыми движениями большой амплитуды	На оборудовании и рабочих местах по обслуживанию оборудования с элементами, выполняющими маховые движения большой амплитуды
Р 33		Запрещается брать руками. Сыпучая масса (непрочная упа- ковка)	На производственной таре, в складах и иных местах, где используют сыпучие материалы
Р 34		Запрещается пользоваться лифтом для подъема (спуска) людей	На дверях грузовых лифтов и других подъемных механизмах. Знак входит в состав группового знака безопасности «При пожаре лифтом не пользоваться, выходить по лестнице»

Таблица 5.3

Предупреждающие знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 01		Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся ве- щества	Использовать для привлечения внимания к помещениям с легковоспламеняющимися веществами. На входных дверях, дверцах шкафов, емкостях и т. д.

Продолжение табл.5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 02		Взрывоопасно	Использовать для привлечения внимания к взрыво- опасным веществам, а так- же к помещениям и участ- кам. На входных дверях, стенах помещений, дверцах шкафов и т. д.
W 03		Опасно. Ядовитые ве- щества	В местах хранения, выделения, производства и применения ядовитых веществ
W 04		Опасно. Едкие и корро- зионные вещества	В местах хранения, выде- ления, производства и применения едких и корро- зионных веществ
W 05		Опасно. Радиоактивные вещества или ионизи- рующее излучение	На дверях помещений, дверцах шкафов и в других местах, где находятся и применяются радиоактивные вещества или имеется ионизирующее излучение. Допускается применять знак радиационной опасно- сти по ГОСТ 17925
W 06		Опасно. Возможно падение груза	Вблизи опасных зон, где используется подъемно-транспортное оборудование
W 07		Внимание. Автопогруз- чик	В помещениях и на участках, где проводятся погрузочно-разгрузочные работы

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 08		Опасность поражения электрическим током	На опорах линий электропередачи, электрооборудовании и приборах, дверцах силовых щитков, на элек-тротехнических панелях и шкафах, а также на ограж- дениях токоведущих частей оборудования, механизмов, приборов
W 09		Внимание. Опасность (прочие опасности)	Применять для привлече- ния внимания к прочим ви- дам опасности, не обозна- ченной настоящим стан- дартом. Знак необходимо использовать вместе с дополнительным знаком безопасности с поясняю- щей надписью
W 10		Опасно. Лазерное излу- чение	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где имеет- ся лазерное излучение
W 11		Пожароопасно. Окисли- тель	На дверях помещений, дверцах шкафов для привлечения внимания на наличие окислителя

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 12		Внимание. Электромагнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют электромагнитные поля
W 13		Внимание. Магнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют магнитные поля
W 14		Осторожно. Малоза- метное препятствие	В местах, где имеются малозаметные препятствия, о которые можно споткнуться
W 15		Осторожно. Возможность падения с высоты	Перед входом на опасные участки и в местах, где возможно падение с высоты
W 16		Осторожно. Биологическая опасность (инфекционные вещества)	В местах хранения, производства или применения вредных для здоровья биологических веществ
W 17		Осторожно. Холод	На дверцах холодильников и морозильных камер, компрессорных агрегатах и других холодильных аппаратах
W 18		Осторожно. Вредные для здоровья аллергические (раздражающие) вещества	В местах хранения, произ- водства или применения вредных для здоровья аллергических (раздражающих) веществ

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 19		Газовый баллон	На газовых баллонах, скла- дах и участках хранения и применения сжатых или сжиженных газов. Цвет баллона черный или белый, выбирается по ГОСТ 19433
W 20		Осторожно. Аккумуля- торные батареи	В помещениях и на участках изготовления, хранения и применения аккумуля- торных батарей
W 22		Осторожно. Режущие валы	На участках работ и оборудовании, имеющем незащищенные режущие валы
W 23		Внимание. Опасность зажима	На дверцах турникетов и шлагбаумах
W 24		Осторожно. Возможно опрокидывание	На дорогах, рампах, складах, участках, где возможно опрокидывание внутризаводского транспорта
W 25		Внимание. Автоматическое включение (запуск) оборудования	На рабочих местах, оборудовании или отдельных узлах оборудования с автоматическим включением
W 26		Осторожно. Горячая поверхность	На рабочих местах и обо-рудовании, имеющем на-гретые поверхности

Окончание табл.5.3

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 27		Осторожно. Возможно травмирование рук	На оборудовании, узлах оборудования, крышках и дверцах, где возможно получить травму рук
W 28		Осторожно. Скользко	На территории и участках, где имеются скользкие места
29		Осторожно. Возможно затягивание между вращающимися элемен-тами	На рабочих местах и обо- рудовании, имеющем вра- щающиеся элементы, на- пример на валковых мель- ницах
W 30		Осторожно. Сужение проезда (прохода)	На территориях, участках, в цехах и складах, где имеются сужения прохода (проезда) или присутствуют выступающие конструкции, затрудняющие проход (проезд)

Таблица 5.4

Предписывающие знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по при- менению
M 01		Работать в защитных очках	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов зрения

Продолжение табл. 5.4

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 02		Работать в защитной каске (шлеме)	На рабочих местах и участках, где требуется защита головы
М 03		Работать в защитных наушниках	На рабочих местах и участках с повышенным уровнем шума
М 04		Работать в средствах индивидуальной защиты органов дыхания	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов дыхания
М 05		Работать в защитной обуви	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной защиты
М 06		Работать в защитных перчатках	На рабочих местах и участках работ, где требуется защита рук от воздействия вредных или агрессивных сред, защита от возможного поражения электрическим током
М07		Работать в защитной одежде	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной зашиты
М 08		Работать в защитном щитке	На рабочих местах и участках, где необходима защита лица и органов зрения

Продолжение табл. 5.4

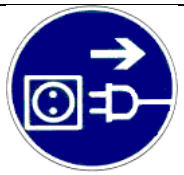
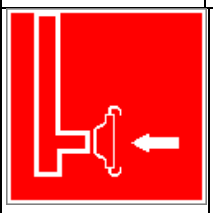
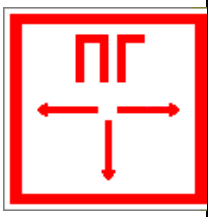
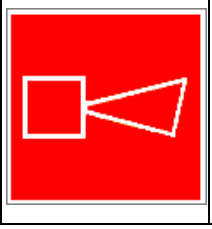
Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 09		Работать в предохранительном (страховочном) поясе	На рабочих местах и участках, где для безопасной работы требуется применение предохранительных (страховочных) поясов
М 10		Проход здесь	На территориях и участках, где разрешается проход
М 11		Общий предписывающий знак (прочие предписания)	Для предписаний, не обозначенных настоящим стандартом. Знак необходимо применять вместе с поясняющей надписью на дополнительном знаке безопасности
М 12		Переходить по надземному переходу	На участках и территориях, где установлены надземные переходы
М 13		Отключить штепсельную вилку	На рабочих местах и оборудовании, где требуется отключение от электросети при наладке или остановке электрооборудования и в других случаях
М 14		Отключить перед работой	На рабочих местах и оборудовании при проведении ремонтных или пусконаладочных работ
М 15		Курить здесь	Используется для обозначения места курения на производственных объектах

Таблица 5.5

Знаки пожарной безопасности

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установ- ки) и рекомендации по применению
F 01-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими знаками пожар- ной безопасности для указания направления движе- ния к месту нахождения (размещения) средства противопожарной зашиты
F 01-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими знаками пожарной безопасности для указания направления движения к месту нахождения (размещения) средства противопожарной защиты
F 02		Пожарный кран	В местах нахождения комплекта пожарного крана с пожарным рукавом и стволом
F 03		Пожарная лестница	В местах нахождения пожарной лестницы
F 04		Огнетушитель	В местах размещения огнетушителя
F 05		Телефон для использования при пожаре	В местах размещения телефона, по которому мож- но вызвать пожарную охрану

Продолжение табл. 5.5

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установ- ки) и рекомендации по применению
F 06		Место размещения нескольких средств противопожарной защиты	В местах одновременного нахождения (размещения) нескольких средств противопожарной защиты
F 07		Пожарный водоисточник	В местах нахождения пожарного водоема или пир- са для пожарных машин
F 08		Пожарный сухотрубный стояк	В местах нахождения пожарного сухотрубного стояка
F 09		Пожарный гидрант	У мест нахождения подземных пожарных гидран- тов. На знаке должны быть цифры, обозначающие расстояние от знака до гидранта в метрах
F 10		Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики	В местах ручного пуска установок пожарной сигна- лизации, пожаротушения и (или) систем противодым- ной защиты. В местах (пунктах) подачи сигнала пожарной тревоги
F 11		Звуковой оповещатель пожарной тревоги	В местах нахождения зву- кового оповещателя или совместно со знаком F 10 «Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики»

К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: Р 01 «Запрещается курить», Р 02 «Запрещается пользоваться открытым огнем», Р 04 «Запрещается тушить водой», Р 12 «Запрещается загромождать проходы и (или) складировать»;
- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества», W 02 «Взрывоопасно», W 11 «Пожароопасно. Окислитель»;
- эвакуационные знаки;

Таблица 5.6

Эвакуационные знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 01-01		Выход здесь (левосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с левой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуа- ционному выходу
Е 01-02		Выход здесь (правосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с правой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 02-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения

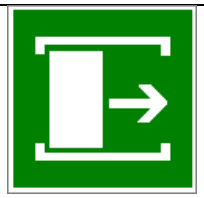
Продолжение табл.5.6

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 02-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения
Е 03		Направление к эвакуационному выходу на- право	На стенах помещений для указаниянаправления движения к эвакуационному выходу
Е 04		Направление к эвакуационному выходу налево	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 05		Направление к эвакуационному выходу направо вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 06		Направление к эвакуационному выходу нале- во вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плос- кости
Е 07		Направление к эвакуационному выходу на- право вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 08		Направление к эвакуационному выходу налево вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 09		Указатель двери эвакуа- ционного выхода	Над дверями эвакуацион- ных выходов

Продолжение табл. 5.6.

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
E 10		Указатель двери эвакуационного выхода (левосторонний)	Над дверями эвакуационных выходов
E 11		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или под- вешивается к потолку
E 12		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или подвешивается к потолку
E 13		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
E 14		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
E 15		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
E 16		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
E 17		Для доступа вскрыть здесь	На дверях, стенах помеще- ний и в других местах, где для доступа в помещение или выхода необходимо вскрыть определенную кон- струкцию, например раз- бить стеклянную панель

Продолжение табл. 5.6.

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
E 18		Открывать движением от себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
E 19		Открывать движением на себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
E 20		Для открывания сдви- нуть	На дверях помещений для обозначения действий по открыванию сдвижных две- рей
E 21		Пункт (место) сбора	На дверях, стенах помеще- ний и в других местах для обозначения заранее преду- смотренных пунктов (мест) сбора людей в случае воз- никновения пожара, аварии или другой чрезвычайной ситуации
E 22		Указатель выхода	Над дверями эвакуацион- ного выхода или в составе комбинированных знаков безопасности для указания направления движения к эвакуационному выходу
E 23		Указатель запасного выхода	Над дверями запасного выхода

Эвакуационные знаки следует устанавливать в положениях, соответствующих направлению движения к эвакуационному выходу.

Изображение графического символа фигуры человека в дверном проеме на эвакуационных знаках E 01-01 и E 01-02 смыслового значения

«Выход здесь» должно совпадать с направлением движения к эвакуационному выходу».

Таблица 5.7

Знаки медицинского и санитарного назначения

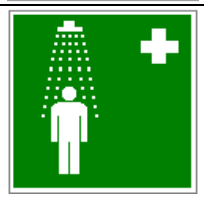
Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установ- ки) и рекомендации по при-менению
ЕС 01		Аптечка первой медицинской помощи	На стенах, дверях помещений для обозначения мест размещения аптечек первой медицинской помощи
ЕС 02		Средства выноса (эвакуации) пораженных	На дверях и стенах помещений в местах размеще- ния средств выноса (эва- куации) пораженных
ЕС 03		Пункт приема гигиенических процедур (душевые)	На дверях и стенах помещений в местах расположения душевых и т. п.
ЕС 04		Пункт обработки глаз	На дверях и стенах поме- щений в местах располо- жения пункта обработки глаз
ЕС 05		Медицинский кабинет	На дверях медицинских кабинетов
ЕС 06		Телефон связи с медицинским пунктом (скорой медицинской помощью)	В местах установки телефонов

Таблица 5.8.

Указательные знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по при- менению
D 01		Пункт(место) приема пищи	На дверях комнат приема пищи, буфетах, столовых, бытовых помещениях и в других местах, где разре- шается прием пиши
D 02		Питьевая вода	На дверях бытовых помещений и в местах распо- ложения кранов с водой, пригодной для питья и бы- товых нужд (туалеты, душевые, пункты приема пищи и т. д.)
D 03		Место курения	Используется для обозначения места курения на общественных объектах

Порядок выполнения работы

1. Изучить выдержку из ГОСТ Р 12.4.026–01.

2. Проверить усвоение материала, ответив на контрольные вопросы:

В какой цвет окрашено поле предупреждающего знака?

Какой размер имеет сторона треугольника предупреждающего знака № 4, наносимого на тару и оборудование?

Какой цвет имеет символическое изображение на запрещающем знаке?

Какую форму имеет предписывающий знак?

Какую форму имеет запрещающий знак?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 45 м. Какой размер должен иметь внешний диаметр круга запрещающего знака, мм?

Какой цвет имеют символические изображения или поясняю- щие надписи, наносимые на указательные знаки?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 60 м. Какие размеры

(стороны прямоугольника) должен иметь указательный знак, мм?

Какой цвет имеет квадрат, помещенный внутри указательного знака?

Какой размер имеет внешний диаметр круга запрещающего знака № 5, наносимого на производственное оборудование и тару?

3. Составить отчет. Отчет должен включать:

- цель практической работы;
- ответы на вопросы задания;
- зарисовку формы знаков (запрещающего, предупреждающего, предписывающего, указательного) с указанием цвета поля, символов, надпи- сей.

4. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 12.4.026–01. Цвета сигнальные, знаки безопасности и разметка сигнальная. Назначение, правила применения. Общие технические требования и реко- мендации. Методы испытания [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-поисковой системы «Техэксперт».

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6. РАССЛЕДОВАНИЕ И УЧЕТ НЕСЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Цель задания - ознакомиться с понятием и причинами возникновения несчастных случаев, порядком их расследования и учет на производстве, также с методами анализа травматизма.

Порядок выполнения задания:

а) изучить и законспектировать общие сведения по пункту 1;

б) изучить методы анализа и рассчитать по вариантам показатели травматизма по пункту 2 (см контр. вопросы к пунктам 1 и 2);

в)изучить «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях» и законспектировать ответы на контрольные вопросы к пункту 3.

Общие сведения о несчастных случаях.

Несчастным случаем на производстве называют случай воздействия на работающего опасного производственного фактора при выполнении работающим трудовых обязанностей или заданий руководителя работы [1].

Повреждение здоровья в результате несчастного случая называют **травмой**. Травма, полученная работающим на производстве, называется **производственной**.

Опасным называют производственный фактор, воздействие которого при определенных условиях на работающего приводит к травме или другому внезапному ухудшению здоровья.

Вредным называют производственный фактор, воздействие которого на работающего приводит к заболеваниям или снижению его трудоспособности. В зависимости от уровня и продолжительности воздействия вредный производственный фактор может стать опасным.

Опасные и вредные производственные факторы (ОВПФ) по природе действия подразделяют на 4 группы: физические, химические, биологические и психофизиологические.

Производственные травмы в зависимости от характера воздействующих факторов подразделяются на:

а) механические повреждения (ушибы, ранения, вывихи, переломы, сотрясения мозга);

б) поражение электрическим током (электроудар, электротравма);

в) термические повреждения (ожоги пламенем, нагретыми частями оборудования, горячей водой и пр.);

г) химические повреждения (ожоги, острые отравления);

д) комбинированные повреждения (сочетание нескольких опасных факторов).

Производственные травмы по тяжести подразделяются на 6 категорий:

- микротравма (после оказания помощи можно продолжать работу).
- легкая травма (потеря трудоспособности на 1 или несколько дней).
- травма средней тяжести (многодневная потеря трудоспособности);
- тяжелая травма (когда требуется длительное лечение);
- травма, приводящая к инвалидности (частичная или полная утрата трудоспособно-сти);
- смертельная травма.

Причины возникновения производственных травм:

- организационные (нарушение технологического процесса и требований техники безопасности (ТБ), неправильная организация рабочего места и режима труда);
- технические (техническое несовершенство оборудования, неисправность механизмов, отсутствие или не использование защитных средств);

- санитарно-гигиенические (несоответствие условий труда требованиям КЗоТ, системе стандартов по безопасности труда (ССБТ), санитарным нормам(СН), строительным нормам и правилам (СНиП) и др.
- психофизиологические (неудовлетворительное состояние здоровья, переутомление, стресс, опьянение и др.).

Методы анализа показателей травматизма

Разработке мероприятий по улучшению условий труда предшествует необходимый этап - исследование и анализ причин травматизма. Для анализа состояния производственного травматизма применяют методы: статистический, экономический, монографический и топографический.

Статистический метод позволяет количественно оценить повторяемость несчастных случаев по ряду относительных коэффициентов. В результате сравнения полученных коэффициентов за отчетный период с предшествующим периодом можно оценить эффективность профилактических мер. Обычно при этом методе анализа несчастные случаи группируются по однородным признакам: профессиям, видам работ, возрасту, стажу работ, причинам, вызвавшим травму. Простота и наглядность являются несомненным достоинством этого метода. Однако у него есть и недостаток - он не выявляет опасные произ-водственные факторы. Среди основных показателей травматизма, используемых при статистическом методе анализа, являются:

а) коэффициент частоты травматизма - число пострадавших при несчастных случаях за отчетный период на 1ООО работающих, определяется по формуле:

$$K_{\text{ч}} = T_x \cdot \frac{1000}{P_c},$$

где Кч - коэффициент частоты травматизма; Т - число учтенных травм с потерей трудоспособности; Рс - среднесписочное число работающих за отчетный период.

б) коэффициент тяжести травматизма - число человеко-дней нетрудоспособно-сти, которое приходится на один несчастный случай и определяется по формуле:

$$К_Т = \frac{Д}{Т},$$

где Кт - коэффициент тяжести травматизма; Д - общее количество дней нетрудоспособности за отчетный период; Т - количество учтенных травм.

в) коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев

- показывает через сколько рабочих дней в среднем повторяются несчастные случаи и оп-ределяется по формуле:

$$В = 22{,}5 \cdot \frac{12}{Т},$$

где В - календарная повторяемость несчастных случаев; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

г) коэффициент средней повторяемости - показывает на сколько человекодней приходится один несчастный случай, определяется по формуле:

$$B_{ср} = 22{,}5 \cdot 12 \cdot \frac{P_c}{T},$$

где Вср - коэффициент средней повторяемости несчастных случаев; Рс - среднесписочное число работающих за отчетный период; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

д) коэффициент опасности работ - характеризуется тяжестью и частотой несчастных случаев, определяется по формуле:

$$О_р = К_Т \cdot Т_х \cdot \frac{100}{Р_с \cdot М \cdot 22{,}5},$$

где Ор - коэффициент опасности работ; Кт - коэффициент тяжести травматизма ; Т - количество учтенных несчастных случаев; Рс - среднесписочное число работающих; М - число месяцев в отчетном периоде.

Таблица 5.0

Исходные данные для расчета показателей травматизма

Показатели	Варианты									
										0

Отчетный период, мес. (М)				2				2		
Число несчастных случаев (Т)				0				1		
Число дней нетрудоспособности (Д)	80	00	80	20	00	50	70	20	60	00
Средне списочное числоработающих (Рс)	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Экономический метод анализа производственного травматизма позволяет оценить эффективность финансовых затрат на профилактику травматизма с расходами на органи-зационные и технические мероприятия. Для более полной и глубокой характеристики травматизма экономический метод часто используют в сочетании с монографическим методом.

Монографический метод анализа травматизма состоит в углубленном и всестороннем изучении отдельного производства, цеха или участка. Он включает описание технологического процесса, оборудования и особенностей технологического регламента, описание опасных зон на рабочих местах, также санитарно-гигиенические условия труда. При этом обращается внимание на наличие защитных приспособлений, ограждений и травмоопасных ситуаций Монографический метод анализа травматизма характеризуется полнотой, но трудоемок. Этот метод позволяет выявить потенциальную

опасность не только в действующих производствах, но и на этапе проектирования, тем самым исключить причины травматизма.

Топографический метод анализа травматизма проводится по месту происшествия. При этом все несчастные случаи условными знаками наносятся на план производственного участка или схему механизма в тех местах, где они произошли. В результате этого выявляются опасные зоны, требующие соответствующих защитных мер и особого внимания.

Контрольные вопросы к пунктам 1 и 2

1. Что такое несчастный случай?
2. Что такое опасный производственный фактор?
3. Что такое вредный производственный фактор?
4. На какие группы подразделяются опасные и вредные производственные факторы?
5. Какие различают разновидности производственных травм?
6. Какие выделяют категории производственных травм?
7. Каковы основные причины возникновения производственных травм?
8. Какие существуют методы анализа производственного травматизма ?
9. В чем заключается статистический метод анализа производственного травматизма?
10. Как определяется коэффициент частоты травматизма?
11. Как определяется коэффициент тяжести травматизма?
12. Как определяется коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев?
13. Как определяется коэффициент средней повторяемости несчастных случаев?
14. Как определяется коэффициент опасности работ?
15. В чем заключается экономический метод анализа производственного травматизма?

16. В чем заключается монографический метод анализа производственного травматизма?

17. В чем заключается топографический метод анализа производственного травматизма?

Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях

Расследование и учет несчастных случаев на производстве проводят в соответствии с “Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях”, утвержденного Постановлением Министерства труда и социального раз-вития Российской Федерации от 24 октября 2002г. №73, а также статьями 227-231 Трудового кодекса РФ (ТК РФ).

Несчастный случай на производстве - это случай, происшедший с работающим вследствие воздействия опасного производственного фактора (для застрахованного – это страховой случай).

Несчастные случаи в зависимости от причин, места и времени происшествия делятся на две группы: несчастные случаи, связанные с работой и несчастные случаи, не связанные с работой (бытовые травмы).

Несчастные случаи, не связанные с производством, но происшедшие на производстве - это несчастные случаи, происшедшие при изготовлении предметов в личных целях, самовольном использовании транспорта предприятия, участии в спортивных мероприятиях на территории предприятия, при хищении имущества предприятия.

Бытовые несчастные случаи - это несчастные случаи, происшедшие в быту (дома) или при нахождении на предприятии вне рабочего времени.

Расследование несчастных случаев на производстве выполняется в соответствии с Трудовым кодексом РФ и «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях», утверждённым постановлением Минтруда России № 73 от 24

октября 2002 года. Этим же постановлением утверждены формы документов, необходимых для расследования и учёта несчастных случаев на производстве.

Расследование несчастного случая может быть достаточно сложным процессом, поскольку интересы пострадавшего и работодателя часто не совпадают.

Действие нормативных актов по расследованию и учёту несчастных случаев на производстве распространяется на:

- работодателей - физических лиц, вступивших в трудовые отношения с работниками;
- уполномоченных работодателем лиц (представители работодателя);
- физических лиц, осуществляющих руководство организацией (руководители организации);
- физических лиц, состоящих в трудовых отношениях с работодателем;
- других лиц, участвующих с ведома работодателя в его производственной деятельности своим личным трудом, правоотношения которых не предполагают заключения трудовых договоров.

Расследованию подлежат травмы, в том числе причиненные другими лицами, включая:

- тепловой удар, ожог, обморожение;
- утопление; поражение электрическим током или молнией;
- укусы, нанесенные животными и насекомыми;
- повреждения, полученные в результате взрывов, аварий и т.п.

Расследованию и учёту подлежат несчастные случаи происшедшие:

- при исполнении трудовых обязанностей, в том числе во время коман-дировки, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций;
- на территории организации, в течение рабочего времени, в том числе во время следования на работу и с работы, а также в течение вре-мени, необходимого для приведения в порядок рабочего места;

- при следовании на работу или с работы на транспортном средстве работодателя, а также на личном транспортном средстве при использовании его в производственных целях;
- во время служебных поездок на общественном транспорте, а также при следовании по заданию работодателя к месту выполнения работ и обратно, в том числе пешком;
- при следовании к месту служебной командировки и обратно;
- при следовании на транспортном средстве в качестве сменщика во время междусменного отдыха;
- во время междусменного отдыха при работе вахтовым методом;
- при привлечении к участию в ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций.

Работники организации обязаны незамедлительно извещать руководство о каждом происшедшем несчастном случае, об ухудшении состояния своего здоровья в связи с проявлениями признаков острого заболевания.

О каждом страховом случае работодатель в течение суток обязан сообщить страховщику (фонд социального страхования).

О групповом несчастном случае (пострадало два и более человек), тяжёлом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом, работодатель в течение суток обязан направить извещение соответственно:

1) о несчастном случае, происшедшем в организации:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту происшествия несчастного случая;
- в федеральный орган исполнительной власти по ведомственной принадлежности;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в организацию, направившую работника, с которым произошел несчастный случай;
- в территориальные объединения организаций профсоюзов;

- в территориальный орган государственного надзора, если несчастный случай произошел в организации (объекте), подконтрольной этому органу;
- страховщику.

2) о несчастном случае, происшедшем у работодателя - физического лица:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту нахождения работодателя - физического лица;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в территориальный орган государственного надзора, если несчастный случай произошел на объекте, подконтрольном этому органу;
- страховщику.

О групповых несчастных случаях, тяжелых несчастных случаях и несчастных случаях со смертельным исходом также информируется Федеральная инспекция труда Минтруда России.

Если указанные несчастные случаи, произошли в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты, то соответствующим образом информируются специально уполномоченные органы государственного надзора.

Для расследования несчастного случая на производстве в организации работодатель незамедлительно создает комиссию в составе не менее трех человек. Во всех случаях состав комиссии должен состоять из нечетного числа членов.

В состав комиссии включаются специалист по охране труда организации, представители работодателя, представители профсоюзного органа (коллектива), уполномоченный (доверенный) по охране труда. Комиссию возглавляет работодатель или уполномоченный им представитель. Состав комиссии утверждается приказом работодателя. Руководитель, непосредственно

отвечающий за безопасность труда на участке, где произошел несчастный случай, в состав комиссии не включается.

В расследовании несчастного случая на производстве у работодателя - физического лица принимают участие указанный работодатель или уполномоченный его представитель, доверенное лицо пострадавшего, специалист по охране труда, который может привлекаться к расследованию несчастного случая и на договорной основе.

Несчастный случай на производстве, происшедший с лицом, направленным для выполнения работ к другому работодателю, расследуется комиссией, образованной работодателем, у которого произошел несчастный случай. В состав данной комиссии входит уполномоченный представитель работодателя, направившего это лицо.

Несчастные случаи, происшедшие на территории организации с работниками сторонних организаций при исполнении ими задания направившего их работодателя, расследуются комиссией, формируемой этим работодателем.

Несчастные случаи, происшедшие с работниками при выполнении работы по совместительству, расследуются комиссией, формируемой работодателем, у которого фактически производилась работа по совместительству.

Расследование несчастных случаев со студентами, проходящими производственную практику (выполняющими работу под руководством работодателя), проводится комиссиями, формируемыми и возглавляемыми этим работодателем. В состав комиссии включаются представители образовательного учреждения.

Для расследования группового несчастного случая, тяжёлого несчастного случая и несчастного случая со смертельным исходом в комиссию дополнительно включаются:

- государственный инспектор труда, представители органа исполнительной власти субъекта РФ или органа местного самоуправления (по

согласованию), представитель территориального объединения профсоюзов. Возглавляет комиссию государственный инспектор труда;

- по требованию пострадавшего (или его родственников) в расследовании несчастного случая может принимать участие его доверенное лицо;
- в случае острого отравления или радиационного воздействия, превысившего установленные нормы, в состав комиссии включается также представитель территориального центра государственного санитарно-эпидемиологического надзора;
- при несчастном случае, происшедшем в организациях на объектах, подконтрольных территориальным органам Федерального горного и промышленного надзора России, состав комиссии утверждается руководителем соответствующего территориального органа и возглавляет комиссию представитель этого органа;
- при групповом несчастном случае с числом погибших 5 и более человек в состав комиссии включаются также представители Федеральной инспекции труда, федерального органа исполнительной власти по ведомственной принадлежности и общероссийского объединения профсоюзов. Председателем комиссии является главный государственный инспектор труда по субъекту Российской Федерации, а на объектах, подконтрольных территориальному органу Федерального горного и промышленного надзора России, - руководитель этого территориального органа.

При крупных авариях с человеческими жертвами 15 и более человек расследование проводится комиссией, назначаемой Правительством России.

Расследование несчастных случаев (в том числе групповых), в результате которых пострадавшие получили повреждения, отнесенные в соответствии с установленными квалифицирующими признаками к категории легких, проводится в течение трех дней.

Расследование иных несчастных случаев проводится в течение 15 дней. В некоторых случаях председатель комиссии может продлить срок

расследования, но не более чем на 15 дней. Несчастные случаи, о которых не было своевременно сообщено работодателю или в результате которых нетрудоспособность наступила не сразу, расследуются по заявлению пострадавшего в течение месяца.

Тяжелые несчастные случаи и несчастные случаи со смертельным исходом, происшедшие с лицами, выполнявшими работу на основе договора гражданско-правового характера, расследуются в установленном порядке государственными инспекторами труда на основании заявления пострадавшего (доверенного лица, членов его семьи).

В ходе расследования несчастного случая комиссия производит осмотр места происшествия, выявляет и опрашивает очевидцев несчастного случая и должностных лиц, знакомится с действующими в организации нормативными и распорядительными документами, по возможности получает объяснения от пострадавшего.

Расследуются в установленном порядке и по решению комиссии могут квалифицироваться как не связанные с производством:

- смерть вследствие общего заболевания или самоубийства;
- смерть или иное повреждение здоровья, единственной причиной которых явилось алкогольное, наркотическое или иное токсическое опьянение (отравление) работника;
- несчастный случай, происшедший при совершении пострадавшим действий, квалифицированных правоохранительными органами как уголовное правонарушение.

При поступлении жалобы пострадавшего, выявлении сокрытого несчастного случая, установления нарушений порядка расследования и в некоторых иных случаях, государственный инспектор труда, независимо от срока давности несчастного случая, проводит дополнительное расследование.

Несчастные случаи, квалифицированные, как несчастные случаи на производстве, подлежат оформлению актом о несчастном случае на производстве по форме Н-1*.

Акт формы Н-1 составляется комиссией в двух экземплярах. При несчастном случае на производстве с застрахованным работником составляется дополнительный экземпляр акта формы Н-1.

При групповом несчастном случае на производстве акты формы Н-1 составляются на каждого пострадавшего отдельно.

В случае установления факта грубой неосторожности застрахованного работника, содействовавшей возникновению или увеличению размера вреда, причиненного его здоровью, в акте расследования указывается степень его вины в процентах, с учетом заключения профсоюзного или иного уполномоченного застрахованным представительного органа данной организации (не более 25%).

По результатам расследования каждого группового несчастного случая, тяжелого несчастного случая или несчастного случая со смертельным исхо-дом составляется соответствующий акт в двух экземплярах.

Работодатель в трехдневный срок после завершения расследования несчастного случая на производстве обязан выдать пострадавшему один экземпляр утвержденного им и заверенного печатью акта формы Н-1. Вторые экземпляры акта с копиями материалов расследования хранятся в течение 45 лет работодателем.

При страховых случаях третий экземпляр утвержденного и заверенного печатью акта формы Н-1 работодатель направляет страховщику.

Каждый оформленный в установленном порядке несчастный случай на производстве регистрируются работодателем в журнале регистрации несчастных случаев на производстве и включаются в годовую форму федерального государственного статистического наблюдения за травматизмом на производстве.

В случае ликвидации организации или прекращения работодателем - физическим лицом предпринимательской деятельности оригиналы актов о расследовании несчастных случаев на производстве подлежат передаче на хранение правопреемнику, а при его отсутствии - соответствующему государственному органу.

Государственный надзор и контроль за соблюдением установленного порядка расследования, оформления и учета несчастных случаев на производстве осуществляется органами Федеральной инспекции труда.

Контрольные вопросы к пункту 3

1. Какие несчастные случаи считаются связанными с производством и подлежат расследованию и учету?
2. На кого распространяется действие Положения о порядке расследования и учета несчастных случаев?
3. Как должен действовать работодатель при возникновении несчастного случая на предприятии?
4. Что необходимо сделать сразу же после свершения несчастного случая на произ-водстве?
5. Куда должен сообщить работодатель и в какие сроки о групповом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом?
6. Кто несет ответственность за организацию и своевременное расследование и уче-та несчастных случаев?
7. Кто входит в комиссию по расследованию несчастных случаев, каковы ее обязанности?
8. В какие сроки должно быть проведено расследование несчастного случая?
9. Какие несчастные случаи квалифицируются как не связанные с производством?
10. Что делают при установлении грубой неосторожности пострадавшего?
11. В какие сроки и комиссией какого состава расследуются групповые несчастные случаи или со смертельным исходом?
12. Какие условия должен обеспечить работодатель для работы комиссии, проводя-щей расследование несчастного случая?
13. Каким документом оформляются несчастные случаи на производстве?

14. Какой организацией учитывается акт о несчастном случае?

15. В какие сроки и куда должны быть отправлены материалы расследования групповых несчастных случаев?

16. Какие организации и должностные лица разбирают разногласия при оформлении актов по форме Н - 1 ?

17. Каковы полномочия государственного инспектора по охране труда в случае нарушения порядка расследования несчастного случая?

Форма Н-1

Один экземпляр направляется
пострадавшему или его
доверенному лицу

УТВЕРЖДАЮ

_____
(подпись, фамилия, инициалы
работодателя
(его представителя))
"__" _____ 200_ г.

Печать

АКТ N ____
О НЕСЧАСТНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

1. Дата и время несчастного случая _____
_____
(число, месяц, год и время происшествия
несчастного случая,

_____
количество полных часов от начала работы)
2. Организация (работодатель), работником которой является
(являлся) пострадавший _____
(наименование, место нахождения,
юридический адрес, ведомственная
и отраслевая

_____
принадлежность (ОКОНХ основного вида деятельности);
фамилия, инициалы работодателя -

_____
физического лица)
Наименование структурного подразделения _____
_____
3. Организация, направившая работника _____
_____
(наименование, место нахождения, юридический адрес,
отраслевая принадлежность)
4. Лица, проводившие расследование несчастного случая:
_____
(фамилия, инициалы, должности и место работы)
_____
5. Сведения о пострадавшем:
фамилия, имя, отчество _____
пол (мужской, женский) _____
дата рождения _____
профессиональный статус _____
профессия (должность) _____
стаж работы, при выполнении которой произошел несчастный случай
_____,
(число полных лет и месяцев)
в том числе в данной организации _____
(число полных лет и месяцев)
6. Сведения о проведении инструктажей и обучения по охране труда
Вводный инструктаж _____
(число, месяц, год)
Инструктаж на рабочем месте (первичный, повторный, внеплановый,

---------- -------
(нужное подчеркнуть)
целевой)

по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____
(число, месяц, год)
Стажировка: с "__" _____ 200_ г. по "__" _____ 200_ г.
_____
(если не проводилась - указать)
Обучение по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай: с "__" _____ 200_ г. по "__" _____ 200_ г. _____
(если не проводилось - указать)
Проверка знаний по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____
(число, месяц, год, N протокола)
7. Краткая характеристика места (объекта), где произошел несчастный случай
_____
(краткое описание места происшествия с указанием опасных и (или) вредных производственных
_____
факторов со ссылкой на сведения, содержащиеся в протоколе осмотра места несчастного случая)
_____
Оборудование, использование которого привело к несчастному случаю
_____
(наименование, тип, марка, год выпуска, организация - изготовитель)
8. Обстоятельства несчастного случая
_____
(краткое изложение обстоятельств, предшествовавших несчастному случаю, описание событий
_____
и действий пострадавшего и других лиц, связанных с несчастным случаем, и другие сведения,
_____
установленные в ходе расследования)
_____
_____
_____
8.1. Вид происшествия _____
_____
8.2. Характер полученных повреждений и орган, подвергшийся повреждению, медицинское заключение о тяжести повреждения здоровья
_____
8.3. Нахождение пострадавшего в состоянии алкогольного или наркотического опьянения _____
(нет, да - указать состояние и степень опьянения в соответствии с заключением по
_____
результатам освидетельствования, проведенного в установленном порядке)
8.4. Очевидцы несчастного случая _____
_____
(фамилия, инициалы, постоянное место жительства,

домашний телефон)
9. Причины несчастного случая _____
(указать основную
и сопутствующие причины
_____
несчастного случая со ссылками на нарушенные требования
законодательных и иных
_____
нормативных правовых актов, локальных нормативных актов)
_____
_____
_____
_____
10. Лица, допустившие нарушение требований охраны труда:
_____
(фамилия, инициалы, должность (профессия) с указанием
требований законодательных,
_____
иных нормативных правовых и локальных нормативных актов,
предусматривающих их
_____
ответственность за нарушения, явившиеся причинами
несчастного случая, указанными в п. 9
_____
настоящего акта; при установлении факта грубой
неосторожности пострадавшего указать
_____
степень его вины в процентах)
_____
Организация (работодатель), работниками которой являются данные
лица
_____
(наименование, адрес)
11. Мероприятия по устранению причин несчастного случая, сроки
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Подписи лиц, проводивших
расследование несчастного случая _____
(фамилии, инициалы, дата)
_____

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 12.О.ОО2 - 8О. Термины и определения.
2. Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях
3. И.М.Чижевский, Г.Б.Куликов, Ю.А.Сидорин. Охран труда в полиграфии. М., 1988.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7. СРЕДСТВА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ОРГАНОВ ДЫХАНИЯ

Цель работы – ознакомиться со средствами защиты органов ды- хания и получить практические навыки их использования.

Теоретические положения

Средства индивидуальной защиты (СИЗ) предназначены для защиты человека от попадания внутрь организма, на кожные покровы и повседневную одежду радиоактивных веществ (РВ), отравляющих веществ (ОВ) и бактериальных средств (БС).

По принципу применения средства индивидуальной защиты делятся:

– на средства защиты повседневного применения (промышленные СИЗ);

– средства защиты эпизодического применения (СИЗ для аварийных работ и пострадавших в очагах ЧС).

По объектам защиты средства индивидуальной защиты делятся:

– на средства защиты органов дыхания;

– средства защиты кожи.

По принципу действия средства индивидуальной защиты делятся:

– на фильтрующие (принцип фильтрации состоит в том, что воздух, необходимый для поддержания жизнедеятельности организма человека, очищается от вредных примесей при прохождении через средство защиты);

– изолирующие (средства защиты изолирующего типа полностью изолируют организм человека от окружающей среды с помощью материалов, непроницаемых для воздуха и вредных примесей).

По способу подачи воздуха различают средства индивидуальной

защиты делятся:

– с принудительной подачей воздуха;

– самовсасывающие.

По кратности использования средства индивидуальной защиты

- на СИЗ многократного использования;

- СИЗ однократного использования.

По способу изготовления средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства, изготовленные промышленностью;

- простейшие средства, изготовленные из подручных материалов. Кроме средств индивидуальной защиты существуют медицинские средства защиты [1].

Средства защиты органов дыхания.

Фильтрующий противогаз.

Фильтрующий противогаз предназначен для защиты органов дыхания, глаз, кожи лица от воздействия ОВ, РВ, БС, (АХОВ), а также различных вредных примесей, присутствующих в воздухе.

В настоящее время имеются фильтрующие гражданские противогазы различной модификации и промышленные противогазы.

Для защиты населения наибольшее распространение получили фильтрующие противогазы: для взрослого населения – ГП-5 (ГП-5М), ГП-7 (ГП-7В); для детей – ПДФ-Ш, ПДФ-Д, ПДФ-2Ш, ПДФ-2Д, КЗД.

Гражданский противогаз (ГП-5). В состав комплекта входят два основных элемента: фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5 и лицевая часть ШМ-62у. Шлем-маска имеет 5 ростов (0, 1, 2, 3, 4). Кроме того, противогаз комплектуется сумкой, наружными утеплительными манжетами (НМУ-1) и коробкой с незапотевающими пленками (рис. 9.1) [2]. У него нет соединительной трубки.

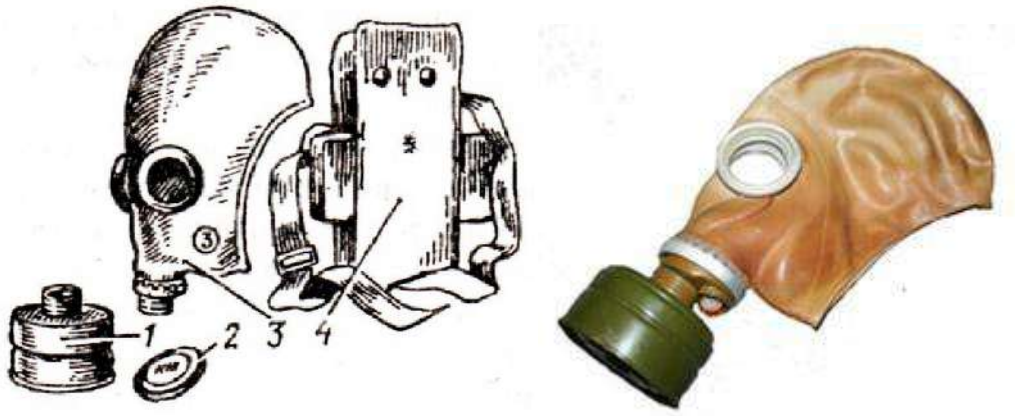


Рис. 7.1 Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-5):

1 – фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5; 2 - коробка с незапотевающими пленками; 3 – лицевая часть ШМ-62у; 4 – сумка

Внутри фильтрующе-поглощающей коробки ГП-5 расположены противоаэрозольный фильтр и шихта. Лицевая часть ШМ-62у представляет собой шлем-маску, изготовленную на основе резины из натурального или синтетического каучука. В шлем-маску вмонтированы очковый узел и клапанная коробка. Клапанная коробка имеет один вдыхательный и два выдыхательных клапана и служит для распределения потоков воздуха. Незапотевающие пленки изготавливаются из целлюлозы и бывают односторонние (НП) и двусторонние (НПН). Они устанавливаются с внутренней стороны стекол противогаза желатиновым покрытием к глазам и фиксируются прижимными кольцами. Желатин равномерно впитывает конденсированную влагу, тем самым сохраняя прозрачность пленки.

Комплект из 6 пленок упакован в металлическую коробку. Утеплительные манжеты используются только зимой при температуре ниже –10 ^{o}С. Манжета надевается на обойму очков с внешней стороны. Пространство между стеклами манжет и очков предохраняет очки шлем- маски от замерзания.

Гражданский противогаз (ГП-5М). В комплект противогаза входит шлем-маска (ШМ-66Му) с мембранной коробкой для переговорного устройства. В лицевой части сделаны сквозные вырезы для ушных раковин, что обеспечивает нормальную слышимость.

Подгонка противогаза начинается с определения требуемого роста лицевой части. Рост лицевой части типа ШМ-62у, ШМ-66Му определяется по величине вертикального обхвата головы путем ее измерения по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляют до 0,5 см. До 63 см берут нулевой рост, от 63,5 до 65,5 см – первый, от 66 до 68 см – второй, от 68,5 до 70,5 см – третий, от 71 см и более – четвертый.

Перед применением противогаз следует проверить на исправность и герметичность. Осматривая лицевую часть, следует определить ее целостность, обратив внимание на стекла очкового узла. После этого нуж- но проверить клапанную коробку, состояние клапанов. Они не должны быть покороблены, засорены или порваны. На фильтрующе-поглощающей коробке не должно быть вмятин, проколов, в горловине – повреждений. Обращается внимание на то, чтобы в коробке не пересыпались зерна поглотителя.

Наиболее совершенными в настоящее время являются противогазы ГП-7 и ГП-7В. Их основными отличиями являются: более совершенная конструкция и форма шлем-маски, обеспечивающая возможность безопасного приема воды, жидких лекарств, других жидкостей в зараженной зоне без снятия маски. Наличие в комплекте фильтрующе-поглощающих коробок обеспечивает защиту от конкретных видов твердых химических веществ (ТХВ), а также увеличенные сроки работоспособности. Ростовка лицевой части предусматривает три размера. Как и другие типы противогазов, они состоят из фильтрующе- поглощающей коробки и лицевой части.

Гражданский противогаз (ГП-7). В комплект противогаза входят фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к, лицевая часть в виде маски МГП, сумка, защитный трикотажный чехол, коробка с незапотевающими пленками, утеплительные манжеты. Его масса в комплекте без сумки – около 900 г (фильтрующе-поглощающая коробка – 250 г, лицевая часть – 600 г).

Фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к по конструкции аналогична коробке ГП-5, но с улучшенными характеристиками, уменьшено ее сопротивление, что облегчает дыхание. Лицевая часть МГП представляет собой маску объемного типа с «независимым» обтюратором, с наголовником (предназначен для закрепления лицевой части) в виде резиновой пластины с пятью лямками (лобная, две височные, две щечные), с очковым узлом, переговорным устройством (мембраной), узлами клапана вдоха и выдоха, прижимными кольцами для закрепления незапотевающих пленок (рис. 9.2) [2]. «Независимый» обтюратор представляет собой полосу тонкой резины и служит для создания надежной герметизации лицевой части на голове. При этом механическое воздействие лицевой части на голову очень незначительно. На каждой лямке с интервалом в 1 см нанесены упоры ступенчатого типа, которые предназначены для надежного закрепления их в пряжках. У каждого упора имеется цифра, указывающая его порядковый номер. Это позволяет точно фиксировать нужное положение лямок при подгонке маски. Нумерация цифр идет от свободного конца лямки к затылочной пластине. Гидрофобный трикотажный чехол надевается на фильтрующе-поглощающую коробку и предохраняет ее от заражения, снега, пыли и влаги.

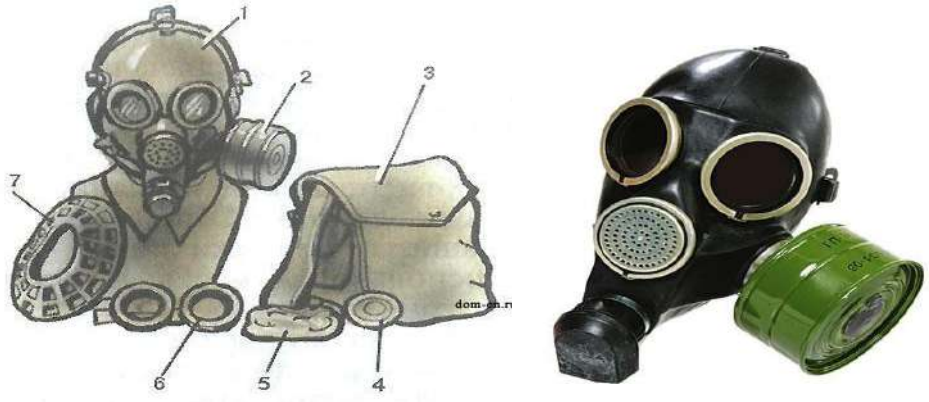


Рис. 7.2. Противогаз ГП-7:

1 – лицевая часть; *2* – фильтрующе-поглощающая коробка; *3* – сумка; *4* – коробка с незапотевающими пленками; *5* – трикотажный чехол; *6* – утеплительные манжеты

Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-7, ГП-7В, ГП-7ВМ) – это

одна из самых последних и совершенных моделей противогазов для населения. В реальных условиях он обеспечивают высокую защиту от паров отравляющих веществ нервнопаралитического действия (типа зарин, зоман и др.), общеядовитого действия (хлорциан, синильная кислота и др.), радиоактивных веществ (радионуклидов йода и его органических соедине- ний (типа йодистый метил и др.)); от капель отравляющих веществ кожно- нарывного действия (иприт и др.), бактериальных, аварийных химически опасных веществ (АХОВ). ГП-7 имеет малое сопротивление дыханию, обеспечивает надежную герметизацию и небольшое давление лицевой час- ти на голову. Благодаря этому им могут пользоваться люди старше 60 лет и больные с легочными и сердечно-сосудистыми заболеваниями. Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основа- нии результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы.

Правила определения размера противогаза.

Для определения размера противогаза нужно знать горизонталь- ный и вертикальный обхват головы. Горизонтальный обхват измеряется по замкнутой линии, которая проходит спереди по надбровным дугам, сбоку чуть выше (на 2–3 см) ушной раковины и сзади по наиболее выступающей части головы. А вертикальный обхват можно определить посредством из- мерения длины вертикальной линии, проходящей через подбородок, щеки и макушку. Полученные измерения следует округлить так, чтобы послед- няя цифра была 0 или 5. Затем нужно сложить оба результата и посмот- реть, какой размер противогаза вам нужен [3]:

- менее 1190 мм – первый размер;
- от 1195 до 1210 мм – второй размер;
- от 1215 до 1235 мм – третий размер;
- от 1240 до 1260 мм – четвертый размер;
- от 1265 до 1285 мм – пятый размер;
- от 1290 до 1310 мм – шестой размер.

Надевается противогаз после сигнала «Химическая тревога» по команде

«Газы», либо по своей инициативе. Вынув противогаз из специальной сумки, следует взять шлем-маску за его нижнюю часть так, чтобы большие пальцы рук находились снаружи, а остальные были внутри. Далее нужно приложить нижнюю часть шлема-маски под подбородок и натянуть его на голову резким движением рук вверх.

Учитывая то, что операции, которые описаны выше, придется проводить вслепую, нужно достаточно долго тренироваться. Хотя все зависит от человека и степени его обучаемости. Хорошо попрактиковавшись, можно приблизиться к армейским нормативам на надевание противогаза – около 7–10 с. Наличие у противогаза переговорного устройства (мембра- ны) обеспечивает четкое понимание передаваемой речи, значительно облегчает пользование средствами связи (телефон, радио).

Гражданские противогазы ГП-7В, ГП-7ВМ, УЗС-ВК, КЗД-6, фильтр ДОТ, фильтр ВК, ДПГ-3 (рис. 7.3). ГП-7В отличается от ГП-7 тем, что в нем лицевая часть МГП-В имеет устройство для приема воды, пред- ставляющее собой резиновую трубку с мундштуком и ниппелем.

ГП-7ВМ отличается от ГП-7В тем, что маска М-80 имеет очковый узел в виде трапециевидных изогнутых стекол, обеспечивающих возможность работы с оптическими приборами.

Гражданский фильтрующий противогаз ГП-7 обеспечивает защиту органов дыхания, глаз и кожи лица человека от вредных веществ и приме- сей, находящихся в воздухе. Это проверенная временем и надежная модель противогаза для гражданского населения.

а

б

в

г

д *е* *ж*

Рис. 7.3. Гражданские противогазы:

а – ГП-7(В, ВМ); *б* – УЗС-ВК; *в* – ПДФ-2; г – КЗД-6; *д* – фильтр ДОТ; *е* – фильтр ВК; *ж* – ДПГ-3;

Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы. Горизонтальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей спереди по надбровным дугам, сбоку на 2–3 см выше края ушной раковины и сзади через наиболее выступающую точку головы. Вертикальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляются с точностью до 5 мм. По сумме двух измерений устанавливают нужный типоразмер (табл. 7.0). [4].

Правильно подобранная шлем-маска (маска) должна плотно прилегать к лицу и исключать возможность проникновения наружного воздуха в органы дыхания, минуя фильтрующе-поглощающую коробку.

Таблица 7.0

Типоразмеры противогазов

Рост лицевой части		1		2		3		
Положение упоров лямок	ГП-7, ГП-7В	4-8-8	3-7-8	3-7-8	3-6-7	3-6-7	3-5-6	3-4-5
	ГП-7ВМ	4-8-6	3-7-6	3-7-6	3-6-5	3-6-5	3-5-4	3-4-3
Сумма горизонтального и вертикального обхвата головы		До 1185	1190–1210	121–1235	1240–1260	1265–1285	1290–1310	1310 и более

*Примечание. П*оложение лямок наголовника устанавливают при подгонке противогаза.

Противогаз УЗС-ВК – аварийно-спасательное средство многоразового действия, применяется для защиты органов дыхания человека от вредных веществ, может использоваться во всех климатических зонах.

Противогаз ПДФ-2 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и лица детей (старше 1,5 года) от отравляющих веществ (ОВ), опасных биологических веществ (ОБВ), радиоактивной пыли (РП).

Камера защитная детская (КЗД-6) предназначена для защиты детей в возрасте до 1,5 года от отравляющих веществ, радиоактивной пыли и бактериальных средств. Детская защитная камера похожа на обычную сумку, поэтому переносить ребенка в ней очень удобно.

Дополнительный патрон (ДПГ-3) предназначен для использования в комплекте с ГП-7, ГП-7В и детскими противогазами, для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека от сильнодействующих ядовитых ве- ществ: аммиака, диметиламина, нитробензола.

Фильтр ДОТ соответствует новым ГОСТам, гармонизированным с европейскими стандартами EN141, EN143. Он значительно эффективнее по сравнению с противогазовыми коробками, выпускаемыми по старым ГОСТа, за счет уникальных поглотителей от отравляющих веществ, опас- ных биологических веществ, радиоактивной пыли, сильнодействующих ядовитых веществ.

Фильтр ВК предназначен для очистки вдыхаемого воздуха от органических газов и паров с температурой кипения выше 65 ^{o}C (циклогек- сан, бензол, ксилол, толуол, бензин, керосин, галоидоорганические соеди- нения (хлорпикрин, хлорацетофенон и т. п.), нитросоединения бензола).

Промышленные противогазы. Существует несколько марок промышленных фильтрующих противогазов, которые являются индивидуальным средством защиты органов дыхания и зрения рабочих различных отраслей промышленности, сельского хозяйства от воздействия вредных веществ (газы, пары, пыль, дым и туман), присутствующих в воздухе.

Запрещается применять промышленные противогазы при недостатке

кислорода в воздухе (менее 18 %), например при работах в емкостях, цистернах, колодцах и других изолированных помещениях.

Не допускается применение промышленных противогазов для защиты от низкокипящих жидкостей, плохо сорбирующихся органических веществ, например метана, этилена, ацетилена. Не рекомендуется работать в таких противогазах, если состав газов и паров вредных веществ неизвестен (Рис. 7.4).

Рис. 7.4. Промышленные противогазы

Противогазы ППФМ-92, ПФМГ-96, ПФСГ-98 предназначены для защиты органов дыхания, глаз и лица человека от вредных газо- и парооб- разных веществ и аэрозолей, присутствующих в воздухе рабочей зоны. ППФ-95 предназначены для защиты органов дыхания, зрения и лица рабо- чих различных отраслей промышленности и сельского хозяйства от воз- действия вредных газов, паров, пыли, дыма и тумана, присутствующих в воздухе. Фильтрующие противогазы надежны в атмосфере, содержащей не менее 18 % кислорода.

Промышленный противогаз состоит из снаряженной коробки, лицевой части (шлем-маски) с соединительной трубкой и сумки. Фильтрующая коробка служит для очистки воздуха, вдыхаемого человеком, от ядовитых веществ и вредных примесей. В зависимости от состава этих примесей она может содержать один или несколько специальных поглотителей или сочетание поглотителя с аэрозольным фильтром. При этом коробки строго специализированы по составу поглотителей, а поэтому отличаются друг от друга окраской и маркировкой. Шлем-маски промышленных противогазов изготавливаются пяти ростов – 0, 1, 2, 3, 4. Чтобы подобрать шлем-маску, надо мягкой сантиметровой линейкой произвести два измерения головы. Вначале определить длину круговой линии, проходящей по подбородку, щекам и через

высшую точку головы (макушку). Затем измерить длину полуокружности, проходящей от отверстия одного уха к отверстию другого по лбу через надбровные дуги. Результаты двух обмеров суммируют и находят требуемый рост шлем-маски.

При сумме до 93 см размер нулевой, от 93 до 95 см – первый, от 95 до 99 см – второй, от 99 до 103 см – третий, от 103 и выше – четвертый [4].

Противогазы комплектуют коробками двух размеров (большая и малая) и трех типов: без аэрозольного фильтра, с аэрозольным фильтром (на коробке белая вертикальная полоса), без аэрозольного фильтра с уменьшенным сопротивлением дыханию (имеет индекс 8 в маркировке). В зависимости от вида вредного вещества выпускают коробки следующих марок: А, В, Г, Е, КД, СО, М (табл. 9.2) [5].

Коробки марок А, В, Г, Е, КД изготавливаются как с аэрозольными фильтрами, так и без них; коробка БКФ – только с аэрозольными фильтрами; коробки СО и М – без аэрозольных фильтров. Белая вертикальная полоса на коробке означает, что она оснащена аэрозольным фильтром.

Таблица 7.1

Характеристика промышленных противогазов

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
А	Коричневая	Пары органических соединений (бензин, керосин, ацетон, бензол, толуол, ксилол, сероуглерод, спирты, эфиры, галоидоорганические соединения, нитросоединения бензола и его гомологи, тетроэтилсвинец, фосфор- и хлорорганические ядохимикаты)

Продолжение табл. 7.1

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
В	Желтая	Кислые газы и пары (диоксида серы, гидрид серы, хлор, циан гидрида, окислы азота, хлориды водорода, фосген), фосфор- и хлорорганические ядохимикаты

Г	Черно-желтая	Пары ртути и ртутьорганическе ядохимикаты на основе этилмеркурхлорида
Е	Черная	Гидрид мышьяка и гидрид фосфора
К	Зеленая	Аммиак, а также пыль, дым, туман
КД	Серая, с бе- лой поло- сой	Аммиак и сероводород
БКФ	Защитная, с белой полосой	Кислые газы и пары, пары органических веществ, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пыль, дым, туман
СО	Белая	Оксид углерода
М	Красная	Оксид углерода в присутствии паров органических ве- ществ, кислые газы, аммиак, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пары органических соединений (бензин, керо- син, ацетон, бензол, ксилол, сероуглерод, толуол, спирты, эфиры, анилин, соединения бензола и его гомологи)
П-2У	Красная с белой поло- сой	Пары карбонилов никеля и железа, оксид углерода и со-путствующие аэрозоли
Б	Синяя	Бороводороды: диборан, пентаборан, этилентаборан, ди-этилдекаборан и их аэрозоли
УМ	Защитная	Пары и аэрозоли гептила, амил, самин, нитромеланж, амидол
ГФ	Голубая	Газообразный гексафторид урана, фтор, фтористый водо- род, радиоактивные аэрозоли

Пользование противогазом. Подобрав шлем-маску, ее обязательно примеряют. Новую лицевую часть предварительно необходимо протереть снаружи и внутри чистой тряпочкой или тампоном ваты, смоченным в воде, а клапаны выдоха продуть. Шлем-маску, бывшую в употреблении, следует отсоединить от коробки, протереть двухпроцентным раствором формалина или промыть водой с мылом и просушить.

При сборке противогаза шлем-маску берут в левую руку за клапанную

коробку, а правой рукой ввинчивают до отказа фильтрующе- поглощающую коробку навинтованной горловиной в патрубок клапанной коробки шлем-маски.

При переводе противогаза в «боевое» положение необходимо:

– снять головной убор и зажать его между коленями или положить рядом;

– убрать волосы со лба и висков, женщинам следует гладко

– зачесать волосы назад, заколки и украшения снять (их попадание под обтюратор приведет к нарушению герметичности);

– вынуть шлем-маску из сумки, взять ее обеими руками за утолщенные края у нижней части так, чтобы большие пальцы рук были с наружной стороны, а остальные – внутри. Подвести шлем-маску к подбородку и резким движением рук вверх и назад натянуть ее на голову так, чтобы не было складок, а очки пришлись против глаз (ГП-5, ГП-5М);

– для правильного надевания ГП-7 надо взять лицевую часть обеими руками за щечные лямки так, чтобы большие пальцы захватывали их изнутри. Задержать дыхание, закрыть глаза. Затем зафиксировать подбородок в нижнем углублении обтюратора и движением рук вверх и назад натянуть наголовник на голову и подтянуть до упора щечные лямки;

– сделать полный выдох (для удаления зараженного воздуха из-под шлем-маски, если он туда попал в момент надевания), открыть глаза и возобновить дыхание;

– надеть головной убор, застегнуть сумку и закрепить ее на туловище.

Дополнительные патроны

В результате развития химической и нефтехимической промышленности в производстве увеличено применение химических веществ. Многие из них по своим свойствам вредны для здоровья людей. Их называют сильнодействующими ядовитыми веществами (СДЯВ).

С целью расширения возможностей гражданских противогазов по защите от СДЯВ для них введены дополнительные патроны (ДПГ-1 и ДПГ-3).

ДПГ-1 в комплекте с противогазом защищает от двуокиси азота, метила

хлористого, окиси углерода и окиси этилена. ДПГ-3 в комплекте с противогазом защищает от аммиака, хлора, диметиламина, нитробензола, сероводорода, сероуглерода, синильной кислоты, тетраэтилсвинца, фенола, фурфурола, хлористого водорода.

Внутри патрона ДПГ-1 два слоя шихты – специальный поглотитель и гопкалит. В ДПГ-3 только один слой поглотителя. Чтобы защитить шихту от увлажнения при хранении, горловины должны быть постоянно закрытыми: наружная – с навинченным колпачком с прокладкой, внутренняя – с ввернутой заглушкой [6].

Изолирующие противогазы. Изолирующие противогазы (ИП) являются специальными средствами защиты органов дыхания, глаз и кожи лица от любых вредных примесей, находящихся в воздухе независимо от их свойств и концентраций. Они используются также в тех случаях, когда невозможно применение фильтрующих противогазов, например при наличии в воздухе очень высоких концентраций отравляющих веществ или любой вредной примеси, кислорода менее 16 %, а также при работе под водой на небольшой глубине. Виды противогазов представлены на Рис. 7.5.

ИП-4М ИП-6 ПДА-3М

Рис. 9.5. Изолирующие противогазы

Изолирующие противогазы используют в случае, когда фильтрующие противогазы не обеспечивают должной степени защиты, или когда в воздухе недостаточно кислорода. Источником кислорода в таком противогазе служит патрон, снаряженный специальным веществом. Для нужд населения выпускают ИП-4М, ИП-4МК, ИП-5, ИП-6, ИП-7, ПДА- 3М.

Действие изолирующих противогазов основано на использовании химически связанного кислорода. Они имеют замкнутую маятниковую схему дыхания: выдыхаемый воздух попадает в регенеративный патрон, вещество которое содержится в нем поглощает углекислый газ и влагу, а взамен выделяет необходимый для дыхания кислород. Затем дыхательная смесь попадает в дыхательный мешок. При вдохе газовая смесь из дыхательного мешка снова проходит через регенеративный патрон, дополнительно очищается и поступает для дыхания. Материалы, из которых изготовлены противогазы, не оказывают отрицательного воздействия на организм. Применение незапотевающих пленок, а при отрицательных температурах и утеплительных манжет сохраняет прозрачность стекол в течение всего времени работы в противогазе при любой физической нагрузке. Грантируется высокая эксплуатационная безопасность.

ИП-4М, ИП-4МК используют при авариях, стихийных бедствиях. ИП-5, ИП-6 предназначены для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека в непригодной для дыхания атмосфере независимо от состава и концентрации вредных веществ в воздухе, а также при недостатке или отсутствии кислорода. Портативный дыхательный аппарат (ПДА-3М) предназначен для экстренной защиты органов дыхания, зрения и кожи лица человека в непригодной для дыхания атмосфере при эвакуации из опасной зоны, выполнении аварийных работ, а также в ожидании помощи [5].

По принципу действия изолирующие противогазы делятся на две группы: ИП-5); КИП-8).

- противогазы на основе химически связанного кислорода (ИП-4,

- противогазы на основе сжатого кислорода или воздуха (КИП-7, Исходя из принципа защитного действия, основанного на полной изоляции органов дыхания от окружающей среды, время пребывания в изолирующем противогазе зависит не от физико-химических свойств ОВ,РВ, БС и их концентраций, а от запаса кислорода и характера выполняемой работы.

Противогазы шланговые изолирующие презназначены для защиты органов дыхания, глаз и кожи человека от любых вредных примесей в воздухе независимо от их концентрации, а также для работы в условиях недостатка кислорода в воздухе рабочей зоны. Комплектуются возду- ходводящим шлангом длиной 10 или 20 м на барабане или в сумке.

Респираторы.

Респираторы представляют собой облегченное средство защиты органов дыхания от вредных газов, паров, аэрозолей и пыли (рис. 7.6).

Респираторы делятся на два типа. Первый – это респираторы, у которых полумаска и фильтрующий элемент одновременно служат и лицевой частью. Второй – это респираторы, которые очищают вдыхаемый воздух в фильтрующих патронах, присоединяемых к полумаске.

Рис. 7.6. Респираторы:

а – «Кама»; б – «Снежок»; в – У-2к; г – РП-КМ; д – Ф-62Ш; е – «Ас- тра 2»; ж – РПГ-67; з – РУ-6 Ом

Респираторы по назначению делят на следующие виды [5]:

противоаэрозольные – для защиты органов дыхания от пыли, дыма, тумана, содержащих токсичные, бактериальные и другие опасные элементы, за счет пропускания вдыхаемого воздуха через фильтр из специального материала (респираторы «Лепесток», «Кама», «Снежок-П», У-2к, «Астра-2», Ф-62ш, РПА-1 и др.). Для фильтров в таких респираторах ис- пользуют материалы типа ФП (фильтр Петрянова), обладающие высокой эластичностью, механической прочностью, большой пылеемкостью, стой- костью к химическим агрессивным веществам и прекрасными фильтрую- щими свойствами;

противогазовые – для защиты от паров и газов за счет фильтрования вдыхаемого воздуха через фильтрпатроны различных марок, различающихся составом адсорбирующего материала. При этом фильтр-патрон каждой марки защищает от газов только определенного вида (РПГ-67);

универсальные – одновременно защищают от аэрозолей и отдель- ных видов газов и паров. Респираторы имеют противоаэрозольный фильтр и сменные противогазовые патроны разных марок (РУ-60м) или противо- газовые фильтры из ионообменного волокнистого материала («Снежок- ГП», «Лепесток-Г»).

По конструктивному оформлению различают респираторы двух типов:

фильтрующие маски – их фильтрующий элемент одновременно служит лицевой частью;

патронные – самостоятельно выполненные лицевая часть и фильтрующий элемент.

По характеру вентилирования подмасочного пространства респи- раторы делят на бесклапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух прохо- дит через фильтрующий элемент) и клапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух движется по различным каналам благодаря системе клапанов вдоха и выдоха).

В зависимости от срока службы различают респираторы одноразо- вого

(типа «Лепесток», «Кама», У-2к и т. п.) и многоразового пользования, в которых предусмотрена возможность замены фильтров или их много- кратная регенерация (Ф-62ш, «Астра-2», РУ-60м и др.).

Респираторы ШБ-1, «Лепесток-5», «Лепесток-40» и «Лепесток-200» одинаковы и представляют собой сплошную легкую полумаску- фильтр из материала ФПП (фильтрующее полотно Петрянова). В нерабо- чем состоянии респиратор имеет вид круга. Каркасность его в рабочем со- стоянии обеспечивают пластмассовая распорка и алюминиевая пластина. Плотное прилегание респиратора к лицу достигается при помощи резино- вого шнура, вшитого в периметр круга, а также благодаря электростатиче- скому заряду материала ФПП, который образует полосу обтюрации. На го- лове респиратор крепят четырьмя шнурами.

Противоаэрозольные респираторы. В качестве фильтров в респираторах используют тонковолокнистые фильтровальные материалы. Наибольшее распространение получили полимерные фильтровальные материалы типа ФП (фильтр Петрянова) благодаря их хорошей эластичности, большой пылеемкости, а главное, высоким фильтрующим свойствам. Важной отличительной особенностью материалов ФП, изготовленных из перхлорвинила и других полимеров, обладающих изоляционными свойствами, является то, что они несут электростатические заряды, которые резко повышают эффективность улавливания аэрозолей и пыли.

Респиратор противопылевый У-2К (в гражданской обороне Р-2) обеспечивает защиту органов дыхания от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, радиоактивной и другой пыли, от некоторых бактериальных средств, дустов и порошкообразных удобрений, не выделяющих токсичные газы и пары. Использовать респиратор целесообразно при кратковременных работах небольшой интенсивности и запыленности воздуха. Не рекомендуется применять, когда в атмосфере сильная влага.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, наружный

фильтр которой изготовлен из полиуретанового поропласта зеленого цвета, а внутренняя его часть – из тонкой воздухонепроницаемой полиэтиленовой пленки, в которую вмонтированы два клапана вдоха (рис. 9.7). Клапан выдоха размещен в передней части полумаски и защищен экраном. Между поропластом и полиэтиленовой пленкой расположен второй фильтрующий слой из материала ФП. Для плотного прилегания респиратора к лицу в области переносицы имеется носовой зажим – фигурная алюминиевая пластина. Респиратор крепится при помощи регулируемого оголовья.

Рис. 7.7. Респираторы У-2К (Р-2)

Респираторы У-2К изготавливаются трех ростов, которые обозначаются на внутренней подбородочной части полумаски. Определение роста производится путем измерения высоты лица человека, т. е. расстояния между точкой наибольшего углубления переносицы и самой нижней точкой подбородка. При величине измерения от 99 до 109 мм берут первый рост, от 109 до 119 мм – второй, от 119 и выше – третий.

Принцип действия респиратора основан на том, что при вдохе воздух последовательно проходит через фильтрующий полиуретановый слой маски, где очищается от грубодисперсной пыли, а затем через фильтрующий полимерный материал (ФП), в котором происходит очистка воздуха от тонкодисперсной пыли. После очистки вдыхаемый воздух через клапаны вдоха попадает в подмасочное пространство и в органы дыхания.

При выдохе воздух из подмасочного пространства выходит через клапан

выдоха наружу.

Чтобы подогнать респиратор У-2К (Р-2), нужно:

- вынуть его из полиэтиленового мешочка и проверить его исправность, надеть полумаску на лицо так, чтобы подбородок и нос разместились внутри нее, одна нерастягивающаяся тесьма оголовья располагалась бы на теменной части головы, а другая – на затылочной;
- с помощью пряжек, имеющихся на тесемках, отрегулировать их длину (для чего следует снять полумаску) таким образом, чтобы надетая полумаска плотно прилегала к лицу;
- на подогнанной надетой полумаске прижать концы носового зажима к носу.

Для проверки плотности прилегания респиратора к лицу необходимо плотно закрыть отверстия предохранительного экрана клапана выдоха ладо- нью и сделать легкий выдох. Если при этом по линии прилегания полумаски к лицу воздух не выходит, а лишь несколько раздувает респиратор, значит, он надет герметично. Если воздух проходит в области носа, то надо плотнее прижать концы носового зажима.

После снятия респиратора необходимо удалить пыль с наружной части полумаски с помощью щетки или вытряхиванием. Внутреннюю поверхность необходимо протереть и просушить, после чего респиратор необходимо вложить в полиэтиленовый пакет, который закрывается кольцом. Противоаэрозольный респиратор Ф-62Ш (однопатронный) – это средство индивидуальной защиты органов дыхания человека от различных видов промышленных пылей, он не защищает от газов, паров вредных ве- ществ, аэрозолей органических соединений. Предназначен для защиты от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, табачной пыли, пыли порошкообразных удобрений и интоксицидов, а также других видов пыли, не выделяющих токсичных газов. Широко применяется шахтерами. Респиратор противоаэрозольный ФА-2002 предназначен для защиты лица, глаз, органов дыхания от аэрозолей различной

природы (пыль, дым, туман) при их суммарной концентрации не более 15 ПДК и при концентрации кислорода не менее 17 % (Рис. 7.8).

Ф-62Ш

ФА-2002

Рис. 7.8. Респираторы противоаэрозольные Ф-62Ш и ФА-2002

Универсальные респираторы

Газопылезащитные респираторы занимают как бы промежуточное положение между респираторами противопылевыми и противогазами. Они легче, проще и удобнее в использовании, чем противогаз. Однако защищают только органы дыхания при концентрации вредных веществ не более 10–15 ПДК. Глаза, лицо остаются открытыми. Вместе с тем такие респираторы во многих случаях довольно надежно предохраняют человека в газовой и пылегазовой среде.

Респиратор газопылезащитный РУ-60М (рис. 7.9) защищает органы дыхания от воздействия вредных веществ, присутствующих в воздухе одновременно в виде паров, газов и аэрозолей (пыли, дыма, тумана).

Рис. 7.9. Респиратор газопылезащитный (РУ-60М)

Запрещается применять эти респираторы для защиты от высокотоксичных

веществ типа синильной кислоты, мышьяковистого, фосфористого, цианистого водорода, тетраэтилсвинца, низкомолекулярных углеводородов (метан, этан), а также от веществ, которые в парогазообразном состоянии могут проникнуть в организм через неповрежденную

кожу. Респиратор РУ-60М состоит из резиновой полумаски, обтюратора, поглощающих патронов (марки А, В, КД, Г), пластмассовых манжет с клапанами вдоха, клапана выдоха с предохранительным экраном и оголовья. С этими респираторами разрешается работать в средах, где концентрация пыли не более 100 мг/м^3.

Противогазовые респираторы. Респиратор противогазовый (РПГ-

67) – это средство индивидуальной защиты, применяется на предприятиях химической, металлургической и в других отраслях производства при концентрациях вредных веществ, не превышаю-

щих 10–15 ПДК.

Газодымозащитный комплект. Статистика показывает, что пожары с большим количеством человеческих жертв чаще всего встречаются в гостиницах, театрах, универсамах, ресторанах, вечерних клубах, учебных заведениях, на предприятиях, использующих легковоспламеняю- щиеся материалы.

Помещения быстро заполняются окисью углерода и другими токсическими газами. Люди гибнут от отравлений. Чтобы защитить органы дыхания и глаза от ядовитых газов, а голову человека от огня при выходе из горящего помещения, создан специальный газодымозащитный комплект (Рис. 9.10).

Рис. 9.10 Газодымозащитный комплект

Газодымозащитный комплект (ГДЗК) состоит из огнестойкого капюшона с прозрачной смотровой пленкой. В нижней части расположена эластичная манжета.

Внутри капюшона находится резиновая полумаска, в которой закреплен фильтрующе-сорбирующий патрон с клапаном вдоха. ГДЗК имеет регулируемое оголовье. При надевании следует широко растянуть эластичную манжету и накинуть капюшон на голову так, чтобы

манжета плотно облегала шею, при этом длинные волосы заправляются под капюшон. Очки можно не снимать. ГДЗК обеспечивает защиту от окиси углерода и цианистого водорода не менее 15 мин. Сопротивление при вдохе при 30 л/мин – не более 149 Па (15 мм вод. ст). Масса 800 г. Комплект хранится в картонной коробке в пакете из трехслойной полиэтиленовой пленки.

Капюшон «Феникс» предназначен для самостоятельной эвакуации из мест возможного отравления химически опасными и вредными вещест- вами. Защищает от продуктов горения, аэрозолей, паров и газов, опасных химических веществ, образующихся при аварийных ситуациях (Рис. 9.11).

Самоспасатели СИП-1, СПИ-20, СПФ, «Экстремал ПРО» (Рис. 9.11) предназначены для индивидуальной защиты органов дыхания и зрения человека от вредного воздействия непригодной для дыхания, токсичной и задымленной газовой среды. Применяются при экстренной эвакуации людей в случае террористических актов, а также с мест пожара в общественных зданиях, на транспорте, из жилых домов и т. п.

а *б* *в* *г*

Рис. 9.11. Самоспасатели:

а – СИП-1; б – СПИ-20; в – СПФ; г – капюшон «Феникс»; д – «Экстремал ПРО».

Самоспасатель противопожарный СИП-1 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и головы при самостоятельной эвакуации из помещений (гостиниц, высотных зданий, вагонов) во время пожара или при других аварийных ситуациях, от любых вредных веществ независимо от их концентрации и при недостатке кислорода в воздухе.

Порядок выполнения работы

1. Записать название и цель работы.
2. Законспектировать виды и назначение противогазов в виде табл. 7.3.

Таблица 7.3

Виды и назначение противогазов

Наименование и марка	Назначение, вид веществ, от которых защищает	Комплектация	Примечание*
Фильтрующие противогазы			
Гражданские			
ГП-5			
…			

… т. д.			

*В примечании указать, для каких возрастных групп предназначен, особенности мар- ки и т. п.

3. Указать правила пользования противогазами.

4. Измерить при помощи гибкого сантиметра лицевую часть головы и подобрать для себя размер противогаза ГП-5 (ГП-7) по росту.

5. Измерить при помощи гибкого сантиметра высоту своего лица и подобрать размер респиратора У-2К.

6. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безопасность жизнедеятельности : учеб. для вузов / С. В. Белов [и др.] ; под общ. ред. С. В. Белова. – М.: Высш. шк., 2009. – 616 с.

2. Безопасность жизнедеятельности. Безопасность в чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера : учеб. пособие для вузов / В. А. Акимов [и др.]. – М. : Высш. шк., 2008. – 592 с.

3. Безопасность жизнедеятельности. Защита населения и территорий в чрез- вычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов / Я. Д. Вишняков [и др.]. – М. : Академия, 2008. – 304 с.

4. Емельянов В. М., Коханов В. Н., Некрасов П. А. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов. – М. : Академический проект : Трикста, 2005. – 480 с.

5. Вознесенский В. В. Средства защиты органов дыхания и кожи. Противога- зы, респираторы и защитная одежда, основы их эксплуатации : учеб. пособие. – М. : Воен. знания, 2010. – 80 с.

6. Семенов С. Н., Лысенко В. П. Проведение занятий по гражданской обороне : метод. пособие. – М. : Высш. шк., 1990. – 96 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. ИНЖЕНЕРНАЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЗАЩИТА. ВИДЫ ЗАЩИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ И ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ В НИХ

Наименование работы: Действия населения при ЧС военного характера.

Цель: изучить действия населения при ЧС военного характера при угрозе применения радиационного, химического или биологического оружия, определить применяемые средства индивидуальной защиты, обосновать выбор защитных сооружений.

Время: 4 часа

Материально-техническое обеспечение: инструкционная карта, ручка, противогаз, респиратор, ватно-марлевая повязка

Методика выполнения

Задание:

1. Изучить индивидуальные средства защиты населения.

2. Изучить виды укрытий и правила поведения в убежищах и укрытиях.

3. Изучить применение СИЗ при угрозе применения химического и биологического оружия.

4. Отчет о работе оформить в виде плана-конспекта.

5. Заполнить таблицу.

№	ЧС	Опасность	Поражающие факторы	Основные средства защиты

Ядерное оружие – самое страшное оружие современности. Поражение людей при его применении зависит от того, где они находились в момент ядерного взрыва. Наиболее эффективным средством защиты от всех поражающих факторов ядерного оружия являются убежища (укрытия). Находясь в убежищах (укрытиях), необходимо постоянно держать в готовности к немедленному использованию средства индивидуальной защиты. Средства индивидуальной защиты подразделяют на средства индивидуальной защиты

органов дыхания (СИЗОД), средства индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), средства индивидуальной защиты кожи (СИЗК). К средствам защиты органов дыхания человека относятся противогазы (фильтрующие (рис.8.1.) и изолирующие (рис.2.)) и респираторы (рис.3.), а также простейшие средства защиты – противопыльные тканевые маски (ПТМ-1) (рис.4.) и ватно-марлевые повязки (рис.5.), изготовляемые обычно силами самого населения.

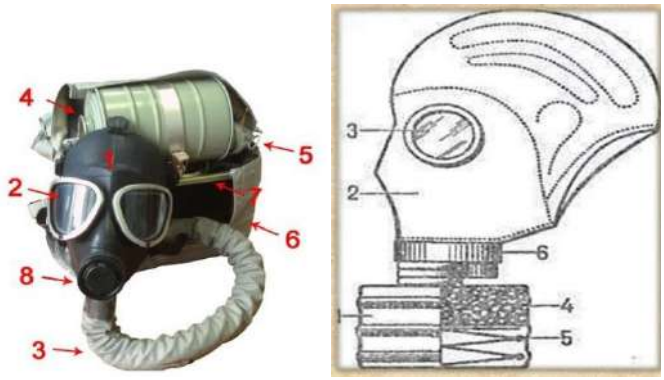


Рис. 8.1 Фильтрующий противогаз

1-фильтрующе-поглощающая коробка; 2-лицевая часть противогаза; 3-очковой узел; 4-шихга (обеспечивает поглощение паров и газов, и токсичных в-в); 5-ПАФ (противоаэрозольный фильтр); 6-клапанная коробка.

Рис.8.2. Изолирующий противогаз

1-лицевая часть, 2-очковый узел, 3-соеденительная трубка, 4-регенераторный патрон, 5-пусковое устройство патрона, 6-дыхательный мешок, 7-каркас, 8-устройство для переговоров.

Порядок надевания противогаза:

1. По команде «Газы!» задержите дыхание, не вдыхая воздух.

2. Закрыть глаза.

3. Достать противогаз из противогазной сумки, левой рукой доставая противогаз, а правой держа сумку снизу.

4. Вынуть пробку-заглушку из противогазной коробки.

5. Перед надеванием противогаза расположить большие пальцы рук снаружи, а остальные внутри.

6. Приложить нижнюю часть шлем-маски на подбородок.

7. Резко натянуть противогаз на голову снизу-вверх.

8. Выдохнуть.

9. Необходимо, чтобы после не образовалось складок, очковый узел должен быть расположен на уровне глаз.

10. Перевести сумку на бок.

Снятие:

1. По команде «Отбой!» брать за фильтровальную коробку и, потянув сверху-вниз, снять его.

2. Убрать противогаз в противогазную сумку.

3. Застегнуть пуговицы.

Таблица 8.0

Подбор размера противогаза

Обхват головы	Размер противогаза
До 63	0
63,5-65,5	1
66-68	2
68,5-70,5	3
71 и более	4

В качестве защиты органов дыхания от радиоактивной пыли и различных вредных аэрозолей могут быть использованы респираторы. Они просты в применении, малогабаритны и рассчитаны на массовое применение. Широко используются при выполнении работ, связанных с пылеобразованием.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, снабженную двумя клапанами вдоха, клапаном выхода (с предохранительным экраном), оголовьем, состоящим из эластичных растягивающихся (и не растягивающихся) тесемок, и носовым зажимом. Работать в нем можно до 12 ч

Респираторы Р-2 изготовляются трех ростов -1,2 и 3-го, которые обозначаются внутренней подбородочной части полумаски.

Простейшими средствами защиты органов дыхания человека от радиоактивной пыли и биологических средств (при действиях во вторичном облаке) являются противопыльная тканевая маска ПТМ-1 (рис.8.3).

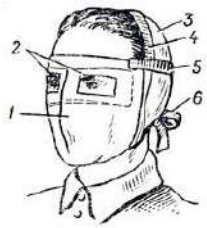


Рис.8.3. Противопыльная тканевая маска

1-корпус маски, 2-смотровые отверстия, 3-крепления, 4-резиновая тесьма, 5-поперечная резинка, 6-завязки.

И ватно-марлевая повязка (рис.8.4.) От ОВ (отравляющих веществ) они не защищают. Их изготавливает преимущественно само население. Маска состоит из корпуса и крепления. Корпус шьется из двух одинаковых по форме тканевых фильтрующих половинок, собранных на 4-5 слоев. На нем имеются смотровые отверстия со вставленными стеклами. Крепится маска на голове при помощи вставленной резинки и двух завязок.

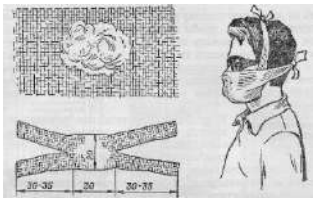


Рис.8.4. Ватно-марлевая повязка

Ватно-марлевая повязка изготовляется из куска марли размером 100 х50 см и ваты. На марлю накладывают слой ваты толщиной 2-3 см, длинной 30 см, шириной 20 см. Марлю с обеих сторон загибают и накладывают на вату. Концы марли разрезают на 30-35 см с каждой стороны, чтобы образовались две пары завязок. Марлевые повязки делают из 10-12 слоев марли. Они шьются также в виде маски, закрывающей лицо или только подбородок, нос и рот. Для защиты глаз используются противопыльные очки.

Рис.8.5.Защитные очки

К средствам индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), в первую очередь, относятся защитные очки, предохраняющие от пыли, твердых частиц, химически неагрессивных жидкостей и газов, от слепящего яркого света, ультрафиолетового, инфракрасного излучения и от сочетания излучений указанных видов с воздействия летящих твердых частиц, а так же очкизащищающие от лазерного излучения и других опасных факторов.

К **средствам индивидуальной защиты кожи (СИЗК)** относят защитную одежду фильтрующего и изолирующего типа. К изолирующим средствам защиты кожи относятся общевойсковой комплексный защитный костюм (ОКЗК), общевойсковой защитный комплекс (ОЗК) (рис.8.6.), легкий защитный костюм (Л-1) , защитный комбинезон или костюм.

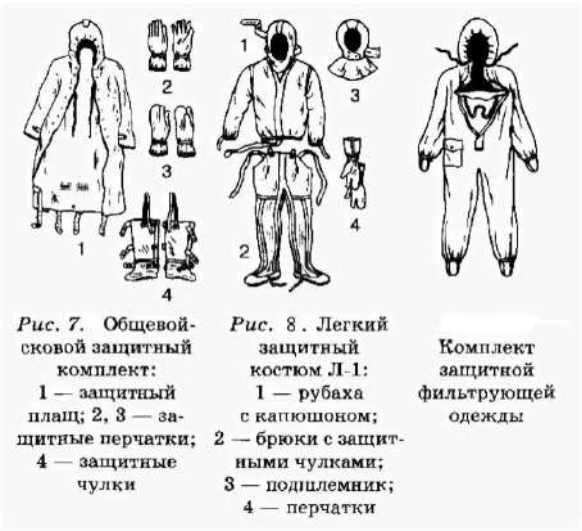


Рис. 7. Общевойсковой защитный комплект: 1 — защитный плащ; 2, 3 — защитные перчатки; 4 — защитные чулки

Рис. 8. Легкий защитный костюм Л-1: 1 — рубаха с капюшоном; 2 — брюки с защитными чулками; 3 — подшлемник; 4 — перчатки

Комплект защитной фильтрующей одежды

Рис. 8.6 Защитный костюм

Общевойсковой комплексный защитный костюм (ОЗК) предназначен для комплексной защиты от светового излучения и радиоактивной пыли, паров и аэрозолей ОВ и биологических аэрозолей. Он состоит из пропитанных специальным составом куртки, брюк, защитного белья, головного убора, подшлемника.

Простейшие средства защиты кожи применяются при отсутствии табельных средств. Может быть использована прежде всего производственная одежда (спецовка) – куртка и брюки, комбинезоны, халаты с капюшоном, сшитые из брезента, огнезащитной или прорезиненной ткани, грубого сукна. Они способны не только защищать от попадания на кожу людей радиоактивных веществ и биологических средств, но и не пропускать в течение некоторого времени капельножидких отравляющих веществ.

Обычная одежда, обработанная специальной пропиткой, может защищать и от паров отравляющих веществ. В качестве пропитки используют моющие средства или мыльно-масляную эмульсию. Основные представители неионогенных моющих средств – ОП-7 и ОП-10 (ОП-7иОП-10 - вспомогательные вещества, представляющие собой продукты обработки смеси моно- и диалкилфенолов окисью этилена. Вспомогательные вещества ОП-7 и ОП-10 относятся к неионогенным поверхностно-активным веществам. Применяются в качестве смачивающих, эмульсирующих, стабилизирующих поверхностно-активных веществ. Хорошо растворимы в воде). Синтетические моющие средства в чистом виде используются редко и служат исходным материалом для приготовления моющих средств, которые состоят из моющего вещества, активных добавок (соли фосфорной кислоты, сульфат натрия, метасиликат натрия и др.) и веществ, предохраняющих кожу (карбоксиметилцеллюлоза, дермоланы – высокомолекулярные циклические соединения, содержащие группы SO_2,NH_4,далгоны – конденсированные фосфаты).

Придать повседневной одежде защитные от отравляющих веществ свойства можно, пропитав ее раствором, который может быть приготовлен в домашних условиях. 2,5-3 л раствора, необходимого для пропитки одного комплекта одежды, можно получить если растворить 250-300 г измельченного хозяйственного мыла в 2-3 л горячей воды (60-70 ° С), добавить в раствор 0,5 л минерального (машинного) и другого масла и, подогревая,перемешивать раствор до получения однородной мыльно-масляной эмульсии. Одежду помещают в большую емкость (бак, ведро) и заливают раствором. Пропитанная одежда отжимается и просушивается (утюжке не подлежит).

В летную жаркую погоду необходимо соблюдать установленные сроки работы в защитной одежде. Зимой для предупреждения обмораживания следует надевать ее на ватник, использовать подшлемник, теплые портянки, в резиновые сапоги подкладывать теплые стельки, защитные перчатки одевать поверх обычных шерстяных или фланелевых. Обычно длительность пребывания людей в убежищах зависит от степени радиоактивного заражения местности. Если убежище находится в зоне заражения с уровнями радиации от 8 до 80 Р/ччерез один час после ядерного взрыва, то время пребывания в нем укрываемых людей составит от нескольких часов до одних суток (рис.8.7) .

Рис.8. 7. Ватно-марлевая повязка

В зоне заражения с уровнями радиации от 80 до 240 Р/ч нахождение людей в защитном сооружении увеличивается до 3 сут. В зоне заражения с уровнем радиации 240 Р/ч и выше это время составит 3 сут. и более. По истечении указанных сроков из убежищ (укрытий) можно перейти в жилые помещения. В течение последующих 1-4 сут. (в зависимости от уровней радиации в зонах

заражения) из таких помещений можно периодически выходить наружу, но не более чем на 3-4 ч в сутки.

В условиях сухой и ветреной погоды, когда возможно пылеобразование, при выходе из помещений следует использовать СИЗОД. Чтобы благополучно пережить указанные сроки пребывания в убежищах, необходимо иметь запасы продуктов питания (не менее чем на 4 сут. (крупы, сахар и соль, галеты, сухари, консервы, макаронные изделия, мука, сухофрукты, шоколад, подсолнечное масло, мед, варенье. уксус, вода)), питьевой воды (из расчета 3 л на человека в сутки), а также предметы первой необходимости и медикаменты.

Если в результате ядерного взрыва убежище (укрытие) окажется поврежденным, принимают меры к быстрому выходу из него, надев СИЗОД. Если основным и ли запасным выходом воспользоваться невозможно, приступают к расчистке одного из заваленных выходов или к проделыванию выхода. После выхода из очага ядерного поражения (зоны радиоактивного заражения) необходимо провести частичную дезактивацию и санитарную обработку, т.е. удалить радиоактивную пыль. При частичной дезактивации следует осторожно снять одежду, ни в коем случае не снимая СИЗОД. Встав спиной к ветру, вытряхнуть ее, развесить одежду на перекладине или веревке и обмести с нее пыль сверху вниз с помощью щетки или веника. Одежду можно выколачивать и палкой.

После этого следует продезактивировать обувь: протереть тряпками и ветошью, смоченными водой, очистить веником или щеткой. Резиновую обувь можно мыть. Противогаз дезактивируют в особой последовательности. Фильтрующе-поглощающую коробку вынимают из сумки, сумку тщательно вытряхивают. Затем тампоном, смоченным мыльной воде, моющим раствором или жидкостью из противохимического пакета обрабатывают фильтрующе-поглощающую коробку, соединительную трубку и наружную поверхность шлема-маски (маски). Лишь после этого противогаз снимают.

Противопыльные тканевые маски при дезактивации тщательно вытряхивают, чистят щетками, при возможности полощут или стирают в воде. Зараженные ватно-марлевые повязки сжигают. При частичной санитарной обработке открытые участки тела: руки, лицо, шею, глаза обмывают незараженной водой. Нос, рот и горло полощут. Важно, чтобы при обмывке лица зараженная вода не попала в глаза, рот и нос. При недостатке воды обработку проводят путем многократного протирания участков тела тампонами из марли (ваты, пакли, ветоши), смоченными незараженной водой. Протирание следует проводить сверху вниз. каждый раз переворачивая тампон чистой стороной. Зимой может использоваться незараженный снег.

Летом санитарную обработку можно организовать в реке или другом проточном водоеме. Частичная дезактивация и санитарная обработка, проводимые в одноразовом порядке, не всегда гарантируют полное удаление радиоактивной пыли. Потому после их проведения обязательно проводится дозиметрический контроль. Если заражение одежды и тела окажется выше допустимой нормы, частичные дезактивацию и санитарную обработку повторяют. В необходимых случаях проводится полная санитарная обработка. Своевременно проведенные частичные дезактивация и санитарная обработка могут полностью предотвратить или сильно снизить степень поражения людей радиоактивными веществами.

Если люди во время ядерного взрыва находятся вне убежища укрытия, следует использовать естественные ближайшие укрытия (рис.10). Если таких укрытий нет, надо повернуться к взрыву спиной, лечь на землю лицом вниз, руки спрятать под себя. Через 15-20 с. после взрыва, когда пройдет ударная волна, следует встать и немедленно надеть противогаз, респиратор или какое-либо другое СИЗОД. В случае отсутствия специальных средств следует закрыть рот и нос платком, шарфом или плотным материалом.

Задача состоит в том, чтобы исключить попадание внутрь организма радиоактивных веществ. Их поражающее действие бывает значительным в

течение длительного времени, поскольку выведение их из организма происходит медленно. Далее необходимо стряхнуть осевшую на одежду и обувь пыль, надеть имеющиеся средства защиты кожи.

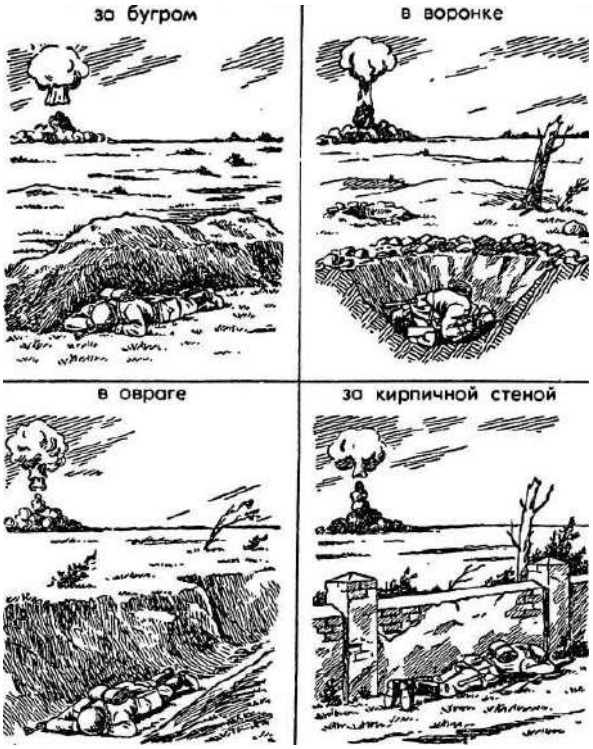


Рис 8.8 Естественные укрытия при внезапном ядерном взрыве

Для этого можно использовать имеющиеся одежду и обувь. Затем следует побыстрее покинуть очаг поражения или укрыться в ближайшем защитном сооружении.

Оставаться на зараженной радиоактивными веществами местности вне убежищ (укрытий), несмотря на использование средств индивидуальной защиты, опасно. Это сопряжено с возможностью облучения и, как следствие, развития лучевой болезни. В целях уменьшения возможности поражения радиоактивными веществами в зонах заражения запрещается принимать пищу, пить и курить. Приготовление пиши должно вестись на незараженной местности или, в крайнем случае, на местности, где уровень радиации не превышает 1 Р/ч. При выходе из очага поражения необходимо учитывать, что в результате ядерных взрывов разрушаются здания, сети коммунального хозяйства. При этом отдельные элементы зданий могут обрушиться через некоторое время после взрыва.

Продвигаться надо посередине улицы, стараясь возможно быстрее попасть в безопасное место. Нельзя трогать электропровода. Направление движения из очага поражения следует выбирать, ориентируясь на знаки ограждения, расставленные разведкой гражданской обороны. Они ведут всторону снижения уровней радиации. Двигаясь по зараженной территории, надо стараться не поднимать пыли, обходить лужи, не создавать брызг.

В результате применения химического оружия возникают очаги химического поражения-территории, в пределах которой в результате воздействия химического оружия произошли массовые поражения людей и сельскохозяйственных животных. Размеры очага зависят от масштаба и способа применения БТХВ (боевые токсичные химические вещества - это химические соединения, которые способны поражать людей и животных на больших площадях, проникать в различные сооружения, заражать местность и водоемы), его типа метеорологических условий, рельефа местности. Особенно опасны стойкие БТХВ нервнопаралитического действия. Их пары распространяются по ветру на довольно большое расстояние (15-25 км и более). Поэтому люди и животные могут быть поражены ими не только в районе применения химических боеприпасов, но и далеко за его пределами. Длительность поражающего действия БТХВ тем меньше, чем сильнее ветер и восходящие потоки воздуха. В лесах, парках, оврагах, на узких улицах они сохраняются дольше, чем на открытой местности. Современные отравляющие вещества обладают чрезвычайно высокой токсичностью.

При обнаружении признаков применения противником отравляющих веществ, далее ОВ (по сигналу «Химическая тревога») надо срочно надеть противогаз, а в случае необходимости - средства защиты кожи. Если поблизости имеется убежище, нужно укрыться в нем. Перед тем как войти в убежище, следует снять использованные средства защиты кожи и верхнюю одежду и оставить их в тамбуре убежища. Эта мера предосторожности исключает занос ОВ в убежище. Противогаз снимают после входа в убежище.

При пользовании укрытием, например, подвалом, не следует забывать, что оно м служить защитой лишь от попадания на кожные покровы и одежду капельножидких ОВ. Однако оно не защищает от паров или аэрозолей отравляющих веществ, находящихся в воздухе. Находясь в таких укрытиях, при наружном заражении обязательно надо воспользоваться противогазом. Находиться в убежище (укрытии) следует до получения распоряжения на выход из него. Когда такое распоряжение поступит, необходимо надеть требуемые средства индивидуальной защиты - противогазы и средства защиты кожи и выйти за пределы очага поражения по направлениям, обозначенным специальными указателями. Если нет ни указателей, ни постов, то двигаться следует перпендикулярно направлению ветра.

На зараженной ОВ территории надо двигаться быстро, но не пыль (брызги). Нельзя прислоняться к зданиям и прикасаться к окружающим предметам. Не следует наступать на видимые капли и мазки ОВ. На зараженной территории запрещается снимать противогазы и другие средства защиты. Особо осторожно нужно двигаться через парки, сады, огороды и поля. На листьях и ветках растений могут находиться осевшие капли ОВ, при прикосновении к ним можно заразить одежду и обувь, что может привести к поражению.

По возможности следует избегать движения оврагами и лощинами, через луга и болота, в этих местах возможен длительный застой паров ОВ. В городах пары ОВ могут застаиваться в замкнутых кварталах, парках, а также в подъездах и на чердаках домов. Зараженное облако в городе распространяется на наибольшие расстояния по улицам,тоннелям, трубопроводам.

ОВ на кожных покровах, одежде, обуви или средствах индивидуальной защиты необходимо немедленно снять их тампонами из марли или ваты; если таких тампонов нет, капли ОВ можно снять тампонами из бумаги или ветоши. Пораженные места следует обработать раствором из противохимического пакета или тщательно промыть теплой водой с мылом. После выхода из очага

химического поражения немедленно проводится полная санитарная обработка. Если это невозможно, проводятся частичные дегазация и санитарная обработка.

Очагом биологического поражения считаются территорииподвергшиеся непосредственному воздействию бактериальных (биологических) средств, создающих источник распространения инфекционных заболеваний. Заражение людей и животных происходит в результате вдыхания зараженного воздуха, попадания микробов или токсинов на слизистую оболочку и поврежденную кожу, употребления в пищу зараженных продуктов питания и воды.

Причиной заражения могут быть укусы зараженных насекомых и клещей, соприкосновения с зараженными предметами, ранения осколками боеприпасов, снаряженных БС (биологические средства поражения - общее название болезнетворных микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности, предназначенных для использования в системах биологического оружия с целью поражения людей, животных и растений). Заражение возможно также в результате непосредственного общения с больными людьми (животными). Ряд заболеваний быстро передается от больных людей к здоровым и вызывает эпидемии (чума, холера, тиф, грипп и др.). К основным средствам защиты населения от биологического оружия относятся вакциносывороточные препараты, антибиотики, сульфамидные и другие лекарственные вещества, используемые для специальной и экстренной профилактики инфекционных болезней.

Употребимы такие средства индивидуальной и коллективной защиты. Своевременное и правильное применение средств индивидуальной защиты и защитных сооружений предохранит от попадания БС в органы дыхания, на кожные покровы и одежду. Необходимо строгое соблюдение правил личной гигиены и санитарно-гигиенических требований к питанию и водоснабжению населения. Приготовление и прием питии должны исключать возможность ее заражения бактериальными средствами. Посуду необходимо мыть дезинфицирующими растворами или обрабатывать кипячением. В случае

применения противником биологического оружия возможно возникновение значительного количества инфекционных заболеваний.

Основными формами борьбы с эпидемиями являются обсервация и карантин. Делается это в тех случаях, когда примененные возбудители болезней относятся к особо опасным (чума, холера и др.). Карантинный режим предусматривает полную изоляцию очага поражения от окружающего населения. Это наиболее эффективный способ противодействия распространению инфекционных заболеваний. На внешних границах зоны карантина устанавливается вооруженная охрана, выход людей, вывод животных и вывоз имущества запрещаются. Транзитный проезд транспорта через очаги поражения запрещается. Объекты экономики переходят на особый режим работы со строгим выполнением противоэпидемических требований. Рабочие смены разбиваются на отдельные группы как можно более малочисленные по составу. Контакт между ними сокращается до минимума. Питание и отдых рабочих и служащих организуются по группам в специально отведенных для этого помещениях. Работа учебных заведений, зрелищных учреждений, рынков и т.д. прекращается. Людям не разрешается без крайней необходимости выходить их своих квартир. Продукты питания, вода и предметы первой необходимости доставляются им специальными командами.

При выполнении срочных работ вне зданий люди должны быть обязательно в средствах индивидуальной защиты. Если установленный вид возбудителя не относится к группе особо опасных, вместо карантина применяется обсервация. Она предусматривает медицинское наблюдение за очагом поражения и проведение необходимых лечебно-профилактических мероприятий. Изоляционно-ограничительные меры при обсервации менее строгие: организуются дезинфекция, дезинсекция и дератизация.

Дезинфекция имеет целью обеззараживание объектов внешней среды, которые необходимы для нормальной деятельности и безопасного нахождения

людей. Для дезинфекции применяются растворы хлорной извести и хлорамина, лизол, формалин, могут использоваться горячая вода (с мылом или содой) и пар.

Дезинсекция и дератизация-это мероприятия, связанные соответственно с уничтожением насекомых и истреблением грызунов, которые являются переносчиками инфекционных заболеваний. Для уничтожения насекомых применяют физические (кипячение, проглаживание накаленным утюгом и др.), химические (применение дезинсектирующих средств) и комбинированные способы.

Истребление грызунов в большинстве случаев проводят с помощью механических приспособлений (ловушек различных типов) и химических препаратов. После проведения дезинфекции, дезинсекции и дератизации проводится полная санитарная обработка лиц, принимавших участие в осуществлении названных мероприятий. При необходимости организуется санитарная обработка и остального населения.

Контрольные вопросы

1. Перечислите СИЗОД.

2. Перечислите СИЗ кожи.

3. Назовите порядок изготовления ВМП.

4. При каких опасностях используются индивидуальные средства защиты?

5. Что является основным средством защиты при угрозе применения ядерного оружия?

6. Что относится к основным средством защиты населения от биологического оружия?

7.Какие индивидуальные средства защиты применяются при химической угрозе?

8. Какие действия предполагает санитарная обработка?

9. В чем отличие дезинфекции от дезинсекции?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Косолапова Н.В. Основы безопасности жизнедеятельности: учебник / Н.В. Косолапова, Н.А. Прокопенко. – 3-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013. – 320 с.: ил.

2. Безопасности жизнедеятельности: учебник / Е.А. Арустамов. – 9-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013 с.: ис.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Физической культуры	Горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Шулиманов Д.Ф.	Барановский В.П
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 14 от 03.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

Содержание

Цели и задачи дисциплины ……..3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы …….3
Требования к оформлению теста ……..……..3
Содержание теста…….3
Содержание опроса…….9
Выполнение работы над ошибками……..……..11

Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений

		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма

21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Критерии оценивания теста

Оценка за тест определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат теста

Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.

24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.
25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.

86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.
87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
91. Студенческие спортивные соревнования.
92. Студенческие спортивные организации.
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Одобрена на заседании кафедры

Физической культуры
(название кафедры)

Зав. кафедрой _____
(подпись)

Шулиманов Д.Ф.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 14 от 03.04.2019
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

Горно-технологического факультета
(название факультета)

Председатель _____
(подпись)

Барановский В.П
(Фамилия И.О.)

Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом ……..3
1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий ……...3
1.1.1. Утренняя физическая гимнастика……3
1.1.2. Упражнения в течение учебного дня……4
1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия……..4
1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий……5
1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин……6
1.2 Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма……..7
1.2.1 Оценка физического развития……...9
1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности)..……10
2. Другие виды самостоятельной работы
2.1 Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности……12
2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 м)……12
2.1.2 Техника выполнения упражнения……...12
2.1.3 Методы самостоятельной тренировки……..13
2.1.4. Средства тренировки быстроты……..13
2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива……...14
2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин ……...15
2.2.1. Техника выполнения упражнения……..15
2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин……...15
2.3.1. Техника выполнения упражнения……..15
2.3.2. Методы развития силы……16
2.4. Тест на общую выносливость (бег 2000 и 3000 м)……..17
2.4.1. Техника бега на длинные дистанции……..17
2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения Самостоятельных тренировок……..18
3.Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности……...…….…..21

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом

1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий

Планирование самостоятельных занятий осуществляется студентами при консультации преподавателей и должно быть направлено на достижение единой цели – сохранение хорошего здоровья, поддержание высокого уровня физической и умственной работоспособности, достижение поставленной задачи.

Существуют три формы самостоятельных занятий:

1. Утренняя физическая гимнастика (УФГ).

2. Упражнения в течение учебного (рабочего) дня.

3. Самостоятельные тренировочные занятия.

1.1.1. Утренняя физическая гимнастика

Выполняется ежедневно. В комплекс УФГ следует включать упражнения для всех групп мышц, упражнения на гибкость и дыхание, бег, бег (прыжковые упражнения).

Не рекомендуется выполнять:

- упражнения статического характера;

- со значительными отягощениями;

- упражнения на выносливость.

При выполнении УФГ рекомендуется придерживаться определенной последовательности выполнения упражнений:

- медленный бег, ходьба (2-3 мин.);

- потягивающие упражнения в сочетании с глубоким дыханием;

- упражнение на гибкость и подвижность для мышц рук, шеи, туловища и ног;

- силовые упражнения без отягощений или с небольшими отягощениями для рук, туловища, ног (сгибание-разгибание рук в упоре лежа, упражнения с легкими гантелями, с эспандерами);

- различные наклоны в положении стоя, сидя, лежа, приседания на од-ной и двух ногах и др.;

- легкие прыжки или подскоки (например, со скалкой) – 20-30 с.;

- упражнения на расслабление с глубоким дыханием.

При составлении комплексов УФГ рекомендуется физиологическую нагрузку на организм повышать постепенно, с максимумом во второй половине комплекса. К концу выполнения комплекса нагрузка снижается и организм приводится в спокойное состояние.

Между сериями из 2-3 упражнений (а при силовых – после каждого) выполняется упражнение на расслабление или медленный бег (20-30с.).

УФГ должна сочетаться с самомассажем и закаливанием организма. Сразу же после выполнения комплекса УФГ рекомендуется сделать самомассаж основных мышечных групп ног, туловища, рук (5-7 мин.) и выполнить водные процедуры с учетом правил и принципов закаливания.

1.1.2. Упражнения в течение учебного дня

Выполняются в перерывах между учебными и самостоятельными занятиями.

Они обеспечивают предупреждение наступающего утомления, способствуют поддержанию высокой работоспособности на длительное время без перенапряжения.

При выполнении этих упражнений следует придерживаться следующих правил:

1. Проводить в хорошо проветренных помещениях или на открытом воздухе.

2. Растягивать и расслаблять мышцы, испытывающие статическую нагрузку.

3. Нагружать неработающие мышцы.

1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия

Можно проводить индивидуально или в группе из 3-5 человек и более. Групповая тренировка более эффективна, чем индивидуальная. Заниматься рекомендуется 3-4 раза в неделю по 1,5 -2 часа. Заниматься менее двух раз в неделю нецелесообразно, т.к. это не способствует повышению уровня тренированности организма. Тренировочные занятия должны носить комплексный характер, т.е. способствовать развитию всего комплекса физических качеств, а также укреплению здоровья и повышению общей работоспособности организма.

Каждое самостоятельное тренировочное занятие состоит из трех частей:

1. Подготовительная часть (разминка) (15-20 мин. для одночасового занятия): ходьба (2-3 мин.), медленный бег (8-10 мин.), общеразвивающие упражнения на все группы мышц, соблюдая последовательность «сверху вниз», затем выполняются специально-подготовительные упражнения, выбор которых зависит от содержания основной части.

2. В основной части (30-40 мин.) изучаются спортивная техника и тактика, осуществляется тренировка развития физических, волевых качеств. При выполнении упражнений в основной части занятия необходимо придерживаться следующей последовательности:

После разминки выполняются упражнения, направленные на изучение и совершенствование техники, и упражнения на быстроту, затем упражнения для развития силы и в конце основной части занятия – для развития выносливости.

3. В заключительной части (5-10 мин.) выполняются медленный бег (3-8 мин.), переходящий в ходьбу (2-6 мин.), упражнения на расслабление в сочетании с глубоким дыханием, которые обеспечивают постепенное снижение тренировочной нагрузки и приведение организма в сравнительно спокойное состояние.

1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий

Методические принципы, которыми необходимо руководствоваться при проведении самостоятельных тренировочных занятий, следующие:

- принцип сознательности и активности предполагает углубленное изучение занимающимися теории и методики спортивной тренировки, осознанное отношение к тренировочному процессу, понимание целей и задач занятий, рациональное применение средств и методов тренировки в каждом занятии, учет объема и интенсивности выполняемых упражнений и физических нагрузок, умение анализировать и оценивать итоги тренировочных занятий;

- принцип систематичности требует непрерывности тренировочного процесса, рационального чередования физических нагрузок и отдыха, преемственности и последовательности тренировочных нагрузок от занятия к занятию. Эпизодические занятия или занятия с большими перерывами (более 4-5 дней) неэффективны и приводят к снижению достигнутого уровня тренированности;

- принцип доступности и индивидуализации обязывает планировать и включать в каждое тренировочное занятие физические упражнения, по своей сложности и интенсивности доступные для выполнения занимающимися. При определении содержания тренировочных занятий необходимо соблюдать правила: от простого – к сложному, от легкого – к трудному, от известного – к неизвестному, а также осуществлять учет индивидуальных особенностей занимающихся: пол, возраст, физическую подготовленность, уровень здоровья, волевые качества, трудолюбие, тип высшей нервной деятельности и т.п. Подбор упражнений, объем и интенсивность тренировочных нагрузок нужно осуществлять в соответствии с силами и возможностями организма занимающихся;

- принцип динамичности и постепенности определяет необходимость повышения требований к занимающимся, применение новых, более сложных физических упражнений, увеличение тренировочных нагрузок по объему и интенсивности. Переход к более высоким тренировочным нагрузкам должен проходить постепенно с учетом функциональных возможностей и индивидуальных особенностей занимающихся.

Если в тренировочных занятиях был перерыв по причине болезни, то начинать занятия следует после разрешения врача при строгом соблюдении принципа постепенности. Вначале тренировочные нагрузки значительно снижаются и постепенно доводятся до занимающегося в тренировочном плане уровня.

Все выше перечисленные принципы находятся в тесной взаимосвязи. Это различные стороны единого, целостного повышения функциональных возможностей занимающихся.

1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин

Организм женщины имеет анатомо-физиологические особенности, которые необходимо учитывать при проведении самостоятельных занятий физическими упражнениями или спортивной тренировки. В отличие от мужского, у женского организма менее прочное строение костей, ниже общее развитие мускулатуры тела, более широкий тазовый пояс и мощнее мускулатура тазового дна. Для здоровья женщины большое значение имеет развитие мышц брюшного пресса, спины и тазового дна. От их развития зависит нормальное положение внутренних органов. Особенно важно развитие мышц тазового дна.

Одной из причин недостаточного развития этих мышц у студенток и работниц умственного труда является малоподвижный образ жизни. При положении сидя мышцы тазового дна не противодействуют внутрибрюшному давлению и растягиваются от тяжести лежащих над ними органов. В связи с этим мышцы теряют свою эластичность и прочность, что может привести к нежелательным изменениям положения внутренних органов и к ухудшению их функциональной деятельности.

Ряд характерных для организма женщины особенностей имеется и в деятельности сердечно-сосудистой, дыхательной, нервной и других систем. Все это выражается более продолжительным периодом восстановления организма после физической нагрузки, а также более быстрой потерей состояния тренированности при прекращении тренировок.

Особенности женского организма должны строго учитываться в организации, содержании, методике проведения самостоятельных занятий. Подбор физических упражнений, их характер и интенсивность должны соответствовать физической подготовленности, возрасту, индивидуальным возможностям студенток. Необходимо исключать случаи форсирования тренировок для того, чтобы быстро достичь высоких результатов. Разминку следует проводить более тщательно и более продолжительно, чем при занятиях мужчин. Рекомендуется остерегаться резких сотрясений, мгновенных напряжений и усилий, например, при занятиях прыжками и в упражнениях с отягощением. Полезны упражнения, в положении сидя, и лежа на спине с подниманием, отведением, приведением и круговыми движениями ног, с подниманием ног и таза до положения «березка», различного рода приседания.

Даже для хорошо физически подготовленных студенток рекомендуется исключить упражнения, вызывающие повышение внутрибрюшного давления и затрудняющие деятельность органов брюшной полости и малого таза. К таким упражнениям относятся прыжки в глубину, поднимание больших тяжестей и другие, сопровождающиеся задержкой дыхания и натуживанием.

При выполнении упражнений на силу и быстроту движений следует более постепенно увеличивать тренировочную нагрузку, более плавно доводить ее до оптимальных пределов, чем при занятиях мужчин.

Упражнения с отягощениями применяются с небольшими весами, сериями по 8-12 движений с вовлечением в работу различных мышечных групп. В интервалах между сериями выполняются упражнения на расслабление с глубоким дыханием и другие упражнения, обеспечивающие активный отдых.

Функциональные возможности аппарата кровообращения и дыхания у девушек и женщин значительно ниже, чем у юношей и мужчин, поэтому нагрузка на выносливость для девушек и женщин должна быть меньше по объему и повышаться на более продолжительном отрезке времени.

Женщинам при занятиях физическими упражнениями и спортом следует особенно внимательно осуществлять самоконтроль. Необходимо наблюдать за влиянием занятий на течение овариально-менструального цикла и характер его изменения. Во всех случаях неблагоприятных отклонений необходимо обращаться к врачу.

Женщинам противопоказаны физические нагрузки, спортивная тренировка и участие в спортивных соревнованиях в период беременности. После родов к занятиям физическими упражнениями и спортом рекомендуется приступать не ранее чем через 8-10 месяцев.

1.2. Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма

Данные самоконтроля записываются в дневник, они помогают контролировать и регулировать правильность подбора средств, методику проведения учебно-тренировочных занятий. У отдельных занимающихся количество показателей самоконтроля в дневнике и порядок записи могут быть различными, но одинаково важно для всех правильно оценивать отдельные показатели, лаконично фиксировать их в дневнике.

В дневнике самоконтроля рекомендуется регулярно регистрировать:

- субъективные данные (самочувствие, сон, аппетит, болевые ощущения);

- объективные данные (частота сердечных сокращений (ЧСС), масса тела, тренировочные нагрузки, нарушения режима, спортивные результаты).

Субъективные данные:

Самочувствие - отмечается как хорошее, удовлетворительное или плохое. При плохом самочувствии фиксируется характер необычных ощущений.

Сон - отмечается продолжительность и глубина сна, его нарушения (трудное засыпание, беспокойный сон, бессонница, недосыпание и др.).

Аппетит - Отмечается как хороший, удовлетворительный, пониженный и плохой. Различные отклонения состояния здоровья быстро отражаются, поэтому его ухудшение, как правило, является результатом переутомления или заболевания.

Болевые ощущения - фиксируются по месту их локализации, характеру (острые, тупые, режущие и т.п.) и силе проявления.

Объективные данные:

ЧСС – важный показатель состояния организма. Его рекомендуется подсчитывать регулярно, в одно и то же время суток, в покое. Лучше всего утром, лежа, после пробуждения, а также до тренировки (за 3-5 мин) и сразу после спортивной тренировки.

Нормальными считаются следующие показатели ЧСС в покое:

- мужчины (тренированные/не тренированные) 50-60/70-80;

- женщины (тренированные/не тренированные) 60-70/75-85.

С увеличением тренированности ЧСС понижается.

Интенсивность физической нагрузки также определяться по ЧСС, которая измеряется сразу после выполнения упражнений.

При занятиях физическими упражнениями рекомендуется придерживаться следующей градации интенсивности:

- малая интенсивность – ЧСС до 130 уд/мин. При этой интенсивности эффективного воспитания выносливости не происходит, однако создаются предпосылки для этого, расширяется сеть кровеносных сосудов в скелетных мышцах и в сердечной мышце (целесообразно применять при выполнении разминки);

- средняя интенсивность от 130 до 150 уд/мин.;

- большая интенсивность – ЧСС от 150 до 180 уд/мин. В этой тренировочной зоне интенсивности к аэробным механизмам подключаются анаэробные механизмы энергообеспечения, когда энергия образуется при распаде энергетических веществ в условиях недостатка кислорода;

- предельная интенсивность – ЧСС 180 уд/мин. и больше. В этой зоне интенсивности совершенствуются анаэробные механизмы энергообеспечения.

Существенным моментом при использовании ЧСС для дозирования нагрузки является ее зависимость от возраста.

Известно, что по мере старения уменьшается возможность усиления сердечной деятельности за счет учащения сокращения сердца во время мышечной работы. Оптимальную ЧСС с учетом возраста при продолжительных упражнениях можно определить по формулам:

- для начинающих: ЧСС (оптимальная) = 170 – возраст (в годах)

- для занимающихся регулярно в течении 1-2 лет:

- ЧСС (оптимальная) = 180 – возраст (в годах)

Зависимость максимальной величины ЧСС от возраста при тренировке на выносливость можно определить по формуле:

- ЧСС (максимальная) = 220 – возраст (в годах)

Например, для занимающихся в возрасте 18 лет максимальная ЧСС будет равна 220-18=202 уд/мин.

Важным показателем приспособленности организма к нагрузкам является скорость восстановления ЧСС сразу после окончания нагрузки. Для этого определяется ЧСС в первые 10 секунд после окончания нагрузки, пересчитывается на 1 мин. и принимается за 100%. Хорошей реакцией восстановления считается:

- снижение через 1 мин. на 20%;

- через 3 мин. – на 30%;

- через 5 мин. – на 50%,

- через 10 мин. – на 70 – 75%. (отдых в виде медленной ходьбы).

Масса тела должна определяться периодически (1-2 раза в месяц) утром натощак, на одних и тех же весах. В первом периоде тренировки масса обычно снижается, а затем стабилизируется и в дальнейшем за счет прироста мышечной массы несколько увеличивается. При резком снижении массы тела следует обратиться к врачу.

Тренировочные нагрузки в дневник самоконтроля записываются коротко, вместе с другими показателями самоконтроля они дают возможность объяснить различные отклонения в состоянии организма.

Спортивные результаты показывают, правильно ли применяются средства и методы тренировочных занятий. Их анализ может выявить дополнительные резервы для роста физической подготовленности и спортивного мастерства.

В процессе занятий физическими упражнениями рекомендуется периодически оценивать уровень своего физического развития и физической (функциональной) подготовленности.

1.2.1. Оценка физического развития

Проводится с помощью антропометрических измерений: рост стоя и сидя, масса тела, окружность грудной клетки, жизненная емкость легких (ЖЁЛ) и сила кисти сильнейшей руки, которые дают возможность определить:

- уровень и особенности физического развития;

- степень его соответствия полу и возрасту;

- имеющиеся отклонения;

- улучшение физического развития под воздействием занятий физическими упражнениями.

Применяются следующие антропометрические индексы:

- Весо-ростовой показатель

- ВРП= масса тела (грамм.)/длина тела (см.)

Хорошая оценка:

- для женщин 360-405 г/см.;

- для мужчин 380-415 г/см.

Индекс Брока

Оптимальная масса тела для людей ростом от 155 до 165 см. равна длине тела в сантиметрах минус 100. При росте 165-175 см. вычитают 105, при росте более 175 см. – 110.

Силовой показатель (СП)

Показывает соотношение между массой тела и мышечной силой. Обычно, чем больше мышечная масса, тем больше сила. Силовой показатель определяется по формуле и выражается в процентах:

$$\frac{\text{сила (кг)}}{\text{общая масса тела (кг)}} \times 100$$

Для сильнейшей руки:

- для мужчин - 65-80%

- для женщин - 48-50%.

1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности)

Определение резервных возможностей организма

Осуществляется с помощью физиологических проб сердечно-сосудистой (ССС) и дыхательной (ДС) систем.

Общее требования:

1. Проводить в одно и то же время суток.

2. Не ранее чем через 2 часа после приема пищи.

3. При температуре 18-20 градусов, влажности менее 60%.

Функциональная проба с приседанием

Проверяемый отдыхает стоя 3 мин., на 4-й мин. подсчитывается ЧСС за 15 с. с пересчетом на 1 мин. (исходная частота). Далее выполняется 20 приседаний за 40 с., поднимая руки вперед. Сразу после приседаний подсчитывается ЧСС в течение первых 15 с. с пересчетом на 1 мин. Определяется увеличение ЧСС после приседаний сравнительно с исходной в процентах.

Оценка:

- отлично – до 20%;

- хорошо – 20-40%;

- удовлетворительно – 40-65%;

- плохо – 66-75%;

- более 75%.

Ортостатическая проба

Применяется для оценки сосудистого тонуса.

Отдых 5 минут в положении лежа, подсчитывают ЧСС в положении лежа за 1 мин. (исходная ЧСС), после чего занимающийся встает, и снова подсчитывает пульс за 1 мин.

Оценка:

- «хорошо» - не более 11 ударов (чем меньше разница, тем лучше);

- «удовлетворительно» - от 12 до 18 ударов (потливость);

- «неудовлетворительно» - более 19 ударов (потливость, шум в ушах).

Проба Штанге (задержка дыхания на вдохе),

проба Генча (задержка дыхания на вдохе)

Оценивается устойчивость организма к недостатку кислорода, а также общий уровень тренированности.

После 5 мин. отдыха сидя, сделать 2-3 глубоких вдоха и выдоха, затем сделать полный вдох (выдох) и задержать дыхание. Отмечается время от момента задержания дыхания до ее прекращения.

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	90 сек	80 сек
Хорошо	80-89 сек	70-79 сек
Удовлетворительно	50-79 сек	40-69 сек
Неудовлетворительно	50 и ниже	40 и ниже

Проба Генча

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	45 сек	35 сек
Хорошо	40-44 сек	30-34 сек
Удовлетворительно	30-39 сек	20-29 сек
Неудовлетворительно	30 и ниже	20 и ниже

С нарастанием тренированности время задержания дыхания возрастает, при снижении или отсутствии тренированности – снижается.

Самоконтроль прививает занимающимся грамотное и осмысленное отношение к своему здоровью и к знаниям физической культурой и спортом, имеет большое воспитательное значение.

2. Другие виды самостоятельной работы

2.1. Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности

2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 метров)

Нормативы:

- у студенток нормативы в беге на 100 метров следующие: 15.7 сек - 5 очков; 16,0 - 4; 17,0 -3; 17,9 - 2; 18,7 - 1.

- студенты должны показать результаты в следующих пределах: 13,2 сек - 5 очков; 13,8 - 4; 14,0 - 3; 14,3 - 2; 14,6 - 1.

2.1.2. Техника выполнения упражнения

При анализе бега на 100 м. принято выделять следующие основные фазы:

- старт и стартовый разгон;

- бег по дистанции;

- финиширование.

Старт и стартовый разгон

Существует два вида старта: низкий и высокий. Экспериментальные данные показывают, что новичкам и спортсменам 2-го разряда лучше применять высокий старт. Такая закономерность наблюдается до результата 11,4-11,6 с. и объясняется технической сложностью низкого старта. Поэтому следует ограничиться только овладением техникой высокого старта.

По команде «На старт» занимающийся подходит к стартовой линии, ставит сильнейшую (толчковую ногу) вплотную к линии, маховая нога располагается на 1,5-2 стопы назад на носок, расстояние между ними 15-20 см. Туловище выпрямлено, руки опущены, вес тела распределяется равномерно на обе ноги.

По команде «Внимание» вес тела переносится на впереди согнутую стоящую ногу, разноименная рука вперед. Проекция плеч находится за стартовой линией на расстоянии 5-8 см. Взгляд направлен вперед - вниз.

По команде «Марш» бегун мощно разгибает толчковую ногу и стремится максимально быстро вынести маховую ногу вперед с постановкой ее сверху вниз на дорожку. Руки работают максимально активно, плечевой пояс не закрепощен, кисти расслаблены. Стартовый разгон характеризуется постепенным увеличением длины шагов, уменьшением наклона туловища и приближением стоп к средней линии.

Бег по дистанции

Перед бегущим стоит задача удержать развитую горизонтальную скорость до финиша. Этому будет способствовать сохранение длины и частоты шагов.

Во время бега маховая нога ставится с носка спереди проекции общего центра тяжести тела (ОЦТТ) сверху вниз. Взаимодействие маховой ноги с грунтом называется передним толчком. Задний толчок выполняется мощным разгибанием бедра и сгибанием стопы. Голова держится прямо. Руки согнуты (угол сгибания в локтевых суставах примерно 90 град.).

При движении руки вперед кисть поднимается до уровня плеч. Назад рука отводится до «отказа» и угол сгибания в локтевом суставе увеличивается. Пальцы рук слегка согнуты.

Финиширование

Наклон туловища увеличивается. На последних метрах дистанции необходимо стремиться не потерять свободы движений и пробегать финиш без снижения скорости.

2.1.3. Методы самостоятельной тренировки

- Повторный метод - повторное выполнение упражнений с около-предельной и предельной скоростью. Отдых продолжается до восстановления. Упражнения повторяются до тех пор, пока скорость не начнет снижаться.

- Переменный метод - когда пробегаются дистанции, например, с варьированием скорости и ускорения. Цель - исключить стабилизацию скорости («скоростной барьер»).

- Соревновательный метод - предполагает выполнение упражнений на быстроту в условиях соревнований. Эмоциональный подъем на соревнованиях способствует мобилизации на максимальные проявления быстроты, позволяет выйти на новый рубеж скорости.

2.1.4. Средства тренировки быстроты

Частоту движений, а вместе с ней и быстроту циклических движений развивают с помощью упражнений, которые можно выполнять с максимальной скоростью, а также с помощью скоростно-силовых упражнений для ациклических движений. При этом упражнения должны отвечать следующим требованиям:

- техника упражнений должна обеспечивать выполнение движений на предельных скоростях;

- упражнения должны быть хорошо освоены, чтобы не требовалось волевого усилия для их выполнения;

- продолжительность упражнений должна быть такой, чтобы скорость не снижалась вследствие утомления - 20-22 с.

Основным средством отработки бега по дистанции является бег с максимальной скоростью. Такой бег выполняется 5-6 раз по 30-40 метров. В тренировке можно чередовать бег в обычных, облегченных (с горки, угол 4-5 град.) и затрудненных (в горку или с сопротивлением) условиях.

Для развития скоростной выносливости рекомендуется пробегать большую дистанцию (120-150 м), когда очередная пробежка начинается при пульсе 120 уд/мин.

Для тренировки в беге на 100 метров следует использовать кроссы (6 км, 30 мин), повторный бег на отрезках 200 м в 3/4 силы. Спортивные игры (баскетбол, футбол) также приносят пользу в развитии быстроты.

Можно рекомендовать и упрощенную методику, обеспечивающую минимально необходимый уровень подготовленности:

- повторный метод - в одном занятии 3-4 пробегания по 20-30 метров с максимальной скоростью и интервалами отдыха для восстановления пульса до 110-120 уд/мин;

- переменный метод - пробегание 2-х отрезков по 30 метров с максимальной скоростью и последующим переходом на спокойный бег 150--200 метров. Выполняется 3-4 подхода.

Для ощутимого сдвига в подготовленности такие тренировки рекомендуется проводить 3-4 раза в неделю.

2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива

При подготовке к сдаче бега на 100 метров следует учитывать общие требования по питанию при занятиях физическими упражнениями:

1. По времени - прием пищи не менее чем за 2-3 часа.

2. По составу - не есть тяжелой пищи (мясо, яйца, масло, молочные продукты, жирную, долго перевариваемую пищу).

Не рекомендуется выходить на старт с переполненным желудком.

Непосредственно перед сдачей норматива необходимо провести разминку с использованием специальных упражнений:

1. Бег с высоким подниманием бедра.

2. Бег с «захлестыванием» голеней назад.

3. Семенящий бег.

4. Прыжки с ноги на ногу (шаги).

5. Бег в упоре стоя у гимнастической стенки.

6. Бег с ускорением с высокого старта с подачей стартовых команд (2-3 ускорения по 10-15 метров).

Разминка заканчивается за 10 минут до старта.

Непосредственно перед стартом нельзя отдыхать лежа, сидя, необходимо постоянно находиться в движении (прохаживаться, выполнять упражнения на растяжку). Частота сердечных сокращений непосредственно перед стартом должна быть 110 – 120 уд/мин.

Психологическая подготовка заключается в мысленном «прокручивании» в голове этапов преодоления дистанции: старта, стартового разбега, бега по дистанции, финиширования с концентрацией внимания на технике выполнения каждого этапа.

При выполнении теста не разрешается:

- наступать на линию старта (стартовая линия входит в дистанцию);

- перебегать на соседние дорожки.

2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин

(поднимание (сед) и опускание туловища из положения лежа, ноги закреплены, руки за головой)

Нормативы: 60 раз - 5 очков, 50 - 4, 40 - 3, 30 - 2, 20 - 1.

Это упражнение используется для оценки развития мышц живота (брюшного пресса).

О мышцах брюшного пресса следует сказать особо. Эта группа мышц участвует в большинстве движений. Она создает хороший «мышечный корсет», охватывающий брюшную полость и способствующий нормальному функционированию внутренних органов, что положительно влияет на состояние здоровья.

2.2.1. Техника выполнения упражнения

И.п. (исходное положение) – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, стопы прижаты к полу, руки в замок за головой, локти разведены.

Это силовое упражнение состоит из 4-х фаз:

- поднимание туловища;

- фиксация его в вертикальном положении;

- опускание;

- пауза в горизонтальном положении.

Голова держится прямо, локти в стороны, дыхание ритмично.

2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин (подтягивание на перекладине)

Учебной программой по физической культуре предусмотрено тестирование студентов для определения уровня их силового развития. Нормативы следующие: 15 раз - 5 очков, 12 - 4, 9 - 3, 7 - 2, 5 - 1;

2.3.1. Техника выполнения упражнения

Каждый цикл подтягивания в висе на перекладине включает:

- исходное положение - вис на вытянутых руках хватом сверху (большими пальцами внутрь);

- подъем до пересечения подбородком линии перекладины;

- опускание в исходное положение.

При выполнении теста разрешается сгибание, разведение ног, запрещаются рывковые движения туловищем и руками, хлестовые движения ногами. Выполнение засчитывается только при полном выпрямлении рук в локтевых суставах.

Наиболее экономично подтягивание при хвате рук на ширине плеч. Если кисти рук расположены ближе друг к другу, то положение тела становится менее устойчивым и отклонения

придется компенсировать за счет дополнительных мышечных усилий, что будет увеличивать энерготраты и снижать результат. Возрастают энерготраты и при широком хвате (шире плеч). Это связано с тем, что для фиксации лопаток при широком хвате требуется большая, чем при хвате на ширине плеч, сила мышц, приближающих лопатки к позвоночному столбу.

Опускание в вис (в исходное положение) после подтягивания должно выполняться спокойно. Дыхание не задерживается.

2.3.2. Методы развития силы

На практике распространены следующие методы силовой подготовки:

- метод максимальных усилий;

- метод повторных усилий;

- метод динамических усилий.

Согласно методу максимальных усилий выполнение упражнений организуется таким образом, чтобы занимающийся смог подтянуться 1-3 раза в одном подходе (при условии, что он способен самостоятельно подтянуться как минимум 2-3 раза). Такое достигается за счет применения дополнительного внешнего отягощения. Делается 5-6 подходов с перерывами 2-4 минуты.

По методу повторных усилий подтягивания в одном подходе выполняются до «отказа». Если занимающийся имеет максимальный индивидуальный показатель 10-15 подтягиваний и более, то следует применять отягощение весом 30-70% от максимального. Например, занимающийся может подтянуться 1 раз с максимальным отягощением 10 кг. Значит, для тренировки по методу повторных усилий следует подобрать вес отягощения 3-7 кг. Выполняется 3-6 подходов с отдыхом между ними 2-4 мин.

Разнообразить упражнения можно, применяя метод динамических усилий. Если занимающийся легко выполняет 10-15 подтягиваний, то следует применять отягощения до 30% от максимального. В одном подходе 10-15 повторений. Темп - максимально быстрый. Всего 3-6 подходов. Во время отдыха следует добиваться наиболее полного восстановления, чтобы в следующем подходе выполнить упражнение без существенной потери скорости.

Сравнивая динамический и статический методы развития силы, необходимо отметить следующее:

- При динамическом режиме работы мышц происходит достаточное кровоснабжение. Мышца функционирует как насос - при расслаблении наполняется кровью и получает кислород и питательные вещества.

- Во время статического усилия мышца постоянно напряжена и непрерывно давит на кровеносные сосуды. В результате она не получает кислород и питательные вещества. Это ограничивает продолжительность работы мышц.

2.4. Тест на общую выносливость - бег 2000 и 3000 метров

Нормативы:

- студентки - бег 2000 метров - 10 мин.15 сек. - 5 очков; 10.50 - 4; 11.15 - 3; 11.50 - 2; 12.15 - 1;

- студенты - бег 3000 метров - 12.00 - 5; 12.35 - 4; 13.10 - 3; 13.50 - 2; 14.00 - 1.

2.4.1. Техника бега на длинные дистанции

Бег на средние и длинные дистанции начинается с высокого старта. По команде «На старт!» бегун ставит у линии более сильную ногу, а другую отставляет назад на носок (на 30 – 50 см), немного сгибает ноги, туловище наклоняет вперед и тяжесть тела переносит на впереди стоящую ногу. По команде «Марш!» бегун начинает бег, делая первые шаги в большом наклоне, который постепенно уменьшается. Длина шагов увеличивается, бег ускоряется, бегун набирает скорость и в короткое время переходит к свободному бегу на дистанции. Бег на дистанции. Во время бега на дистанции туловище вертикально или слегка наклонено вперед (5-7°). Небольшой наклон туловища вперед позволяет лучше использовать силы отталкивания и быстрее продвигаться вперед. Слишком большой наклон приводит к «падающему» бегу, при котором труднее выносить вперед согнутую ногу, в связи с чем уменьшается длина шага, а следовательно, и скорость бега. Кроме того, при большом наклоне постоянно напряжены мышцы, удерживающие туловище от увеличивающегося наклона. Отсутствие наклона ухудшает условия отталкивания, однако улучшает возможность выноса вперед согнутой в коленном суставе свободной ноги. При правильном положении туловища создаются благоприятные условия для работы мышц и внутренних органов. Наклон туловища у бегунов изменяется в пределах 2-3°: увеличивается к моменту отталкивания и уменьшается в полетной фазе. Положение головы существенно влияет на положение туловища. Надо держать голову прямо и смотреть вперед. В фазе отталкивания таз подается вперед, что является важной особенностью техники бега на длинные дистанции и позволяет полнее использовать силу реакции опоры. В технике бега на длинные дистанции важнее всего движения ног. Нога, немного согнутая, ставится на грунт упруго и эластично с передней части стопы, а затем касается его всей стопой. Постановка ноги на переднюю часть стопы позволяет эффективнее использовать эластические свойства мышц голени, активно участвующие в отталкивании. Следы стоп на дорожке у бегунов находятся на одной линии, носки почти не разворачиваются в стороны. Эффективное отталкивание характеризуется выпрямлением ноги во всех суставах. Угол отталкивания в беге на средние дистанции примерно равен 50-55°. При правильном отталкивании таз подан вперед, голень маховой согнутой ноги параллельна бедру толчковой ноги. Быстрый вынос маховой ноги вперед облегчает отталкивание. Бегуны на длинные дистанции меньше поднимают бедро маховой ноги вверх, чем бегуны на средние и короткие дистанции. Длина шага на длинные дистанции не

постоянна даже у одних и тех же бегунов. Колебания зависят от наступившего утомления, неравномерности пробегания отдельных участков дистанции, качества беговой дорожки, ветра и состояния бегуна. Обычно шаг с сильнейшей ноги на несколько сантиметров больше, чем шаг со слабейшей ноги. Длина шага равна 160 – 215 см. Повышение скорости бега за счет увеличения длины шага ограничено, так как слишком длинный шаг требует очень больших затрат сил. Кроме того, длина шага в основном зависит от индивидуальных данных бегуна. Поэтому скорость бега повышают за счет увеличения частоты шагов, которая зависит от тренированности бегуна. Движения плечевого пояса и рук связаны с движениями ног. Выполнять их надо легко, не напряженно. Это во многом зависит от умения расслаблять мышцы плечевого пояса. Движения рук помогают бегуну сохранять равновесие тела во время бега. Амплитуда движения рук зависит от скорости бега. Кисти при движении вперед не пересекают средней линии тела и поднимаются примерно до уровня ключицы. При движении рук назад кисти доходят до задней линии туловища (если смотреть на бегуна сбоку). Руки двигаются маятникообразно, пальцы рук свободно сложены, предплечья не напряжены, плечи не поднимаются вверх. При финишировании, длина которого зависит от дистанции и оставшихся сил бегуна, движения руками делаются быстрее, наклон тела увеличивается, а угол отталкивания уменьшается. Спортсмен переходит на скоростной бег, при котором скорость повышается главным образом за счет увеличения частоты шагов. К концу дистанции вследствие утомления некоторые бегуны наклоняют туловище назад. Такое положение туловища не способствует эффективности бега, так как усилия отталкивания направляются больше вверх. Техника бега на вираже имеет некоторые особенности: туловище немного наклонено влево, к бровке, правая рука движется несколько размашистей левой, причем правый локоть дальше отводится в сторону, а правая стопа ставится с некоторым поворотом внутрь. Ритм дыхания зависит от индивидуальных особенностей и скорости бега (с увеличением скорости бега увеличивается и частота дыхания). Бегун не должен задерживать дыхание. Дышать следует одновременно через нос и полуоткрытый рот, при этом важно следить за полным выдохом.

2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения самостоятельных тренировок

В некоторых случаях тренировка может стать причиной различных осложнений, включая травмы опорно-двигательного аппарата.

Основная причина травматизма опорно-двигательного аппарата - перенапряжение. Слишком быстрое увеличение тренировочных нагрузок является чрезмерным для детренированных мышц, связок и суставов. К дополнительным факторам, способствующим повреждению опорно-двигательного аппарата, можно отнести:

- бег по твердому грунту;
- избыточную массу тела;

- обувь, не пригодную для бега;

-грубые ошибки в технике.

Следовательно, меры по профилактике травм должны быть направлены на устранение или ослабление воздействия этих факторов:

- Во время кроссового бега часто болит в правом боку (печень), либо в левом боку (селезенка). Печень важный орган в жизнедеятельности нашего организма (синтез жиров и углеводов, обмен белков и витаминов) является кровяным депо. Так вот в результате переполнения кровью печени возникают колики. Глубокое дыхание снижает приток крови к правому предсердию, уменьшает болевые ощущения. Бег не надо прекращать, необходимо снизить скорость передвижения и стараться дышать глубже.

- В процессе тренировок после значительного перерыва (отдыха) или при резком увеличении нагрузок могут появляться боли в мышцах, как правило, на другой день. Во время физической работы в организме образуются продукты распада, часть которых выводится из организма через мочевыделительную систему, а другая часть, в том числе, молочная кислота задерживается в мышечных тканях. Чтобы избавиться от нее, необходимо мышцу непосредственно после физической нагрузки заставить растянуться (с помощью упражнений на растяжение), а на следующий день выполнять какую-либо физическую работу, т.е. сокращаться. Эти меры помогут ускорить вывод молочной кислоты из мышц. Боли могут длиться несколько дней и если не предпринимать никаких мер, мышца теряет эластичность, становиться твердой. В этом случае могут помочь: массаж, банные процедуры, применение согревающих мазей и гелей.

- При выполнении напряженной физической работы длительное время, например, кроссовый бег, возникают такие состояния, которые получили название «мертвая точка» и «второе дыхание». Уже через некоторое время бега в организме начинаются изменения, которые заставляют нас прекратить мышечную деятельность. Такое временное снижение работоспособности получило название «мертвая точка». Механизм возникновения такого состояния недостаточно изучен. Предполагают, что он обусловлен временным нарушением деятельности скелетных мышц и органов, обеспечивающих доставку кислорода в организм. Эти нарушения приводят к изменениям в работе нервных центров, что, в свою очередь, приводит к нарушениям в работе отдельных физиологических систем. Время возникновения и продолжительность этого состояния зависит от многих факторов, в частности от длительности и интенсивности физической нагрузки (например, при беге на 5-10 км и более возникает через 5-6 мин бега), от тренированности. Чем лучше тренирован человек, тем позже возникает это состояние и протекает менее тяжело (почти незаметно). Преодоление этого состояния требует значительного волевого усилия. В процессе проведения учебных и тренировочных занятий необходимо приучать себя преодолевать это неприятное ощущение, возникающее при

кислородной недостаточности и накоплении продуктов кислотно-щелочного распада при обмене веществ. Наступлению «второго дыхания» способствуют усиленные дыхательные упражнения, глубокие выдохи, освобождающие организм от накопившейся углекислоты, что способствует наступлению кислотно-щелочного баланса в организме. Преодолеть состояние «мертвой точки» можно, если снизить интенсивность физической нагрузки, но это нежелательно, т.к. не будет адаптации организма к такого рода деятельности.

- При занятиях физическими упражнениями могут возникнуть отклонения в деятельности сердца - учащенное сердцебиение. Оно может быть следствием стенокардии, ссоры, неурядицы в быту, семье, боязни, страха, дистрофий миокарда. Возникновение болей - сигнал опасности, в этих случаях необходимо прекратить занятия и обратиться к врачу.

- Существует состояние, называемое гравитационным шоком. Часто возникает при внезапной остановки после относительно интенсивного бега (чаще после финиша) в связи с прекращением действия «мышечного насоса». Большая масса крови застаивается в раскрытых капиллярах и венах мышц нижних конечностей, на периферии. Возникает анемия (обескровливание) мозга, недостаточное снабжение его кислородом. Появляется резкое побледнение, слабость, головокружение, тошнота, потеря сознания, исчезновение пульса. Пострадавшего необходимо уложить на спину, поднять вверх ноги (выше головы), обеспечив отток венозной крови к сердцу, улучшив снабжение головного мозга кислородом, поднести к носу ватку смоченную нашатырным спиртом. Основная профилактика гравитационного шока - исключение внезапной остановки, постепенное замедление бега.

- Гипогликемическое состояние - следствие недостаточного количества в организме сахара, нарушение углеводного обмена в результате длительной физической нагрузки. Ощущается сильный голод, головокружение, иногда потеря сознания. Профилактика – легко усваиваемые углеводы до начала длительной физической нагрузки (немного сахара, меда и т.п.) или специальные питательные смеси.

- Солнечный и тепловой удары - возникают при длительной работе под действием солнечных лучей на обнаженную голову или тело. Тепловой удар - остро развивающееся болезненное состояние, обусловленное перегреванием организма. Его признаками являются: усталость, головная боль, слабость, боли в ногах, спине, тошнота, шум в ушах, повышение температуры, потемнение в глазах, ухудшение дыхания (прерывистое), потеря сознания.

Первая помощь: пострадавшего поместить в прохладное место, снять одежду, приподнять голову, охладить область сердца (холодный компресс), напоить. Дать понюхать нашатырный спирт, сердечные средства. При нарушении дыхания сделать искусственное дыхание.

При обморожениях на охлажденном участке вначале чувствуется легкое пощипывание, затем чувствительность теряется. Особенно поддаются ему пальцы рук, ног, нос, уши. Если

произошло обморожение нельзя растирать пораженные места снегом, это только повредит кожу. Необходимо поместить обмороженный участок в тепло не растирать, а согревать при комнатной температуре. Обмороженные места смазать жиром (вазелином).

3. Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности

Выполнение контрольных нормативов требует от студента мобилизации всех своих сил и здесь следует принимать во внимание и учитывать все что может повлиять на конечный результат, в том числе характер учебно-познавательной деятельности предшествующий зачетному занятию.

В течение учебного дня, занимаясь то одним видом учебно-познавательной деятельности, то другим, обучающиеся должны переключаться с выполнения одного вида задач на другой, и каждый раз проходит какое-то время, пока будет достигнуто оптимальное соответствие состояния личности и организма обучающегося к условиям проведения определенного вида учебно-познавательной деятельности – период адаптации.

Можно говорить о том, что к каждому учебному занятию кроме практической и теоретической подготовленности, определенного уровня умений и навыков по предмету, от студентов требуется некоторая психофизиологическая и физическая готовность. В этом случае под ней подразумевается готовность психических, физиологических и обеспечивающих двигательные действия систем человека к выполнению определенного рода учебно-познавательной деятельности.

Многообразие видов учебно-познавательной деятельности определяет многообразие психофизиологических и физических состояний обучающихся. Под психофизиологическим и физическим состоянием предлагается понимать целостные психофизиологические и физические реакции обучаемого на внешние и внутренние факторы, направленные на достижение полезного результата.

Параметром психофизиологического и физического состояния является величина, характеризующая какую-либо из реакций организма обучаемого на внешние или внутренние факторы.

Уровень психофизиологической и физической готовности к предстоящему занятию, зависит от индивидуальных особенностей личности обучаемого и определенных внешних факторов, воздействующих на него на предыдущем занятии. Эти факторы можно разделить на три вида:

- санитарно-гигиенические условия;
- временные условия;

- организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности.

К санитарно-гигиеническим условиям относятся температура и влажность воздуха, освещенность, содержание кислорода в воздухе, эргономичность учебных мест, запыленность, загазованность места проведения занятия. К временным условиям относятся: время дня, день недели, месяц семестра, время года, а также время, прошедшее после последнего приема пищи.

Вышеперечисленные факторы оказывают существенное влияние на психофизиологическую и физическую готовность. Второй фактор заставляет учитывать объективные закономерности колебания уровня работоспособности студентов в течение учебного дня, учебной недели, семестра. Как известно, в течение учебного дня объективно наблюдается два периода подъема работоспособности: один в первой половине дня, второй – в послеобеденное время. Каждому периоду характерны три фазы: врабатывание, повышенная работоспособность, снижение работоспособности. В течение недели те же фазы распределяются следующим образом: понедельник, вторник – врабатывание; среда, четверг – повышенная работоспособность; пятница, суббота – снижение работоспособности. Исследования показали, что и семестровый цикл разделяется на те же фазы.

Влияние фактора «организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности» в данном случае рассматривается, как влияние особенностей психофизиологической и физической деятельности обучаемых на предыдущем занятии на их психофизиологическую и физическую готовность к последующему виду учебно-познавательной деятельности, в нашем случае к зачету. Психофизиологическая деятельность характеризуется напряженностью и характером мыслительной деятельности, а также нервно-эмоциональной напряженностью учебной деятельности.

Физическая деятельность характеризуется интенсивностью, видом мышечных действий и работой обеспечивающих эту деятельность физиологических систем. Мышечные действия могут носить статический и динамический характер: поддержание рабочей позы «сидя», «стоя», выполнение чертежной, письменной работы, настройка и обслуживание аппаратуры, выполнение гимнастических упражнений и т.п. При этом используются, в той или иной степени, основные физические качества: сила, быстрота, выносливость, ловкость.

Влияние всех вышеперечисленных факторов преломляется через индивидуальные особенности личности, такие как типологические свойства нервной системы и темперамента, возрастные, морфологические, биохимические особенности организма, уровень физической подготовленности, состояние здоровья и другие, выливаясь, в итоге, в психофизиологическую и физическую готовность студента к предстоящему виду учебно-познавательной деятельности.

Следует отметить, что особенно явно эти проблемы проявляются при чередовании занятий по общенаучным, общеинженерным и специальным дисциплинам с практическими

занятиями по физической культуре. В этом случае происходит смена видов деятельности, в одном из которых доминирующую роль играет умственная работа с пониженной двигательной активностью и сохранением определенной рабочей позы, в другом – разнообразная активная двигательная деятельность с сопровождающей ее мыслительной работой.

Методика проведения занятий предусматривает проведение вводной (подготовительной) части для организации обучающихся, приведения их в состояние готовности к решению задач основной части, в нашем случае к сдаче контрольного норматива, и заключительной – для подведения итогов, приведения организма в относительно спокойное состояние (для занятий по физической культуре), но при проведении этих частей занятий, как правило, не учитывается характер предыдущей и последующей деятельности студентов. Неучтение этого факта отрицательно влияет на скорость адаптации к виду учебно-познавательной деятельности, что особенно наглядно проявляется при чередовании практических занятий по физической культуре с занятиями по общеинженерным и специальным дисциплинам.

Складывается противоречие между имеющим место в практике обучения несоответствием уровня психофизиологической и физической готовности обучающихся, объективно складывающейся в ходе проведения предшествующего занятия, видом учебно-познавательной деятельности последующего занятия и неучтением этого факта в общепринятых методиках проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий, в том числе, по дисциплине «физическая культура»

Это противоречие можно устранить, обеспечив управление процессом адаптации студентов к смене видов учебно-познавательной деятельности в ходе проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий.

Для каждой темы занятия по физической культуре в зависимости от педагогической ситуации, складывающейся из контекстной пары - вид предшествующего и вид последующего занятия, можно установить наиболее предпочтительные адаптирующие, предметно-ориентированные варианты проведения подготовительной и заключительной частей, оперативно поддерживающие достаточно высокий уровень психофизиологической и физической готовности при чередовании этих занятий с занятиями по другим дисциплинам.

Видится актуальной задача управления процессом адаптации обучаемых к смене видов учебно-познавательной деятельности с целью сокращения времени врабатывания и повышения эффективности как занятий, так и сдачи контрольных нормативов. Для решения этой задачи представляется наиболее целесообразным использовать проведение подготовительной (разминки) и заключительной частей занятий с адаптирующим, предметно-ориентированным содержанием.

В этом случае под управлением адаптацией следует понимать процесс педагогического воздействия с целью установления оптимального соответствия личности обучаемого и условий осуществления учебной деятельности в ходе осуществления им познавательной деятельности, которое позволяет индивидууму более эффективно удовлетворять актуальные познавательные потребности, и реализовывать связанные с ними значимые цели.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.Б.08 РУССКИЙ ЯЗЫК И КУЛЬТУРА РЕЧИ

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Профиль
Производство и реновация машин и оборудования

квалификация выпускника: **бакалавр**

формы обучения: **очная, заочная**

Автор: Карякина М. В., канд. филол. наук

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
иностранных языков и деловой коммуникации	горно-механического факультета
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Юсупова Л. Г.	Барановский В. П.
Протокол № 6 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
	(Дата)

Екатеринбург
2019

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки «Машиностроение», и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «Русский язык и культура речи».

ОБЪЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Суммарный объем часов на СРО *очной формы обучения* составляет 76 часов.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времени, час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час.	Принятая трудоемкость СРО, час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					67
1	Повторение материала лекций	1 час	0,1-4,0	2,0 х 16 = 12	32
2	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0,3-2,0	2,0 х 8 = 16	16
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0,3-0,5	0,5 х 1 = 0,5	1
4	Подготовка к контрольной работе	1 работа	1,0-25,0	12 х 1 = 12	12
5	Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания)	1 тема	0,3-2,0	2,0 х 1 = 2	2
6	Подготовка к деловой игре	1 занятие	1,0-4,0	4,0 х 1 = 4	4
Другие виды самостоятельной работы					9
7	Подготовка к зачету	1 зачет			9
	Итого:				76

Суммарный объем часов на СРО *заочной формы* обучения составляет 96 часов.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времени, час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час.	Принятая трудоемкость СРО, час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					44
1	Повторение материала лекций	1 час	0,1-4,0	2,0 х 4 = 8	8
2	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0,3-2,0	2,0 х 2 = 4	4
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0,3-0,5	0,5 х 1 = 0,5	1
4	Подготовка к контрольной работе	1 работа	1,0-25,0	25 х 1 = 25	25
5	Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания)	1 тема	0,3-2,0	2,0 х 1 = 2	2
6	Подготовка к деловой игре	1 занятие	1,0-4,0	4,0 х 1 = 4	4
Другие виды самостоятельной работы					52
6	Подготовка к зачету	1 зачет			52
	Итого:				96

Формы контроля самостоятельной работы студентов: проверка на практическом занятии, проверка контрольной работы, проверка самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания), зачет (тест и практико-ориентированное задание).

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Повторение материала лекций состоит в работе с конспектом, записанным на лекционном занятии (чтение, подчеркивание и запоминание главного), а также в работе с дополнительной литературой по теме (чтение, конспектирование, сопоставление с материалом лекций). Из списка дополнительной литературы студенты должны ознакомиться с несколькими источниками по каждой теме (минимум 2).

Дополнительная литература по темам:

Тема	Литература
Современный русский язык	- *Русский язык и культура речи* [Электронный ресурс]: курс лекций для бакалавров всех направлений/ – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 72 c. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/54478.html/ - ЭБС «IPRbooks», по паролю. - *Кронгауз М. А.* Русский язык на грани нервного срыва. – М.: Corpus, 2017. - *Чуковский К. И.* Живой как жизнь. – М.: Зербра Е, 2009. - Федеральный закон «О государственном языке Российской Федерации». – Режим доступа: http://rus-gos.spbu.ru/index.php/bills
Культура речи. Нормы литературного языка	- *Карякина М. В.* Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. – 71 с. - *Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник. Практикум. / Н. С. Водина и др. – М.: Флинта: Наука, 2012. – 320 с. Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи / Л. А. Введенская, Л. Г. Павлова, Е. Ю. Кашаева. – 5-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», Феникс, 2010. – 488 с. - *Меленскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 78 с. - *Розенталь Д. Э.* Справочник по правописанию и литературной правке / Под ред. И. Б. Голуб. 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 368 с. - *Розенталь Д. Э.* Лексика и стилистика: Правила и упражнения / Д. Э. Розенталь. — М.: Мир и Образование, 2016. — 96 c. – Режим доступа: http://mio-books.ru/content/files/catalog1/_otryvok_Leks_i_stil.pdf - *Русский язык и культура речи. Семнадцать практических занятий* / Е. В. Ганапольская, Т. Ю. Волошинова, Н. В. Анисина, Ю. А. Ермолаева, Я. В. Лукина, Т. А. Потапенко, Л. В. Степанова. Под ред. Е. В. Ганапольской, А. В. Хохлова. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с. *Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Скворцов Л. И.— Электрон. текстовые данные. — М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. — 1104 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14555.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю
Стилистика. Научный и официально-деловой стиль	- *Аскарина Н. А.* Технология подготовки научного текста: учебно-методическое пособие. 3-е изд., стер. – М.: Флинта: Наука, 2017. – 112 с. - *Карякина М. В.* Культура научной речи: учебное пособие / М. В. Карякина; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 131 с. - *Кожина М. Н.* Стилистика русского языка: учебник / М. Н. Кожина, Л. Р. Дускаева, В. А. Салимовский. – М.: Флинта: Наука, 2008 – 464 с. - *Колтунова М. В.* Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. – М., 2000. - *Меленскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. – 86 с.
Нормы делового общения	- *Введенская Л. А., Павлова Л. Г.* Деловая риторика: учебное пособие для вузов / Л. А. Введенская, Л. Г. Павлова. – 5-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», Феникс, 2010. – 488 с. - *Гойхман О. Я., Надеина Т. М.* Речевая коммуникация. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 207с.

	- *Лавриненко В. Н*. Психология и этика делового общения. – Москва: Юрайт, 2012. – 592 с.

Подготовка к практическим занятиям заключается в повторении необходимого теоретического материала и выполнении индивидуальных или групповых заданий по изучаемым темам. Эта работа выполняется по основной литературе:

Гавриленко Р. И., Меленскова Е. С., Шалина И. В. Русский язык и культура речи: учебное пособие. – Екатеринбург: УГГУ, 2013. – 85 с.
Гавриленко Р. И. Русский язык делового общения: учебно-методическое пособие. – Екатеринбург: УГГУ, 2018. – 100 с.
Голуб И.Б. Русская риторика и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Голуб И.Б., Неклюдов В.Д.— Электрон. текстовые данные. — М.: Логос, 2012. — 328 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/9074.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю
Меленскова Е. С. Русский язык делового общения: учебное пособие. – Екатеринбург: УГГУ, 2018. – 80 с.

Для подготовки к практическим занятиям преподаватель может привлекать дополнительную литературу, а также раздаточный материал.

Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля) подготавливаются студентами самостоятельно по теме «Современный русский язык». Материалом для подготовки служат конспекты лекций, основная и дополнительная литература. Опрос проводится на практическом занятии. Вопросы для опроса следующие:

1. Каково происхождение русского национального языка?
2. Каковы разновидности современного русского национального языка?
3. Что такое территориальные диалекты?
4. Что такое диалектизмы?
5. Что такое жаргон и какие виды жаргонов существуют?
6. Что такое жаргонизмы?
7. Что такое просторечие?
8. Каково современное состояние современного русского национального языка?
9. Каковы тенденции развития современного русского национального языка?
10. Что такое литературный язык и каковы его признаки?

Подготовка к контрольной работе по теме «Культура речи. Нормы литературного языка» проводится как аудиторно (на практических занятиях в ходе выполнения и проверки заданий), так и самостоятельно. Самостоятельная подготовка предполагает работу со словарями, справочниками, сборниками тестовых и практических заданий.

Практические задания содержатся в пособии Р. И. Гавриленко, Е. С. Меленсковой и И. В. Шалиной «Русский язык и культура речи», а также в пособии Е. С. Меленсковой «Русский язык делового общения».

Тестовые задания приводятся в пособиях Е. С. Меленсковой «Русский язык и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей» (без ключей) и М. В. Карякиной «Русский язык и культура речи. Подготовка к итоговому тестированию» (с ключами).

При выполнении заданий необходимо пользоваться словарями и справочниками, как печатными, так и электронными.

Электронные словари	Печатные словари (любое издание)

- Скворцов Л. И. Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14555.html. — ЭБС «IPRbooks», по паролю - Грамота (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru Культура письменной речи (сайт) [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru. - Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://russkiyyazik.ru. - Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://stylistics.academic.ru	- Ожегов С. И., Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. - Розенталь Д. Э. Словарь трудностей русского языка. - Словарь правильности русской речи. -Словарь грамматических вариантов русского языка. - Словарь лексических трудностей. - Словари синонимов, паронимов, антонимов. - Орфоэпический словарь. - Орфографический словарь. - Розенталь Д. Э. Справочник по орфографии, пунктуации и литературной правке. - Управление в русском языке. Словарь-справочник. Грамматический словарь русского языка. Словоизменение

Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания) осуществляется по вариантам. Каждое практико-ориентированное задание состоит из трех блоков, в которых проверяется наличие необходимых знаний, умений и формирование у студентов различных навыков. В первом блоке приводится задание по научному стилю речи, во втором и третьем – по официально-деловому стилю (составление и редактирование документов общепринятого образца). Варианты заданий приведены в комплекте оценочных материалов (КОМ).

Подготовка к деловой игре состоит в ознакомлении студентов с концепцией игры, чтении дополнительной литературы по риторике, психологии и этике делового общения, а также в записи предполагаемого хода деловой беседы, тренировке произнесения речи. Концепции различных вариантов деловых игр описаны в КОМ. Вариант игры выбирается преподавателем в зависимости от уровня подготовленности и других особенностей группы.

Подготовка к зачету предполагает тренинг выполнения тестовых заданий, который можно проводить на сайте i-exam.ru или с помощью пособий М. В. Карякиной и Е. С. Меленсковой, содержащих такие задания. Кроме подготовки к тестированию важно уделить внимание практико-ориентированным заданиям. Студенты должны ознакомиться с образцом задания и его выполнения, а также выполнить тренировочные задания.

Образец практико-ориентированного задания: напишите заявление о предоставлении Вам отпуска за свой счет.

Образец выполнения 1:

Директору ООО «Икс»
А. А. Иванову
инженера Н. П. Петрова

заявление

Прошу предоставить мне с 12.03.2017 по 17.03.2017 внеочередной отпуск без сохранения заработной платы по семейным обстоятельствам.

10.03.2017 (Н. П. Петров)

Образец выполнения 2:

Директору ОАО «Рондо»
Скворцову И. О.

от Алексеева М. А.,
программиста

Заявление

Прошу предоставить мне неоплачиваемый отпуск с 22 по 26 января текущего года по семейным обстоятельствам.

19 января 2017 г.

Если в ходе подготовки к зачету у обучающихся возникают вопросы, они должны обратиться за консультационной помощью к преподавателю.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.09 ПСИХОЛОГИЯ ДЕЛОВОГО ОБЩЕНИЯ

Направление подготовки

15.03.01 Машиностроение

Профиль

Производство и реновация машин и оборудования

форма обучения: очная, заочная
Квалификация выпускника: ***бакалавр***

форма обучения: ***очная, заочная***

Автор: Чащегорова Н.А., доцент, к.ф.н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Управления персоналом	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Ветошкина Т.А	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 8 от 17.04.2019	Протокол №7 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	5
2	Методические рекомендации к опросу	9
3	Методические рекомендации по подготовке деловых и ролевых игр	11
4	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	13
5	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	15
6	Заключение	18
	Список использованных источников	19

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study.*** Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

[2] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

3.Методические рекомендации по подготовке деловых и ролевых игр

Основной целью проведения студенческих деловых игр во внеаудиторное время является привитие студентам навыков решения конкретных управленческих вопросов и накопление ими практического опыта в решении процедурных вопросов на основе создания конкретных деловых ситуаций, максимально приближенных к реальным жизненным условиям.

Деловая игра – это воспроизведение деятельности хозяйственных руководителей и кадров управления, игровое моделирование систем управления.

Деловые игры в отличие от других методов обучения позволяют наиболее полно воспроизводить деятельность руководителей и специалистов, выявить проблемы и причины появления, разрабатывать и оценивать варианты решения проблем, принимать решение и определять механизм его реализации. Это дает возможность рассматривать проблему не вообще, а как конкретную, вытекающую из хозяйственной деятельности конкретного предприятия (организации).

Одним из видов деловой игры является ролевые игры.

Ролевая игра – это метод, при котором участники игры с помощью проигрывания определенных ролей в свободной от риска ситуации обнаруживают свои значимые черты поведения в профессиональной ситуации, а также самостоятельно критически анализируют их, формируют и развивают. Роли, могут быть: директор, руководитель проекта, отдела, специалист и т.д.

Типичными техниками ролевых игр являются:

- самостоятельное (в пределах темы) конструирование ситуации;
- определение участниками общего количества ратей и их персональное распределение;
- обмен ролями в ходе игры;
- использование дублирования при отработке ролей;

Методические рекомендации

На первом этапе следует ознакомиться с целью игры и необходимой исходной информацией. Студенты самостоятельно выбирают определенную проблему или конкретную ситуацию и по желанию формируют команды таким образом, чтобы это была творческая группа.

Второй этап – самостоятельная работа студентов в командах. Здесь активно используется практический опыт каждого участника, уточняются позиции и вырабатываются обобщающие выводы или решения. При коллективном обсуждении в командах необходимо, чтобы свою точку зрения имел возможность высказать каждый участник. Коллективное обсуждение проблемы позволяет выявить разные подходы к решению одной и той же проблемы или задачи. Очень важно использование принципа консенсуса, т.е. единогласное принятие общих решений, но не путем голосования, а на основе предварительного согласия. Однако это не означает, что кто-либо из участников и в этом случае не может выйти на коллективное обсуждение в общей группе со своей точкой зрения.

Третий этап – дискуссия в группе. Каждая команда докладывает свой вариант разрешения рассматриваемой проблемы. Участники других команд выступают в качестве оппонентов, задают вопросы, выступают с критическими замечаниями или в поддержку предоставленного проекта.

Возможны случаи, когда участники не формируются в команды, а распределяются по определенным ролям. В этих играх для решения проблемы прежде всего определяется состав действующих лиц и устанавливаются их задачи. Дискуссия идет с учетом определенных ролей.

Для преодоления скованности участников, облегчения их вживания в роль и естественности их поведения желательна минимизация вмешательства руководителя в процесс игры. Функции руководителя сводятся главным образом к ознакомлению участников с условиями, целями и техниками игры, обеспечению ее нормального протекания, общему контролю за ее процессом и оказанию в случае необходимости методической помощи в достижении игровых целей, а также к общему подведению итогов, включающему, если это целесообразно, индивидуальные советы и рекомендации ее участникам.

Ходе проведения ролевых и деловых игр практически не отличается от рассмотренных ранее. Разница в том, что в первом случае выступают представитель команды, а во втором участник деловой игры действует в рамках ролевой должности.

На практических занятиях, проходящих в форме деловой игры, ее участники должны приобрести необходимые знания и практические навыки:

– по постановке стратегических и оперативных целей работы организации;

– выработке экономических решений и оценки влияния факторов внешней и внутренней среды на реализацию этих решений;

– освоению и отработки навыков коллективного генерирования идей, делового общения при выработке групповых решений;

– выявление различных точек зрения на экономическую проблему

На предприятиях ролевые игры наиболее часто используются для обучения руководителей правильному ведению собеседования, распределению заданий, обеспечению поддержки сотрудниками коллективного задания, руководству командой и т.д. С их помощью сотрудники повышают свои знания и умения в области принятия самостоятельных решений, своевременного просчитывания их последствий, развития делового общения и т.п. Ролевые игры особенно эффективны при карьерном обучении, когда сотрудник проигрывает комплекс функций, вытекающих из его будущих должностных обязанностей.

Базирование ролевых игр на повседневных, личностно значимых ситуациях обеспечивает высокую ангажированность, вовлеченность их участников. Это в свою очередь облегчает личностное принятие вырабатываемых образцов поведения, идентификацию решений и рекомендаций, перенос отработанных в игре образцов поведения в повседневные практические отношения.

4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что

необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Д. В. Исламгалиев
Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
и варианты контрольныхи
самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург

2019

П

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 28.05.2019 г. (протокол № 141) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Исламгалиев Д. В., Петровских Г. В., Пяткова В. Б.,

П МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ по разделу дисциплины «Математика» для студентов всех специальности очного обучения”

– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам всех специальностей для изучения темы: «Матрицы. Определители. Стстемы линейных алгебраических уравнений».

© Исламгалиев Д. А., Петровских Г.В., Пяткова В.Б., 2019

© Уральский государственный горный университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1. МАТРИЦЫ 5

1.1. Действия над матрицами 6

1.2. Определители 8

1.3. Обратная матрица 11

2.4. Ранг матрицы 12

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ) 13

2.1. Методы решений определенной неоднородной СЛАУ 16

2.2. Метод решения неопределенных неоднородных СЛАУ 23

2.3. Методы решений определенной однородной СЛАУ 25

2.4. Методы решений неопределенной однородной СЛАУ 27

3. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 29

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 59

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» могут быть использованы как для проведения контрольных работ, так и для самостоятельной работы студентов. Они удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов всех специальностей.

В методических указаниях представлены основные теоретические сведения и разобраны примеры решения задач по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» для студентов всех специальностей. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ.

После изучения теории и решений типовых задач студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ.

МАТРИЦЫ

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: *A, B, C* и т.д.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Числа ,входящие в таблицу называются ее элементами и обозначаются символом a_{ij} , где первый индекс i определяет номер строки, второй индекс j – номер столбца. Выражение $m \times n$ и называют размерностью матриц.

Например, матрица А имеет размерность 2×3:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

а матрица B имеет размерность 3×2:

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк совпадает с числом столбцов, то матрица называется квадратной. Понятие размерности матрицы для квадратной матрицы заменяют понятием порядок матрицы. Порядок квадратной матрицы равен числу строк или столбцов этой матрицы.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главная диагональ состоит из элементов a_{ij} с одинаковыми индексами, побочная диагональ состоит из элементов a_{ij} сумма индексов которых равна $n+1$.
Если элементы квадратной матрицы, стоящей на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, то матрица называется единичной и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц , имеющих одинаковые размерности .Суммой двух матриц называют такую матрицу, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

***Пример* 1.1.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A + B;\quad B - A.$

Решение: $A + B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$

Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу на число следует каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

***Пример* 1.2.** Дана матрица $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $-3A.\, A\cdot B$

Решение:

$$-3\cdot A=-3\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -15 & 9\\ -21 & -15 & 3\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведение двух матриц определяется тогда, когда количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы. Элемент c_{ij} матрицы произведения, стоящий на пересечении i–той строки и j–того столбца равен сумме произведений элементов i–той строки первой матрицы на элементы j–того столбца второй матрицы, т.е. по формуле $c_{ij}=\sum_k a_{ik}\cdot b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

***Пример* 1.3.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$. Найти произведение матриц: $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение:

$$A.\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 3+5\cdot(-1)+1\cdot 7 & 4\cdot 0+5\cdot 2+1\cdot 1\\ 3\cdot 3+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 7 & 3\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 11\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B.\cdot A=\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+0\cdot 3 & 3\cdot 5+0\cdot 2 & 3\cdot 1+0\cdot(-1)\\ -1\cdot 4+2\cdot 3 & -1\cdot 5+2\cdot 2 & -1\cdot 1+2\cdot(-1)\\ 7\cdot 4+1\cdot 3 & 7\cdot 5+1\cdot 2 & 7\cdot 1+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 15 & 3\\ 2 & -1 & -3\\ 31 & 37 & 6\end{pmatrix}$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативное, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Транспонирование матрицы

Транспонированной к матрице A называется матрица, полученная из матрицы A путем замены строки на столбец с такими же индексами. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Если $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \\ a_{12}\, a_{22} \\ a_{13}\, a_{23} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

***Пример* 1.4.** Найти транспонированную матрицу, к матрице $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы. Определители в литературе обозначаются $\det A$, ΔA, $|A|$.

Определитель первого порядка

Определителем матрицы первого порядка, составленной из числа a_{11}, называется само число a_{11}

$$\det A = a_{11} \quad (1.6)$$

Определитель второго порядка

Определителем матрицы второго порядка, составленной из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, называется число, определяемое равенством

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.7)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя, причем элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12}, a_{21} – побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

***Пример* 1.5.** Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14$$

***Пример* 1.6.** Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 7 .$$

Определитель третьего порядка

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается вычеркиванием из данного определителя *i*–той строки и *j*–того столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – минор для элемента со строкой i и столбцом j.

Определителем третьего порядка, составленным из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, называется число:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\cdot A_{ik}\,;\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{3} a_{kj}\cdot A_{kj} \quad (1.8)$$

для фиксированного значения *i*–той строки или *j*–того столбца.

Такие равенства называют разложением определителя по элементам строки или столбца.

Тогда разложение определителя третьего порядка по первой строке примет вид:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+ \quad (1.9)$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

а разложение по второму столбцу принимает вид:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\div a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+ \quad (1.10)$$

$$+(-1)^{3+2}\cdot a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 1.7.** Вычислить определитель $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

а) разложением по элементам первой строки;

б) разложением по элементам третьего столбца

Решение:

$$a)\ \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=.$$

$$=1(5\cdot 9-6\cdot 8)-2(4\cdot 9-6\cdot 7)+3(4\cdot 8-5\cdot 7)=0$$

$$б)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 9\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(4\cdot 8-5\cdot 7)-6\cdot(1\cdot 8-2\cdot 7)+9(1\cdot 5-2\cdot 4)=$$

$$=3\cdot(-3)-6(-6)+9\cdot(-3)=0$$

***Пример* 1.8.** Вычислить определитель $\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}$.

Решение: Так как наибольшее количество нулей в третьем столбце, то воспользуемся разложением по третьему столбцу (при этом второе и третье слагаемые будут равны нулю):

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & -1\end{vmatrix}+0+0=5(-2-21)=-115.$$

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n. Если существует квадратная матрица B такая, что $AB=BA=E$, то матрица B называется обратной к матрице А и обозначается A^{-1}. Обратную матрицу A^{-1} можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^{*}\right)^{T}\qquad(\det A\neq 0),\tag{1.11}$$

где A^{*} – матрица алгебраических дополнений $\mathrm{A_{ij}}$:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},\quad A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

M_{ij} – миноры для элементов a_{ij} со строкой i и столбцом j.

После нахождения обратной матрицы можно воспользоваться проверкой,

$$A\cdot A^{-1}=E,\ \text{т.е.}\tag{1.12}$$

должна получиться единичная матрица Е.

***Пример* 1.9.** Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

1) Найдем определитель матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4$$

2) Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-6 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=8 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=12 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=10 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-12 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} -6 & -9 & 10 \\ 8 & 12 & -12 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix},\ \left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -9 & 12 & -4 \\ 10 & -12 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -9 & 12 & -4 \\ 10 & -12 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1.5 & 2 & -1 \\ -2.25 & 3 & -1 \\ 2.5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1.5 & 2 & -1 \\ -2.25 & 3 & -1 \\ 2.5 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы *rang*(A) называют наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

***Пример* 1.10.** Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

Для большего понимания миноры будем обозначать M_k, где k – количество строк и столбцов для выбранного минора.

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \quad \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3, \text{ то } \quad \text{rang}(A) \geq 2$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

Так как больше нет M_3, то $\text{rang}(A) = 2$.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены, x_j – неизвестные, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Такую систему удобно записывать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } AX = B, \qquad (2.2)$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов.

Расширенной матрицей $\overline{A}$ называют матрицу A с присоединенной матрицей B:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (2.3)$$

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае – система несовместна.

***Теорема* 2.1: СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы.**

***Пример* 2.1.** Дана расширенная матрица СЛАУ: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{array}\right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли соответствующая СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1=|1|=1,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A)\geq 1.$$

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A)=1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$\overline{M}_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-1,\ \text{то}\ \ \operatorname{rang}(\overline{A})=2.$$

Так как $\operatorname{rang}(\overline{A})=2$ и $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=1$, то СЛАУ несовместна **и не имеет решения.**

***Пример* 2.2.** Дана расширенная матрица СЛАУ: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1=|1|=1,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A)\geq 1.$$

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A)=1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$\overline{M}_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0,\ \overline{M}_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=0,\ \text{то}\ \ \operatorname{rang}(\overline{A})=1.$$

Так как $\text{rang}(\overline{A})=1$ и $\text{rang}(A)=1$, то СЛАУ совместна.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет более одного решения.

Если все свободные члены равны нулю $b_i = 0$, то СЛАУ называется однородной, в противном случае – неоднородной.

2.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая *n* уравнений и *n* неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

.

Метод Крамера

***Теорема* 2.2. Если ранг основной и расширенной матриц системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.**

Схема метода Крамера

1) Найти определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Найти определители $\det A_1$, $\det A_2, \ldots, \det A_n$:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

3) Найти решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots \; x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

***Пример* 2.3.** Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

2) Найдем определители $\det A_1$, $\det A_2$:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1; \; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.4.** Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24, \ \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{24}{12} = 2, \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-24}{12} = -2, \ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{36}{12} = 3.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Матричный метод (метод обратной матрицы)

1) Найти определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Найдем обратную матрицу A^{-1}.

3) Решение находится в виде

$$X = A^{-1}B.$$

***Пример* 2.5.** Решить СЛАУ, используя матричный метод :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.6.** Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений является совместной и определенной.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

1) Найти определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2)Запишем СЛАУ в расширенном матричном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim .$$

3) Преобразуем вторую, третью и т.д. строчки, чтобы получить нули вместо a_{21}, a_{31}, a_{n1}, то есть по формуле $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{1j}} a_{1j}$ и $\bar{b}_j = b_j - \frac{b_j}{a_{1j}} a_{1j}$:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \bar{a}_{n2} & \ldots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim .$$

4) Продолжая данные преобразования, получим со второй, третьей и т.д. строками, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim .$$

5) После чего можно найти x_{n}, т.е. требуется разделить последнюю строку на $\bar{a}_{nn}$, тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \bar{b}_n \end{array} \right) \sim .$$

6) Тогда преобразуя элементы a_{ij}, если $i \neq j$, и преобразуя a_{ii} в единицы, получим решение СЛАУ:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \bar{b}_n \end{array} \right).$$

***Пример* 2.7.** Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-(-3)\cdot(-1)=-1\neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right)\overset{1c\cdot(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right)\overset{2c-2\cdot 1c}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)\overset{2c\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\overset{2c\cdot(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\overset{1c+2c}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

или

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\overset{1c+3\cdot 2c}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\overset{1c\cdot(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\overset{2c+1c}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.8.** Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12.$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, но СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right) \overset{\substack{2c-1c \\ 3c-3\cdot 1c}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -5 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{3c+5\cdot 2c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \overset{1c\cdot(-12)}{\sim}$$

$$\overset{1c\cdot(-12)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{2c+3c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{1c-2\cdot 2c-3\cdot 3c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СЛАУ

***Теорема* 2.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.**

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая *m* уравнений и *n* неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

1) Найдем ранг основной матрицы для неоднородной СЛАУ.

2) Найдем ранг расширенной матрицы для неоднородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на совместность и на неопределенность. Будем обозначать найденные миноры *n*-ого порядка расширенной матрицы $\tilde{M}_{\text{n}}$.

3) Если СЛАУ совместно и неопределенно решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных неоднородных СЛАУ называют общим решением.

***Пример* 2.9.** Дано СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 2.$$

2) Так как строк в основной и расширенной матриц две, то и ранг расширенной матрицы $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 2$. СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 2$, требуется две строки (два уравнения):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left| x_3 = a \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+3a & 1+3a \\ 1 & 2 & 4+a & 3-2a \end{array}\right) \overset{2\text{c}-1\text{c}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+3a & 1+3a \\ 0 & 1 & 3-2a & 3-2a \end{array}\right) \overset{1\text{c}-2\text{c}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2+5a & -2+5a \\ 0 & 1 & 3-2a & 3-2a \end{array}\right).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5a \\ 3-2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} a, \; a \in R.$$

***Пример* 2.10.** Дано СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(\mathrm{A}) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 1.$$

2) Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(\overline{A}) = 1.$$

СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} x_1 = a \\ x_2 = b \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 - a - b \end{array}\right).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b;\ a,b \in R.$$

2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая *m* уравнений и *n* неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Воспользовавшись теоремой 3.2, если

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то однородное СЛАУ имеет единственное нулевое решение. Такое решение называют тривиальным.

***Пример* 2.11.** Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

СЛАУ имеет тривиальное решение, т.е. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая *m* уравнений и *n* неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{\text{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Заметим, что ранги основной и расширенной матриц в однородной СЛАУ всегда совпадают, то есть однородная СЛАУ всегда совместна.

***Теорема* 2.4. Если в совместной системе ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.**

1) Найдем ранг основной и расширенной матриц для однородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на неопределенность.

2) Если СЛАУ совместна и неопределенна решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных однородных СЛАУ называют фундаментальной системой решений.

***Пример* 2.12.** Дана СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 1 \text{ и } \operatorname{rang}(\overline{A}) = 1.$$

СЛАУ неопределенна.

2) Найдем фундаментальную систему для однородной СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} x_1 = \mathrm{a} \\ x_2 = \mathrm{b} \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\mathrm{a} - \mathrm{b} \end{array}\right).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b; a,\ b \in R.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений.

<table>
<tr><th colspan="5">СЛАУ</th></tr>
<tr><td colspan="2">ОДНОРОДНАЯ СЛАУ</td><td colspan="3">НЕОДНОДНАЯ СЛАУ</td></tr>
<tr><td colspan="2">СОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td><td colspan="2">СОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td><td>НЕСОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td></tr>
<tr><td>ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>_____</td></tr>
<tr><td>ТРИВИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ</td><td>ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА</td><td>ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ</td><td>ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ</td><td>НЕТ РЕШЕНИЯ</td></tr>
</table>

2. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C=(A+3A^T)\cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1\\ x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3+2x_5=6\\ x_2+x_3-2x_4+x_5=3\\ x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5=5\\ 4x_1+x_2+4x_3-2x_4-10x_5=14\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 2

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 - 3A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 3

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A \cdot A^T - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -41 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

.

Вариант 4

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 5

1. Даны матрицы и А= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ Найти матрицу $X = A^T \cdot A - 4B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 6

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C= $A^T \cdot A + 5E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 7

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = (2A^T - \mathrm{B}) \cdot \mathrm{A}$

2. Решить матричное уравнение $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 8

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = \mathrm{B} - 3A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 9

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 5\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}7 & 2 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot (A^T + 2A)$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}4 & 0 & 14\\ 5 & 2 & 22\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-4 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -4 & 0\\ 3 & 5 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8\\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11\\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1\\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7\\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 10

1. Дана матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 + 2A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 2 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 11

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 3E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 12

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = A^T \cdot A - 2B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -7 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 13

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^T \cdot A + 4E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & 16 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 14

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 7E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 4 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 15

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T - 3A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 4 & 7 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 16

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = 3B - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 17

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3E - A\cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & -3\\ 12 & 0\\ -7 & -3\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 4 & 6 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 5\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}3x_1+5x_2+2x_3=6\\ 5x_1+4x_2+5x_3=4\\ 5x_1+6x_2+4x_3=7\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-x_5=-2\\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=3\\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4-2x_5=-1\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 18

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = A \cdot B + 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ -2 & -6 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 19

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C=(3B-A^T)\cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 1 & -6\\ 10 & 21\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}3x_1-4x_2-x_3=-17\\ 2x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1-3x_2-5x_3=-8\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5\\ 3x_1-x_2-x_3=1\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3\\ 4x_1-4x_2-2x_4-3x_5=-1\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 20

1.Дана матрица A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3E - A \cdot A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 3 & -22 & 27 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 21

1.Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу X= $A^T \cdot A - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 22

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 23

1. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = 3E - B^T \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 24 & 11 \\ -28 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 24

1. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = Y - 2X^T \cdot X$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 38 \\ 8 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

   а) матричным методом

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 25

1. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $Y = X - 3X \cdot X^T$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 26

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3A^T - A^2$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 27

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X= $3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 28

1. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C= $A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -2 \\ -2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 29

1. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C= $5B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 10 & 33 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 30

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B= $3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 19 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = -5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. / Д. Т. Письменный // – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2015. – 281 с.

Дополнительная литература

2. Красс М. С. Математика для экономистов. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов // –СПб.; Питер. 2005. – 464 е.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
3. Сурнев В.Б. Алгебра и аналитическая геометрия :учеб. пособие /В.Б. Сурнев// Екатеринбург, УГГГА. 2003 – 656 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……...4
1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ……5
1. 1. Первообразная для функции ……..5
1. 2. Неопределенный интеграл и его свойства …….……...5
1. 3. Таблица основных интегралов ……...……6
2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ……7
2. 1. Непосредственное интегрирование ……...7
2. 2. Подведение под знак дифференциала ……..10
2. 3. Замена переменной ……12
2. 4. Интегрирование по частям ……14
2. 5. Интегрирование рациональных дробей ……...19
2. 6. Интегрирование тригонометрических функций ……28
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯЕТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ……...34
3.1. Непосредственное интегрирование ……....34
3. 2. Подведение под знак дифференциала …….……..37
3. 3. Замена переменной ……..41
3. 4. Интегрирование по частям ……44
3. 5. Интегрирование рациональных дробей ……46
3. 6. Интегрирование тригонометрических функций ……..….51
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……53

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме “Неопределенный интеграл”, рассмотрены основные методы интегрирования, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная для функции

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$

Примеры

1. Функции $F(x)=-\cos x,\quad F_1(x)=-\cos x+1,\quad F_2(x)=-\cos x-3$ являются первообразными для функции $f(x)=\sin x$

2. Функции $F(x)=\ln|x|,\ F_1(x)=\ln|x|$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$

3. Функции $F(x)=\arcsin x,\quad F_1(x)=\arcsin x-0{,}5$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Теорема

Если $F(x)$ и $F_1(x)$ - первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F_1(x)=F(x)+C$, где $C=\text{const}$.

Таким образом, множество всех первообразных для функции $f(x)$ имеет вид $\{F(x)+C\}$.

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на (a,b) называется множество всех её первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ - одна из первообразных для функции $f(x)$.

Примеры

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$

Свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int df(x) = f(x) + C.$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где $k = \text{const}.$

5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ - дифференцируемая на (a, b) функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C \quad (C = \text{const}).$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \ \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, \quad k \neq 0.$

2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Непосредственное интегрирование

Выполняется с использованием тождественных преобразований подынтегральных функций, свойств и таблицы неопределённых интегралов.

Примеры

1. $\int 2\sqrt{x^3}dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C.$

2. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= x + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x + 4\sqrt{x} + C.$

3. $\int (7x-1)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x\cdot x^3 - x^3 + 7x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x^4 - x^3 - \frac{1}{x} + 7\right)dx =$

$= 7\int x^4dx - \int x^3dx - \int\frac{1}{x}dx + 7\int dx = \frac{7x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \ln|x| + 7x + C.$

4. $\int \frac{x^2-5}{x^4-25}dx = \int \frac{x^2-5}{\left(x^2\right)^2 - 5^2}dx = \int \frac{x^2-5}{\left(x^2-5\right)\left(x^2+5\right)}dx = \int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

5. $\int \frac{x^2-2x-3}{x+1}dx = \left[\begin{array}{c} x^2-2x-3=0 \\ x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \\ x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \end{array}\right] = \int \frac{(x-3)(x+1)}{x+1}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

6. $\int \frac{(3x-1)^2}{x}dx = \int \frac{9x^2-6x+1}{x}dx = \int\left(9x - 6 + \frac{1}{x}\right)dx = 9\cdot\int xdx - 6\cdot\int dx + \int\frac{dx}{x} =$

$= \frac{9x^2}{2} - 6x + \ln|x| + C.$

$$7.\int \mathrm{e}^{x}\cdot\left(\frac{3e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}\right)dx=\int\left(\frac{3e^{x}\cdot e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}e^{x}\right)dx=\int\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{5}e^{x}\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\int dx-\frac{4}{5}\cdot\int e^{x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{4}{5}e^{x}+C.$$

$$8.\int x^{2}\cdot\left(\frac{3\sin x}{x^{2}}+\frac{5}{x^{3}}\right)dx=\int\left(3\sin x+\frac{5}{x}\right)dx=3\cdot\int\sin xdx+5\cdot\int\frac{1}{x}dx=-3\cos x+5\ln|x|+C.$$

$$9.\int 4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=\int 2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=2\cdot\int\sin xdx=-2\cos x+C.$$

$$10.\int\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\frac{1-\cos^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^{2}x}-\frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^{2}x}-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C\,.$$

$$11.\int\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13}-\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7}+C=\frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13}-\frac{6\sqrt[6]{x^{7}}}{7}+C.$$

$$12.\int\frac{2e^{5x}-e^{4x}}{e^{4x}}dx=\int\left(2e^{x}-1\right)dx=2\cdot\int e^{x}dx-\int dx=2e^{x}-x+C\,.$$

2.2. Подведение под знак дифференциала

В этом методе используют таблицу интегралов и свойство неопределённого интеграл: если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $u=u(x)$ - дифференцируемая на (a,b)

функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$, а также определение дифференциала функции $f(x)$: $df(x) = f'(x)dx$.

Например:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ так как $\frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}(ax)'dx = \frac{1}{a} \cdot adx = dx$.
2. $dx = d(x+b)$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$.
4. $\sin x dx = d(\cos x)$.
5. $\cos x dx = d(\sin x)$.
6. $e^x dx = d(e^x)$.
7. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.
8. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2 + b\right)$.
9. $x^2 dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3 + b\right)$.
10. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.
11. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$.
12. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$.
13. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.
14. $\cos(ax) = \frac{1}{a}d(\sin(ax) + b)$.

Примеры

1. $\int \sin\ 3xdx = \left[dx = \frac{1}{3} d(3x) \right] = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

2. $\int \cos \frac{x}{5} dx = \left[dx = 5d\left(\frac{x}{5}\right) \right] = 5 \int \cos \frac{x}{5} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5 \sin \frac{x}{5} + C$.

3. $\int \frac{dx}{7x-2} = \left[dx = \frac{1}{7} d(7x-2) \right] = \frac{1}{7} \int \frac{d(7x-2)}{7x-2} = \frac{1}{7} \ln |7x-2| + C$.

4. $\int \text{tg}\ x dx = \int \frac{\sin\ x dx}{\cos\ x} = \left[\sin\ x dx = -d(\cos\ x) \right] = -\int \frac{d(\cos\ x)}{\cos\ x} = -\ln |\cos\ x| + C$.

5. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

6. $\int \frac{x dx}{x^2+9} = \left[x dx = \frac{1}{2} d(x^2+9) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2+9 \right| + C$.

7. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4} = \left[e^x dx = d\left(e^x\right) \right] = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+2^2} = \frac{1}{2} \text{arctg}\ \frac{e^x}{2} + C$.

8. $\int \frac{e^{\text{tg}\ x} dx}{\cos^2 x} = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\text{tg}\ x) \right] = \int e^{\text{tg}\ x} d(\text{tg}\ x) = e^{\text{tg}\ x} + C$.

9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\text{arctg}\ x} = \left[\frac{dx}{1+x^2} = d(\text{arctg}\ x) \right] = \int \frac{d(\text{arctg}\ x)}{\text{arctg}\ x} = \ln |\text{arctg}\ x| + C$.

$$10.\int\sqrt{4x^3-8}\cdot x^2dx=\left[x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3\right)=\frac{1}{12}d\left(4x^3-8\right)\right]=\frac{1}{12}\int\left(4x^3-8\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4x^3-8\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\left(4x^3-8\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(4x^3-8)^3}+C=\frac{1}{18}\sqrt{(4x^3-8)^3}+C.$$

2.3. Замена переменной

Этот метод является продолжением метода подведения под знак дифференциала в более сложных случаях.

Пусть $x=x(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ – непрерывная функция на соответствующем интервале изменения x.

Тогда

$$\int f(x)\,dx=\int f(x(t))\,x'(t)\,dt\,.$$

Примеры

1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}=\left[\begin{array}{l}\text{Замена :}\\ x=t^2\\ dx=\left(t^2\right)'dt=2tdt\end{array}\right]=\int\frac{2tdt}{t+2}=2\int\frac{(t+2)-2}{t+2}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=2\int dt-4\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=2t-4\int\frac{d(t+2)}{t+2}=2t-4\ln\left|t+2\right|=\left[\begin{array}{l}\text{обратная}\\ \text{замена : } t=\sqrt{x}\end{array}\right]=2\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C.$$

2.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+20} = \left[\begin{array}{l} \text{Выделим в знаменателе полный квадрат.} \\ x^2+4x+20 = (x^2+4x+4)+16 = (x+2)^2+16. \\ \text{Замена}: x+2=t;\ x=t-2;\ dx=dt; \\ x+1=t-2+1=t-1 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(t-1)dt}{t^2+16} = \int \frac{tdt}{t^2+16} - \int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+16)}{t^2+16} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+16\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{обратная замена}: \quad t=x+2; \\ \mathrm{t}^2+16 = x^2+4x+20 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+20\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

3.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена}: \ x=3\sin t,\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos\ t; \quad dx = 3\cos\ tdt \end{array}\right] =$$

$$= \int 3\cos\ t \cdot 3\cos\ tdt = 9\int \cos^2 tdt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\int dt + \frac{9}{2}\int \cos\ 2tdt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\int \cos\ 2td(2t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin\ 2t + C = \left[\text{Обратная замена}: \quad t = \arcsin\ \frac{x}{3}\right] =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\ \frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\ \frac{x}{3}\right) + C.$$

4.

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Замена :} & \\ e^x = t & e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & dx = \dfrac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{t^2 \frac{1}{t}dt}{t+1} = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln|e^x+1| + C.$$

2.4. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

или в укороченном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Формула применяется для нахождения, например, интегралов вида

а) $\int x^n \cos x dx,\ \int x^n \sin x dx,\ \int x^n e^x dx$ с выбором функции $u = x^n$;

б) $\int x^n \ln x dx$ с выбором функции $u = \ln x$;

в) $\int x^n \arcsin x dx,\ \int x^n \arccos x dx,\ \int x^n \operatorname{arctg} x dx,$ с выбором функции $u = \arcsin x$ и т.п.

После выбора функции $u = u(x)$ и дифференциала $dv = v'(x)dx$ находим дифференциал $du = u'(x)dx$ и функцию $v = \int v'(x)dx = \int dv\ (C = 0)$. Подставив $u(x), v(x)$ и $du(x)$ в правую часть формулы, находим $\int v(x)du$.

Применение формулы интегрирования по частям не ограничивается интегралами приведённых типов.

Примеры

$$1.\int x\cos\frac{x}{3}dx=\left[\begin{array}{l}\text{Выбираем}\quad u=x,\ d\nu=\cos\frac{x}{3}dx\\ \text{и находим}\quad du=x'dx=dx,\\ \nu=\int\cos\frac{x}{3}dx=3\int\cos\frac{x}{3}d\frac{x}{3}=3\sin\frac{x}{3}\end{array}\right]=$$

$$=x\cdot 3\sin\frac{x}{3}-\int 3\sin\frac{x}{3}dx=3x\sin\frac{x}{3}-3\cdot 3\int\sin\frac{x}{3}d\frac{x}{3}=3x\cdot\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C.$$

$$2.\int(2x-5)\cdot e^{-7x}dx=\left[\begin{array}{l}\text{Выбираем}\quad u=2x-5,\ d\nu=e^{-7x}dx\\ \text{и находим}\quad du=(2x-5)'dx=2dx,\\ \nu=\int e^{-7x}dx=-\frac{1}{7}\int e^{-7x}d(-7x)=-\frac{1}{7}e^{-7x}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}+\int\frac{1}{7}e^{-7x}\cdot 2dx=-\frac{2x-5}{7}e^{-7x}+\frac{2}{7}\int e^{-7x}dx=$$

$$=-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}+\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)e^{-7x}+C==-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}-\frac{2}{49}e^{-7x}+C.$$

$$3.\int\frac{\ln 9x}{x^3}dx=\int\frac{1}{x^3}\cdot\ln 9xdx=\int x^{-3}\cdot\ln 9xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}u=\ln 9x,\ d\nu=x^{-3}dx,\ \text{тогда}\\ du=(\ln 9x)'\,dx=\frac{9}{9x}dx=\frac{dx}{x},\nu=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2x^2}\end{array}\right]=-\frac{\ln 9x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=-\frac{\ln 9x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int x^{-3}dx=-\frac{\ln 9x}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}+C=-\frac{2\ln 9x+1}{4x^2}+C.$$

$$4.\int x\operatorname{arctg}\,x dx=\int \operatorname{arctg}\,x\cdot x dx=\left[\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg}\,x,\ d\nu=xdx,\ \text{тогда} \\ du=(\operatorname{arctg}\,x)'dx=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ \nu=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx==\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arctg}\,x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\,x+C=\frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}\,x+\operatorname{arctg}\,x-x\right)+C.$$

$$5.\int x^2\cdot 3^x dx=\left[\begin{array}{l} u=x^2,\ d\nu=3^x dx,\quad \text{тогда} \\ du=2xdx,\ \nu=\dfrac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right]=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}\cdot 2xdx=$$

$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\int x\cdot 3^x dx=\left[\begin{array}{l} u=x,\ d\nu=3^x dx,\quad \text{и} \\ du=dx,\ \nu=\dfrac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx\right)=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C\right)=$$

$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2x\cdot 3^x}{\ln^2 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3}+C.$$

Рассмотрим два нетиповых примера.

$$6.\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l}u=\sqrt{1+x^2};\ d\nu=dx,\ \text{тогда}\\ du=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};\ \nu=\int dx=x\end{array}\right]=$$

$$=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}dx+\sqrt{1+x^2}=-\int\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx+\sqrt{1+x^2}=-\int\sqrt{x^2+1}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

тогда из равенства

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

находится

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C.$$

$$7)\int e^x\cdot\sin 2xdx=\left[\begin{array}{l}u=e^x,\ d\nu=\sin 2xdx,\ \text{тогда}\\ du=e^xdx,\ \nu=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right]=-\frac{e^x\cdot\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}u=e^x,\ d\nu=\cos 2xdx,\ \text{тогда}\\ du=e^xdx,\ \nu=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right]=-\frac{e^x\cdot\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^x\cdot\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int e^x\cdot\sin 2xdx\right)=$$

$$=-\frac{e^x\cdot\cos 2x}{2}+\frac{e^x\cdot\sin 2x}{4}-\frac{1}{4}\int e^x\cdot\sin 2xdx$$

Из равенства

$$\int e^x \cdot \sin\ 2xdx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin\ 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^x \cdot \sin\ 2xdx$$

находится

$$\frac{5}{4}\int e^x \cdot \sin\ 2xdx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin\ 2x}{4}$$

или

$$\int e^x \cdot \sin\ 2xdx = \frac{1}{5}e^x \cdot \sin\ 2x - \frac{2}{5}e^x \cdot \cos\ \ 2x + C.$$

2.5. Интегрирование рациональных дробей

Функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется рациональной дробью, где

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$Q_m(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m -$$

многочлены степени n и m соответственно.

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ будет правильной, если $n < m$; в противном случае $(n \geq m)$ дробь будет неправильной.

Дроби: $\frac{x^2+1}{x^3+x^2-5x}; \frac{3x+1}{x^2-8x+}$ являются правильными, а дроби $\frac{x^3-5x^2+1}{x^3-8x-5}; \frac{x^4-8x^3+}{x^2-5x+}$ - неправильными.

Если дробь неправильная, то путём деления числителя на знаменатель её можно представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Пример

Представить дробь $\frac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2}$ в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Решение

Дробь является неправильной, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе.

Произведём деление двух многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^4+8x^3+5 & x^2+5x+2 \\ \underline{-\,x^4+5x^3+2x^2} & \\ 3x^3-2x^2+5 & x^2+3x-17 \\ \underline{-\,3x^3+15x^2+6x} & \\ -17x^2-6x+5 & \\ \underline{-\,-17x^2-85x-34} & \\ 79x+39 & \end{array}$$

Деление производится до тех пор, пока степень многочлена в остатке не будет меньше степени делителя.

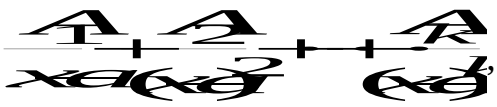
Таким образом, $\frac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2}=x^2+3x-17+\frac{79x+39}{x^2+5x+2}$. Очевидно, что интегрирование целой части (т. е. многочлена) не представляет никаких трудностей, поэтому интегрирование любой рациональной дроби сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби можно разделить на несколько этапов:

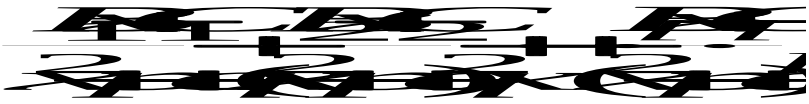
1. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители вида $(x-a)^k$ и $\left(x^2+px+q\right)^l$, где $a, p, q-$действительные числа, k и l – натуральные числа, корни квадратного трёхчлена $x^2+px+q-$комплексные числа.

2. По виду множителей в знаменателе разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей по правилу:

всякому множителю вида $(x-a)^k$ в разложении соответствует сумма k – дробей вида



всякому множителю вида $(x^2+px+q)^l$ в разложении соответствует сумма l – дробей вида



где неопределённые коэффициенты.

3. Найти неопределённые коэффициенты

;

для этого полученную сумму простейших дробей привести к общему знаменателю и сравнить числители заданной и полученной дробей. Найти неопределённые коэффициенты можно двумя способами:

а) приравнять коэффициенты двух многочленов (числителей) при одинаковых степенях x и решить полученную систему уравнений;

б) сравнить многочлены (числители) при конкретных значениях x; удобнее выбрать такие значения x, при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен нулю или любые другие значения (метод частных значений).

4. Проинтегрировать полученные простейшие дроби. При интегрировании получаются интегралы следующего вида:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k}dx = A_k \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$ (см. интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен).

$\int \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + px + q)^l} dx$ (интегрирование таких дробей в данном методическом пособии не рассматривается).

Примеры

1. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} -$$

неправильная рациональная дробь, преобразуем её

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \underline{x^5 - 4x^3} & \hline & x^2 + x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 - 8 \\ \underline{x^4 - 4x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ \underline{4x^3 - 16x} \end{array}$$

$$4x^2 + 16x - 8.$$

Таким образом, имеем

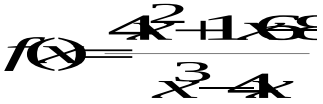
$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Следовательно

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \int\left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\,dx.$$

Последний интеграл рассмотрим отдельно. Подынтегральная функция  является правильной рациональной дробью.

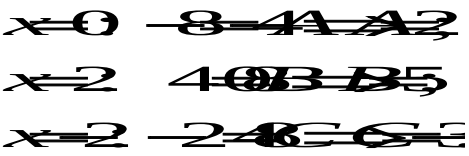
Разложим знаменатель этой дроби на множители

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

Определим коэффициенты *A, B* и *C*. Для этого приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю

и приравняем числители

Определим коэффициенты A, B и C методом частных значений, для этого подставим конкретные значения x в обе части вышестоящего выражения; в качестве конкретных значений x рассмотрим те значения, при которых знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль.



Итак, имеем

Интегрируем данную функцию

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2} = 2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Возвращаемся к исходному интегралу

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx =$$

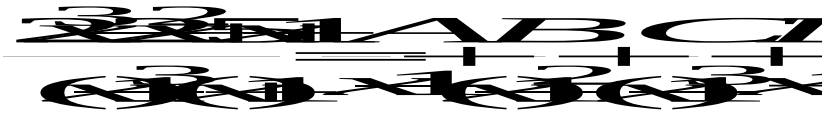
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

2. $\int \dfrac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x-1)}$ – правильную рациональную дробь.

Разложим знаменатель на множители

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей



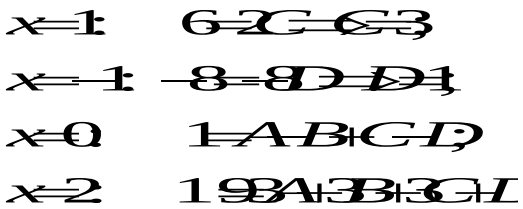
Определим коэффициенты A, B, C и D, для этого приведем сумму простейших дробей к общему знаменателю

$$\frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x-1)^3\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2\cdot(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)}$$

и приравняем числители

Определим коэффициенты A, B, C и D методом частных значений, подставив эти значения в обе части, в качестве конкретных значений x выбираем $x = 1$; $x = -1$ (это те значения x при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен 0) и два значения $x = 0$ и $x = 2$ выбираем произвольно.



подставив значения $C = 3$ и $D = 1$ в последние два уравнения получаем

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 3A+3B=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

Итак, имеем

Интегрируем данную функцию

$$\int \frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + \ln|x+1| + C.$$

3. $\int \dfrac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}$ Это правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель дроби на множители

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

Определим коэффициенты A, B и C

$$= x^2 - 7x + 15 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)x;$$

$$x^2 - 7x + 15 = Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx;$$

$$x^2 - 7x + 15 = (A + B)x^2 + (C - 2A)x + 5A$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 1 = A + B; \\ x: &\quad -7 = C - 2A; \\ x^0: &\quad 15 = 5A \Rightarrow A = 3 \\ &\qquad\quad B = -2 \\ &\qquad\quad C = -1. \end{aligned}$$

Итак, имеем

Проинтегрируем данную функцию

$$\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{dx} = \int\left(\frac{3}{x} - \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\right)dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx = 3\ln|x| - \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл отдельно.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t+3}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{t^2+4} + 3\int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln\left|t^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln\left|(x-1)^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Тогда окончательно имеем

$$\int \frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}\,\mathrm{dx} = 3\ln|x| - \ln\left|x^2-2x+5\right| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\,\frac{x-1}{2} + C.$$

2.6. Интегрирование тригонометрических функций

а) $\int \sin^m ax \cdot \cos^n ax dx$

Пусть хотя бы одно из чисел *m* или *n* является нечетным положительным числом. Интеграл находится методом замены переменной; при этом

если *m* – нечетное число, то нужно сделать замену $\cos ax = t$,

если *n* – нечетное число, то нужно сделать замену $\sin ax = t$.

При таких подстановках нужно предварительно представить функцию, имеющую нечетную положительную степень в виде произведения первой и четной степени и преобразовать четную степень тригонометрической функции с помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Если оба числа *m* и *n* являются нечетными положительными числами, то за новую переменную обозначить ту из функций $\cos ax$ и $\sin ax$, степень которой больше, а оставшийся множитель преобразовать так же, как указано выше.

Примеры

$$1.\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos^5 x}}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{\sqrt{\cos^5 x}}=\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin xdx}{(\cos x)^{5/2}}=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\-\sin xdx=dt\\\sin xdx=-dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{t^{5/2}}=-\int\frac{dt}{t^{5/2}}+\int\frac{t^2dt}{t^{5/2}}=-\int t^{-5/2}dt+\int t^{-1/2}dt=-\frac{t^{-3/2}}{-3/2}+\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{t^3}}+2\sqrt{t}+C=\frac{2}{3\sqrt{\cos^3 x}}+2\sqrt{\cos x}+C.$$

$$2.\int\cos^5 3xdx=\int\cos^4 3x\cdot\cos 3xdx=\int(\cos^2 3x)^2\cdot\cos 3xdx=$$

$$=\int(1-\sin^2 3x)^2\cdot\cos 3xdx=\left|\begin{array}{l}\sin 3x=t\\3\cos 3\,xdx=dt\\\cos 3\,xdx=\dfrac{1}{3}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int(1-t^2)^2\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int(1-2t^2+t^4)dt=\frac{1}{3}\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\sin^3 3x+\frac{1}{15}\sin^5 3x+C\,.$$

3. $\int \cos^9 2x \cdot \sin^3 2x dx = \int \cos^9 2x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin 2x dx =$

$$= \int \cos^9 2x \cdot (1 - \cos^2 2x) \cdot \sin 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x dx = dt \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int t^9 \cdot (1 - t^2) \cdot \left(-\frac{1}{2} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (t^9 - t^{11}) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{t^{12}}{12} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{20} \cos^{10} 2x + \frac{1}{24} \cos^{12} 2x + C.$$

б) $\int \sin^m ax \cdot \cos^n ax dx$

Если оба числа m и n являются четными положительными числами, то воспользуемся формулами понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Примеры

1. $\int \sin^2 \frac{x}{3}\,dx = \int \frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\,dx =$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} + C.$

2. $\int \cos^4 3x dx = \int (\cos^2 3x)^2\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos\ 6x+\cos^2 6x}{4}dx =$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\ 6x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 6x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin\ 6x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos\ 12x}{2}\,dx =$

$= \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\int \cos\ 12x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\sin\ 12x + C =$

$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{1}{96}\sin\ 12x + C.$

3. $\int \sin^4 \frac{x}{2}\cos^4 \frac{x}{2}dx = \int\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^4 dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 x dx =$

$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 x)^2\,dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx =$

$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{2}{64}\int \cos 2x dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{64} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx =$

$= \frac{x}{64} - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{128}\int dx + \frac{1}{128}\int \cos 4x dx =$

в) $\int \sin ax \cdot \cos bx dx;$ $\int \cos ax \cdot \cos bx dx;$ $\int \sin ax \cdot \sin bx dx,$

где $a \neq b$.

При интегрировании указанных выше произведений синусов и косинусов нужно предварительно преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Примеры

1. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)dx = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{7}\cos 7x) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}\cos 3x) + C$

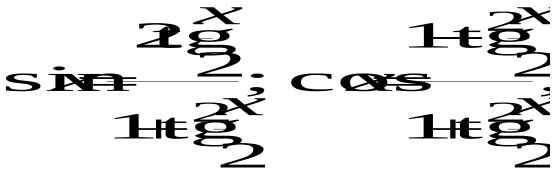
$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

2. $\int \cos 3x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C =$

$= \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

г) $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$

Здесь $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. В этом случае нужно использовать универсальную тригонометрическую подстановку



а затем ввести новую переменную

Пример

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$$

Преобразуем знаменатель подынтегральной функции

Возвращаемся к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\right)}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \\ \dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)}{2(t^2-4t+4)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int (t-2)^{-2}\,dt = \frac{(t-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t-2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2} + C.$$

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Непосредственное интегрирование

1. *а)* $\int \sqrt{x}\cdot(x+1)(2x+3)dx;$ б) $\int \frac{5e^{2x}+\sqrt{x^3}\cdot e^x}{e^x}dx.$

2. *а)* $\int \frac{(x+3)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{4-\sin^2 x}{2-\sin x}dx.$

3. *а)* $\int \frac{1}{x^3}\left(3x^2-\frac{1}{x^6}\right)dx;$ б) $\int \frac{x^2-6}{x^4-36}dx.$

4. *а)* $\int \frac{5x^2-4x+12}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{1-4\sin^2 x}{\sin^2 x}dx.$

5. *а)* $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)x}{\sqrt[3]{x}}dx;$ б) $\int \frac{x^2-4x+3}{x-3}dx.$

6. *а)* $\int x\left(\sqrt{x}-9\right)\left(\sqrt{x}+9\right)dx;$ б) $\int \frac{5x\sin x+2}{x}dx.$

7. *а)* $\int \frac{5}{x^2}\left(\frac{x}{25}-x^2\right)dx;$ б) $\int \frac{(81-x^2)\,dx}{x-9}.$

8. *а)* $\int\left(\frac{3}{x}+4\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)dx;$ б) $\int \frac{6+x^2}{36-x^4}\,dx.$

9. *а)* $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot x dx;$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2+3}\,dx}{x^2+3}.$

10. *а)* $\int \frac{7x^2+6x-5}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{x^2-6x+5}{x-5}dx.$

11. *а)* $\int \frac{7\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{(1-\cos^2 x)\,dx}{x^2\cdot\sin^2 x}.$

12. *а)* $\int (x+2)(1-x)\sqrt{x}\,dx;$ б) $\int \frac{4e^{5x}-x^4\cdot e^{4x}\,dx}{e^{4x}}dx.$

13. *а)* $\int x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^4}\,dx;$ б) $\int \frac{\sin^2 5x+\cos^2 5x}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

14. *а)* $\int (x^2\cdot\sqrt{x}-4x^3+3)\,dx;$ б) $\int (1+x+tg^2 x)\,dx.$

15. *а)* $\int x\cdot\left(\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^2}+3\right)dx;$ б) $\int(4+ctg^2x)\,dx\,.$

16. *а)* $\int\frac{(x^3\sqrt{x}-2x)dx}{x^3};$ б) $\int\frac{\sqrt{64-x^2}}{64-x^2}dx\,.$

17. *а)* $\int\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}{x}dx;$ б) $\int 4\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}dx\,.$

18. *а)* $\int\frac{16x^4-1(x^3\sqrt{x}-2x)}{(2x-1)(2x+1)}dx;$ б) $\int\frac{20dx}{\cos(1+tg^2x)}dx\,.$

19. *а)* $\int\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}dx;$ б) $\int e^x(12e^{-x}+3)\,dx\,.$

20. *а)* $\int x\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\frac{9}{x}\,dx;$ б) $\int\frac{(x-3)(x+3)}{x^4-81}dx.$

21. *а)* $\int(7x+2)\left(\frac{7}{x}-1\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2\cdot\cos x\,dx}{2\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,.$

22. *а)* $\int x^3\left(x^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2-6x-8}{x-2}dx.$

23. *а)* $\int\frac{x^3-16x}{x+4}dx;$ б) $\int\frac{x^3e^x+3e^{2x}}{e^x}dx.$

24. *а)* $\int\frac{x^3-2\sqrt[3]{x}+3}{x}dx;$ б) $\int\frac{1+x\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx\,.$

25. *а*) $\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{x\cdot(x^2+1)}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}dx.$

26. *а*) $\int \frac{3}{x^3}\left(\frac{x^2}{3}+x^3+1\right)dx;$ б) $\int \left(e^x+4e^{2x}\right)e^{-x}\,dx.$

27. *а*) $\int \frac{3x^2+1}{x\sqrt{x}}dx;$ б) $\int 3x^2\cdot\left(\frac{1}{x^3\sin x}+\frac{1}{3x^2}\right)dx.$

28. *а*) $\int (3x^2-1)\cdot x\sqrt{x}\,dx;$ б) $\int \frac{x^2+3}{x^4-9}dx.$

29. *а*) $\int \frac{2x\sqrt{x}+3x+12}{x}dx;$ б) $\int \frac{3x^2}{\cos x}\left(\frac{2\cos x}{x^3}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)dx\,.$

30. *а*) $\int \frac{(3x+4)(x-1)}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{2dx}{1+\cos 2x}.$

3.2. Подведение под знак дифференциала

1. *а*) $\int 3\cos 7x dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3}+1\right)};$ *в*) $\int e^{\sin x-2}\cos x dx.$

2. *а*) $\int 4e^{-5x}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+7\right)};$ *в*) $\int \frac{\sin x dx}{\cos x+1}.$

3. *а*) $\int 2\sin\frac{x}{10}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{(5x+8)^2};$ *в*) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

4. *а*) $\int \frac{7dx}{\cos^2 3x}$; *б*) $\int e^{\frac{x}{2}+3}dx$; *в*) $\int \frac{\sqrt{\ln x+2}}{x}dx$.

5. *а*) $\int \frac{3dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$; *б*) $\int \cos(2-5x)dx$; *в*) $\int \frac{xdx}{x^2+3}$.

6. *а*) $\int \frac{5dx}{9+4x^2}$; *б*) $\int \sin\left(\frac{1}{3}x+4\right)dx$; *в*) $\int \cos\left(x^3+3\right)x^2dx$.

7. *а*) $\int \frac{6dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; *б*) $\int (5x+1)^8\,dx$; *в*) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}\,dx}{\cos^2 x}$.

8. *а*) $\int 2\cos\frac{x}{4}dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$; *в*) $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^3 x\cdot \sin^2 x}$.

9. *а*) $\int 3e^{\frac{x}{7}}dx$; *б*) $\int \frac{dx}{(5x+2)^3}$; *в*) $\int \frac{\mathrm{arctg}^4 xdx}{1+x^2}$.

10. *а*) $\int 5\sin 8x\,dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{4}+1\right)}$; *в*) $\int \frac{\arcsin^3 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. *а*) $\int \frac{3dx}{\cos^2 \frac{x}{10}}$; *б*) $\int (7x-2)^5\,dx$; *в*) $\int \mathrm{ctg}\ xdx$. .

12. *а*) $\int \frac{4dx}{\sin^2 10x}$; *б*) $\int e^{\frac{x}{5}+2}dx$; *в*) $\int \cos^2 x\sin x\,dx$. .

13. *а*) $\int \frac{7dx}{25+9x^2}$; *б*) $\int \cos\left(\frac{x}{4}-7\right)dx$; *в*) $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$.

14. *а*) $\int \frac{3dx}{\sqrt{36-25x^2}}$; *б*) $\int \sin\left(\frac{x}{7}+4\right)dx$; *в*) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

15. *а*) $\int 2\cos 8x dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{3}+1}}$; *в*) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+4}$.

16. *а*) $\int 3e^{-\frac{x}{7}}dx$; *б*) $\int e^{-3x^2}xdx$; *в*) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-5)}$.

17. *а*) $\int 25\sin\frac{x}{9}dx$; *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}\cdot\cos^2 x}$; *в*) $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+7)}$.

18. *а*) $\int \frac{6dx}{\cos^2 5x}$; *б*) $\int \frac{e^{-2ctgx}dx}{\sin^2 x}$; *в*) $\int e^{-\frac{x}{7}+2}dx$.

19. *а*) $\int \frac{4dx}{\sin^2\frac{x}{6}}$; *б*) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^2 x}$; *в*) $\int \frac{dx}{5x-3}$.

20. *а*) $\int \frac{3dx}{16+25x^2}$; *б*) $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *в*) $\int\left(3x+\frac{1}{7}\right)^4 dx$.

21. *а*) $\int \frac{5dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; *б*) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$; *в*) $\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$.

22. *а*) $\int 5\cos\ 9x dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}+3\right)};$ *в*) $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}.$

23. *а*) $\int 5e^{5x} dx;$ *б*) $\int \frac{e^x dx}{e^x - 4};$ *в*) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{8}-3\right)}.$

24. *а*) $\int 3\sin\frac{2}{5}x dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}};$ *в*) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$

25. *а*) $\int \frac{4dx}{\cos^2\frac{x}{12}};$ *б*) $\int e^{-3x^2} x dx;$ *в*) $\int e^{-4x+5} dx.$

26. *а*) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{4x}{5}};$ *б*) $\int e^{2x^3} x^2 dx;$ *в*) $\int \cos(3x+8) dx.$

27. *а*) $\int \frac{6dx}{9+16x^2};$ *б*) $\int \frac{\cos(tgx)dx}{\cos^2 x};$ *в*) $\int \sin\left(\frac{x}{10}+10\right) dx.$

28. *а*) $\int \frac{7dx}{\sqrt{64-25x^2}};$ *б*) $\int \frac{dx}{7x-5};$ *в*) $\int \frac{e^{\mathrm{ctgx}} dx}{\sin^2 x}.$

29. *а*) $\int \sin\frac{3x}{7} dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-7}};$ *в*) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\ x}}{1+x^2} dx.$

30. *а*) $\int e^{-\frac{2x}{5}} dx;$ *б*) $\int \sqrt{4x-5} dx;$ *в*) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$

3.3. Замена переменной

1. *а*) $\int \frac{dx}{e+2\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+3}$ $\left[e^x=t\right]$.

2. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; *б*) $\int x(5x-1)^{19}dx$ $\left[5x-1=t\right]$.

3. *а*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

4. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; *б*) $\int \frac{xdx}{(3-x)^7}$ $\left[3-x=t\right]$.

5. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

6. *а*) $\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{e^x-2}$ $\left[e^x=t\right]$.

7. *а*) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$; *б*) $\int x(1-3x)^8dx$ $\left[1-3x=t\right]$.

8. *а*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

9. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; *б*) $\int \frac{xdx}{(4x+5)^{10}}$ $\left[4x+5=t\right]$.

10. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$ $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

11. *а*) $\int \frac{dx}{x+3\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{e^x+5}$ $[x=\ln t]$.

12. *а*) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3x+2}}$; *б*) $\int x(3-2x)^{11}dx$ $[3-2x=t]$.

13. *а*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+36}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$ $\left[x=\frac{5}{t}\right]$.

14. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; *б*) $\int \frac{xdx}{(3x+4)^6}$ $[3x+4=t]$.

15. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$ $\left[x=\frac{5}{t}\right]$.

16. *а*) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x-4}$ $[x=\ln t]$.

17. *а*) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x-5}}$; *б*) $\int x(3x+1)^8 dx$ $[3x+1=t]$.

18. *а*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+16}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$ $\left[x=\frac{4}{t}\right]$.

19. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}}$; *б*) $\int \frac{xdx}{(5-x)^8}$ $[5-x=t]$.

20. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+9\sqrt{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

21. *а)* $\int \frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{e^x-4}$ $\left[x=\ln t\right]$.

22. *а)* $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{5x-1}}$; *б)* $\int x(5x+3)^9\,dx$ $\left[5x+3=t\right]$.

23. *а)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-25}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ $\left[x=\frac{4}{t}\right]$.

24. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}$; *б)* $\int \frac{xdx}{(3-x)^9}$ $\left[3-x=t\right]$.

25. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}-9\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-49}}$ $\left[x=\frac{7}{t}\right]$.

26. *а)* $\int \frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x-3}$ $\left[e^x=t\right]$.

27. *а)* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x+5}}$; *б)* $\int x(2x-5)^5\,dx$ $\left[2x-5=t\right]$.

28. *а)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+25}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+64}}$ $\left[x=\frac{8}{t}\right]$.

29. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}}$; *б)* $\int \frac{xdx}{(3x+1)^7}$ $\left[3x+1=t\right]$.

30. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+49\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{81-x^2}}$ $\left[x=\frac{9}{t}\right]$.

3.4. Интегрирование по частям

1. *а)* $\int x\cos\frac{x}{3}dx;$ *б)* $\int \ln(x+4)\,dx;$ *в)* $\int \sqrt{x^2+9}\,dx.$

2. *а)* $\int (2x+1)e^{-3x}dx;$ *б)* $\int \arcsin 5x dx;$ *в)* $\int \cos\ln 2x dx.$

3. *а)* $\int\left(\frac{x}{2}-1\right)\sin 2x dx;$ *б)* $\int (x+4)\ln x dx;$ *в)* $\int e^{3x}\cos x dx.$

4. *а)* $\int (8x+3)\cos 8x dx;$ *б)* $\int \ln 8x dx;$ *в)* $\int \sin(15\ln x)\,dx.$

5. *а)* $\int (x+4)\ln 5x dx;$ *б)* $\int \left(x^2-1\right)5^{-x}dx;$ *в)* $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$

6. *а)* $\int\left(1-\frac{5}{2}x\right)\sin 5x dx;$ *б)* $\int (2x-5)\ln x dx;$ *в)* $\int e^x \sin\frac{x}{4}dx.$

7. *а)* $\int x\cos\left(\frac{x}{5}-1\right)dx;$ *б)* $\int \operatorname{arctg} 2x dx;$ *в)* $\int e^{4x}\sin x dx.$

8. *а)* $\int\left(\frac{x}{5}+7\right)e^{0,1x}dx;$ *б)* $\int x\operatorname{arctg} x dx;$ *в)* $\int \sin\ln x dx\,.$

9. *а)* $\int (7x+1)\sin\frac{x}{7}dx;$ *б)* $\int x^{-5}\ln x dx;$ *в)* $\int \operatorname{arctg}^2 x dx.$

10. *а)* $\int x\cos\left(5-\frac{x}{10}\right)dx;$ *б)* $\int \arccos 3x dx;$ *в)* $\int e^x \sin 2x dx.$

11. *а)* $\int \left(x^2-2x\right)\ln x dx;$ *б)* $\int x\cdot 10^{5x}dx;$ *в)* $\int e^{3x}\cdot\cos x dx.$

12. *а)* $\int \ln 12x dx\,;$ *б)* $\int x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx;$ *в)* $\int \sqrt{x^2+7}\,dx.$

13. *а)* $\int x^2\sin x dx;$ *б)* $\int \ln(7x+9)\,dx;$ *в)* $\int \arcsin^2 x dx.$

14. *а)* $\int (2x+7)\cos\frac{1}{7}x dx;$ *б)* $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx;$ *в)* $\int e^{5x}\cdot\sin x dx.$

15. *а)* $\int x \cdot e^{x+100} dx$; *б)* $\int \ln 12x\, dx$; *в)* $\int \cos \ln 5x dx$.

16. *а)* $\int (12x+1) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$; *б)* $\int \left(x^2 - 4x + 4\right) \ln x dx$; *в)* $\int \sin(5 \ln x) dx$.

17. *а)* $\int (x+7) \cdot \sin 7x dx$; *б)* $\int x^{100} \cdot \ln x\, dx$; *в)* $\int e^{20x} \cdot \cos x dx$.

18. *а)* $\int x \cdot \cos(7x+9)\, dx$; *б)* $\int \ln(10-x)\, dx$; *в)* $\int \sqrt{x^2 - 10}\, dx$.

19. *а)* $\int 2x \sin 4x \cdot \cos 4x\, dx$; *б)* $\int x^2 \cdot \ln x dx$; *в)* $\int e^x \cdot \cos 12x dx$.

20. *а)* $\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x dx$; *б)* $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$; *в)* $\int \sqrt{x^2 + 12}\, dx$.

21. *а)* $\int x \cdot \sin \pi x dx$; *б)* $\int x^5 \cdot \ln 5x dx$; *в)* $\int \arccos^2 x\, dx$.

22. *а)* $\int x \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx$; *б)* $\int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$; *в)* $\int \sin 3x dx$.

23. *а)* $\int (7x-4) \cdot e^{4-x} dx$; *б)* $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$; *в)* $\int \cos(3 \ln x)\, dx$.

24. *а)* $\int (x+10) \ln 10x dx$; *б)* $\int (1+x)^2 \cdot e^x dx$; *в)* $\int \sin \ln 7x\, dx$.

25. *а)* $\int \lg(10x + 0{,}5)\, dx$; *б)* $\int x \cdot \cos \frac{2x}{\pi} dx$; *в)* $\int 2 \sin \ln x \cdot \cos \ln x\, dx$.

26. *а)* $\int (x+9) \cdot \sin \frac{x}{9} dx$; *б)* $\int \left(1 + x^2\right)^2 \cdot \ln x\, dx$; *в)* $\int 2e^x \cdot \sin x \cos x dx$.

27. *а)* $\int \left(9 - \frac{7}{2}x\right) \cdot \sin 2x dx$; *б)* $\int \arccos 2x\, dx$; *в)* $\int \frac{e^x \cdot \sin x}{\operatorname{tg} x} dx$.

28. *а)* $\int x \cdot \sin\left(9 - \frac{7x}{2} dx\right)$; *б)* $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$; *в)* $\int \cos \ln x\, dx$.

29. *а*) $\int (x+7)\cdot\cos(x+7)\,dx$; *б*) $\int x\cdot\ln x^7\,dx$; *в*) $\int e^x\cdot(1+\cos 3x)\,dx$.

30. *а*) $\int\left(x^2-2x-3\right)\cdot\ln x dx$; *б*) $\int\frac{x\cdot\sin^3 x}{1-\cos^2 x}dx$; *в*) $\int\frac{\sin 2x}{e^{2x}}dx$.

3.5. Интегрирование рациональных дробей

1. *а*) $\int\frac{2x+3}{x^2-2x+5}dx$; *б*) $\int\frac{8x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int\frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г*) $\int\frac{x^5+7x^3+x^2+12x+1}{x^4+5x^2+4}dx$.

2. *а*) $\int\frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$; *б*) $\int\frac{4x^2-11x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

в) $\int\frac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г*) $\int\frac{x^5+6x^3+x^2+5x+3}{x^4+4x^2+3}dx$.

3. *а*) $\int\frac{1-2x}{x^2-2x+2}dx$; *б*) $\int\frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int\frac{2x^2-5x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г*) $\int\frac{x^5+5x^3+x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}dx$.

4. *а*) $\int\frac{2-3x}{x^2+2x+2}dx$; *б*) $\int\frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int\frac{2x^2+7x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г*) $\int\frac{x^5+7x^3+x^2+10x+3}{x^4+5x^2+6}dx$.

5. *а*) $\int\frac{3-2x}{x^2+4x+5}dx$; *б*) $\int\frac{4x^2-7x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-8x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+8x^3+x^2+16x+2}{x^4+6x^2+8}dx$.

6. *а*) $\int \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx$; *б*) $\int \frac{8x-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+10x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+9x^3+x^2+20x+3}{x^4+7x^2+12}dx$.

7. *а*) $\int \frac{5+2x}{x^2-6x+10}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3+x^2+8x+1}{x^4+5x^2+4}dx$.

8. *а*) $\int \frac{2-5x}{x^2+6x+10}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2-7x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2+5x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+5x-3}{x^4+4x^2+3}dx$.

9. *а*) $\int \frac{1-4x}{x^2-2x+10}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-7x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+5x^3-x^2+4x-2}{x^4+3x^2+2}dx$.

10. *а*) $\int \frac{5x+3}{x^2+2x+10}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-6x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2+9x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+7x^3-x^2+10x-3}{x^4+5x^2+6}dx$.

11. *а*) $\int \frac{5x+2}{x^2-6x+13}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+8x^3-x^2+16x-2}{x^4+6x^2+8}dx$.

12. *а*) $\int \frac{4-2x}{x^2+6x+13}dx$; *б*) $\int \frac{2-3x}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+8x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+9x^3+x^2+18x+4}{x^4+7x^2+12}dx$.

13. *а*) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; *б*) $\int \frac{-8x-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+8x-1}{x^4+5x^2+4}dx$.

14. *а*) $\int \frac{3x-5}{x^2+4x+8}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-6x-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+5x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+5x^3+2x^2+4x+6}{x^4+4x^2+3}dx$.

15. *а*) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+13}dx$; *б*) $\int \frac{-5x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+4x^3+2x^2+3x+4}{x^4+3x^2+2}dx$.

16. *а*) $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+13}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

17. *а*) $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+18}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2+6x-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-7x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+4x^3+x^2+2}{x^4+6x^2+8}dx$.

18. *а*) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+18}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+7x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+9x^3-x^2+20x-3}{x^4+7x^2+12}dx$.

19. *а*) $\int \frac{3x-4}{x^2-2x+17}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3+x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

20. *а*) $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+17}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-9x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2+6x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+5x^3-2x^2+4x-6}{x^4+4x^2+3}dx$.

21. *а*) $\int \frac{3x-4}{x^2-4x+20}dx$; *б*) $\int \frac{2x-2}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-9x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+4x^3-2x^2+3x-4}{x^4+3x^2+2}dx$.

22. *а*) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+20}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2+7x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+7x^3-x^2+12x-2}{x^4+5x^2+6}dx$.

23. *а*) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+29}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-2x+6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+8x^3+x^2+12x+4}{x^4+6x^2+8}dx$.

24. *а*) $\int \frac{2x-3}{x^2+4x+29}dx$; *б*) $\int \frac{3x^2+2x+6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{5x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+5x^3+x^2+4x+3}{x^4+7x^2+12}dx$.

25. *а*) $\int \frac{4x-7}{x^2-2x+26}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2+9x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+5x-4}{x^4+5x^2+4}dx$.

26. *а*) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+26}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+6x^3+7x}{x^4+4x^2+3}dx$.

27. *а*) $\int \frac{5x-1}{x^2-6x+25}dx$; *б*) $\int \frac{2x^2-9x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-9x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+2x^3+2x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}dx$.

28. *а*) $\int \frac{5x-3}{x^2+6x+25}dx$; *б*) $\int \frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г*) $\int \frac{x^5+3x^3+x^2+2}{x^4+5x^2+6}dx$.

29. *а*) $\int \frac{4x-3}{x^2-8x+17}dx$; *б*) $\int \frac{4x^2-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{x^2-11x+18}{x^3-6x^2+9x}dx;$ *г*) $\int \frac{x^5+8x^3-x^2+12x-4}{x^4+6x^2+8}dx.$

30. *а*) $\int \frac{2x+7}{x^2+8x+17}dx;$ *б*) $\int \frac{x+3}{x^3-4x^2+3x}dx;$

в) $\int \frac{x^2+7x+18}{x^3+6x^2+9x}dx;$ *г*) $\int \frac{x^5+9x^3-x^2+18x-4}{x^4+7x^2+12}dx.$

3.6. Интегрирование тригонометрических функций

1. *а*) $\int \cos^2\frac{x}{3}dx;$ *б*) $\int \cos^3 x\cdot\sin^2 xdx;$ *в*) $\int \sin 4x\cdot\cos 5xdx.$
2. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{3}dx;$ *б*) $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 xdx;$ *в*) $\int \sin 3x\cdot\sin 7xdx.$
3. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}dx;$ *б*) $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx;$ *в*) $\int \cos 3x\cdot\cos 8x\,dx.$
4. *а*) $\int \cos^2\frac{x}{5}dx;$ *б*) $\int \sin^3 x\cdot\sqrt{\cos x}\,dx;$ *в*) $\int \sin 7x\cdot\cos 5xdx.$
5. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{5}dx;$ *б*) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$ *в*) $\int \sin 6x\cdot\sin 2xdx.$
6. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}dx;$ *б*) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}dx;$ *в*) $\int \cos 5x\cdot\cos 7x\,dx$
7. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{6}dx;$ *б*) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}};$ *в*) $\int \cos 4x\cdot\cos 7x\,dx.$
9. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{6}\cdot\cos^2\frac{x}{6}dx;$ *б*) $\int \cos^3 x\cdot\sin^4 x\,dx;$ *в*) $\int \cos 7x\cdot\sin 4x\,dx.$
10. *а*) $\int \cos^2\frac{2x}{5}dx;$ *б*) $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 xdx;$ *в*) $\int \sin 11x\cdot\sin 5xdx.$
11. *а*) $\int \sin^2\frac{2x}{5}dx;$ *б*) $\int \cos^3 x\cdot x\sqrt[4]{\sin^3}\,dx;$ *в*) $\int \cos 9x\cdot\cos 6x\,dx.$

12. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{5}\cdot\cos^2\frac{x}{5}dx$; *б*) $\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$; *в*) $\int \cos 6x\cdot\sin 4x\,dx$.

13. *а*) $\int \cos^2\frac{x}{7}dx$; *б*) $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[3]{\sin x}\,dx$; *в*) $\int \sin 12x\cdot\cos 8xdx$.

14. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{7}$; *б*) $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[4]{\cos x}\,dx$; *в*) $\int \cos 8x\cdot\cos 5x\,dx$.

15. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{7}\cdot\cos^2\frac{x}{7}dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin x\sqrt{\sin x}}dx$; *в*) $\int \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$.

16. *а*) $\int \cos^2\frac{x}{8}dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt{\cos x}}$; *в*) $\int \sin 5x\cdot\sin 8x\,dx$.

17. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{8}dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx$; *в*) $\int \cos 7x\cdot\cos 10xdx$.

18. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{8}\cdot\cos^2\frac{x}{8}dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$; *в*) $\int \cos 5x\cdot\sin 6x\,dx$.

19. *а*) $\int \cos^2\frac{x}{9}dx$; *б*) $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[7]{\sin^4 x}\,dx$; *в*) $\int \sin 7x\cdot\sin 11xdx$.

20. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{9}dx$; *б*) $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[7]{\cos^4 x}\,dx$; *в*) $\int \cos 9x\cdot\cos 11x\,dx$.

21. *а*) $\int \sin^2\frac{x}{9}\cdot\cos^2\frac{x}{9}dx$; *б*) $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[5]{\sin^4 x}\,dx$; *в*) $\int \cos 11x\cdot\sin 5x\,dx$.

22. *а*) $\int \cos^2\frac{2x}{3}dx$; *б*) $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[5]{\cos^4 x}\,dx$; *в*) $\int \sin 12x\cdot\sin 7xdx$.

23. *а*) $\int \sin^2\frac{2x}{3}dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin x\sqrt{\sin x}}$; *в*) $\int \cos 13x\cdot\cos 5x\,dx$.

24. *а*) $\int \sin^2\frac{2x}{3}\cdot\cos^2\frac{2x}{3}dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}$; *в*) $\int \cos 9x\cdot\sin 4x\,dx$.

25. *а*) $\int \cos^2\frac{3x}{4}dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}$; *в*) $\int \sin 13x\cdot\sin 8x\,dx$.

26. *а*) $\int \sin^2\frac{3x}{4}dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$; *в*) $\int \sin 12x\cdot\sin 8x\,dx$.

27. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{4} \cdot \cos^2 \frac{3x}{4} dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \sin 5x \cdot \cos 8x \, dx$.

28. *а*) $\int \cos^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \sin 14x \cdot \sin 9x \, dx$.

29. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[6]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \cos 15x \cdot \cos 11x \, dx$.

30. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{5} \cdot \cos^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[6]{\cos^5 x}}$; *в*) $\int \sin 9x \cdot \cos 3x \, dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнниях и задачах. Часть 1. – М.: ООО “Изд-во Оникс”, 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Т. И. Королюк

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей:
очного и заочного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ…….....3
ВВЕДЕНИЕ…….4
1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ…….....5
2. ВЫДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ…….6
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ…..7
4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ……..…12
5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ…….....14
6. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ……...15
6.1. Показательная функция e^z ……..…….……...15
6.2. Тригонометрические функции sin z, cos z ……..……..…..16
6.3. Логарифмическая функция $Ln\, z$ ……..……..16
6.4. Общая степенная функция z^γ ……..……...17
7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....19
7.1. Определение производной…….……..…19
7.2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана)……..…….....19
7.3. Правила дифференцирования……..……..22
7.4. Аналитические функции……..…….……..22
7.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной.....23
8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ...…….....25
8.1. Интеграл от функции комплексной переменной……..25
8.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной……..27
8.3. Основная теорема Коши…….……..……...29
8.4. Теорема Коши для многосвязной области…….....31
8.5. Вычисление интеграла от аналитической функции...…….....32
8.6. Особые точки – полюсы…….....34
8.7. Определение вычета…….....34
8.8. Формулы для вычисления вычетов……..…….....35
8.9. Теорема Коши о вычетах……..…….....36
9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ……..…….....40
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…….…43

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей. В пособии приведены теоретические сведения по теме « Функции комплексной переменной» в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика». Теоретический материал сопровождается решением задач с подробными объяснениями, а также даны варианты заданий, которые могут быть использованы как для самостоятельной работы студентов в аудитории в присутствии преподавателя, так и в качестве домашних и аудиторных контрольных работ.

Целью работы является активация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению одного из разделов курса математики.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Число вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица $(i^2 = -1)$, называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = Jmz$, где Re – начальные буквы латинского слова *realis* – действительный, Jm – начальные буквы слова *imaginarius* – мнимый.

Два комплексных числа считаются равными, если равны одновременно их действительные и мнимые части.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается либо точкой плоскости xOy с координатами (x, y), либо вектором, направленным из начала координат в эту точку. Если комплексное число z – действительное, т. е. $z = x$, то соответствующая ему точка лежит на оси Ox, поэтому ось абсцисс называется действительной осью. Чисто мнимые числа $z = iy$ изображаются точками оси Oy, поэтому ось ординат называется мнимой осью.

Если $z = x + iy$, то сопряженное с ним есть $\bar{z} = x - iy$.

Комплексная величина $z = x + iy$, где x и y – действительные переменные, называется комплексной переменной. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа или комплексная переменная z, называется комплексной плоскостью C.

Введем понятие функции комплексной переменной.

Пусть дано некоторое множество D комплексных чисел. Если каждому значению переменной $z \in D$ ставится в соответствие вполне определенное значение переменной w, то переменная w называется функцией комплексной переменной z, в записи: $w = f(z)$. Если каждому значению $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция называется многозначной.

Множество D, состоящее из всех значений независимой переменной z, называется областью определения функции $w = f(z)$, а о функции говорят, что она определена или задана на множестве D. Геометрически область определения функции изображается некоторым множеством точек на комплексной плоскости z.

Примеры

1. Функция $w = z^2$ определена на всей плоскости z, функция однозначная.
2. Функция $w = \sqrt{z}$ определена на всей плоскости и двузначна.
3. Функция $w = \dfrac{1}{z-3}$ определена при всех значениях z, кроме $z = 3$, поэтому область ее определения есть вся комплексная плоскость z, из которой удалена точка $z = 3$. Функция однозначная.

2. ВЫДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть дана функция $w = f(z)$. Обозначим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда $w = f(z)$ перепишется в виде $u + iv = f(x + iy)$.

Отсюда видно, что действительная и мнимая части u, v переменной w являются функциями действительной и мнимой частей x, y переменной z:
$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$.

Итак, задание функции комплексной переменной $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций от двух действительных переменных.

Примеры

1. Для функции $w = z^2$, при $z = x + iy$, $w = u + iv$ имеем $w = u + iv = (x + iy)^2$ или $u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$, откуда $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$.

2. $w = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

$$z = x + iy, \; w = u + iv, \text{ тогда } u + iv = \frac{1}{x + iy}$$

или $u + iv = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, откуда $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

3. $w = Jmz$

$$u + iv = y, \text{ откуда } \quad u = y, \quad v = 0.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Геометрическую интерпретацию функции одной действительной переменной $y = f(x)$ можно получить с помощью ее графика в плоскости Oxy, строя для каждой пары соответствующих друг другу значений x и y точку с координатами (x, y).

В случае же комплексных переменных, поступая аналогично, нужно было бы строить точку для каждой пары соответствующих друг другу комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Такая точка (z, w) должна определяться четырьмя действительными координатами (x, y, u, v). В трехмерном пространстве построить такую точку нельзя. Поэтому поступим так.

Возьмем две плоскости: на одной – плоскости аргумента (плоскость Oxy, плоскость (z)) – будем изображать комплексные числа $z = x + iy$, $z \in D$, D – область определения функции $w = f(z)$, а на другой – плоскости функции (пл. 0, uv, плоскость (w)) – соответствующие им комплексные числа w (рис. 1). Получим, что задание функции $w = f(z)$ позволяет каждой точке $z \in D$ плоскости аргумента поставить в соответствие точку $w \in D_1$ плоскости функции,

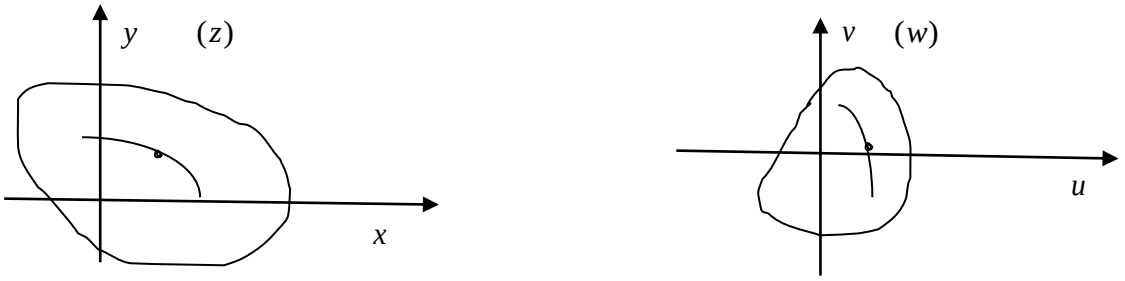


Рис. 1. Геометрическое изображение функции комплексной переменной

т. е. отображает множество D на множество D_1.

Иногда удобно плоскости Oxy и O_1uv совместить (ось O_1u с осью Ox, ось O_1v с осью Oy). Тогда значения независи симой переменной z и функции w изображаются точками одной и той же плоскости.

Пусть $w = f(z)$ – функция комплексной переменной. Если точка $z = x + iy$ описывает какую-либо кривую L в плоскости Oxy, все точки кривой принадлежат множеству D, то соответствующая точка $w = u + iv$ описывает в плоскости O_1uv, как правило, тоже некоторую линию L_1 (рис. 1). Можно сказать, что при отображении $w = f(z)$ кривая L переходит в кривую L_1.

Но не всякая функция комплексной переменной отображает кривую в кривую, а область в область. Так функция $w = \operatorname{Re} z$ отображает всю плоскость z в действительную ось плоскости w.

Для «хороших» функций (например, аналитических, которые мы рассмотрим позже), как правило, образ кривой – кривая, образ области – область.

Поставим вопрос: как, зная кривую L, найти кривую L_1. Если кривая L задана уравнением в комплексной форме $z = g(t)$, то, заменив в равенстве $w = f(z)$ переменную z функцией $g(t)$, мы получим уравнение $w = f(g(t))$ кривой L_1 в комплексной форме. Однако чаще кривая L задается уравнением в прямоугольных координатах $\varphi(x, y) = 0$.

Для кривой L_1 обозначим текущие координаты через u и v, поскольку эта кривая описывается точкой $w = u + iv$. Уравнение кривой L_1 мы должны получить в форме $\Psi(u, v) = 0$. Возьмем на кривой L_1 некоторую точку $w = u + iv$. Она соответствует некоторой точке $z = x + iy$ кривой L. Так как z и w связаны соотношением $w = f(z)$, то $u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$. Решая эту систему уравнений относительно x и y, получим $x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$. Подставляя эти выражения для x и y в уравнение $\varphi(x, y) = 0$, получим уравнение $\varphi(x(u, v), \quad y(u, v)) = 0$. Это уравнение и будет уравнением $\psi(u, v) = 0$ кривой L_1.

Если плоскости Oxy и O_1uv совмещены, то кривые L и L_1 расположены на одной плоскости. Линия L_1 называется образом линии L.

Иногда удобно выразить из уравнения $w = f(z)$ сначала z без w, а затем x и y через u и v.

Пример 1

Кривая L задана на плоскости Oxy уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Найти ее образ при отображении $w = 2iz - 1$.

Решение

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда равенство $w = 2iz - 1$ перепишется в виде $u + iv = 2i(x + iy) - 1$, откуда $u = -2y - 1, \quad v = 2x$. Выражаем x и y через u и v: $x = \frac{v}{2}, \quad y = -\frac{u+1}{2}$. Подставляем найденные выражения для x и y в уравнение $x^2 + y^2 = 4$ кривой L: $\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{(u+1)^2}{4} = 4$. После упрощения получаем уравнение кривой L_1 в виде $(u+1)^2 + v^2 = 16$.

Итак, кривая L – окружность с центром в начале координат радиуса 2 – преобразуется с помощью заданной функции $w = 2\,i\,z - 1$ в кривую L_1 – окружность с центром $(-1;\,0)$ радиуса 4.

Пример 2

При отображении $w = \dfrac{1}{z}$ найти образ прямой линии $y = x + 1$.

Решение

Из уравнения $w = \dfrac{1}{z}$ находим $z = \dfrac{1}{w}$. Подставим $z = x + iy$,

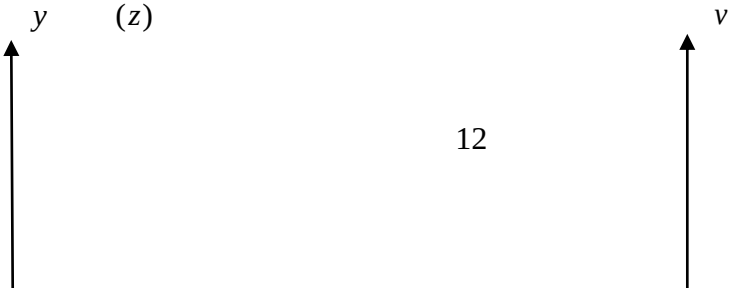
$w = u + iv : x + iy = \dfrac{1}{u + iv}$, $x + iy = \dfrac{u - iv}{u^2 + v^2}$, откуда $x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}$, $y = -\dfrac{v}{u^2 + v^2}$.

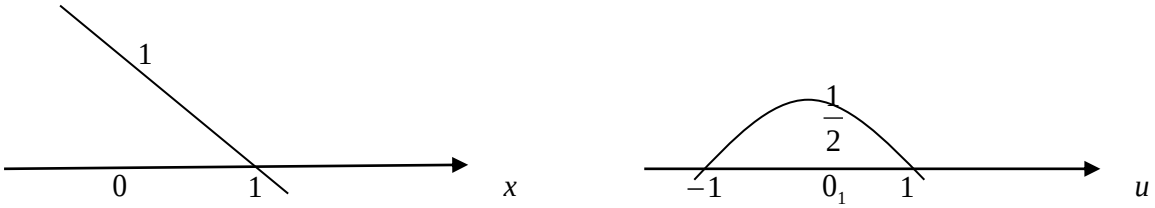
Найденные выражения для x и y подставим в уравнение линии L $y = x + 1$: $-\dfrac{v}{u^2 + v^2} = \dfrac{u}{u^2 + v^2} + 1$, после преобразования имеем $u^2 + v^2 + u + v = 0$ или $\left(u + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Это уравнение в плоскости $O_1 u v$ определяет линию L_1 - окружность с центром $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 3

Пусть $w = z^2$. Найти образ прямой $x + y = 1$.

Выделяя действительную и мнимую части функции $w = z^2$, получим $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Далее из трех уравнений $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x + y = 1$ исключаем x и y: $u = (x - y)(x + y)$ или $u = (x - y)$, так как $x + y = 1$, тогда $u^2 + 2v = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = (x + y)^2 = 1$. Получили уравнение образа $u^2 + 2v = 1$ – это уравнение параболы в плоскости $O_1 u v$, вершина которой – точка $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.





Пример 4

Построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-3+2i|=1$; б) $-1<\operatorname{Re} z<1$; в) $Jmz=-2$; г) $|z-1|+|z+1|<3$;

д) $1<|z+2i|<2$; е) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\pi$; ж) $|z|<1$; $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$.

Решение

а) $|z-3+2i|=|z-(3-2i)|$ есть расстояние от точки z до точки $3-2i$.

Значит, уравнению *а*) удовлетворяют все точки z, лежащие на окружности радиуса 1 с центром $(3;-2)$.

б) Полагая $z=x+iy$, имеем $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+iy)=x$.

Значит, условие *б*) можно записать так: $-1<x<1$. Очевидно, этому условию удовлетворяют точки z, лежащие в полосе между прямыми $x=-1$ и $x=1$, параллельными оси Oy.

в) Полагая $z=x+iy$, имеем $Jmz=Jm(x+iy)=y$.

Значит, условие *в*) можно записать так: $y=-2$. Этому условию удовлетворяют точки прямой $y=-2$, параллельной оси Oy.

г) Равенство $|z-1|+|z+1|<3$ выражает, что сумма расстояний от точки z до точек $+1$ и -1 равна 3. Множество таких точек есть эллипс с фокусами в точках $+1$ и -1 $(c=1)$ и с большой осью $2a=3$. Значит, неравенству *г*) удовлетворяют точки, лежащие внутри этого эллипса с полуосями $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

д) Неравенству *д*) удовлетворяют все точки кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $(0,-2)$.

е) Неравенство *е*) определяет множество точек z, лежащих внутри угла, вершина которого находится в начале координат, а сторонами являются лучи, наклоненные к положительному направлению оси Ox под углами $\frac{\pi}{4}$ и π.

ж) Система неравенств *ж*) определяет сектор, ограниченный окружностью с центром в начале координат радиуса 1 и радиусами, образующими с осью Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Для проверки усвоения пройденного материала на практических занятиях студентам можно предложить выполнить самостоятельные работы.

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$z_1 = -2; \quad z_2 = 1 - i; \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i; \quad z_4 = 5.$$

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|z| = 3$; б) $|z + 1 - 2i| = 2$; в) $Jmz = 4$; г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$z_1 = -2i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = -2 - 2i$; $z_4 = -4$.

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|z - 3 + 2i| = 1$; б) $|z| = 2$; в) $\mathrm{Re}\, z = 4$; г) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 1$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $2 < |z + 2i| < 4$; б) $\operatorname{Re} z < -1$; в) $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$; г) $|z+1| < 1$ и $Jmz < 0$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $y = x^2$ при отображении $w = i\,z + 1$.
2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $-1 < Jmz < 2$; б) $|z + 3 + i| > 1$; в) $\arg z > \frac{\pi}{3}$; г) $|z+1| < 1$ и $\operatorname{Re} z < -1$.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, определенная для любого $z \in D$ за исключением, может быть, точки z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ стремится к пределу $A\,(A \neq \infty)$, когда $z \to z_0$ (конечному), и пишут $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ξ можно найти положительное число $\delta = \delta(\xi)$ такое, что для всех z, отличных от z_0 и удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \xi$. Геометрически это означает, что как только z попадет в δ – окрестность точки z_0, то $w = f(z)$ попадет в ξ- окрестность точки A.

Полагая $A = B + iC$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $z_0 = x_0 + i\,y_0$, докажем теорему, устанавливающую связь между пределом функции и пределами ее действительной и мнимой частей.

Теорема

Если существует $\lim_{z \to z_0} f(z) = A = B + iC$, то существуют

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C$.

Доказательство

$$f(z) - A = u(x, y) - B + i(v(x, y) - C).$$

Тогда $|f(z) - A| = \sqrt{(u(x, y) - B)^2 + (v(x, y) - C)^2} < \xi$

при $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ по определению предела.

Отсюда следует, что $|u(x, y) - B| < \xi$ и $|v(x, y) - C| < \xi$

при $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$.

А это означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C$.

Справедливо и обратное утверждение.

Из доказанной теоремы следует: если $f(z) \to A$, то $|f(z)| \to |A|$, $\arg f(z) \to \arg A$ при условии $A \neq 0, \infty$.

Действительно,

$$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} \to \sqrt{B^2 + C^2} = |A|; \ \arg f(z) = arc\,tg\frac{v}{u} \to arc\,tg\frac{C}{B} = \arg A.$$

Поэтому основные теоремы о пределах функций действительных переменных распространяются без изменения на пределы функций комплексной переменной.

Например, если функции $f(z)$ и $g(z)$ определены в некоторой области D и для них $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A_1$; $\lim\limits_{z \to z_0} q(z) = A_2$, то $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm q(z)) = A_1 \pm A_2$; $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)\,q(z) = A_1 A_2$; $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{q(z)} = \dfrac{A_1}{A_2}$, если $A_2 \neq 0$.

Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $A \neq \infty$, если для любого $\xi > 0$ существует $N(\xi)$ такое, что при $|z| > N(\xi)$ выполняется неравенство $|f(z) - A| < \xi$.

Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если для любого $N > 0$ можно указать такую окрестность точки z_0, что если $z \in D$ и $z \neq z_0$ принадлежит этой окрестности, то $|f(z)| > N$.

Часто применяется понятие о пределе функции по кривой. Говорят, что $f(z) \to A$ при $z \to z_0$ по кривой L, если выполнение условия $|f(z) - A| < \xi$ при $|z - z_0| < \delta$ рассматривается только для точек z, лежащих на кривой L.

Очевидно, если $f(z) \to A$ при $z \to z_0$, то $f(z) \to A$ и по любой кривой. Если же по двум кривым функция имеет разные пределы или по какой-нибудь кривой предела вовсе нет, то $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Как и в анализе функций действительных переменных, назовем $z - z_0 = \Delta z$ приращением аргумента, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ – приращением функции. Тогда функция $f(z)$ будет непрерывной в точке z_0, если $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$. Условие непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, выражающим непрерывность двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в той же точке (x_0, y_0). Справедливо и обратное утверждение. Отсюда следует, что теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций действительных переменных будут справедливы и для непрерывных функций комплексной переменной.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества D, то она называется непрерывной на этом множестве.

Точками разрыва функции $f(z)$ называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Функция $w = \dfrac{z}{z - i}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = i$, а функция $w = \dfrac{2z + 1}{|z - 2| - 3}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точек окружности $|z - 2| = 3$.

6. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Показательная функция e^z

Показательная функция e^z, где $z = x + iy$, определяется так:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Функция $e^z \neq 0$ на всей комплексной плоскости. Для e^z сохраняются правила действий с показателями:

$$(e^z)^m = e^{nz}; \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, т. е. любой другой ее период равен $2\pi k i$, где k – целое число.

Действительно, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$.

Пример

Вычислить значение $e^{-1+\frac{\pi}{4}i}$, записать его модуль, действительную и мнимую части.

Решение

$$e^{-1+\frac{\pi}{4}i} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}(1+i), \quad \operatorname{Re}\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e};$$

$$Jm\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}, \quad \left|e^{-1}e^{\frac{\pi}{4}i}\right| e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

6.2. Тригогометрические функции $\sin z$, $\cos z$

Тригонометрические функции $z = \sin z$, $z = \cos z$ определяются так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in C.$$

$\sin z$ и $\cos z$ сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительной переменной.

Например, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$,
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

Так как показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, то показательная функция e^{iz} имеет основной период 2π, тогда $\sin z$ и $\cos z$ тоже имеют основной период 2π.

Пример

Вычислить $\cos(2 + 3i)$.

Решение

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Подставляя $z = 2 + 3i$, получим

$$\cos(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} + e^{-i(2+3i)}}{2} = \frac{e^{2i-3} + e^{2i+3}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-3}(\cos 2 + i \sin 2) + e^{3}(\cos 2 - i \sin 2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{3} + e^{-3}) \cos 2 - i \frac{1}{2}(e^{3} - e^{-3}) \sin 2 = ch\,3 \cdot \cos 2 - i\, sh 3 \cdot \sin 2.$$

6.3. Логарифмическая функция $Ln\, z$

Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, $z \neq \infty$, то число w называется логарифмом комплексного числа z (по основанию e) и обозначается $w = Ln\, z$.

Чтобы получить формулу для вычисления логарифма комплексного числа в равенстве $e^w = z$, положим $w = u + iv$, а $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, тогда $e^{u+iv} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ или $e^u = r(\cos v + i \sin v) = r(\cos v + i \sin v) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. По определению, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно, $e^u = r$, а $v = \varphi + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда $u = \ln r = \ln |z|$.

Итак,

$$Ln\, z = w = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k).$$

Окончательно

$$Ln\, z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Значение логарифма при $k = 0$ называется главным, его обозначают $\ln z$, оно равно $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Из изложенного следует, что логарифмы можно находить не только для положительных чисел, но и для произвольных комплексных чисел. При этом обнаружилось, что логарифмическая функция не однозначная, а многозначная, то

есть каждое комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов. В частности, имеют логарифмы и отрицательные числа, но при этом все значения логарифма комплексные.

Если $z = x -$ действительное положительное число, то $|z| = x$, а $\arg z = 0$. Поэтому главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает со значением $\ln z$, приводимым обычно в таблицах натуральных логарифмов. Но, кроме этих действительных значений, логарифмы положительных чисел имеют еще и бесконечное множество комплексных значений.

Все значения логарифма комплексного числа имеют одну и ту же действительную часть $\ln|z|$, поэтому геометрически значения логарифма изображаются на плоскости (w) точками вертикальной прямой $u = \ln|z|$.

Пример

Найти $Ln(-1+i)$ и $\ln(-1+i)$.

Решение

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Поэтому $Ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi ki, k = 0,\pm1,\pm2,...;\ \ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{3\pi}{4}i$.

6.4. Общая степенная функция z^γ

Если $w = z^\gamma$, где z – произвольное, отличное от 0 и ∞ комплексное число, а γ – любое комплексное число, то полагают по определению

$$w = z^\gamma = e^{\gamma Lnz}.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}, \gamma = a + bi$ тогда

$$w = z^\gamma = e^{\gamma Lnz} = e^{(a+bi)(\ln r + i\varphi + 2\pi ki)} = e^{a\ln r - b\varphi - 2\pi kb} \cdot e^{i(b\ln r + a\varphi + 2\pi ka)},\ k = 0, \pm1, \pm2,...$$

Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение z^γ имеет бесконечное множество значений, но в частных случаях они могут все совпадать (если γ – целое число) или среди них может быть только конечное число различных значений (если γ – дробное число).

Пример

Вычислить: а) 2^{3+5i}; б) i^i.

Решение

а)

$$2^{3+5i} = e^{(3+5i)Ln2} = e^{(3+5i)(\ln 2+2\pi ki)} = e^{(3\ln 2-10\pi k)+i(5\ln 2+6\pi k)}$$

$$= e^{3\ln 2-10\pi k} \cdot e^{i5\ln 2} == e^{3\ln 2-10\pi k}(\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)); k = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

б) $i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln 1+i\frac{\pi}{2}+2\pi ki)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

Видно, что все полученные значения i^i – действительные числа.

Например, при $k = 0$ имеем $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}2079$.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = ie^{\pi - i}$.
2) Вычислить:

а) $\sin(4-i)$; б) $Ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1-i)^{2+i}$.

Вариант 2

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = \sin z$.
2) Вычислить:

а) $\cos(2+5i)$; б) $\ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1+i)^{3-i}$.

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Определение производной

Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z).

1. $z \in D, z + \Delta z \in D, w = f(z), w + \Delta w = f(z + \Delta z).$

2. $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ есть приращение функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z + \Delta z$.

3. $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

4. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при произвольном стремлении $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ в точке z и обозначается $w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z.

Из дифференцируемости $f(z)$ в точке z следует ее непрерывность в этой точке: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Тогда $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$, откуда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, что означает непрерывность $f(z)$ в точке z.

Из непрерывности $f(z)$ в точке z дифференцируемость $f(z)$ не следует.

Если функция $f(z)$ имеет производную в каждой точке области D, то она называется *дифференцируемой в этой области.*

7.2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана)

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z). Точки $z = x + iy$ и $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ принадлежат области D.

Тогда

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y; \Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) =$$

$$= (u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)) - (u(x, y) + iv(x, y)) = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ и $\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$ есть полные приращения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Теорема

Для того, чтобы однозначная функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x,y) существовали частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, причем эти производные удовлетворяли условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия называют условиями Коши - Римана.

Так как эти условия значительно раньше были найдены Даламбером и Эйлером, то их называют также условиями Даламбера - Эйлера.

Доказательство

Необходимость

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z)$, предел не зависит от того, как точка $z + \Delta z \to z$.

Предположим, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z, например, по прямой, параллельной оси $0x$, тогда $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$ и

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если точка $z + \Delta z \to z$ по прямой, параллельной оси $0y$, то $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$, поэтому

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, то, приравнивая полученные выражения для $f'(z)$, находим $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ откуда по определению равенства двух комплексных чисел получаем условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Необходимость доказана.

Достаточность

Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y), то их полные приращения в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1; \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2,$$

где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, причем $\frac{\alpha_1}{\Delta z} \to 0$ и $\frac{\alpha_2}{\Delta z} \to 0$.

Тогда при условии, что частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x, y) удовлетворяют условиям Коши-Римана, приращение функции $w = f(z)$ запишется в виде

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 + i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2) =$$

$$= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta x + i\Delta y(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) + \alpha = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta z + \alpha = A\Delta z + \alpha,$$

где $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ - некоторое постоянное комплексное число, не зависящее от Δz, а $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $|\Delta z|$, т. е. $\to 0$ при $|\Delta z| \to 0$.

Найдем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{A\Delta z + \alpha}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (A + \frac{\alpha}{\Delta z}) = A$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует, конечен и не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, а значит, существует производная функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Если функция $w = f(z)$ в некоторой точке удовлетворяет условиям Коши-Римана, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

7.3. Правила дифференцирования

Из определения производной, правил алгебраических действий и теорем о пределах функций комплексной переменной следует, что основные правила дифференцирования функций действительного аргумента остаются справедливыми и для функций комплексной переменной.

7.4. Аналитические функции

Определение 1

Если однозначная функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D, то она называется аналитической в этой области.

Определение 2

Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Пример

Является ли аналитической а) $w = e^z$; б) $w = (\bar{z})^2$?

Решение

а) $w = u + iv, z = x + iy$

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ тогда } u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

Найдем частные производные этих функций

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y..$$

Условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются в любой (x, y), следовательно, функция $w = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости (z), а значит и аналитическая на всей комплексной плоскости.

б) $w = u + iv, z = x + iy; u + iv = (x - iy)^2; u + iv = x^2 - 2xyi - y^2;$

тогда $u = x^2 - y^2; v = -2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$

Условия Коши-Римана выполняются только в точке $z = 0$, так как равенства $2x = -2x$ и $-2y = 2y$ имеют место лишь при $x = y = 0$.

Следовательно, функция $w = (\bar{z})^2$ дифференцируема лишь в точке $z = 0$. Но, так как в окрестности точки $z = 0$ заданная функция не дифференцируема, она не будет аналитической в точке $z = 0$.

7.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области D плоскости (z), отображает эту область в область G плоскости (W). Пусть, далее, точка $z_0 \in D$, а соответствующая ей при отображении точка $w_0 \in G$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда величина $k = |f'(z_0)| = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$ есть коэффициент искажения или масштаб в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Если $k>1$, то дуги при отображении растягиваются, если $k<1$, то дуги сжимаются, если $k=1$, то масштаб при отображении не меняется. Так как производная в точке z_0 не зависит от того, по какой кривой $z \to z_0$, то все бесконечно малые дуги, проходящие через точку z_0, при отображении будут подвергаться одинаковому искажению.

$\arg f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (\arg (w - w_0) - \arg (z - z_0))$ - это угол, на который нужно повернуть касательную к некоторой линии L в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к преобразованной кривой L_1 в точке $w_0 = f(z_0)$.

При отображении с помощью аналитической функции углы между кривыми сохраняются не только по величине, но и по направлению, во всех точках, где $f'(z_0) \neq 0$.

Определение

Всякое отображение, обладающее в некоторой точке свойством постоянства углов и свойством постоянства растяжений, называется конформным в этой точке.

Отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0, для которой $f'(z_0) \neq 0$, является конформным отображением.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1

1) Найти область дифференцируемости функции $w = z^2 + (3-i)z + i$ и ее производную.
2) Вычислить:

   а) $\cos(1-3i)$; б) $Ln(\sqrt{3}+i)$; в) $(2i)^{5+i}$.

Вариант 2

1) Найти область дифференцируемости функции $w = \cos z$ и её производную.
2) Вычислить:

   а) $(i-\sqrt{3})^{2i+1}$; б) $\ln(-3-\sqrt{3}i)$; в) $\sin(i-2)$

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1

1) Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$.
2) Дифференцируема ли функция $w = \overline{z}$?
3) Вычислить:

   а) $\ln(-4-4i)$; б) 5^{4-3i}; в) $\sin 3i$.

Вариант 2

1) Какая функция называется аналитической в точке и в области?
2) Установить, дифференцируема ли функция $w = e^{\overline{z}}$.
3) Вычислить:

   а) 2^{1+5i}; б) $Ln(-5i)$; в) $\cos(4+i)$.

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1

1) Найти область аналитичности функции $w = e^{2z} + iz$.
2) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 4$ при отображении $w = iz + 2$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $x^2 + (y-1)^2 = 1$ при отображении $w = \overline{z}$.
2) Проверить условия Коши-Римана для функции $w = e^{z^2}$.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть в некоторой области D плоскости комплексной переменной (z) задана однозначная и непрерывная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и пусть γ – произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D.

Выберем на дуге γ направление обхода от точки a к точке b.

1) Разобьем дугу γ произвольно на n частичных дуг точками $z_0 = a, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b;$; обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$.
2) Выберем на каждом участке (z_{k-1}, z_k) дуги γ по точке $\varsigma_k = \xi_k + i\eta_k$.
3) Образуем сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)) \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k),$$

которую назовем интегральной суммой функции $f(z)$.

Предел интегральной суммы σ_n, вычисленный при стремлении к нулю длины наибольшей из частичных дуг (при $n \to \infty$), не зависящий ни от способа разбиения дуги γ на частичные дуги (z_{k-1}, z_k), ни от выбора точек ς_k, называется интегралом от функции $f(z)$ по дуге γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k .$$

При указанных выше требованиях к функции $f(z)$ и контуру γ этот предел всегда существует.

Действительно,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k).$$

По условию $f(z)$ непрерывна в области D, значит, в этой области непрерывны и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а γ – гладкая или кусочно-гладкая кривая. Поэтому пределы сумм, стоящих в правой части последнего равенства, существуют и являются криволинейными интегралами по координатам от функций действительных переменных.

Таким образом,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy\,.$$

Эта формула дает выражение интеграла от функции комплексной переменной через два криволинейных интеграла от действительных функций. Отсюда же следует, что основные свойства криволинейных интегралов по координатам распространяются и на интегралы от функций комплексной переменной.

Некоторые из этих свойств есть:

1) $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$;
2) $\int_\gamma af(z)dz = a\int_\gamma f(z)dz$;
3) $\int_\gamma (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_\gamma f_1(z)dz + \int_\gamma f_2(z)dz$;
4) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

8.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной

1. Пусть дуга γ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда криволинейные интегралы сводим к определенным и получим

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta u\,(x\,(t),\,y\,(t))\,x'(t)\,dt - v\,(x\,(t),\,y\,(t))\,y'(t)\,dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta v\,(x\,(t),\,y\,(t))\,x'(t)\,dt + u\,(x\,(t),\,y\,(t))\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u\,(x\,(t),\,y\,(t)) + iv\,(x\,(t),\,y\,(t)))\,x'(t)\,dt +$$

$$+ \int_\alpha^\beta (u\,(x\,(t),\,y\,(t)) + iv\,(x\,(t),\,y\,(t)))\,iy'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (u\,(x\,(t),\,y\,(t)) + iv\,(x\,(t),$$

$$y\,(t)))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f\,(z\,(t))\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\,(z\,(t))\,dz\,(t),$$

то есть $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\,(z\,(t))\,dz\,(t)$, где $z\,(t) = x\,(t) + iy\,(t).$

2. Если дуга γ задана уравнением $y = g\,(x)$, где $a \le x \le b$, то, принимая за параметр x и записывая $z = x + ig(x)$, задачу сводим к случаю 1.

3. Если дуга γ задана уравнением $x = \varphi\,(y)$, где $x = \varphi\,(y)$, где $c \le y \le d$, то за параметр принимаем y и записываем $z = \varphi\,(y) + iy$. Задачу сводим к случаю 1.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_{\gamma} (\bar{z})^2\,dz$ по отрезку, соединяющему точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

Решение

На прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 1 + i$, контур γ задается уравнением $z = x + ix = x\,(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$. Тогда $\bar{z} = x\,(1 - i),\ dz = (1 + i)\,dx$ и

$$\int\limits_{\gamma} (\bar{z})^2\,dz = \int\limits_{0}^{1} x^2 (1-i)^2 (1+i)\,dx = 2\,(1-i)\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx = 2\,(1-i)\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\,(1-i).\,.$$

Пример 2

По ломаной γ с вершинами в точках $O\,(0, 0),\ A\,(1, 1),\ B\,(2, 1)$ вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$; б) $\int\limits_{\gamma} \mathrm{Re}\ z dz$; в) $\int\limits_{\gamma} Jmz dz$; г) $\int\limits_{\gamma} |z| dz$.

Решение

а) Уравнение стороны $OA: y = x$, тогда $z = x + ix$ или $z = x\,(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$, $dz = (1 + i)\,dx$, а

$$\int\limits_{OA} z^2 dz = \int\limits_{0}^{1} x^2 (1+i)^2 (1+i) dx = (1+i)^3 \int\limits_{0}^{1} x^2 dx = (1+i)^3\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(1 + 3i - 3 - i) = \frac{1}{3}(2i - 2) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\,.$$

Уравнение стороны $AB: y = 1$, тогда $z = x + i,\quad dz = dx,\ \ 1 \le x \le 2$, а

$$\int_{AB} z^2 dz = \int_1^2 (x+i)^2 dx = \frac{(x+i)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}((2+i)^3 - (1+i)^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(2+i-1-i)((2+i)^2 + (2+i)(1+i) + (1+i)^2) = \frac{1}{3}(4+9i) = \frac{4}{3} + \frac{9}{3}i = \frac{4}{3} + 3i.$$

Окончательно, интеграл по всей ломаной равен

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{4}{3} + 3i = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

б) $\mathrm{Re}\, z dz$. Для стороны $OA: z = x(1+i)$, $0 \le x \le 1$, $dz = (1+i)\,dx$. Тогда

$$\int_{OA} \mathrm{Re}\ z\ dz = \int_0^1 x\,(1+i)\,dx = (1+i)\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Для стороны

$$AB:\ z = x+i,\quad 1 \le x \le 2,\quad dz = dx, \text{ а } \int_{AB} \mathrm{Re}\ z\ dz = \int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тогда

$$\int_\gamma \mathrm{Re}\, z dz = \int_{OA} \mathrm{Re}\, z dz + \int_{AB} \mathrm{Re}\, z dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} = 2 + \frac{1}{2}i.$$

в) $J\ m\ z\ dz$.

$$\int_\gamma Jmzdz = \int_{OA} Jmzdz + \int_{AB} Jmzdz = \int_0^1 x\,(1+i)\,dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

г) $|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для стороны $OA: y = x$, $z = x(1+i)$, $dz = (1+i)dx$, $0 \le x \le 1$

$$\int_{OA} |\,z\,|\,dz = \int_0^1 x\sqrt{2}\,(1+i)\,dx = \sqrt{2}\,(1+i)\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Для стороны $AB: y = 1$, $z = x + i, dz = dx$, $1 \le x \le 2$,

$$\int\limits_{AB} |\, z \,|\, dz = \int\limits_{1}^{2} \sqrt{x^2+1}\; dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1}\,\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(\, x + \sqrt{x^2+1})\,\Big|_1^2 =$$

$$= \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\,(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln\,(1+\sqrt{2}).$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} |\, z \,|\, dz = \int\limits_{OA} |\, z \,|\, dz + \int\limits_{AB} |\, z \,|\, dz = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\,(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln\,(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} i \approx 2{,}518 + 0{,}707i.$$

8.3. Основная теорема Коши

Теорема

Если $f(z)$ есть аналитическая функция односвязной области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, целиком лежащему в области $\overline{D}$, равен нулю, т. е.

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство

Известно, что $\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma} u\,(x,y)\, dx - v\,(x,y)\, dy + i \oint\limits_{\gamma} v\,(x,y)\, dx + u\,(x,y)\, dy.$

Из аналитичности $f(z)$ в области D следует, что частные производные функций $u\,(x,y)$ и $v\,(x,y)$ существуют, удовлетворяют условиям Коши-Римана, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, а из предположения о непрерывности $f'(z)$ в области D следует непрерывность частных производных. Поэтому, применяя к криволинейным интегралам формулу Грина, получим

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \iint\limits_{D_1} (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\, dx\, dy + i \iint\limits_{D_1} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\, dx\, dy.$$

Из условий Коши-Римана подынтегральное выражение в каждом двойном интеграле равно нулю, поэтому

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0..$$

Теорема доказана.

Следствие

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $\overline{D}$, то $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B, если дуга AB целиком лежит внутри области $\overline{D}$.

Пример 1

Вычислить по ломаной OAB (см. пример 2 раздела 8) и по отрезку OB интегралы:

а) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$; б) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$;

Решение

а) $\int\limits_{OAB} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$ (см. пример 2 раздела 8)

$$\int\limits_{OB} z^2 dz = \int\limits_0^2 x^2 (1+\frac{i}{2})^2 (1+\frac{i}{2}) dx = (1+\frac{i}{2})^3 \int\limits_0^2 x^2 dx =$$

$$= (1+\frac{i}{2})^3 \left.\frac{x^3}{3}\right|_9^2 = \frac{8}{3}(1+\frac{i}{2})^3 = \frac{8}{3}(1+\frac{3i}{2}-\frac{3}{4}-\frac{i}{8}) = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}i.$$

Получили, что $\int\limits_{OAB} z^2 dz = \int\limits_{OB} z^2 dz$, т. е. интеграл не зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$, так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

б) $w = \operatorname{Re} z,\quad u+iv = x$, тогда $u = x,\quad v = 0;\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

Условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ не выполняется ни в одной точке на комплексной плоскости, так как $1 \neq 0$, поэтому $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической на всей комплексной плоскости.

$$\int\limits_{OAB} \operatorname{Re} z dz = 2 + \frac{1}{2} i \qquad \text{(см. пример 2 раздела 8),}$$

$$\int\limits_{OB} \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_0^2 x\,(1+\frac{i}{2})\,dx = (1+\frac{i}{2}) \int\limits_0^2 x\,dx = (1+\frac{i}{2}) \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2+i.$$

Так как функция $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической, интеграл $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$ зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$.

8.4. Теорема Коши для многосвязной области

Сначала рассмотрим двусвязную область (рис. 2), ограниченную простыми замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2, которые не пересекаются, а γ_2 целиком лежит внутри γ_1. Допустим, что $f(z)$ является аналитической в области между контурами и на самих контурах γ_1 и γ_2. Проведём в заданной области разрез по линии AB. Предполагая, что разрез имеет как бы два берега, мы превратим эту область в односвязную. Положительное направление обхода по контуру указано на рисунке. Применим теорему Коши к полученной односвязной области, ограниченной контуром $\Gamma\{AEA+AB+BFB+BA\}$.

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \text{или} \quad \oint_{AEA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \oint_{BFB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0.$$

Так как $\int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0$, то $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

Из полученной формулы видно, что интегралы от $f(z)$ по внешнему контуру γ_1 и по внутреннему контуру γ_2, обходимым в одном и том же направлении, равны по величине, но, вообще говоря, не равны нулю, так как $f(z)$ может быть неаналитической внутри области, ограниченной контуром γ_2.

Теперь рассмотрим теорему Коши для $(n+1)$- связной области, которая с помощью системы разрезов может быть сделан односвязной.

Если $f(z)$- аналитическая функция в замкнутой многосвязной области, ограниченной внешним замкнутым контуром γ и замкнутыми контурами γ_1, γ_2,....,γ_n,, лежащими внутри γ, то интеграл от этой функции по внешнему контуру γ равен сумме интегралов по внутренним контурам, причём интегрирование по всем контурам выполняется в одном и том же направлении, то есть

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

8.5. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, содержащей внутри себя точки z_0 и z, то величина $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования, а зависит, лишь от вида подынтегральной функции и точек z_0 и z.

Если точка z_0 зафиксирована, то интеграл $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ определяет функцию $F(z)$ для каждой выбранной точки $z \in D$. Функция $F(z)$ является аналитической в D и $F'(z)=f(z)$.

Назовём функцию $\Phi(z)$ первообразной для $f(z)$ в области D, если $\Phi(z)$ аналитическая в D и $\Phi'(z)=f(z)$. Тогда $\Phi(z)-F(z)=C$, где C постоянное комплексное число. При $z=z_0$ имеем $\Phi(z_0)-F(z_0)=C$, отсюда $C=\Phi(z_0)$, так как $F(z_0)=0$.

Следовательно, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0).$

Полученная формула показывает, что значение интеграла от аналитической функции равно приращению какой-либо первообразной для подынтегральной функции на пути интегрирования.

Таким образом, определение первообразной и формула Ньютона-Лейбница для функций действительной переменной и аналитических функций комплексной переменной полностью совпадают. Поэтому интегралы от элементарных функций комплексной переменной вычисляются с помощью тех же формул и правил, что и в обычном анализе.

Пример 1

Вычислить: а) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$ вдоль контура γ, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$; б) $\int\limits_{\gamma} e^z dz$ по отрезку, соединяющему точки $z=0$ и $z=i$.

Решение

а) Так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция. $F(z)=\frac{z^3}{3}$, то

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{z=0}^{z=2+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{1}{3}(8+12i-6-i) = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}i.$$

Получили тот же результат, что и в примере 8.3.1

б) Так как $f(z)=e^z$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция $F(z)=e^z$, то

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{z=0}^{z=i} e^z dz = e^z\Big|_0^i = e^i - e^0 = e^i - 1 = \cos 1 + i\sin 1 - 1 = (\cos 1 - 1) + i\sin 1.$$

8.6. Особые точки - полюсы

Точка z_0 называется особой точкой для $f(z)$, если в этой точке нарушается аналитичность функции. Точка z_0 называется изолированной особой точкой, если можно указать такую окрестность точки $z_0 : |z - z_0| < r$, в которой, кроме z_0, других особых точек функции $f(z)$ нет.

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то точка $z = z_0$ называется полюсом функции $f(z)$.

Функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$ имеет в z_0 простой полюс или полюс первого порядка, а функция $g(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$ имеет в z_0 полюс *m*-го порядка, если $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Так для функции $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z\,(z-3)(z+1)^4} = \dfrac{z-1}{z\,(z-3)(z+1)^3}$ точки $z = 0$ и $z = 3$ - простые полюсы, а точка $z = -1$ - полюс третьего порядка.

8.7. Определение вычета

Понятие вычета является одним из важнейших понятий теории функций комплексной переменной в силу большой практической ценности основной теоремы о вычетах, которую мы рассмотрим ниже.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, где γ - любой замкнутый контур, лежащий целиком в области D. Если же внутри контура γ есть единственная изолированная особая точка функции $f(z)$, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, вообще говоря, не равен нулю. Значение этого интеграла, как известно, не зависит от формы контура γ.

Условились величину этого интеграла, делённую на $2\pi i$, называть вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 и обозначать символом

$$res[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz .$$

Здесь при интегрировании обход контура γ идёт против движения часовой стрелки.

8.8. Формулы для вычисления вычетов

1. Если z_0 есть простой полюс функции $f(z)$, то вычет $f(z)$ относительно z_0 равен

$$res[f(z); z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) .$$

2. Если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, которая может быть представлена в виде $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - аналитические функции в точке $z = z_0$, причём $z = z_0$ - простой полюс $f_2(z)$, а $f_1(z_0) \neq 0$. Тогда при $f_2'(z_0) \neq 0$

$$res[f(z); z_0] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

3. Если точка $z = z_0$ - полюс порядка n функции $f(z)$, то

здесь вычисляется предел производной $(n-1)$ порядка.

Пример 1

Вычислить вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}$ относительно всех её особых точек.

Решение

Для заданной функции точка $z = -1$ является простым полюсом, а $z = 1$ - полюсом второго порядка.

$$res[f(z);-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}=\lim_{z\to -1}\frac{z+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{4};$$

$$res[f(z);1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}((z-1)^2\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2})'=\lim_{z\to 1}(\frac{z+2}{z+1})'=\lim_{z\to 1}\frac{z+1-(z+2)}{(z+1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 2

Найти вычеты в каждой из особых точек функций:

а) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$; б) $f(z)=\frac{z^2-2}{z^2+z}$; в) $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$.

Решение

а) Для $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$ точка $z=0$ является полюсом третьего порядка.

$$res\,[f(z);0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}(z^3\frac{\cos z}{z^3})''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(\cos z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\sin z)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{2};$$

б) Для функции $f(z)=\frac{z^2-2}{z^2+z}=\frac{z^2-2}{z(z+1)}$ точка $z=0$ является простым полюсом, а $z=-1$- тоже простым полюсом

$$res\,[f(z);0]=\lim_{z\to 0}z\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-2}{z+1}=-\frac{2}{1}=-2;$$

$$res\,[f(z);-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to -1}\frac{z^2-2}{z}=\frac{1-2}{-1}=1;$$

в) $z^2+1=0$ при $z=\pm i$. Поэтому точки $z=i$ и $z=-i$ являются простыми полюсами $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$

$$res\,[f(z);i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z+i}=\frac{e^i}{2i}$$

$$=\frac{(\cos 1+i\sin 1)(-i)}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1-i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}-i\frac{\cos 1}{2};$$

$$res\,[f(z);-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{e^z}{z-i}=\frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$=\frac{(\cos 1-i\sin 1)\,i}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1+i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}+i\frac{\cos 1}{2}.$$

8.9. Теорема Коши о вычетах

Теорема

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром γ, всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих внутри области D (но не на кривой γ), то интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ относительно всех особых точек, лежащих внутри γ, т. е.

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z); z_k].$$

Доказательство

Для простоты окружим точки $z_1, z_2, ..., z_n$ окружностями $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ с центрами в этих точках и радиусами такими малыми, чтобы окружности не пересекались и лежали в области D, ограниченной контуром γ. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в многосвязной области, ограниченной контурами $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$.

По теореме Коши для многосвязной области имеем

$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz$, но $\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i\, res\,[f(z); z_k]$.

Тогда

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z); z_k].$$

Теорема доказана.

Пример 1

Найти значение $\int_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2} dz$, где

а) γ - окружность $|z| = 3$; б) γ - окружность $|z + 2 - i| = 1$.

Решение

Подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z = 2$ - полюс второго порядка, которая находится внутри окружности $|z| = 3$ (центр вначале координат, радиус равен 3).

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)\,dz}{(z-2)^2} = 2\pi\, i\, res\,[f(z);\,2] = 2\pi\, i \frac{1}{1!} \lim\limits_{z\to 2} ((z-2)^2 \frac{(z+1)}{(z-2)^2})' = 2\pi\, i \lim\limits_{z\to 2} (z+i)' = 2\pi\, i\,.$$

б) Окружность $|\,z+2-i\,|=1$ имеет центр в точке $z_0 = -2+i$, радиус 1, а полюс $z=2$ лежит вне этой окружности. Поэтому в области, ограниченной этим контуром γ, функция аналитическая. Тогда по основной теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2}\,dz = 0\,.$$

Пример 2

Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)}$, где γ - окружность $x^2+y^2 = 2x+2y$.

Решение

Преобразуем уравнение окружности $x^2+y^2 = 2x+2y$, выделяя полный квадрат по x и по y:

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) = 2 \text{ или } (x-1)^2+(y-1)^2 = 2\,.$$

Точка $(-1;\ 1)$ - центр окружности, радиус - $\sqrt{2}$.

Для подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-1)}$ точки $z=i$ и $z=1$ являются простыми полюсами и находятся внутри окружности γ.

Тогда по теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)} = 2\pi\, i\,(res\,[f(z);\,i] + res\,[f(z);\,1]\,);$$

$$res\,[f(z);\,i] = \lim\limits_{z\to i} (z-i)\,\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim\limits_{z\to i} \frac{1}{z-1} = \frac{e^i}{2i} = \frac{1}{i-1} = \frac{-i-1}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$res\,[f(z);\,1] = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)\,\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\, i(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 0.$$

Пример 3

Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{-2z}}{z^2}$, где γ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение

Для подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{e^{-2z}}{z^2}$ точка $z=0$ является полюсом второго порядка и находится внутри эллипса с полуосями 3 и 2.
По теореме Коши о вычетах

$$\oint_\gamma \frac{e^{-2z}}{z^2}dz = 2\pi\, i res\,[f(z);0] = 2\pi\, i \lim_{z\to 0}(z^2\frac{e^{-2z}}{z^2})' = 2\pi\, i \lim_{z\to 0}(e^{-2z})' =$$

$$= 2\pi\, i \lim_{z\to 0}(-2)e^{-2z} = 2\pi\, i \quad (-2)\, e^0 = -4\pi\, i.$$

Самостоятельная работа № 7

Вариант 1

1) Вычислить $\int_\gamma \cos z dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=i$ и $z=-2+i$.

2) Вычислить $\int_\gamma (4i+3\operatorname{Re} z)dz$, где $\gamma:\ 2x^2-y+3=0$ от $z=3i$ до $z=1+5i$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_\gamma \sin z dz$, где $\gamma:\ x-3y+1=0$ от $z=-1$ до $z=2+i$.

2) Вычислить $\int_\gamma (2i\ Jmz+3)\,dz$, где $\gamma:\ y=2-x^2$ от $z=2i$ до $z=1+i$.

Самостоятельная работа № 8

Вариант 1

1) Вычислить $\int_\gamma (2iz-z^2)dz$, где $\gamma:\ x^2+y^2-x=0$.

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{4z}{(z-1)^3(z+2)^2}$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_\gamma e^{z-2i}dz$, где $\gamma:\ |z-2|=2.$

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)}$.

Самостоятельная работа № 9

Вариант 1

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$, $\gamma:\ x^2+4y^2=4$.

Вариант 2

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{(3z^2+1)}{(z+2)^2(z-2i)}dz$, $\gamma:\left|\, z+1-i\,\right|=3$.

Самостоятельная работа № 10

1) Вычислить: $(-1-i)^{2i}, \sin(3i+2)$.

2) Найти образ линии $x^2+y^2+x=0$ при отображении $w=3\bar{z}-i$.

3) Является ли аналитической функция $w=z+e^{\bar{z}}$?

4) На комплексной плоскости (z) построить множество точек z, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \left|\, z+i\,\right| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > -1. \end{cases}$$

5) Вычислить $\int\limits_{\gamma} e^{\bar{z}}dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=2-2i$.

4) С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{(z^2+3)\,dz}{z^3-1}; \gamma: x^2+y^2=9$.

Самостоятельная работа № 10 содержит набор основных типовых задач по теме изучаемого раздела математики и может быть использована для подготовки к контрольной работе.

С помощью вычетов удается вычислять некоторые определённые интегралы от функций действительной переменной, для чего эти интегралы предварительно преобразуются в интегралы по замкнутому контуру.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью вычетов вычисляют некоторые несобственные интегралы от функции действительной переменной вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(z)$ - рациональная функция $f(z)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, а разность степеней знаменателя и числителя $m-n>1,\quad Q_m(x)\neq 0,\quad x\in R$.

Пусть функция $f(z)$, аналитическая на действительной оси, имеет выше действительной оси (в верхней полуплоскости $Jmz > 0$) конечное число особых точек $z_1, z_2,..., z_n$. Тогда существует несобственный интеграл от функции $f(z)$ по промежутку $(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} res\,[\, f(z);\, z_k\,].$$

Пример

Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$.

Функция $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$.

Решение

Введём функцию комплексной переменной z

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}.$$

Она имеет в верхней полуплоскости $Jmz > 0$ единственную особую точку $z = i$ -полюс третьего порядка. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi\, i\, res\,[\, f(z);\, i].$

Найдем

$$res\,[\, f(z);\, i] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} ((z-i)^3 \frac{z^2}{(z-i)^3 (z+i)^3})'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{z^2}{(z+i)^3})'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z(z+i)^3 - z^2 3(z+i)^2}{(z+i)^6})' == \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z^2 + 2zi - 3z^2}{(z+i)^4})' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2zi - z^2}{(z+i)^4})' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{(2i-2z)(z+i)^4 - (2zi - z^2) 4(z+i)^3}{(z+i)^8} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{2z^2 - 2 - 8zi}{(z+i)^5} = \frac{1}{2} \frac{(-2-2+8)}{(2i)^5} = \frac{4}{2 \cdot 32i} = \frac{1}{16i} = \frac{-i}{16i\,(-i)} = -\frac{i}{16}.$$

Окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi\, i\, (-\frac{i}{16}) = \frac{\pi}{8}.$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(z) = e^{imz} \cdot F(z)$, где $m > 0$ и $F(z) \to 0$ при $|\, z\,| \to \infty$ равномерно по φ для $Jmz \geq 0$;

2) $f(z)$ на действительной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2,..., x_p$;

3) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\, i\,(\sum_{k=1}^{n} res\,[\,f(z);\, z_k\,] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} res\,[\,f(z);\, x_k\,]\,).$$

Пример

Вычислить интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение

Рассмотрим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$. Введём функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Здесь $m = 1, \quad F(z) = \frac{1}{z} \to 0$ при $|\,z\,| \to \infty$. Для $f(z)$ точка $z = 0$ - простой полюс, расположенный на действительной оси. Других особых точек нет.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi\, i\,\frac{1}{2}\, res\,[\,f(z);\, 0] = \pi\, i \lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{iz}}{z} = \pi\, i \lim_{z\to 0} e^{iz} = \pi\, i.$$

Но $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\cos x}{x} + i\,\frac{\sin x}{x})\,dx = \pi i.$$

В силу определения равенства двух комплексных чисел имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Так как $\frac{\sin x}{x}$ - чётная функция, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$, откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1970. – 380 с.

Волковысский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - М.: Наука, 1975. – 220 с.

Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. - М.: Наука, 1968. – 620 с.

Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - М.: Наука, 1979. – 410 с.

Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. - М.: Наука, 1978. – 360 с.

Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. - М.: Наука, 1984. – 480 с.

Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1979. – 720 с.

Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. - М.: Наука, 1980. – 510 с.

Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Т. И. Королюк

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного и заочного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……...4

1. Функция-оригинал и её изображение……5
2. Линейность преобразования Лапласа……6
3. Изображение единичной функции 1(t)……..6
4. Изображения функций $e^{at}, \sin\omega t, \cos\omega t, sh\omega t, ch\omega t$ …..……7
5. Теорема смещения……10
6. Дифференцирование изображения……...11
7. Изображения функций $t^n, t^n e^{at}$ ……....12
8. Теорема запаздывания……...16
9. Дифференцирование оригинала……...21
10. Интегрирование оригинала…….....23
11. Свёртка оригиналов, её свойства. Теорема умножения……24
12. Интеграл Дюамеля……27
13. Нахождение оригинала по изображению……...30
14. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами……39
15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом ……44

УПРАЖНЕНИЯ..…….....51

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……...……..53

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного и заочного обучения.

Операционное исчисление является одним из методов прикладного математического анализа. С помощью операционного исчисления во многих случаях удается упростить решение задач, встречающихся в автоматике, электронике и других областях.

В пособии изложены основные сведения о преобразовании Лапласа, его свойствах и применении для решения линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика».

Теоретический материал сопровождается подробным разбором решений типовых задач, а также даны варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и ее приложений.

1. Функция-оригинал и её изображение

Любую функцию $f(t)$ действительной переменной t называют оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t)=0$ при всех $t<0$;

2) $f(t)$ кусочно непрерывна, т. е. такая, что в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;

3) существуют такие постоянные $M>0$ и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)|<Me^{S_0 t}$ при любом значении $0 \leq t < \infty$.

Лапласовым изображением оригинала $f(t)$ называют функцию $F(p)$ комплексной переменной $p=x+iy$, определяемую соотношением

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, то это соответствие записывают так:

$$f(t)=F(p), \quad F(p)=f(t), \quad L\big(f(t)\big)=F(p).$$

Для любого оригинала $f(t)$ интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится абсолютно при $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$.

В этой полуплоскости изображение $F(p)$ является аналитической функцией. Переход от функции $f(t)$ к функции $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа.*

2. Линейность преобразования Лапласа

Теорема

Если $f(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t)$, C_k - постоянные и $F(p)=f(t), F_k(p)=f_k(t),$

то $F(p)=\sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p).$

Доказательство

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}dt=\sum_{k=1}^{n} C_k\left(\int_0^{\infty} f_k(t)\,e^{-pt}dt\right)=\sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p).$$

3. Изображение единичной функции 1 (*t*)

Простейшей функцией–оригиналом является единичная функция

$$1\,(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$$

Найдем ее изображение

$$L(1(t))=\int_0^{\infty} 1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\,e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{p}(0-1)=\frac{1}{p}\qquad(\mathrm{Re}\,p>0).$$

Итак,

$$1(t)=\frac{1}{p}\qquad(\mathrm{Re}\,p>0).$$

4. Изображения функций e^{at}, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $sh\ \omega t$, $ch\ \omega t$

$$L(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a).$$

Таким образом, $e^{at} = \dfrac{1}{p-a}$.

В этой формуле a может быть и комплексным. Применяя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем изображения тригонометрических функций

$$\sin \varpi t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad coc\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \omega \text{ - положительное число.}$$

$$L(\sin \omega t) = \frac{1}{2i}\left(L(e^{i\omega t}) - L(e^{-i\omega t})\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{(p + i\omega - p + i\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{при } \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$L(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\left(L(e^{i\varpi t}) + L(e^{-i\varpi t})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

при $\mathrm{Re}\, p > 0$.

Аналогично, исходя из определения гиперболических функций

$$sh\ \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2},$$

найдем их отображения.

$$L(sh\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})-L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$L(ch\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})+L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2} \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}p>\omega.$$

Получили формулы

$$\sin\omega t=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad sh\omega t=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad ch\omega t=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Пример 1

Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$

Решение

$$L\big(f(t)\big)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{1}(1-t)e^{-pt}dt+\int_1^{\infty}0\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=(1-t)\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}\cdot(-dt)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p^2}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$f(t) = 2 + \frac{1}{3}e^{-2t} + 4\cos 3t\,.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2L(1(t)) + \frac{1}{3}L\left(e^{-2t}\right) + 4L(\cos 3t) = 2\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+2} + 4\cdot\frac{p}{p^2+9}.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{6}{p} - \frac{5p}{p^2+4} + \frac{2}{p-3}.$$

Решение

$$f(t) = 6 - 5\cos 2t + 2e^{3t}.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{3}{p^2+25} - \frac{2}{p^2+25} = 3\cdot\frac{p}{p^2+25} + \frac{2}{5}\frac{5}{p^2+25}.$$

Тогда

$$f(t) = 3\cos 5t + \frac{2}{5}\sin 5t\,.$$

5. Теорема смещения

Если $f(t) = F(p)$, a – любое действительное или комплексное число, то

$$e^{at} f(t) = F(p-a).$$

Доказательство

$$L\left(e^{at} f(t)\right) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > S_0$.

С помощью этой теоремы находим изображения функций:

$$e^{at} \sin \omega t = \frac{\omega}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} sh\omega t = \frac{\omega}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > 0$ *при* $\mathrm{Re}(p-a) > \omega$;

$$e^{at} \cos \omega t = \frac{p-a}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} ch\omega t = \frac{p-a}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > 0$ *при* $\mathrm{Re}(p-a) > \omega$.

6. Дифференцирование изображения

Если $f(t) = F(p)$, то $t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

Доказательство

Функция $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt$ является аналитической. Ее производные $F^{(n)}(p)$ по переменной p находятся под знаком интеграла Лапласа

$$F'(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot (-t)\, dt,$$

из этого равенства следует, что $tf(t) = -F'(p)$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot t^2 dt,$$

откуда

$$t^2 f(t) = F''(p).$$

Дифференцируя n раз, получим

$$t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

7. Изображения функций t^n, $t^n e^{at}$

Известно, что $1(t) = \frac{1}{p}$, тогда $t \cdot 1(t) = -\left(\frac{1}{p}\right)'$ или $t = \frac{1}{p^2}$. Аналогично $t^2 = \frac{2}{p^3}$, при любом n получаем $t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Применяя теорему смещения, находим

$$t^n e^{at} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(p-a) > 0.$$

Пример 1

Найти изображение функции

$$f(t) = 2t^3 - \frac{1}{5} sh\frac{t}{2} + t^4 e^{-5t}.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2 \cdot \frac{3!}{p^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{1}{4}} + \frac{4!}{(p+5)^5}$$

или

$$F(p) = \frac{12}{p^4} - \frac{1}{10\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)} + \frac{24}{(p+5)^5}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$g(t) = 3e^{-t}\cos 2t + \frac{7}{2}e^{4t} + t\sin 3t.$$

Решение

Пусть $g(t) = G(p)$, тогда

$$G(p) = 3\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{p-4} - \left(\frac{3}{p^2+9}\right) =$$

$$= \frac{3(p+1)}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2(p-4)} + \frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{4p-3}{p^2+5p-1}.$$

Решение

Преобразуем $F(p)$, выделяя полный квадрат по p в знаменателе дроби

$$p^2+5p-1 = \left(p^2+2\cdot\frac{5}{2}p+\frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 1 = \left(p+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Тогда

$$F(p)=\frac{4\left(p+\frac{5}{2}\right)-10-3}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}$$

или

$$F(p)=4\cdot\frac{4p+\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}-13\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}.$$

Используя известные изображения, находим искомый оригинал

$$f(t)=4e^{-\frac{5}{2}t}\cdot ch\frac{\sqrt{29}}{2}t-\frac{26}{\sqrt{29}}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot sh\frac{\sqrt{29}}{2}t.$$

Пример 4

Найти оригинал $x(t)$ для изображения

$$X(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{3}{(p-4)^3}+\frac{2p-1}{p^2-3}.$$

Решение

$$X(p)=6\cdot\frac{1}{p-(-2)}-\frac{3}{2}\frac{2!}{(p-4)^{2+1}}+2\cdot\frac{p}{p^2-3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{p^2-3}.$$

Используя табличные изображения, находим оригинал

$$x(t)=6e^{-2t}-\frac{3}{2}t^2e^{4t}+2ch\sqrt{3}t-\frac{1}{\sqrt{3}}sh\sqrt{3}t\,.$$

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) найти изображение функции

$$f(t)=\frac{1}{5}-3\sin\frac{2t}{3}+6ch5t-4t;$$

2) найти изображение функции

$$g(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}\cos 5t-\frac{1}{6}tsh2t;$$

3) найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{2}{p^3}+\frac{2-p}{p^2+5}.$$

Вариант 2

1) найти изображение функции

$$f(t)=5t^2+\frac{1}{2}-4sh\frac{t}{3}+8\cos 3t;$$

2) найти изображение функции

$$g(t)=3e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}tch4t;$$

3) найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5p+1}{p^2-2}+\frac{3}{p^4}-\frac{8}{(p+1)^2}.$$

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) найти, используя интеграл Лапласа, изображение функции

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2t+3, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t>1;\end{cases}$$

2) найти оригинал $x(t)$ для изображения

$$X(p)=\frac{3-4p}{p^2+3p+4}-\frac{2}{(p-3)^3}.$$

Вариант 2

1) найти оригинал $y(t)$ для изображения

$$Y(p)=\frac{1+6p}{p^2+p+3}-\frac{7}{(p+5)^4};$$

2) используя интеграл Лапласа, найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 3-t, & 0\le t\le 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

8. Теорема запаздывания

Если $f(t)=F(p)$, то $f(t-\tau)=e^{-\tau p}F(p)$, τ- любое положительное число.

Доказательство

Известно, что $f(t)=0$ при всех $t<0$. При $t<\tau$ аргумент $t-\tau<0$, поэтому $f(t-\tau)=0$. Это значит, что оригинал включается с запаздыванием на τ. График функции $f(t-\tau)$ получается из графика $f(t)$ смещением последнего вправо на расстояние τ. С помощью единичной функции запаздывающую функцию $f(t-\tau)$ можно записать и так: $f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$, так как $1(t-\tau)=0$ при $t<\tau$ и $1(t-\tau)=1$ при $t>\tau$.

Найдем изображение $f(t-\tau)$:

$$L\big(f(t-\tau)\big)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=\int_0^{\tau}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt+\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt.$$

Здесь $\int_0^{\tau}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=0$, так как $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$.

Во втором интеграле сделаем замену, полагая $t-\tau=u$, тогда $t=u+\tau;\ dt=du,$ при $t=\tau\ \ u=0$, при $t=\infty$ и $u=\infty$.

Таким образом,

$$L\big(f(t-\tau)\big)=\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=\int_0^{\infty}e^{-p(u+\tau)}f(u)\,du=$$

,

$$=e^{-\tau p}\int_0^{\infty}e^{-pu}f(u)\,du=e^{-\tau p}F(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1

$1(t)=\frac{1}{p}$. Тогда $1(t-\tau)=e^{-\tau p}\cdot\frac{1}{p}$.

Пример 2

Найти изображение функции $f(t)=(t-3)^3\cdot 1(t-3)$.

Решение

Известно, что $t^3=\frac{3!}{p^4}$. В нашем случае запаздывание на $\tau=3$. Поэтому $(t-3)^3 1(t-3)=e^{-3p}\cdot\frac{3!}{p^4}$.

Пример 3

Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+1, & 0<t<1,\\ 3t, & 1<t<4,\\ 0, & t>4.\end{cases}$

Решение

Пусть $f(t)=F(p)$.

Искомое изображение $F(p)$ найдем двумя способами. Сначала по определению с помощью интеграла Лапласа.

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt=\int_0^{1}(t+1)\,e^{-pt}dt+3\int_1^{4} te^{-pt}dt=$$

$$=(t+1)\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}dt+3t\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_1^4-3\int_1^4-\frac{1}{p}e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^4=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-4p}+\frac{3}{p^2}e^{-p}=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

А теперь найдем $F(p)$ с помощью теоремы запаздывания. Для этого запишем наш оригинал $f(t)$ одним аналитическим выражением с помощью единичной функции.

При $t<0$ $f(t)=0.$ В момент $t=0$ «включается» функция $t+1;$ в момент $t=1$ она «снимается» и «включается» функция $3t$, которая «снимается» в момент $t=4.$ Поэтому

$$f(t)=(t+1)\cdot 1(t)-(t+1)\cdot 1(t-1)+3t\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2t-1)\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2(t-1)+1)\cdot 1(t-1)-(3(t-4)+12)\cdot 1(t-4).$$

Применяя линейность преобразования Лапласа и теорему запаздывания, получим искомое изображение

$$F(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5}{(p+2)^4}e^{-p}+\frac{4}{p^3}-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}.$$

Решение

Находим оригинал для каждого слагаемого:

$$\frac{5}{(p+2)^4}=5\,\frac{1}{(p+2)^{3+1}}=\frac{5}{3!}\cdot\frac{3!}{(p-(-2))^{3+1}}=\frac{5}{6}e^{-2t}\cdot t^3,$$

$$\frac{4}{p^3}=4\,\frac{1}{p^{2+1}}=\frac{4}{2!}\cdot\frac{2!}{p^{2+1}}=2t^2,$$

$$-\frac{8}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}\,t,$$

$$\frac{5}{(p+2)^4}\cdot e^{-p}=\frac{5}{6}\cdot e^{-2(t-1)}\cdot(t-1)^3\cdot 1(t-1),$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=1.$

$$\frac{4}{p^3}=2t^2$$

$$-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}(t-2)\cdot 1(t-2)$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=2.$

Суммируя оригиналы для каждого слагаемого, находим

$$f(t)=\frac{5}{6}e^{-2(t-1)}\cdot(t-1)^3\cdot 1(t-1)+2t^2-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}\,(t-2)\cdot 1(t-2).$$

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{(5-3p)e^{-p}}{2p^2+5}+\frac{7e^{-3p}}{2p^2+4p+1}-\frac{3}{(p+6)^4}.$$

2) найти изображение функции

$$x(t)=5\sin\frac{2t}{5}-2+\frac{1}{4}(t-2)e^{-2(t-2)}ch\frac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2).$$

Вариант 2

1) найти изображение функции

$$y(t)=7te^t\cos\frac{5t}{4}-\frac{1}{6}(t-4)^2\cdot e^{-5(t-4)}\cdot 1(t-4)+3ch\frac{t}{4}.$$

2) найти оригинал для изображения

$$G(p)=\frac{8p}{p^2+2p+6}-\frac{(2-p)e^{-2p}}{4p^2+5}+\frac{10e^{-5p}}{(p-3)^3}.$$

9. Дифференцирование оригинала

Теорема

Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, $f'(t)$ принадлежит множеству оригиналов и $f(t)=F(p)$, то $f'(t)=pF(p)-f(0)$.

Доказательство

$$L\,(f'(t)) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}dt.$$

Интегрируя по частям, положим

$$u = e^{-pt},\quad du = -pe^{-pt}dt,\quad d\mathrm{v} = f'(t)dt,\ \mathrm{v} = f(t).$$

Получаем

$$f'(t) = (f(t)\ \ e^{-pt})\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}(-p)dt.$$

Так как $\operatorname{Re} p = x > s_0$, то $\left|f(t)\,e^{-pt}\right| \le Me^{-(x-s_0)t}$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-pt} = 0$, а $\int\limits_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}dt = F(p)$.

Следовательно, $f'(p) = pF(p) - f(0)$.

Теорема доказана.

Следствие

Если $f''(t),\ f'''(t), ...,\ f^{(n)}(t)$ - оригиналы, то находим:

$$f''(t) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0)$$

или

$$f''(t) = p^2F(p) - pf(0)) - f'(0).$$

Аналогично, для производной n–го порядка имеем

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Для практических приложений полученное свойство является очень важным. Оно показывает, что сложная операция дифференцирования в пространстве оригиналов заменяется в пространстве изоб-

ражений элементарным действием – умножением изображения на степень аргумента p с добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала. Это очень удобно для решения дифференциальных уравнений операционным методом, так как начальные условия здесь учитываются автоматически.

10. Интегрирование оригинала

Теорема

Если $f(t) = F(p)$, то $\int_0^t f(u)\,du = \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p.

Доказательство

$f(t)$ принадлежит множеству оригиналов, тогда и $\int_0^t f(u)\,du$ тоже является оригиналом. Обозначим $\int_0^t f(u)\,du = g(t)$, пусть $g(t) = G(p)$. $g'(t) = (\int_0^t f(u)\,du)' = f(t)$, $g(0) = 0$, $L(g'(t) = L(f(t))$.

Поэтому $pG(p) = F(p)$, откуда $G(p) = \frac{F(p)}{p}$. Значит, $\int_0^t f(u)\,du = \frac{F(p)}{p}$, что и требовалось доказать.

11. Свёртка оригиналов, ее свойства. Теорема умножения

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - оригиналы. Свёртку этих функций обозначают $f * g$. Она равна

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Свёртка $f * g$ обладает свойствами:

1) переместительным

$$f * g = g * f \text{ или}$$

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du;$$

2) сочетательным

$$(f * g)\varphi = f\ (g * \varphi),$$

в силу, которого свёртка нескольких функций всегда даёт одинаковый результат, независимо от того, в каком порядке выполняется свёртывание;

3) распределительным

$$(f + g) * \varphi = (f * \varphi) + (g * \varphi).$$

Свёртка оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ тоже является оригиналом, причём показатель роста свёртки $f * g$ равен наибольшему из показателей роста функций $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти свёртку функций $f(t)=t, \quad g(t)=e^{at}$.

Решение

$$f * g = t * e^{at} = \int_0^t u e^{a(t-u)} du = e^{at} \int_0^t u e^{-au} du =$$

$$= e^{at}\left(-u \frac{e^{-au}}{a} \Big|_0^t - \int_0^t -\frac{1}{a} e^{-au} du \right) = e^{at}\left(-\frac{t}{a} e^{-at} + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a} \right) e^{-au} \Big|_0^t \right) =$$

$$= e^{at}\left(-\frac{t}{a} e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at} + \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} e^{at}.$$

В другом порядке

$$g * t = e^{at} * t = \int_0^t e^{au}(t-u) du = \int_0^t t e^{au} du - \int_0^t u e^{au} du .$$

Произведя интегрирование по частям во втором интеграле, получим

$$e^{at} * t = t \frac{e^{au}}{a} \Big|_0^t - u \frac{1}{a} e^{au} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{a} e^{au} du =$$

$$= t \frac{e^{at}}{a} - \frac{t}{a} - \frac{t}{a} e^{at} + \frac{1}{a^2} e^{at} - \frac{1}{a^2} = -\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2} e^{at} - \frac{1}{a^2}.$$

Получили

$$f * g = g * f .$$

Теорема умножения

Если $f(t)=F(p)$ и $g(t)=G(p)$, то $f*g=F(p)\cdot G(p)$, т. е. при свертывании оригиналов изображения перемножаются.

Доказательство

$$L(f*g)=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^{t}f(u)g(t-u)du=$$

$$=\int_0^{\infty}f(u)du\int_u^{\infty}e^{pt}g(t-u)dt,$$

изменим порядок интегрирования.

Во внутреннем интеграле проведём замену переменной, положив $t-u=z$, тогда $t=u+z,\quad dt=dz$, при $t=u\quad z=0$, при $t=\infty\quad z=\infty$, получим

$$L(f*g)=\int_0^{\infty}f(u)du\int_0^{\infty}e^{-p(u+z)}g(z)dz=$$

$$=\int_0^{\infty}f(u)e^{-pu}du\int_0^{\infty}g(z)e^{-pz}dz=F(p)\cdot G(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорема умножения имеет важное значение для приложений, так как позволяет находить оригинал, соответствующий произведению

двух изображений $F(p)$ и $G(p)$, если известны оригиналы сомножителей $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-a)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ можно подставить в виде произведения двух функций

$$F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Пусть $F(p)=f(t)$.

Так как $\dfrac{1}{p^2}=t,\quad \dfrac{1}{p-a}=e^{at},$ то по теореме умножения искомый оригинал $f(t)=t*e^{at}$. Эту свёртку в предыдущем примере мы нашли, поэтому

$$f(t)=-\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}.$$

12. Интеграл Дюамеля

Частным случаем теоремы умножения изображений является формула Дюамеля, часто применяемая для нахождения оригиналов.

Найдем оригинал, соответствующий произведению $pF(p)\,G(p)$, где $f(t)=F(p),\quad g(t)=G(p)$.

Это произведение представим в виде

$$pF(p)\,G(p)=\big(pF(p)-f(0)\big)G(p)+f(0)G(p).$$

Так как $pF(p)-f(0)=f'(t)$, то по теореме умножения изображений $\big(pF(p)-f(0)\big)G(p)=f'(t)*g(t)$, а $f(0)G(p)=f(0)\cdot g(t)$.

Теперь можно записать формулу Дюамеля

$$pF(p)\,G(p)=\int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du+f(0)\,g(t).$$

Правую часть этого соотношения называют интегралом Дюамеля.

Если учесть свойство свёртки $f*g=g*f$, то из последнего равенства получим

$$pF(p)\,G(p)=\int_0^t g(u)\,f'(t-u)\,du+f(0)\,g(t).$$

Аналогично, если $pF(p)\,G(p)=\big(pG(p)-g(0)\big)F(p)+g(o)F(p)$, получим

$$pF(p)\,G(p)=\int_0^t g'(u)\,f(t-u)\,du+g(0)\,f(t),$$

$$pF(p)\,G(p)=\int_0^t f(u)\,g'(t-u)\,du+g(0)\,f(t).$$

Пример

Найти оригинал для функции $\dfrac{p\omega}{(p-a)(p^2+\omega^2)}$.

Решение

Представим заданную функцию в виде произведения

$$p\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Имеем

$$F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t=f(t);\quad G(p)=\frac{1}{p-a}=e^{at}=g(t),$$

$$f(0)=0,\quad f'(t)=\omega\cos\omega t.$$

Тогда запишем

$$pF(p)G(p)=p\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p-a}=\int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du=$$

$$=\int_0^t\omega\cos\omega u\cdot e^{a(t-u)}du=\omega e^{at}\int_0^t\cos\omega u\cdot e^{-au}du.$$

Дважды интегрируя по частям последний интеграл, получим

$$\omega e^{at}\int_0^t\cos\omega u\,e^{-au}du=\frac{1}{a^2+\omega^2}\left(\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)(p-a)}=\frac{\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)}{a^2+\omega^2}\ .$$

13. Нахождение оригинала по изображению

При нахождении оригинала по его изображению широко пользуются свойствами преобразования Лапласа и таблицей соответствий между оригиналами и их изображениями:

Таблица

Соответствия между оригиналами и их изображениями

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
8	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
9	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Окончание таблицы

10	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at}sh\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
13	$e^{at}ch\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
14	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\,sh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\,ch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$te^{at}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\cos^2\omega t$	$\frac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
21	$\sin^2\omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$

Пример

Найти оригиналы для следующих изображений:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^5}$.

Решение

Используем соотношение 3 из таблицы, откуда $\dfrac{1}{p^{n+1}}=\dfrac{t^n}{n!}$, поэтому

$$\frac{1}{p^5}=\frac{t^4}{4!}=\frac{1}{24}t^4.$$

2) $F(p)=\dfrac{3}{(p+2)^4}$.

Решение

Из соотношения 5

$$\frac{t^n e^{at}}{n!}=\frac{1}{(p-a)^{n+1}}\ ,\ \text{здесь}\ \ a=-2,\quad n=3,$$

поэтому

$$\frac{3}{(p+2)^4}=3\cdot\frac{t^3e^{-2t}}{3!}=\frac{1}{2}t^3e^{-2t}.$$

3) $F(p)=\dfrac{5}{p^2+4}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t\,,$$

здесь $\omega^2=4,\quad \omega=2$, поэтому

$$\frac{5}{p^2+4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{5}{2}\sin 2t\,.$$

4) $F(p)=\dfrac{7p}{3p^2+5}$.

Решение

Из соотношения 7

$$\frac{p}{p^2+\omega^2}=\cos\omega t$$

$$\frac{7p}{3p^2+5}=\frac{7p}{3\left(p^2+\dfrac{5}{3}\right)}=\frac{7}{3}\cdot\frac{p}{p^2+\dfrac{5}{3}}=\frac{7}{3}\cos\sqrt{\frac{5}{3}}t\ .$$

5) $F(p)=\dfrac{3}{(p-2)^2-5}$.

Решение

Из соотношения 10

$$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}=e^{at}sh\omega t$$

$$\frac{3}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}e^{2t}sh\sqrt{5}t$$

$$\omega=\sqrt{5},\quad a=2.$$

6) $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2-4p+7}$.

Решение

$$p^2-4p+7=\left(p^2-4p+4\right)+3=(p-2)^2+3$$

$$\frac{p+5}{p^2-4p+7}=\frac{p+5}{(p-2)^2+3}.$$

Из соотношений 11 и 10

$$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\cos\omega t,\quad \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\sin\omega t$$

$$\frac{p+5}{(p-2)^2+3}=\frac{(p-2)+7}{(p-2)^2+3}=\frac{p-2}{(p-2)^2+3}+\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3}=$$

$$=e^{2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{7}{\sqrt{3}}\,e^{2t}\sin\sqrt{3}t.$$

7) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^2+9}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t,\quad \frac{2}{p^2+9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{2}{3}\sin 3t.$$

Применяя теорему запаздывания, получим

$$\frac{2e^{-p}}{p^2+9}==\frac{2}{3}\sin 3(t-1)\cdot 1(t-1)$$

(при умножении изображения на $e^{-\tau p}$ оригинал запаздывает на τ единиц, в нашем случае $\tau=1$).

Если изображение оригинала является правильной рациональной дробью, выраженной отношением двух многочленов $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ (степень числится меньше степени знаменателя), то эту дробь разлагают сначала на сумму простейших дробей, затем для каждой полученной дроби находят соответствующий оригинал.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ является правильной рациональной дробью. Разложим эту дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей слева и справа, получим тождество, из которого нужно получить систему из четырех уравнений для определения A, B, C, D.

$$3p^2-2=A(p^2+1)+B(p+1)(p^2+1)+(Cp+D)(p+1)^2$$

$$\begin{array}{c|l|l} p=-1 & 1=2A,\ A=\frac{1}{2} & B+C=0 \\ p^3: & 0=B+C & B+2D+C=0,\ \textit{отсюда}\ D=0 \\ p: & 0=B+2D+C & B=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2} \\ p=0 & -2=A+B+D & C=-B=\frac{5}{2} \end{array}$$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Применяя свойство линейности преобразования Лапласа и соотношения 5, 4 и 7 из таблицы, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

Если изображение $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ является правильной рациональной дробью и $p_1, p_2, ..., p_n$ - полюсы $F(p)$, то для нахождения оригинала $f(t)$ применяют теорию вычетов, а именно:

$$F(p)= f(t)=\sum_{k=1}^{n} res\left[F(p)e^{pt};\, p_k\right],$$

где $res\left[F(p)e^{pt};\, p_k\right]$ - вычет функции $F(p)e^{pt}$ относительно полюса p_k.

Пример

С помощью вычетов найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Для $F(p)$ $p=-1$ - полюс второго порядка, $p=\pm i$ - простые полюсы.

Тогда

$$f(t)=res\left[F(p)e^{pt};-1\right]+res\left[F(p)e^{pt};i\right]+res\left[F(p)e^{pt};-i\right].$$

Найдем вычеты.

$$res\left[F(p)e^{pt};-1\right]=\lim_{p\to -1}\left((p+1)^2\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p^2+1)}\right)'=\lim_{p\to -1}\left(\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{p^2+1}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{1}{(p^2+1)^2}\Big(\big(p^2+1\big)\big(6pe^{pt}+\big(3p^2-2\big)e^{pt}\cdot t\big)-\big(3p^2-2\big)e^{pt}\cdot 2p\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(2\big(-6e^{-t}+e^{-t}\cdot t\big)-e^{-t}(-2)\Big)=\frac{1}{4}\Big(-12e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(-10e^{-t}+2te^{-t}\Big)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};i\right]=\lim_{p\to i}(p-i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p+i)}=$$

$$=\frac{-5e^{it}}{(-1+2i+1)\,2i}=\frac{-5e^{it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t+i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t+i\frac{5}{4}\sin t.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};-i\right]=\lim_{p\to -i}(p+i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to -i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)}=$$

$$=\frac{-5e^{-it}}{-2i\,(-2i)}=\frac{-5e^{-it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t-i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t-\frac{5}{4}i\sin t.$$

Складывая вычеты, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

14. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Задача Коши

Требуется найти частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)}(t) + + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)\ (a_0 \neq 0),$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$

Операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) эта задача может быть решена в предположении, что функция $f(t)$, искомая функция $y(t)$ и ее производные до *n*-го порядка включительно, являются оригиналами.

Пусть $y(t) = Y(p), \quad f(t) = F(p),$ тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$y'(t) = pY(p) - y^0; \quad y''(t) = p^2 Y(p) - py_0 - y_1, \ldots,$$

$$y^{(n)}(t) = p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots\ py_{n-2} - y_{n-1}.$$

Применяя линейность преобразования Лапласа, перейдем в заданном дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

$$a_0(p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots - py_{n-2} - y_{n-1}) +$$

$$+ a_1(p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - \ldots - y_{n-2}) +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(pY(p) - y_0) + a_n Y(p) = F(p).$$

Полученное уравнение – это алгебраическое уравнение первой степени относительно $Y(p)$. Решая его, находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + \Phi(p)}{\Psi(p)},$$

где

$$\Psi(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n,$$

$$\Phi(p) = y_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1}) +$$

$$+ y_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + ... + a_{n-2}) + ... +$$

$$+ y_{n-2}(a_0 p + a_1) + a_0 y_{n-1}.$$

$\Phi(p)$ - многочлен степени не выше, чем n-1, с коэффициентами, зависящими от начальных условий. Если все начальные значения равны нулю, то $\Phi(p) = 0$.

Далее, для найденного изображения $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$, который и будет искомым частным решением дифференциального уравнения.

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что уравнение для $Y(p)$ является линейным алгебраическим и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное дифференциальное уравнение. Во-вторых, операционным методом сразу находится част-

ное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, и не надо искать общее решение этого уравнения.

Пример 1

Решить уравнение $y''-4y=te^{-t}$ при начальных условиях $y(0)=2,\quad y'(0)=0.$

Решение

Пусть $y(t)=Y(p)$, тогда

$$y'(t)=pY(p)-y(0)=pY(p)-2,$$
$$y''(t)=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-2p.$$

Переходим в уравнении к изображениям:

$$p^2Y(p)-2p-4Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2},$$

решаем это уравнение

$$(p^2-4)Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+2p;\quad (p^2-4)Y(p)=\frac{1+2p^3+4p^2+2p}{(p+1)^2}.$$

$$Y(p)=\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p^2-4)}\ \text{ или }\ Y(p)=\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p-2)(p+2)}.$$

Разложим полученную для $Y(p)$ правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p-2)(p+2)(p+1)^2}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{(p+1)^2}+\frac{D}{p+1},$$

$$2p^3+4p^2+2p+1=A(p+2)(p+1)^2+B(p-2)(p+1)^2+$$

$$+C(p-2)(p+2)+D(p+1)(p-2)(p+2).$$

$$p=2 \qquad 16+16+4+1=A\cdot 36, \qquad 37=36A, \qquad A=\frac{37}{36}$$

$$p=-2 \qquad -16+16-4+1=B\cdot(-4), \qquad -3=-4B, \qquad B=\frac{3}{4}$$

$$p=-1 \qquad -2+4-2+1=C\cdot(-3), \qquad 1=-3C, \qquad C=-\frac{1}{3}$$

$$p^3: \quad 2=A+B+D, \quad D=2-A-B=2-\frac{37}{36}-\frac{3}{4}=\frac{72-37-27}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

Тогда

$$Y(p)=\frac{37}{36}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+1},$$

а искомое частное решение дифференциального уравнения есть

$$y(t)=\frac{37}{36}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-\frac{1}{3}te^{-t}+\frac{2}{9}e^{-t}.$$

Пример 2

Решить уравнение $x'''+2x'=4e^{-t}$ при начальных условиях $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Решение

Пусть $x(t) = X(p)$, тогда

$$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x'''(t) = p^3X(p) - p^2(x(0)) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p),$$

$$4e^{-t} == \frac{4}{p+1}.$$

Переходим в дифференциальном уравнении к изображениям

$$p^3X(p) + 2pX(p) = \frac{4}{p+1},$$

$$(p^3 + 2p)X(p) = \frac{4}{p+1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{4}{(p+1)(p^3+2p)} \text{ или } X(p) = \frac{4}{p(p+1)(p^2+2)}.$$

$$\frac{4}{p(p+1)(p^2+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2}$$

$$4 = A(p+1)(p^2+2) + Bp(p^2+2) + (Cp+D)p(p+1)$$

$p = 0$ $\quad 4 = 2A,$ $\quad A = \frac{4}{2} = 2$

$p = -1$ $\quad 4 = B\cdot(-3),$ $\quad B = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

$p^3:$ $\quad 0 = A + B + C,$ $\quad C = -A - B = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

$p^2:$ $\quad 0 = A + D + C,$ $\quad D = -A - C = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$

Тогда

$$X(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{p^2+2} - \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{p^2+2}.$$

Искомое частное решение $x(t)$ есть

$$x(p) = 2 - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3} \cdot \cos\sqrt{2}\,t - \frac{4}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,t\,.$$

15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие будет лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения будем иметь систему таких уравнений, причем эта система в отношении изображений искомых функций будет линейной алгебраической.

Пример 1

Решить систему $\begin{cases} x' + 3x + y = 0 \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$ при начальных условиях $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

Решение

Пусть

$$x(t) = X(p), \quad y(t) = Y(p),$$

тогда

$$x'(t) = pX(p) - 1; \quad y'(t) = pY(p) - 1.$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 3X(p) + Y(p) = 0 \\ pY(p) - 1 - X(p) + Y(p) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+3)X(p) + Y(p) = 1 \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = 1 \end{cases}$$

Получили линейную алгебраическую систему с неизвестными $X(p)$ и $Y(p)$.

Решение этой системы находим по формулам Крамера.

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+3)(p+1) + 1 = p^2 + 3p + p + 3 + 1 = (p+2)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p + 1 - 1 = p,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p + 3 + 1 = p + 4.$$

Тогда $X(p)=\dfrac{p}{(p+2)^2}$; $Y(p)=\dfrac{p+4}{(p+2)^2}$.

Для нахождения оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ найденные их изображения преобразуем

$$X(p)=\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)-2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}-\frac{2}{(p+2)^2}=e^{-2t}-2te^{-2t};$$

$$Y(p)=\frac{p+4}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)+2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2}=e^{-2t}+2te^{-2t}.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(1-2t), \\ y(t)=e^{-2t}(1+2t). \end{cases}$$

Пример 2

Решить систему $\begin{cases} x'+x-y=e^t \\ y'-x+y=\sin t \end{cases}$

при начальных условиях $x(0)=1, \quad y(0)=0.$

Решение

Пусть

$$x(t)=X(p), \quad y(t)=Y(p),$$

тогда

$$x'(t)=pX(p)-1; \quad y'(t)=pY(p).$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p)-1+X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ pY(p)-X(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}+1 \\ -X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}, \end{cases}$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix}=(p+1)^2-1=p^2+2p,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{p}{p-1} & -1 \\ \dfrac{1}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{p(p+1)}{p-1}+\frac{1}{p^2+1}=$$

$$=\frac{p^4+p^3+p^2+p+p-1}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{(p-1)(p^2+1)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & \dfrac{p}{p-1} \\ -1 & \dfrac{1}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p^2+1} + \frac{p}{p-1} =$$

$$= \frac{p^2-1+p^3+p}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p^3+p^2+p-1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}, \quad Y(p) = \frac{p^3+p^2+p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}.$$

Каждую из правильных рациональных дробей представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^4+p^3+p^2+2p-1 = A(p+2)(p-1)(p^2+1) + Bp(p-1)(p^2+1) +$$

$$+ Cp(p+2)(p^2+1) + (Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$p=0 \qquad -1 = -2A, \qquad A = \frac{1}{2}$

$p=1 \qquad 4 = 6C, \qquad C = \frac{2}{3}$

$p=-2 \qquad 16-8+4-4-1=30B, \quad 7=30B, \quad B=\frac{7}{30}$

$p^4: \quad 1=A+B+C+D, \quad D=1-A-B-C=1-\frac{1}{2}-\frac{7}{30}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}$

$p=-1 \quad -2=-4A+4B-2C-2D+2E.$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1-\frac{7}{15}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

По изображению $X(p)$ находим оригинал $x(t)$:

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t,$$

$$x(0)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{15+7+20-12}{30}=\frac{30}{30}=1.$$

$$\frac{p^3+p^2+p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-1}+\frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^3+p^2+p-1=A(p+2)(p-1)(p^2+1)+Bp(p-1)(p^2+1)+$$

$$+Cp(p+2)(p^2+1)+(Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$p=0 \qquad -1=-2A, \qquad A=\frac{1}{2}$

$p=1 \qquad 2=6C, \qquad C=\frac{1}{3}$

$p=-2 \qquad -7=30B, \qquad B=-\frac{7}{30}$

$p^4: \qquad 0=A+B+C+D, \qquad D=-A-B-C=-\frac{1}{2}+\frac{7}{30}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{5}$

$p=-1 \qquad -2=-4A+4B-2C-2D+2\mathrm{E}$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1+\frac{7}{15}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=+\frac{1}{5}$$

$$Y(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Искомый оригинал $y(t)$ равен

$$y(t)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t,$$

$$y(0)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=\frac{15-7+10-18}{30}=\frac{0}{30}=0.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t \\ y(t)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти изображения для заданных оригиналов

$$1)\ f(t) = 2\cos 5t - e^{-t}\sin 4t;$$
$$2)\ f(t) = \sin 2(t-1)\cdot 1(t-1);$$
$$3)\ f(t) = 3t\cos 4t;$$
$$4)\ f(t) = (t-2)^3 e^{t-2}\cdot 1(t-2).$$

2. С помощью таблицы оригиналов и соответствующих им изображений и свойств преобразования Лапласа найти оригиналы по заданным изображениям:

$$1)\ F(p) = \frac{3p}{p^2-25} + \frac{2}{(p-2)^2+9};$$

$$2)\ F(p) = \frac{4p}{p^2-2p+5};$$

$$3)\ F(p) = \frac{p+8}{p^2+4p+7}e^{-p};$$

$$4)\ F(p) = \frac{7}{(p+3)^3} - \frac{p\,e^{-2p}}{p^2-16}.$$

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1) $y''-4y'+5y=e^t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1;$

2) $y''-3y'+2y=e^t, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=6;$

3) $y''+y'=\sin 2t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0;$

4) $y''+4y'=3\cos t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

Ершова В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – М.: Наука, 1976. – 255 с.

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Н. П. Жданова, Т. С. Озерова

Дифференцирование функций нескольких переменных

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей очного обучения

Екатеринбург
2019

Варианты заданий для контрольных работ и самостоятельной работы студентов всех специальностей по теме: "Дифференцирование функций нескольких переменных" содержат 30 вариантов по 7 заданий в каждом варианте, также задания могут быть использованы на практических занятиях в аудитории.

Вариант 1.

1) Найти область определения функции $z = 2 \cdot \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$ и построить линии уровней $z = 0$, $z = 3$, $z = 6$, $z = 12$.

2) Для функции $u = \frac{x \cdot y^2}{z} - y \cdot e^{2x-z}$ найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ в точке $M(1;-1;2)$.

3) Найти экстремумы функции $z = x \cdot \sqrt{y} - x^2 + 6x - y$.

4) Найти полный дифференциал функции $v(t,z) = \ln\left(arctg\frac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t = z = 1$, $\Delta t = 0{,}2$, $\Delta z = 0{,}1$.

5) Для функции $\omega = \cos(3u - 2v)$, где $u = 2^{tg(4x)}$, $v = \log_2(3\sqrt{x} + 2)$ найти $\frac{d\omega}{dx}$ в точке $x = 0$.

6) Найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $\arcsin(zy) + ctg\left(\frac{\pi x}{4y}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{z} - x$ при $x = 1$, $y = 1$, $z = 0{,}5$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 6 = 0$ в точке $M(1;2;-1)$.

Вариант 2.

1) Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3\ln(2x - y^2)$.

2) Для функции $u = \sin^2(2x + 3y)$ вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

3) Найти экстремум функции $z = x^2 + 2y^2 - 2xy + 3x - y + 5$.

4) Для функции $z = (2x+1)^{3y-2}$ составить формулу полного дифференциала.

5) Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^2 - 4xy = 0$ и вычислить ее значение при $x = 1$, $y = 4$.

6) Найти градиент функции $u = \frac{x \cdot y^2}{z} + \frac{z \cdot y}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $M(1;2;-1)$.

7) Для функции $u = \ln(2x - y^2)$, где $x = 3e^t$, $y = arctg\left(\frac{t}{2}\right)$ найти $\frac{du}{dt}$ и вычислить ее значение в точке $t = 0$.

Вариант 3.

1) Найти и построить область определения функции $z = \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{5}{y}\right)$.

2) Для функции $u = ctg(\sqrt{x^3} + y)$ найти формулу полного дифференциала.

3) Найти экстремумы функции $z = xy - x^2y - xy^2$.

4) Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $arctg\frac{x+2y}{3} = 2x + \frac{y}{5}$ и вычислить ее значение при $x = 0$, $y(0) = 0$.

5) Найти полную производную $\frac{du}{dx}$, если $u = x^y$, где $y = \ln(2x)$.

6) Найти производную функции $\omega = x^2y + 2y^2z + 3z^2x$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M\vec{N}$, где $N(-1;4;-5)$.

7) Найти градиент функции $v = e^{xz^3 - y^2}$ в точке $M(1;2;-1)$ и его величину.

Вариант 4.

1) Найти область определения функции $f(x,y) = \frac{2x-3y}{3x-y}$. Вычислить $f(1,3)$, $f(a,-a)$, $f(-a,a)$, $a \neq 0$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 - x^2y - xy^2$.

3) Для функции $z = arctg\frac{y}{x-1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 0$, $y = 1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u = \sin(2x + y^2)$, где $x = \ln(2\sqrt{t} + 1)$, $y = ctg\frac{1}{t}$.

5) Найти $\frac{dy}{dx}$ производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ и вычислить ее значение при $x = 0$, $y < -2$.
, если $u = x^y$, где $y = \ln(2x)$.

6) Найти градиент функции $u = z^2e^{x-2y} + \cos\frac{\pi y}{xz^2}$ в точке $M(2;1;-1)$.

7) Вектор $\vec{l}$ составляет с осью OX угол $\alpha = 30^0$, с осью OУ $0 \le \beta \le 90^0$. Найти производную функции $z = x^3 - 3\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[4]{xy^3}$ в точке $M(1;1)$ по направлению $\vec{l}$.

Вариант 5.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

3) Для функции $u=e^{x^2-y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}01$.

4) Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z=arctg(uv)$, где $u=\cos(2x-y)$, $v=tg\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, где $x=4$, $y<0$. Сделать чертеж.

6) В точке $M(4;3;-12)$ вычислить модуль градиента функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7) Найти производную функции $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точке $M_1(3;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{M_1M_2}$, где $M_2(6;5)$.

Вариант 6.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. Построить линии уровней $z=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{2}$, $z=1$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2+2y^2+2xy-2x+4y+15$.

3) Для функции $u=e^{xy}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}01$.

4) Найти производную $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ сложной функции $v=ctg\left(\dfrac{y^2}{z}\right)$, где $y=\ln(5x+4u)$, $v=arctg(\sqrt{x\cdot u})$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $3x^2+2y^2-6x-12y+16=0$ в точке, где $x=2$, $y<3$. Сделать чертеж.

6) Найти градиент функции $u=\arccos\dfrac{z}{x+y}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^2z}}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $z=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{y}{\sqrt{z}}-xyz^3$ в точке $M_1(1;-2;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;4;-2)$.

Вариант 7.

1) Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{9-x^2-4y^2}$.

2) Найти экстремумы функции $z=2x^3+2y^3-36xy+430$.

3) Для функции $u=arctg\frac{x}{y}$ вычислить частные производные второго порядка и их значения в точке $M(1;-1)$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции, где $z=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

5) Найти частные производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $z\cdot\ln(2y-x)+2^{x+2z}-\frac{8y}{\sqrt[3]{z}}=0$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2=z^2$ в точке $M_0(3;4;5)$.

6) В точке $M(4;3;-12)$ вычислить модуль градиента функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7) Найти производную функции $u=xy^{\ln z}$ в точке $M_1(1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;-1;1)$.

Вариант 8.

1) Найти и построить область определения функции $w=\arcsin(|y|-x)$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^3+y^3-6xy$.

3) Для функции $u=e^x\cos(2y)$ вычислить частные производные второго порядка и их значения при $x=1$, $y=0$.

4) Для функции $z=x^3\ln y$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=3u+2v$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2+y^2-4x+6y-1=0$ в точке, где $y=-5$, $x>0$.

6) Найти градиент функции $u=\arcsin\frac{z}{x+y}-\sqrt[3]{\frac{y}{x^2z}}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2(2-z^2)-y^2=0$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

Вариант 9.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arccos(|x| + y)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + 2y^2 - 3x + 4y$.

3) Для функции $u = 2^{\arcsin\frac{x}{z}}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 0$, $z = 1$, $\Delta x = \Delta z = 0{,}01$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = tg(2x^2 - y)$, где $x = \ln(2t)$, $y = \sqrt{t}$.

5) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;1)$ $z = f(x, y)$ - неявной функции, заданной уравнением $x\ln(2z - y) + arctg\frac{z}{y} = \frac{\pi}{2x}$.

6) Найти производную функции $u = \frac{1}{\pi}tg\frac{\pi \cdot x^2}{2y} + e^{y-2x}$ в точке $M_1(1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-1)$.

7) Найти градиент функции $u = \frac{2z}{\sqrt[3]{x}} + yz^3 - \sqrt{\frac{x}{y}}$ в точке $M_1(8;2;1)$. Составить уравнение поверхности уровня функции, проходящей через точку M_1.

Вариант 10.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2x)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 - 6x + 9y + 20$.

3) Для функции $u = \sqrt{y+1} \cdot \ln(x^2 + 2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = 0$, $dx = dy = 0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \lg(x + y^2)$, где $x = arctg\frac{1}{t}$, $y = \sin(\pi \cdot t)$.

5) Уравнение $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ задает неявную функцию $y(x)$. Найти производную $\frac{dy}{dx}$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к графику этой функции в точке, где $y = -1$, $x > 0$.

6) Найти градиент функции $u = e^{\frac{x-y}{z}} - \frac{1}{\pi}tg\frac{\pi \cdot z}{xy^2}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = \frac{xy}{\sqrt{2z}} + \frac{z}{2x^2y} + \sqrt{\frac{2y}{z}}$ в точке $M_1(1;2;4)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;0;-2)$.

Вариант 11.

1) Найти и построить область определения функции $z = \frac{\ln(x+1)}{1+\ln y}$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 23$.

3) Для функции $z = \sin^2(2x+3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{6}$.

4) Для функции $z = \frac{u}{\ln v}$, где $u = \sqrt{4x - y^2}$, $v = 4 - x^2 - y^2$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 16 = 0$ в точке, где $x = 4$, $y \neq 0$.

6) Найти модуль градиента функции $u = e^{\frac{2y-x}{z}} - \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi \cdot z}{xy^2}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = \sqrt[3]{y^2 - 4z} + arctg\frac{x-z}{y}$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;-4;1)$.

Вариант 12.

1) Найти область определения функции $z = \sqrt{x - y + 1} \cdot \ln(x + y)$.

2) Найти экстремумы функции $z = \frac{y}{x} + \frac{1}{y} + x$.

3) Найти полный дифференциал функции $v(t,z) = \ln\left(arctg\frac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t = z = 1$, $dt = 0{,}01$, $\Delta z = -0{,}01$.

4) Для функции $z = u \cdot e^{\frac{u}{v}}$, где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 4y + 20$ в точке, где $x = 4$, $y > 0$.

6) Найти производную функции $u = x \cdot \arcsin\frac{z-y}{2} - \sqrt[3]{y^2 - 4z}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(0;2;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 21$ в точке, где $x_0 = 2$, $y_0 < 0$, $z_0 = 1$.

Вариант 13.

1) Найти и построить область определения функции $v = \arccos(x - 2y)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$.

3) Для функции $u = ctg(e^{y^2 - x^2})$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = -1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$.

4) Для функции $z = arctg(xy)$, где $y = e^{2x}$ найти $\frac{dz}{dx}$.

5) Для функции, заданной уравнением $\frac{6}{\pi}\arcsin\frac{x+y}{4z} - \sqrt[3]{\frac{zx^2}{y}} = 0$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти градиент функции $u = y \cdot \ln(x + 2z) + z \cdot \sqrt[3]{x^2 y^3}$ в точке $M(-1;1;1)$. Найти модуль градиента.

7) Найти производную функции $u = \frac{x-y}{\sqrt[3]{z}} + \frac{x+2y}{x-z} + \sqrt[3]{\frac{xy^2}{2z}}$ в точке $M_1(2;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(0;-1;2)$.

Вариант 14.

1) Найти и построить область определения функции $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = e^{-x}(x - y^2)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $\varphi = arctg\frac{x+1}{y}$, если x изменяется от $x_1 = 0$ до $x_2 = 0{,}2$, y изменяется от $y_1 = 1$ до $y_2 = 0{,}9$

4) Для функции $z = \ln^2(u) - \ln(2v)$, где $u = tg(3x)$, $v = \sin(3x)$ найти $\frac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ в точке, где $y = -6$, $x < 0$.

6) Найти градиента функции $u = \frac{x}{\ln(y+z)} + \sqrt[3]{2x^2 z^5}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = \arcsin(x\sqrt{y})$ в точке $M_1\left(\frac{1}{2};1\right)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 15.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x-y+2}+\ln(y-x^2)$.

2) Показать, что функция $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u=y\cdot e^{2(1-x)}+\cos\dfrac{\pi\cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z=arctg\dfrac{y}{x}$, где $y=\ln(2x+1)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\dfrac{6}{\pi}\arcsin\dfrac{x+z}{4y}-\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{z}}=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти частную производную этой функции в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти производную функции $u=ye^{2y-x}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y}$ в точке $M_1(2;1;4)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(0;-2;-2)$.

7) Найти градиент функции $u=\dfrac{1}{\pi}\left(ctg\dfrac{\pi\cdot y^2}{2x}\right)^2$ в точке $M(2;1)$.

Вариант 16.

1) Найти и построить область определения функции $u=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(1;3)$.

2) Найти экстремумы функции $z=e^{0,5x}(x+y^2)$.

3) Для функции $u=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}2$.

4) Для сложной функции $z=x^2y-xy$, где $x=u\cos v$, $y=v\sin u$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

5) Уравнение $\arccos\dfrac{x}{y}=\dfrac{\pi}{3}+zy-\sqrt{\dfrac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$, $z>0$.

6) Найти производную функции $u=\arcsin\dfrac{2y-x}{z}+\dfrac{\sqrt[3]{2x^2z}}{y^3}$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;-5;1)$.

7) Найти модуль градиента функции $u=\dfrac{2x-y}{3y+2z}$ в точке $M(-1;1;-1)$.

Вариант 17.

1) Найти область определения функции $u = \arccos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

2) Показать, что функция $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = z \cdot e^{y-2x} + \frac{1}{z^2}\cos\frac{\pi \cdot x}{y}$ найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$. Вычислить их значения в точке $M(1;2;1)$.

4) Для функции $z = 2u + \sqrt{v}$, где $u = \arcsin(xy)$, $v = \ln(x^2 + 2y)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2y - z) + arctg\frac{y}{z} = \frac{\pi}{2x}$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u = \frac{1}{\pi} tg\left(\frac{\pi \cdot x}{y \cdot z}\right) - \frac{z - x}{y - x} + x \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{z}}$ в точке $M(1;2;2)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке, где $y = 1$, $z = 12$, $x < 0$.

Вариант 18.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin(|x| - |y|)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3y^2 - 3xy + 1{,}75$.

3) Для функции $u = \ln(x^2 + 3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x = 2$, $y = 0$.

4) Для функции $u = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = arctg\frac{1}{x}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) В точке $M(2;1)$ найти угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + y = 2^{y-2} - 2^x$

6) Найти градиент функции $u = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi \cdot x}{yz} \cdot e^{x+y} - \sqrt[3]{\frac{zy^2}{2x}}$ в точке $M(-1;1;2)$.

7) Найти производную функции $u = \frac{x}{y}\arcsin\frac{y}{x}$ в точке $M_1(-2;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(2;4)$.

Вариант 19.

1) Найти и построить область определения функции $u = \dfrac{\ln(x^2 - 2y)}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + y^3 - 3xy$.

3) Для функции $u = \dfrac{ctg\left(2y + \dfrac{\pi}{4}\right)}{x - 1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 3$, $y = 0$, $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}01$.

4) Для функции $z = \ln(y^2 - 2x^2)$, где $y = e^{x+1}$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\arcsin\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{6} + zy - \sqrt{\dfrac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2}; 1; z_0\right)$, $z_0 > 0$.

6) Найти производную функции $u = \dfrac{x^2}{yz} - \sqrt{\dfrac{y}{2x}} + xyz^3$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;-4;1)$.

7) Найти градиент функции $z = x^y + y^x$ в точке $M(2;1)$.

Вариант 20.

1) Найти область определения функции $t = \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

2) Показать, что функция $z = x^2 - xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ имеет экстремум в точке $M_0(1;1)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = y \cdot e^{2(1-x)} + \cos\dfrac{\pi \cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Катеты $a = 12$ (см), $b = 5$ (см) измерены с точностью $\Delta a = \Delta b = 0{,}1$ (см). Найдите гипотенузу треугольника и относительную погрешность значения гипотенузы $\left(\delta c = \dfrac{\Delta c}{c} \cdot 100\%\right)$.

4) Для функции $u = x^2 + 2y^2 + \ln(1 + y)$, где $y = \sin(3x)$ найти $\dfrac{du}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ в точке, где $y = -1$, $x < 0$.

6) Найти градиент функции $z = arctg\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ в точке $M_0(\sqrt{2};1)$.

7) Найти производную функции $u = xe^{2y+z} + z \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(4;3;14)$.

Вариант 21.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin\frac{1}{x} + \arccos\frac{1}{y}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + y^3 - 6xy$.

3) Для функции $u = (x^2+2)\cdot\arcsin\frac{1}{y}$ найти частные производные второго порядка.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u = e^{x-3y}$, где $x = \sin(\pi \cdot t)$, $y = \sqrt[3]{t}$ и ее значение при $t = 1$.

5) Уравнение $x\ln(2y+z) + arctg\frac{z}{y} + \frac{\pi}{2x} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$.

6) Составить уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ в точках пересечения эллипсоида и прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

7) Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора l_0, составляющего с осью ОУ угол $\beta = 60^0$.

Вариант 22.

1) Найти и построить область определения функции $v = \arccos(x^2 + y^2 - 2y)$. Вычислить z при $x = 0$, $y = 1$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 4x$.

3) Для функции $u = \frac{5x+3y}{9x-2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}3$.

4) Для функции $w = tg\frac{4u}{v^2}$, где $u = \arcsin(t-2z)$, $v = \ln(t^2+z^2)$ найти $\frac{\partial w}{\partial z}$.

5) Уравнение $arctg\dfrac{x+2y}{3z}-ye^{x-z}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\pi}{4}$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u=\dfrac{2x^2}{9}+\dfrac{3y^2}{z}-xyz$ в точке $M(1;-2;3)$.

7) Найти производную функции $u=\dfrac{z}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{1}{\ln 2}\cdot 2^{3y+z}-\sqrt{x(y^2-z)}$ в точке $M_1(2;1;-3)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-5;-1)$.

Вариант 23.

1) Найти область определения функции $u=\arccos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

2) Найти экстремум функции $z=x^2+2y^2-xy^2+1$.

3) Для функции $u=x\ln(3x+2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=1$, $y=-1$, $\Delta x=\Delta y=0{,}01$.

4) Для функции $z=u^v$, где $u=\sin(2y)$, $v=arctg\dfrac{x}{y}$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x\cdot 3^{\frac{x+1}{y}}+tg\dfrac{\pi x}{4y}-10=0$ в точке $M(1;1)$.

6) Найти производную функции $u=\sqrt{3}\arcsin\dfrac{x-y}{z}+y^2\cdot\sqrt{\dfrac{z}{x^3}}$ в точке $M_1(1;2;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;5;-10)$.

7) Найти градиент функции $u=\dfrac{x}{\sqrt[3]{z(2x+y)}}+3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y}{z}}+xyz^2$ в точке $M(1;2;-2)$.

Вариант 24.

1) Найти и построить область определения функции $z = x + 2y - \arccos(xy)$.

2) Найти экстремум функции $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

3) Для функции $u = e^{1-x} \cdot \ln(2y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z = (u+1)^{v+1}$, где $u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$, $v = \cos(2x+3y)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2z+y) + arctg\frac{z}{y} + \frac{\pi}{2x} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;-1;1)$.

6) Найти производную функции $u = \sqrt{3}\arccos\frac{x-y}{z} + \frac{4}{\pi}tg\frac{\pi y}{x^2}$ в точке $M_1(2;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-1;-4)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sin(3x)\cdot\cos y - z = 0$ в точке, где $x = y = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 25.

1) Найти и построить область определения функции $u = \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{y+2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(5;-1)$.

2) Найти экстремумы функции $z = e^{0,5y}(x^2 + y)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $z = \arcsin\frac{y}{x}$, если x изменяется от $x_1 = 5$ до $x_2 = 4{,}5$, y изменяется от $y_1 = 3$ до $y_2 = 3{,}3$

4) Для функции $z = y^{\sqrt{x}}$, где $y = \log_2(x^2 + 2x)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболе $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$ в точке $M(2;2)$. Сделать чертеж.

6) Найти производную функции $u = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\cdot z}{x^2 y} + \frac{x+2y}{z+y}$ в точке $M_1(1;2;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;1;-1)$.

7) Найти градиент функции $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ в точке $M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Вариант 26.

1) Найти и построить область определения функции $u = \dfrac{2x + y}{\cos(y - x)}$.

2) Найти экстремумы функции $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$.

3) Для функции $u = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(2x - y)\right)$ найти частные производные $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$. Вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z = u^{v+1}$, где $u = \arcsin(x + 2y)$, $v = \ln(x + \sqrt[3]{y})$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $\dfrac{x - y}{z^2} + e^{2z+x} - x\sqrt{y} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$.

6) Найти градиент функции $u = arcctg\dfrac{x}{y + z} + \sqrt[3]{\dfrac{z^5}{2x^2 y}}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $u = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2 - z^2} + \dfrac{\sqrt{x}}{z} - \dfrac{2x}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\ln 2}$ в точке $M_1(1;4;1)$

Вариант 27.

1) Найти и построить область определения функции $z = tg\left(y + 2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Вычислить z при $x = 0$, $y = 1$.

2) Найти экстремумы функции $z = 2y^2 - 2y\sqrt{x} + x - 4y$.

3) Для функции $z = x^2 + 2y^2 - 3xy$ найти формулы частных приращений $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и полного приращения. Вычислить приращения, если x изменяется от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}1$, y изменяется от $y_1 = 2$ до $y_2 = 1{,}9$.

4) Для функции $z = x^y$, где $y = e^{-x} \cdot \sin(2x)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 7 = 0$ в точке, где $x = 3$, $y > 3$.

6) Найти градиент функции $u = y\ln(x + 2z) - \sqrt{3}\arccos\dfrac{z}{x^2 + y^3}$ в точке $M_1(-1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{xz^2}{y - 1}} + \dfrac{x + z}{2y - z} - \dfrac{x^2 y}{4z^3}$ в точке $M_1(2;3;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(4;1;2)$.

Вариант 28.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arcsin\dfrac{y-2}{x}$.

2) Для функции $u = x^{\frac{y}{z}}$ найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ при $x=2$, $y=-1$, $z=1$.

3) Найти экстремумы функции $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

4) Высота $H = 4$(см) и образующая $L = 5$(см) конуса измерены с точностью $\Delta = 0{,}1$(см). Найти объем конуса. Найти абсолютную и относительную погрешности объема.

5) Для функции $z = \arcsin\dfrac{x}{z}$, где $z = \sqrt{x^2+1}$ найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{du}{dx}$ в точке, где $x=1$.

6) Найти градиент функции $u = \sqrt{2}\cdot\arcsin\dfrac{x+2y}{x+z} + \sqrt[3]{\dfrac{2yz^2}{x}}$ в точке $M(1;-1;2)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + \ln(y^2+z^2) - \ln(x^2+z^2) = 1$ в точке, где $x=1$, $z=-2$, $y<0$.

Вариант 29.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arccos\sqrt{xy}$.

2) Для функции $z = x^y$ найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Сравнить эти производные.

3) Найти экстремумы функции $z = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 - xy$.

4) С помощью дифференциала найти формулу объема стекла, нужного для изготовления цилиндрического стакана с толщиной стенок и дна к, если радиус внутреннего цилиндра R, а высота внутреннего цилиндра H.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $\ln x + \ln y - \sqrt[3]{y} = 0$ в точке $M(e;1)$.

6) Для функции $z = \ln(2x + y^2)$, где $x = \sin(2t)$, $y = \cos^2 t$ найти $\dfrac{dz}{dt}$.

7) Найти модуль градиента функции $u = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z$ в точке $M_1(1;1;1)$ и производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;3;0)$.

Вариант 30.

1) Найти и построить область определения функции $u=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+y^2}{x^2+4x+y^2}}$.

2) Для функции $z=\ln\left(tg\dfrac{x}{y}\right)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3) Найти экстремум функции $z=2x^2+y^2-xy-7x+14$.

4) Для функции $u=\sqrt[3]{x+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=5$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}01$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xe^{2x+y}-e^{3x^2+2y}=0$ в точке $M_1(1;-1)$.

6) Для функции $z=\dfrac{u}{v}arctg(u+v)$, где $u=xy$, $v=x+y$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7) Найти градиент функции $u=\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{4y}{z^2}+x^2z^2$ в точке $M_1(1;-1;2)$. Найти производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;-4;-4)$.

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Н. П. Жданова, Т. С. Озерова

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех
специальностей очного обучения

Екатеринбург
2019

Ж 42

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 16.10. 2018 г. (протокол № 134) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Жданова Н. П., Озерова Т. С.

Ж42 КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ: методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ. Н. П. Жданова, Т. С. Озерова; Уральский государственный горный университет. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 85 с.

В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ предназначены студентам всех специальностей очного обучения для изучения темы: «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....4

I. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 5
1. Понятие интеграла от скалярной функции 5
2. Основные свойства интегралов. 10
3. Вычисление интегралов. 10
3.1 Определенный интеграл. 10
3.2 Криволинейный интеграл. 10
3.3 Двойной интеграл. 11
3.4 Поверхностный интеграл второго рода. 14
3.5 Тройной интеграл. 15

II. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ …16
1. Длина дуги кривой. 17
2. Площадь плоской области. 17
3. Площадь поверхности 17
4. Объем тела 17
5. Масса распределенная в заданной области. 18

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ 19
1. Понятие поля. 19
2. Векторные линии. 20
3. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода. Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура. 20
4. Поток вектора через поверхность. 22
4.1 Вектор площадки. 22
4.2 Понятие потока вектора через поверхность 24
4.3 Гидродинамический смысл потока вектора через поверхность. Поток жидкости через поверхность. 24
4.4 Поток вектора через плоскую кривую L. 26
4.5 Свойства и вычисление потока вектора через поверхность. 26
5. Оператор Гамильтона «набла». 29
6. Дивергенция векторного поля. 29
7. Ротор (вихрь) векторного поля. 31
8. Потенциальное векторное поле. 32
8.1 Плоское потенциальное поле. 33

IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ 34
1. Вычисление и применение двойного интеграла. 34
2. Вычисление и применение тройного интеграла. 45
3. Вычисление и применение поверхностного интеграла первого рода. 48
4. Вычисление и применение криволинейного интеграла. 53

V. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 60

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 90

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы» предназначены для самостоятельной работы студентов. Методические указания удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов .В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных и самостоятельных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

I. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Понятие интеграла от скалярной функции

Пусть Q – и замкнутая ограниченная часть пространства. Это может быть отрезок $[a, b]$ оси Ox, дуга плоской или пространственной кривой, часть плоскости или кривой поверхности, трехмерная область. Пусть в каждой точке M области Q задана непрерывная функция $u=f(M)$.

1. Мысленно разобьем область Q на n элементарных частей $\Delta Q_i, i=\overline{1,n}$ и найдем геометрическую меру каждой из частей, обозначив ее тоже ΔQ_i (это длина элементарного отрезка Δx_i оси Ox или элементарной части дуги Δl_i кривой, площадь ΔS_i элементарной части плоской области или $\Delta\sigma_i$ - площадь элементарной части поверхности: Δv_i - объем элементарной части трехмерной области).

2. На каждой элементарной части ΔQ_i возьмем произвольную точку M_i и вычислим значения функции в выбранных точках $U_i=f(M_i)$.

3. Составим произведения ($U_i \cdot \Delta Q_i = F(M_i) \cdot \Delta Q_i$) и найдем сумму всех произведений:

$$f(M_1)\cdot\Delta Q_1 + f(M_2)\cdot\Delta Q_2 + \ldots + f(M_i)\cdot\Delta Q_i + \ldots + f(M_n)\cdot\Delta Q_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta Q_i$$

– интегральная сумма функции $f(M)$ в области Q.

4. Назовем диаметром diam (ΔQ_i) элементарной области ΔQ_i наибольшее расстояние между точками ее границы. Из всех полученных диаметров $i=\overline{1,n}$ выберем максимальный и назовем его рангом λ данного разбиения:

$$\lambda = \max_i diam\,(\Delta Q_i)\,.$$

Уменьшая ранг, составим последовательность интегральных сумм.

Если область Q имеет геометрическую меру (длину, площадь, объем) и функция $U_i=f(M_i)$ непрерывна в области Q, то при $\lambda \to 0$ существует предел последовательности интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i$, равный числу J, независимо от способа разбиения области Q на элементарные части и от выбора точек M_i на

каждой из частей. Число J называется интегралом от функции $f(M)$ по области Q и обозначается символом $\int\limits_Q f(M)dQ$, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i = \int\limits_Q f(M)dQ$, Q называется областью интегрирования; $f(M)$ – подынтегральной функцией, dQ – элементом геометрической меры области Q; (dx – элемент длины отрезка $[a, b]$ оси Ox; dl – элемент длины дуги плоской или пространственной кривой; ds – элемент площади плоской области; $d\sigma$ – элемент площади поверхности; dv – элемент объема).

Тип интеграла различают по типу элемента dQ:

1. Если $Q=[a, b]$ – отрезок оси Ox, получим определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. Если $Q = \breve{A}B$ - дуга плоской кривой, получим $\int\limits_L f(M)dl = \int\limits_L f(x, y)dl.$

Если $Q = \breve{A}B = L$ – дуга пространственной кривой, то $\int\limits_L f(M)dl = \int\limits_L f(x, y, z)dl$.

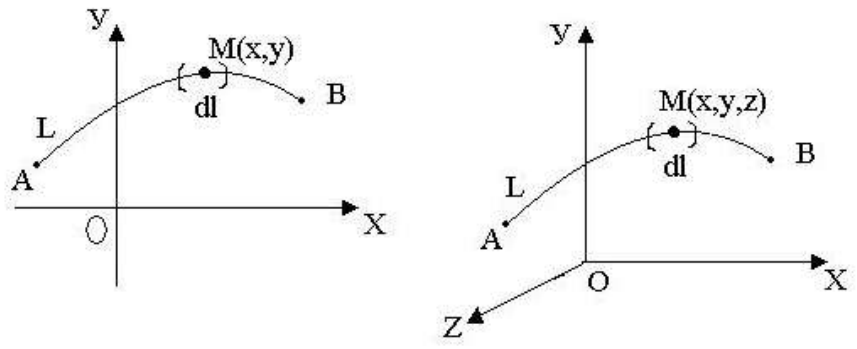


Рис. 1.1

Эти интегралы называются криволинейными интегралами первого рода или криволинейными интегралами по длине дуги кривой.

3. Q – область плоскости xOy.

$\int\limits_Q f(M)ds = \iint\limits_Q f(x, y)ds = \iint\limits_Q f(x, y)dxdy$ - двойной интеграл.

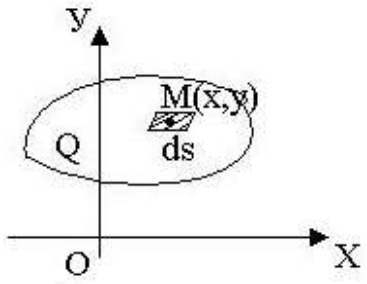


Рис. 1.2

4. Q – часть кривой поверхности

$\int\limits_Q f(M)d\sigma = \iint\limits_Q f(x,y,z)d\sigma$ - поверхностный интеграл первого рода (по площади поверхности).

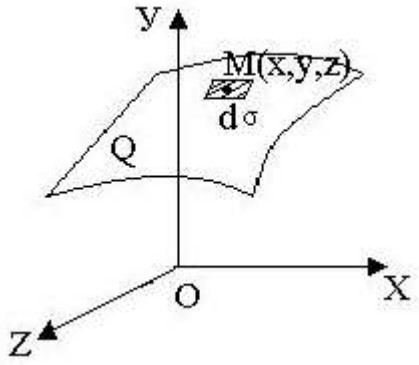


Рис. 1.3

5. Q – область в трехмерном пространстве (называется телом).

$\int\limits_Q f(M)dv = \iiint\limits_Q f(x,y,z)dv = \iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz$ - тройной интеграл.

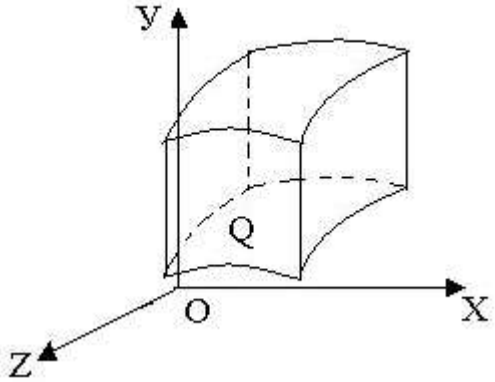


Рис. 1.4

В технических дисциплинах для обозначения интегралов используют все приведенные выше символы. Мы используем символы в правых частях равенств.

2. Основные свойства интегралов

1) $\int\limits_Q (U_1 \pm U_2)dQ = \int\limits_Q U_1 dQ \pm \int\limits_Q U_2 dQ$;

2) $\int\limits_Q AUdQ = A\int\limits_Q UdQ,$ если A=const;

3) Если Q разбить на части Q_1 и Q_2, то $\int\limits_Q UdQ = \int\limits_{Q_1} UdQ + \int\limits_{Q_2} UdQ$;

4) $\int\limits_Q dQ = Q$ - мера области Q (длина, площадь, объем).

5) Если $U_1 \le U_2$, то $\int\limits_Q U_1 dQ \le \int\limits_Q U_2 dQ$.

6) Оценка интеграла: $Q \cdot U_{\min} \le \int\limits_Q UdQ \le Q \cdot U_{\max}$, где Q – мера области Q; $U_{\min}$ и $U_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значения функции $U=f(M)$ в области Q.

7) Средним значением функции $U=f(M)$ называют число $\overline{U} = \frac{1}{Q}\int\limits_Q UdQ$. Непрерывная функция $U=f(M)$ принимает значение $\overline{U}$ хотя бы в одной точке M_0 области Q. $U_{\min} \le \overline{U} \le U_{\max}$.

3. Вычисление интегралов

3.1. Определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$ – первообразная от функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

3.2. Криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$ или $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ преобразуют в определенный интеграл. Для этого все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнений кривой через одну переменную и ее

дифференциал и вычисляют получившийся интеграл по интервалу изменения выбранной переменной на дуге *L*.

а) Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t), \alpha \le t \le \beta \end{cases}$,

то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt \qquad (2)$$

б) Если *L* – график функции $y=g(x)$ и $a \le x \le b,$ то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx \quad . \qquad (3)$$

в) Если *L*: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \\ z = \theta(t), \alpha \le t \le \beta \end{cases}$, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2}\, dt\,. \qquad (4)$$

Замечание

В определенных интегралах нижний предел нужно брать меньше верхнего.

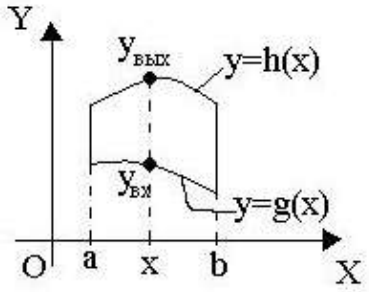
3.3. Двойной интеграл

$\iint_D f(x,y)\,ds$ приводим к двукратному интегралу.

1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах.

Пусть область *D* ограничена прямыми $x=a;\ x=b;\ (a<b)$ и графиками функций $y=g(x);\ y=h(x)$, причем обе функции непрерывны на отрезке $[a;b]$ и, $g(x) \le h(x)$ тогда

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx\,. \qquad (5)$$



В правой части равенства двукратный интеграл. Очевидно, что сначала нужно вычислить «внутренний интеграл» $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$. Рассматривая x как постоянную величину, получим функцию от x, затем эту функцию проинтегрировать по x в пределах от a до b. Если область D ограничена прямыми $y=a$; $y=b$ и графиками функций $x=g(y)$, $x=h(y)$, $g(y) \le h(y)$, то

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy . \qquad (6)$$

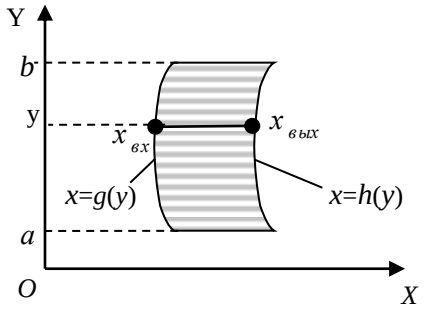


Рис. 3.2

При вычислении внутреннего интеграла в этом случае нужно считать y – постоянной величиной. Заметим, что границы «внешнего интеграла» всегда постоянны. Переход от формулы (5) к формуле (6) или от формулы (6) к формуле (5) называют изменением порядка интегрирования.

Если область D не удовлетворяет условиям формул (5) или (6), то ее разбивают на части.

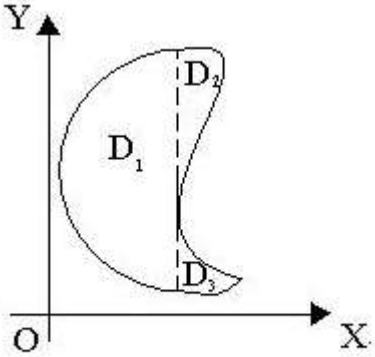


Рис. 3.3

2. Двойной интеграл в полярных координатах.

Чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам нужно:

1) Совместить прямоугольную и полярную системы координат так, чтобы начало прямоугольных координат совпадало с полюсом *0*, а ось *Ox* с полярной осью *0ρ*.

2) Заменить в подынтегральном выражении *x, y* и *ds* по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $ds=\rho d\varphi d\rho$ и получить:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds=\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho. \qquad (7)$$

3) По этим же формулам заменить *x* и *y* на ρ и φ в уравнении каждой границы области *D*, потом уравнения решить относительно ρ, получив уравнение вида $\rho=g(\varphi)$. Если в уравнении границы нет *ρ*, решить уравнение относительно *φ*, получить $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$.

4) Пусть область интегрирования *D* ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $(\alpha<\beta)$ и графиками функций $\rho=g(\varphi)$, $\rho=h(\varphi)$, $g(\varphi)\le h(\varphi)$.

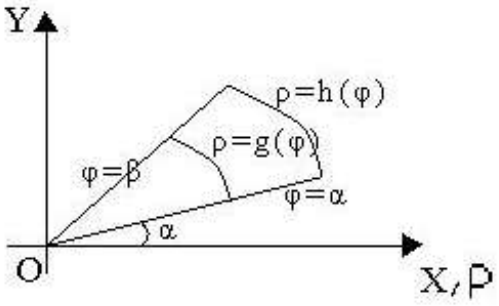


Рис. 3.4

Тогда

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\right)d\varphi. \qquad (8)$$

При вычислении «внутреннего» интеграла переменная φ временно считается постоянной. В частности, если полюс принадлежит границе области, получим

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_0^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\right)d\varphi. \qquad (8\ а)$$

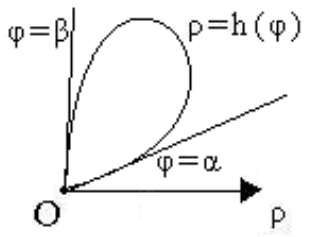


Рис. 3.5

Если полюс находится внутри области, получим:

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\right)d\varphi \qquad (8\ б)$$

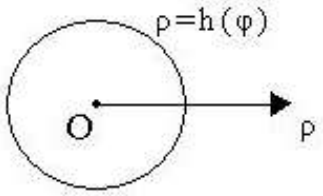


Рис. 3.6

3.4. Поверхностный интеграл первого рода

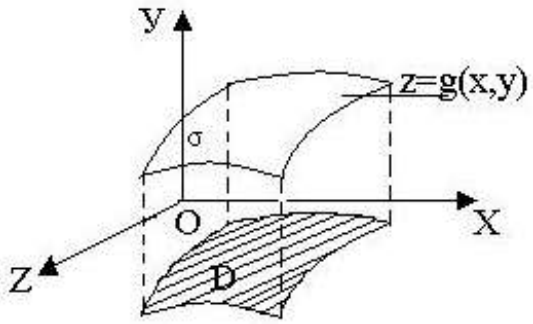


Рис. 3.7

Пусть поверхность σ задана уравнением $z=g(x,y)$. Чтобы вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma$, нужно:

1) Найти проекцию поверхности σ на координатную плоскость *xOy*, получить область *D*.

2) Заменить в подынтегральном выражении z и $d\sigma$ по формулам: $z = g(x, y), d\sigma = \sqrt{1 + \left(g'_x(x, y)\right)^2 + \left(g'_y(x, y)\right)^2}\, ds$, получить и вычислить двойной интеграл по области D (в плоскости xOy):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(g'_x(x, y)\right)^2 + \left(g'_y(x, y)\right)^2}\, ds. \qquad (9)$$

Если уравнение поверхности $x=g(y,z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость yOz. Если уравнение поверхности $y=g(x,z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость xOz.

3.5. Тройной интеграл

Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_{G} f(x, y, z)dv$ сводится к последовательному вычислению «внутреннего» определенного интеграла и «внешнего» двойного интеграла по области D – проекции области G на координатную плоскость.

Пусть в трехмерном пространстве $Oxyz$ область G ограничена сверху поверхностью $z=q(x,y)$, снизу – поверхностью $z=p(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz (эта граница может отсутствовать). Найдем D – проекцию области G на плоскость Oxy.

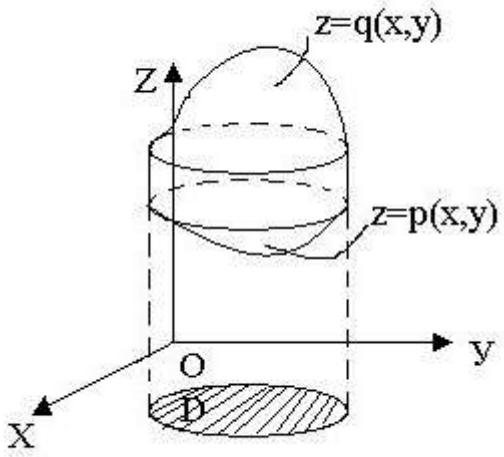


Рис. 3.8

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz \right) ds \ . \qquad (10)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл $\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz$, считая временно x и y постоянными величинами и получают функцию двух переменных x и y, потом от этой функции вычисляют «внешний» двойной интеграл, подобрав удобную для вычисления этого интеграла формулу. Иногда удобнее проецировать тело на плоскость Oxz или Oyz.

II. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью интегралов можно найти величину T, связанную с некоторой областью Q и обладающую двумя свойствами:

1) При разбиении области Q на элементарные части ΔQ_i величина T тоже разбивается на элементарные части ΔT_i, причем $T = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$. Такие величины называются аддитивными.

2) ΔT_i приблизительно пропорциональна мере ΔQ_i, т. е. $\Delta T_i \approx k \cdot \Delta Q_i$. Для каждого i коэффициент k постоянен и связан с ΔQ_i, т. е. $K=f(M_i)$, где $M_i \in \Delta Q_i$.

Тогда приближенные значения $T \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i$ и точное значение

$$T = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i = \int_Q f(M)dQ, \qquad \lambda = \max_i (diam\, \Delta Q_i).$$

Величину T, обладающую этими свойствами, можно найти проще, если взять элемент dQ области Q и найти формулу элемента dT величины T, т. е. получить $dT=f(M)dQ$, где $M \in dQ$. Тогда $T = \int_Q f(M)dQ$.

1. Длина дуги кривой

1) Если плоская кривая задана параметрически

$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta,$ то длина дуги

$$l = \int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,. \tag{11}$$

Для пространственной кривой $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \ \alpha \le t \le \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$

$$l = \int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt\,. \tag{11a}$$

2) Если плоская кривая – график функции $y=g(x)$, $a \le x \le b$, то

$$l = \int_L dl = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx\,. \tag{11$б$}$$

2. Площадь плоской области

$$S = \iint_D dS\,. \tag{12}$$

В прямоугольных координатах

$$S = \iint_D dx dy\,. \tag{12а}$$

В полярных координатах

$$S = \iint_D \rho d\varphi d\rho\,. \tag{12б}$$

3. Площадь поверхности

$$S = \iint_\sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(g_x'(x,y)\right)^2 + \left(g_y'(x,y)\right)^2}\, ds\,, \text{ где } \underset{oxy}{D = up\sigma}\,. \tag{13}$$

4. Объем тела

1. $V = \iiint_G dV\,.$ (14)

2. Объем цилиндрического тела с основанием на координатной плоскости *xOy*, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, можно вычислить с помощью двойного интеграла.

$$V = \iint_D g(x, y)ds\,. \qquad (14а)$$

5. Масса, распределенная в заданной области

Говорят, что масса непрерывно распределена в области *Q*, если каждой мысленно выделенной части ΔQ этой области соответствует значение массы Δm. При этом масса отдельно взятой точки равна нулю.

Пусть точка $M \in \Delta Q \subset Q$. Плотностью распределения массы в точке *M* области *Q* называют величину δ:

$$\delta = \lim_{\operatorname{diam}(\Delta Q)\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta Q}\quad , \qquad (15)$$

причем ΔQ все время содержит точку *M*.

Если масса распределена на дуге кривой, получаем линейную плотность, на поверхности – поверхностную плотность, в трехмерной области – плотность. Так как масса распределена неравномерно, то плотность в точке является функцией точки $\delta=\delta(M)$.

Из определения плотности массы (15) следует, что элемент массы равен $\Delta m \approx \delta \cdot \Delta Q$ или $dm=\delta dQ$, тогда масса, распределенная в области *Q* с плотностью $\delta=\delta(M)$:

$$m = \int_Q \delta dQ = \int_Q \delta(M)dQ\,. \qquad (16)$$

Аналогично вводят понятие плотности заряда в диэлектрике, плотности энергии электромагнитного поля и др. Все эти величины находят по формуле (16). Так, если электрический заряд *q* распределен в области *Q* с плотностью заряда $\lambda=\lambda(M)$, то

$$q = \int_Q \lambda(M)dQ\,. \qquad (17)$$

Частные случаи распределения массы:

а) масса, распределенная с плотностью δ на дуге L кривой.

$$m = \int_L \delta(x, y)dl \text{ - для плоской кривой;}$$

$$m = \int_L \delta(x, y, z)dl \text{ - для пространственной кривой;} \qquad (16а)$$

б) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по области D:

$$m = \iint_D \delta(x, y)ds; \qquad (16б)$$

в) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по части σ кривой поверхности:

$$m = \iint_\sigma \delta(x, y, z)d\sigma; \qquad (16в)$$

г) масса, распределенная с плотностью δ в трехмерной области G:

$$m = \iiint_G \delta(x, y, z)dv. \qquad (16г)$$

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Понятие поля

Если с каждой точкой $M \in G$ связано определенное значение величины U, то говорят, что в области G задано поле величины U.

Поле называется скалярным, если U – скаляр (температура, плотность, электрический потенциал и др.) и векторным, если U – вектор (сила, скорость, напряженность и др.).

Поле называется стационарным (установившимся), если оно не меняется с течением времени.

Поле не зависит от системы координат, введенной в области G. Рассмотрим прямоугольную систему координат, тогда задание скалярного поля равносильно заданию в области G скалярной функции $U=f(x,y,z)$ или $U=f(x,y)$, если G – область в плоскости xOy. Задание векторного поля равносильно заданию в каждой точке $M(x, y, z) \in G$ векторной функции

$$\vec{U}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Свойства скалярного поля, его линий уровня, производной по направлению и градиента рассматривались в разделе «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

В этом разделе рассмотрим свойства стационарного векторного поля. В дальнейшем функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их производные считаем непрерывными в области G.

2. Векторные линии

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке M которой вектор $\vec{U}(M)$ направлен по касательной к линии.

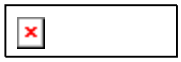
Мы не рассматриваем, как найти векторные линии.

Если $\vec{U}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и в каждой точке поля функции P, Q, R одновременно не обращаются в нуль и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка, то через каждую точку поля проходит единственная векторная линия, т. е. вся область G заполнена векторными линиями. По виду векторных линий получают информацию о структуре поля. Если $\vec{U}(M)$ - стационарное поле текущей жидкости, то векторные линии являются траекториями частиц жидкости и называются линиями тока. Если $\vec{U}(M)$ - вектор силы, то векторные линии называются силовыми линиями и т. д. Множество всех векторных линий, проходящих через точки поверхности σ, образует векторную трубку.

3. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура

Пусть в каждой точке плоскости xOy (или области D) определен вектор силы $\vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$ образующий векторное поле. И пусть материальная точка *(m=1)* перемещается в этом поле по гладкой кривой L из начала в конец дуги L. При перемещении материальной точки сила $\vec{F}$ производит работу A.

Возьмем на дуге L произвольную точку M. При бесконечно малом перемещении  из точки M по дуге кривой силу можно считать постоянной и равной $\vec{F}(M)$, поэтому соответствующая элементарная работа равна скалярному произведению $dA = \vec{F}(M) \cdot d\vec{r} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Суммируя элементарные работы, получаем общую работу, производимую силой $\vec{F}$, когда материальная точка проходит путь L:

$$A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (18)$$

Полученный интеграл от векторной функции $\vec{F}(M)$ по кривой L называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам. Чтобы вычислить интеграл, нужно задать поле $\vec{F}(M)$, уравнение дуги кривой L и указать направление движения по кривой L (начало и конец пути).

Для вычисления интеграла $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнения кривой через одну переменную и ее дифференциал. Находят интервал изменения выбранной переменной на дуге L и вычисляют полученный определенный интеграл.

Если L задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ и t изменяется от α до β

(α соответствует началу пути интегрирования, β – концу), то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt). \qquad (18а)$$

Если L – график функции $y=f(x)$ и x изменяется от a до b, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx. \qquad (18б)$$

При изменении направления движения по L интеграл изменяет только знак (другие свойства интеграла в разделе I). Если поле $\vec{F}(M)$ и L заданы в трехмерном пространстве, получим:

$$A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,, \qquad (19)$$

который вычисляется по тому же правилу.

Если $\vec{U}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - произвольное векторное поле, а L – замкнутый контур, то интеграл

$$\oint_L \vec{U}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (20)$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{U}(M)$ или циркуляцией вектора $\vec{U}(M)$ вдоль замкнутого контура L.

Циркуляция вектора – величина скалярная, положительная, отрицательная или равная нулю.

4. Поток вектора через поверхность

4.1. Вектор площадки

Двусторонняя поверхность в пространстве называется ориентированной, если указано, какая ее сторона считается наружной, а какая внутренней. Можно рассматривать разные способы ориентации, например:

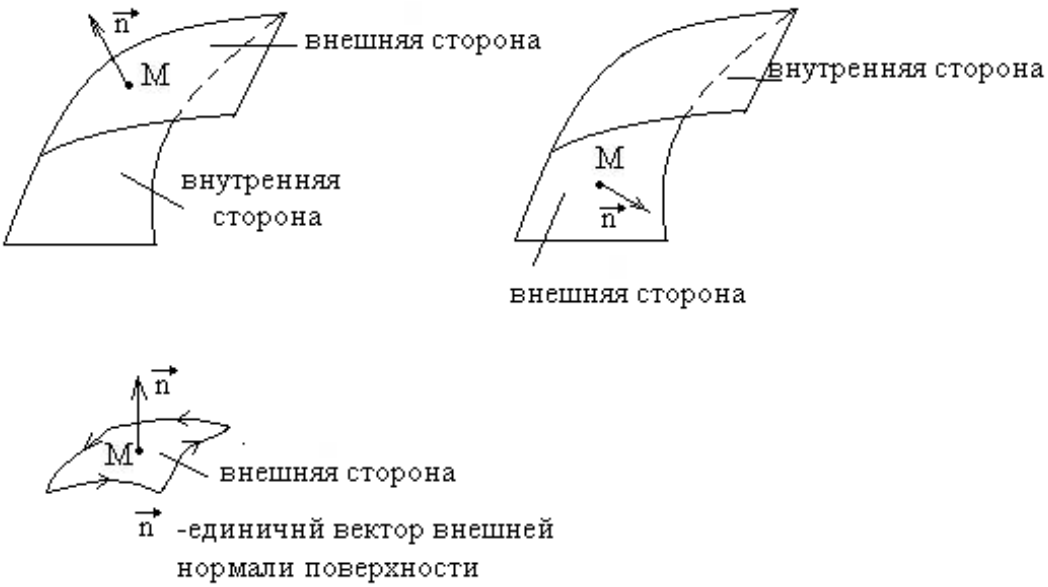


Рис. 4.1

Часто при рассмотрении элементарной части, содержащей точку M ориентированной поверхности, важна только площадь этой части, а ее форма (круг, прямоугольник и т. д.) не играет никакой роли. Тогда эту часть поверхности изображают нормальным вектором поверхности, направленным от внутренней стороны поверхности к внешней, модуль, которого равен площади этой элементарной части поверхности.

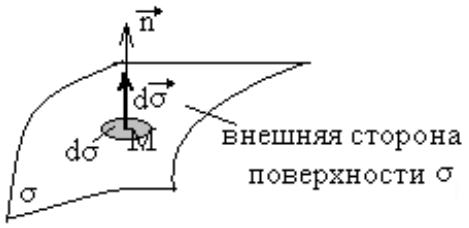


Рис. 4.2

Такой вектор называют вектором площадки (или векторной площадью площадки) в точке M. Если площадь выбранной площадки равна $d\sigma$, то вектор обозначают $d\vec{\sigma}$. Если найден единичный вектор внешней нормали поверхности $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то вектор площадки

$$d\bar{\sigma} = \bar{n} \cdot d\sigma = \left(\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma\right)d\sigma. \qquad (21)$$

В частности, dl - вектор кривой в точке M направлен по нормали к кривой в выбранную сторону, причем модуль вектора равен дифференциалу длины дуги кривой $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Так как вектор $\vec{dr} = (dx, dy)$ направлен по касательной к кривой и в точке $M(x,y)$ и модуль $\left|\vec{dr}\right| = dl$, то вектор кривой $\vec{dl}$ можно взять равным $\vec{dl} = (dy, -dx)$ или $\vec{dl} = (-dy, dx)$, потому что в этом случае скалярное произведение $\left(\vec{dr}, \vec{dl}\right) = 0$, значит $\vec{dl} \perp \vec{dr}$, т. е. $\vec{dl}$ направлен по нормали к кривой L и $\left|\vec{dl}\right| = \sqrt{(\pm dy)^2 + (\mp dx)^2} = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dl$.

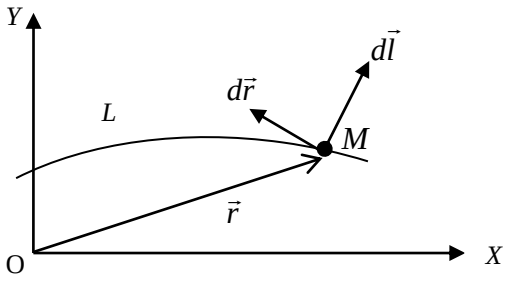


Рис. 4.3

4.2. Понятие потока вектора через поверхность

Пусть в области G задано векторное поле $\vec{U}(M)$ и ориентированная гладкая поверхность σ. Потоком векторного поля $\vec{U}(M)$ через поверхность σ называют скалярную величину, равную поверхностному интегралу

$$\Pi_\sigma(U) = \iint\limits_\sigma (u \cdot n)\, d\sigma = \iint\limits_\sigma u \cdot d\vec{\sigma}. \qquad (22)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали; $d\vec{\sigma}$ - вектор элементарной площадки поверхности σ.

Если ориентацию поверхности изменить на противоположную, то поток изменит только знак.

Часто поток рассматривают как «количество векторных линий», пересекающих поверхность изнутри наружу. «Количество» (в кавычках, так как число не целое) понимают в алгебраическом смысле, т. е., если одна часть σ пересекается векторными линиями изнутри наружу, а другая часть – снаружи внутрь, то «количество» может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

4.3. Гидродинамический смысл потока вектора через поверхность

Поток жидкости через поверхность

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости (или газа) в области G. В любой точке $M \in G$ скорость частицы жидкости имеет определённое значение $\vec{V} = \vec{V}(M)$, т. е. в области G задано векторное поле скоростей. Поме-

стим в область G гладкую ориентированную поверхность σ и найдем объем жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени изнутри наружу. Возьмем на поверхности σ элемент $d\sigma$, содержащий точку M и найдем элемент объема жидкости, протекающей через $d\sigma$ изнутри наружу за единицу времени. Он равен объему косого цилиндра с основанием $d\sigma$ и образующей $\left|\vec{V}(M)\right|$.

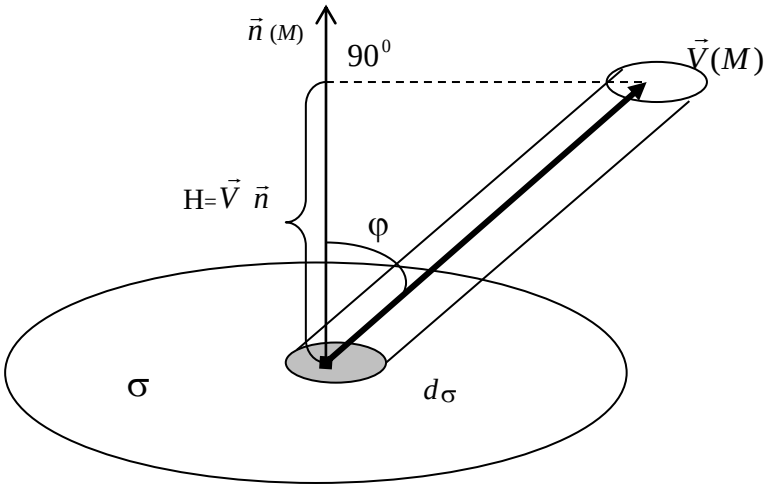


Рис. 4.4

Высота цилиндра равна проекции вектора скорости $\vec{V}(M)$ на единичный вектор внешней нормали $\vec{n}(M)$, т. е. $H = \left|V\right|\cos\varphi = \left|V\right|\cdot\left|n\right|\cos\varphi = V\cdot n$ – скалярному произведению векторов.

Тогда объем цилиндра равен $dV = Hd\sigma = \left(V\cdot n\right)\cdot d\sigma = V\cdot(n\cdot d\sigma) = V\cdot d\sigma$, т. е. элементарный объем жидкости равен скалярному произведению вектора скорости $\vec{V}(M)$ на вектор площадки $d\sigma$. Суммируя элементарные объемы жидкости для всех элементов поверхности σ, получим, что за единицу времени через всю поверхность σ изнутри наружу проходит объем жидкости, равный поверхностному интегралу

$$\iint\limits_{\sigma}(\vec{v}\cdot\vec{n})d\sigma = \iint\limits_{\sigma}\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds} = \Pi_{\sigma}(\vec{v}),$$

т. е. равный потоку вектора $\vec{V}$ через поверхность σ.

4.4. Поток вектора через плоскую кривую *L*

Пусть на плоскости *xOy* задано векторное поле $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ и ориентированная дуга L гладкой кривой. Возьмем нормальный вектор кривой $\vec{dl} = (-dy, dx)$, составляющий острый угол с *Oy* при возрастании *x* вдоль кривой и будем считать это направление внешней нормалью. Скалярное произведение

$\vec{U} \cdot \vec{dl} = P(x,y)(-dy) + Q(x,y)(dx) = Q(x,y)dx - P(x,y)dy$, тогда

$\Pi_L(\vec{U}) = \int_L \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ - поток вектора $\vec{U}$ через плоскую кривую L.

4.5. Свойства и вычисление потока вектора через поверхность

Свойства

1) Если изменить ориентацию поверхности, то поток изменит только знак

$$\Pi_{\sigma_+}(u) = -\Pi_{\sigma_-}(u),$$

где σ_+ и σ_- - разные стороны поверхности σ.

2) Если поверхность σ состоит из частей σ_1 и σ_2, то

$$\Pi_{\sigma}(u) = \Pi_{\sigma_1}(u) + \Pi_{\sigma_2}(u).$$

3) Если $\vec{u} = c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2}$,

то

$\Pi_{\sigma}(u) = C_1\Pi_{\sigma}(u_1) + C_2\Pi_{\sigma}(u_2)$ - свойство линейности потока.

Вычисление потока

Первый способ:

1. Найти проекцию поверхности σ на плоскость *xOy* – получить область *D*.

2. Найти единичный нормальный вектор поверхности σ. Для этого записать уравнение поверхности в виде $F(x, y, z)=0$. Найти $\text{grad}F = F'_x i + F'_y j + F'_z k$. Найти $\left|\text{grad}F\right| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$. Так как $\text{grad}F$ направлен по нормали к поверхности σ, то единичный вектор нормали

$$n = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \pm \frac{F'_x i + F'_y j + F'_z k}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Знак + или – выбираем в зависимости от заданной стороны поверхности.

3. Найти $d\sigma$.

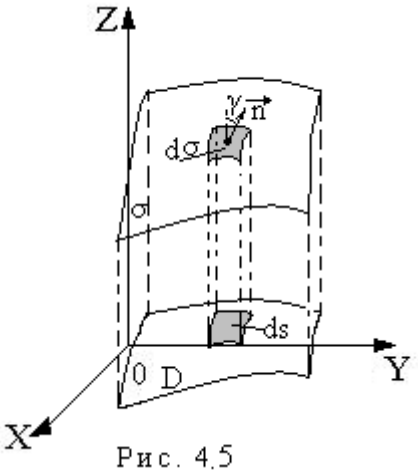


Рис. 4.5

Угол между $\vec{n}$ и осью Oz равен γ. Если считать, что в пределах площадки $d\sigma$ направление $\vec{n}$ не меняется, то угол наклона площадки $d\sigma$ к плоскости xOy (площадке ds) тоже равен γ, тогда площади этих площадок связаны соотношением

$$ds = \cos\gamma \cdot d\sigma \quad \text{и} \quad d\sigma = \frac{ds}{\cos\gamma}.$$

Вектор $n = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$,

поэтому $$\cos\gamma = \pm \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Тогда $$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} ds.$$

4. Уравнение поверхности σ записать в виде $z=z(x,y)$.

5. Вычислить $\Pi_\sigma(\bar{u}) = \iint\limits_\sigma (\bar{u} \cdot n) d\sigma = \iint\limits_D \left(\frac{u \cdot n}{|\cos\gamma|}\Big|_{z=z(x,y)} \right) \cdot ds$, подставив все найденные величины в двойной интеграл по области D и вычислив полученный интеграл.

Замечание

В случае замкнутой поверхности σ, $\vec{n}$ - вектор внешней нормали.

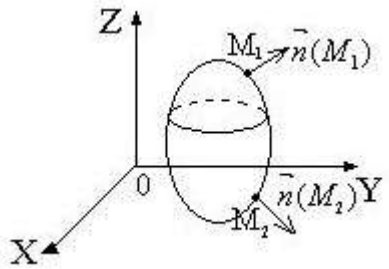


Рис. 4.6

Второй способ:

Пусть $\bar{u} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$

$$\bar{n} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$

$$\bar{u}\cdot\bar{n} = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma$$

Элемент площади ds в плоскости xOy равен $dxdy$, в плоскости xOz - $dxdz$ и в плоскости yOz - $dydz$.

Мы показали, что при проецировании поверхности σ на плоскость xOy $ds = \cos\gamma \cdot d\sigma$, т. е. $\cos\gamma d\sigma = dxdy$. (Смотри пункт 3 первого способа вычисления потока).

Тогда при проецировании поверхности σ на плоскость xOz $\cos\beta d\sigma = dxdz$, а на плоскость yOz $\cos\alpha d\sigma = dydz$.

Поток вектора $\vec{u}$ через поверхность σ равен

$$\Pi_\sigma(u) = \iint_\sigma \bar{u}\cdot\bar{n}d\sigma = \iint_\sigma \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma = \\ = \iint_\sigma \left(P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\right). \qquad (23)$$

Полученный интеграл

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\ .$$

называется поверхностным интегралом второго типа (по координатам).

Предположим, что уравнение поверхности σ можно решить относительно всех переменных

$$\sigma : \Phi(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi(y,z) \\ y = \psi(x,z) \\ z = \eta(x,y) \end{array}\right.$$

Обозначим проекцию поверхности σ на плоскость xOy через σ_{xy}, на плоскость xOz через σ_{xz} и на плоскость yOz через σ_{yz}. Тогда поверхностный интеграл второго типа приводится к сумме двойных интегралов:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_{\sigma_{yz}} P(\varphi(y,z),y,z)dydz + \\ + \iint_{\sigma_{xz}} Q(x,\psi(x,z),z)dxdz + \iint_{\sigma_{xy}} R(x,y,\eta(x,y))dxdy. \qquad (24)$$

Замечание

Поток вектора $\vec{u}(M)$ через кривую L равен криволинейному интегралу по координатам

$$\Pi_L(\vec{u}) = \int_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy\,. \qquad (25)$$

5. Оператор Гамильтона «набла»

Английский математик Гамильтон (1805-1865) ввел векторно-дифференциальный оператор $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, называемый «набла» (по-гречески – арфа, форму которой напоминает значок ∇). Набла действует только на множитель, который стоит непосредственно за ним. Если $u=f(x, y, z)$ скалярная функция (скалярное поле), то произведение вектора ∇ на скаляр u:

$$\nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = gradu \text{ - вектор.}$$

Если $\vec{u} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ - векторная функция (векторное поле), то скалярное произведение вектора ∇ на вектор $\vec{u}$ равно сумме произведений одноименных координат векторов $\nabla\vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ - скаляр, а векторное произведение ∇ на $\vec{u}$:

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \text{ - вектор.}$$

С помощью ∇ проще записать некоторые понятия, связанные с полями, и операции над ними.

6. Дивергенция векторного поля

Пусть в трехмерном пространстве (или в области G) определено векторное поле $\vec{U}(M)$. Возьмем произвольную точку M и окружим замкнутой поверхно-

стью σ. Вычислим поток $\Pi_\sigma(\vec{U})$ векторного поля через поверхность σ. Найдем объем v области, ограниченной σ. Дивергенцией (расходимостью) $div\vec{U}(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M называется предел отношения потока $\Pi_\sigma(\vec{U})$ векторного поля через замкнутую поверхность σ к объему области, ограниченной σ, вычисленный при условии, что поверхность σ стягивается в точку M:

$$div\vec{U}(M) = \lim_{\substack{v\to 0 \\ (\sigma\to M)}} \frac{\Pi_\sigma(U)}{V} = \lim_{\substack{v\to 0 \\ (\sigma\to M)}} \frac{1}{v}\iint_\sigma u\cdot d\sigma\cdot \qquad (26)$$

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$ и

$$\vec{U}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

то

$$div\vec{U}(M) = \nabla\vec{U} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$$

пишут

$$div\vec{U}(M) = \nabla\vec{U} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot \qquad (27)$$

Ранее мы говорили, что все эти частные производные существуют. Используя гидродинамическую интерпретацию, считаем поле $\vec{U}(M)$ стационарным полем скоростей несжимаемой текущей жидкости. Это течение может быть обусловлено наличием источников – точек, производящих жидкость, и стоков – точек, поглощающих жидкость. Величина $\Pi_\sigma(U)$ дает объем жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны σ на внешнюю. Но эта величина равна количеству жидкости, вырабатываемой всеми источниками, находящимися в области, ограниченной σ, т. е. равна суммарной мощности всех источников внутри σ. Тогда предел отношения мощности источников в области к объему области, найденный при условии, что область стягивается (сжимается) в точку M, равен плотности мощности источников жидкости в этой точке.

Итак, в гидродинамической интерпретации дивергенция $div\vec{U}(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M – это плотность мощности источников жидкости в этой точке.

Есть и другие интерпретации. Так, в электрическом векторном поле напряженности, созданном электрическими зарядами, распределенными в пространстве, дивергенция вектора напряженности является плотностью распределения электрических зарядов в данной точке поля.

7. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть в пространстве (или в области G) определена прямоугольная система координат и задано векторное поле:

$$\vec{u}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

Ротором $rot\vec{u}(M)$ поля $\vec{u}$ в точке M называют вектор

$$rot\vec{u}(M) = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (28)$$

Этот вектор характеризует завихренность поля в точке M (тенденцию к вращению). Проведем через точку M плоскость Г, ее ориентацию в пространстве зададим единичным нормальным вектором $\vec{n}$ в точке M.

В плоскости Г возьмем замкнутую кривую L, обходящую точку M, и выберем направление обхода L таким, чтобы с конца $\vec{n}$ обход казался происходящим против движения часовой стрелки.

Обозначим площадь, ограниченную контуром L, через ΔS. Найдем циркуляцию векторного поля $\vec{u}(M)$ вдоль контура L : $Ц_L(\vec{u}) = \oint_L \vec{u}\cdot\vec{dr}$.

Доказывается, что проекция ротора поля $\vec{u}(M)$ в точке M на вектор $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции поля по контуру L к площади ΔS, ограниченной контуром, при условии, что контур L стягивается в точку M, а $\Delta S \to 0$.

$$np_n\left(rot\vec{u}(M)\right) = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ (L \to M)}} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \vec{u}\cdot\vec{dr} \qquad (29)$$

8. Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{U}(M)$, заданное в односвязной области G, называется потенциальным, если существует такая скалярная функция $f(M)$, что во всех точках $M \in G$ вектор

$$\vec{U}(M) = \text{grad} f(M) \tag{30}$$

В этом случае функция $f(M)=f(x, y, z)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{U}(M)$. (Для силовых полей $f(M)$ называется силовой функцией, потенциалом называется $(-1)f(M)=-f(M)$.

Теорема **(признак потенциального поля)**

Для того чтобы векторное поле $\vec{U}(M)$ было потенциальным в односвязной области G, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке M этой области $rot\vec{U}(M) = 0$.

Необходимость можно формально рассмотреть: $rot\vec{U}(M) = rot(gradf) = \nabla \times (\nabla f)$. «Векторы» ∇ и ∇f коллинеарны, следовательно, их векторное произведение равно нулю:

$$rot\vec{U} = 0 \tag{31}$$

Пусть $\vec{U}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$,

$$rot\vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Получим, что поле $\vec{U}(M)$ является потенциальным в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{32}$$

8.1. Плоское потенциальное поле

Если поле плоское, т. е. $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

$$rot\vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \qquad (33)$$

- поле называется потенциальным при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

В этом случае $\vec{U} = gradf(x,y) = f'_x(x,y)\vec{i} + f'_y(x,y)\vec{j}$, т.е. $P(x,y) = f'_x(x,y),\ Q(x,y) = f'_y(x,y)$ и

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx = \int_{AB} f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dx = \int_{AB} df(x,y) = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

для всех дуг, натянутых между точками A и B.

Получили, что при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Работа силы $\vec{U} = \vec{F}$ не зависит от пути, по которому движется точка. Тогда криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру в заданной области равен нулю:

$$\int_L P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = 0, \qquad (34)$$

т. е. циркуляция поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю $Ц_L\left(\vec{U}\right) = 0$.

Потенциал плоского поля $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ находят по формуле

$$f(x,y) + c = \int_{\overset{\cup}{M_0 M}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (35)$$

где $M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$ взяты произвольно. Удобнее всего за дугу $\overset{\cup}{M_0 M}$ брать двузвенную ломаную линию, звенья которой параллельны осям координат, так как на вертикальном звене $dx = 0$, а на горизонтальном $dy = 0$.

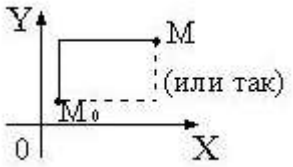


Рис. 8.1

$$f(x,y)+c=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx \qquad (36)$$

$$f(x,y)+c=\int_{x_0}^{x} P\left(x,y_0\right)dx+\int_{y_0}^{y} Q\left(x,y_0\right)dx$$

IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычисление и применение двойного интеграла

При решении этих задач используйте следующую схему:

1) сделать чертеж;
2) выбрать подходящие формулы (по условию задачи и по чертежу);
3) найти все элементы выбранных формул;
4) вычислить получившийся повторный интеграл.

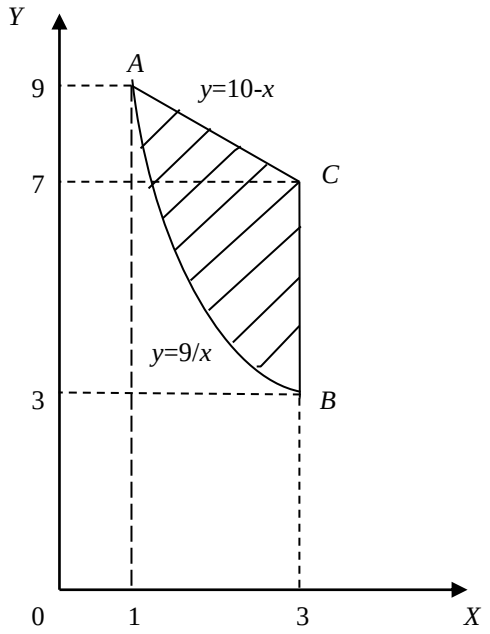
Пример 1

Вычислить $\iint\limits_D (2x+y)dS,$ если D: $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \dfrac{9}{x} \le y \le 10-x \end{cases}$

Изменить порядок интегрирования в полученном повторном интеграле и еще раз вычислить интеграл

Решение

Построим чертеж:



Уравнения границ области $D: x=1, x=3, y=\frac{9}{x}, y=10-x$ (каждое неравенство, задающее *D*, превращаем в уравнение).

Для вычисления выберем формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Найдем элементы формулы.

Так как область расположена между прямыми $x = 1$ и $x = 3$, то $a = 1$, $b = 3$. Нижняя граница области – дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана уравнением $y=\frac{9}{x}$, следовательно, $g(x)=\frac{9}{x}$. Верхняя граница – прямая *AC* задана уравнением $y = 10 - x$, следовательно, $h(x) = 10 - x$. Получим повторный интеграл.

$$\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} (2x+y)dy \right) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая x – постоянной.

$$\int_{\frac{9}{x}}^{10-x}(2x+y)dy=\int_{\frac{9}{x}}^{10-x}2xdy+\int_{\frac{9}{x}}^{10-x}ydy=2x\int_{\frac{9}{x}}^{10-x}dy+\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{9}{x}}^{10-x}=2xy\Big|_{\frac{9}{x}}^{10-x}+\frac{1}{2}(10-x)^2-\frac{81}{2x^2}=$$

$$2x(10-x)-2x\cdot\frac{9}{x}+\frac{1}{2}(10-x)^2-\frac{81}{2x^2}=20x-2x^2-18+50-10x+\frac{1}{2}x^2-\frac{81}{2x^2}=$$

$$=10x-\frac{3}{2}x^2+32-\frac{81}{2x^2}$$

От полученной функции вычислим внешний интеграл

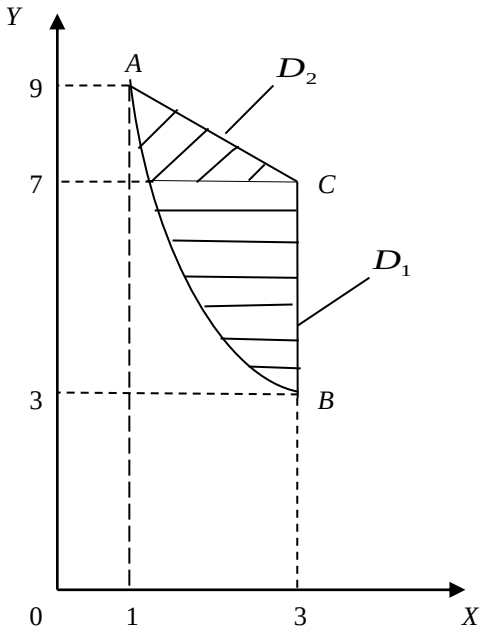
$$\iint_D(2x+y)dS=\int_1^3\left(10x-\frac{3}{2}x^2+32-\frac{81}{2x^2}\right)dx=\left(5x^2-\frac{x^3}{2}+32x+\frac{81}{2x}\right)\Bigg|_1^3=\left(45-\frac{27}{2}+96+\frac{27}{2}\right)-$$

$$-\left(5-\frac{1}{2}+32+\frac{81}{2}\right)=64.$$

Изменить порядок интегрирования в данном случае означает, что внутренний интеграл нужно взять по x, а внешний по y и для вычисления интеграла выбрать формулу:

$$\iint_D f(x,y)dS=\int_a^b\left(\int_{g(y)}^{h(y)}f(x,y)dx\right)dy.$$

Выполним чертеж еще раз:



Найдем координаты точек A, B и C:

$$A:\begin{cases} y=\dfrac{9}{x} \\ y=10-x \end{cases}, A(1;9), \quad B:\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{9}{x} \end{cases}, B(3;3), \quad C:\begin{cases} x=3 \\ y=10-x \end{cases}, C(3;7).$$

Правая граница области D состоит из отрезков BC и AC различных прямых, следовательно, область D нужно разбить на две части - D_1 и D_2, тогда $\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_{D_1} (2x+y)dS + \iint\limits_{D_2} (2x+y)dS$. Уравнения границ нужно решить относительно x. Левая граница обеих частей – дуга $\overset{\cup}{AB}$: $y=\dfrac{9}{x} \Rightarrow x=\dfrac{9}{y}$. Правая граница области D_1 - отрезок BC: $x = 3$. Правая граница области D_2 - отрезок AC: $y=10-x \Rightarrow x=10-y$. Область D_1 расположена между прямыми $y = 3$ и $y = 7$. Внутри области D_1 x изменяется от границы $x=\dfrac{9}{y}$ до границы $x = 3$. Получим $\iint\limits_{D_1} (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^3 (2x+y)dx)dy$. Область D_2 расположена между прямыми $y=7$ и $y=9$. Внутри области D_2 x изменяется от границы $x=\dfrac{9}{y}$ до границы $x = 10 - y$.

Получим:

$$\iint\limits_{D_2} (2x+y)dS = \int\limits_7^9 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x+y)dx)dy.$$

Следовательно:

$$\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^3 (2x+y)dx)dy + \int\limits_7^9 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x+y)dx)dy$$ -

порядок интегрирования изменен.

Вычислим:

$$\iint\limits_{D_1} (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^3 (2x+y)dx)dy.$$

Внутренний интеграл вычисляем, считая y постоянной.

$$\int_{\frac{9}{y}}^{3}(2x+y)dx=\int_{\frac{9}{y}}^{3}2xdx+\int_{\frac{9}{y}}^{3}ydx=2\int_{\frac{9}{y}}^{3}xdx+y\int_{\frac{9}{y}}^{3}dx=x^2\Big|_{\frac{9}{y}}^{3}+yx\Big|_{\frac{9}{y}}^{3}=3y-\frac{81}{y^2},$$

Тогда $$\iint_{D_1}(2x+y)ds=\int_3^7(3y-\frac{81}{y^2})dy=(\frac{3y^2}{2}+\frac{81}{y})\Big|_3^7=\frac{312}{7}.$$

Вычислим:

$$\iint_{D_2}(2x+y)dS=\int_7^9(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y}(2x+y)dx)dy=\int_7^9(x^2+xy)\Big|_{\frac{9}{y}}^{10-y}dy=\int_7^9((10-y)^2+(10-y)y-\frac{81}{y^2}-9)dy=$$

$$=\int_7^9(91-10y-\frac{81}{y^2})dy=(91y-5y^2+\frac{81}{y})\Big|_7^9=\frac{136}{7}.$$

Следовательно:

$$\iint_D(2x+y)dS=\frac{312}{7}+\frac{136}{7}=\frac{448}{7}=64.$$

Мы убедились, что в данном случае проще вычислить внутренний интеграл по y, а внешний по x.

Ответ:

$$\iint_D(2x+y)dS=\int_1^3(\int_{\frac{9}{x}}^{10-x}(2x+y)dy)dx=\int_3^7(\int_{\frac{9}{y}}^{3}(2x+y)dx)dy+\int_7^9(\int_{\frac{9}{y}}^{10-y}(2x+y)dx)dy=64.$$

Пример 2

Найти статические моменты относительно осей координат однородной фигуры: ограниченной линиями $4x^2+y^2=4$, $2x+y=2$ и расположенной в первой четверти, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

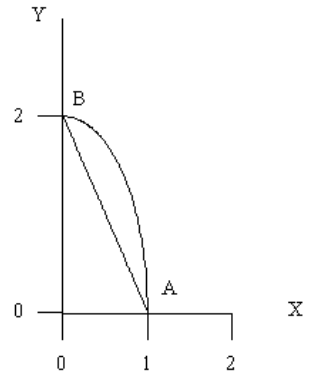
Решение

Выполним чертеж.

Линия $4x^2 + y^2 = 4$ - эллипс

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$2x + y = 2$ – прямая.



При построении получили точки пересечения линий A (1;0), B (0;2). По условию задачи выберем формулы вычисления статических моментов плоской области:

$$M_x = \iint_D y dS, \quad M_y = \iint_D x ds.$$

При вычислении M_x внутренний интеграл удобнее брать по y, а при вычислении M_y по x, так как в этом случае внешние интегралы получаются более простыми (проверьте это). Используем обе формулы вычисления двойного интеграла, а значит, уравнения границ области нужно решить и относительно y и относительно x.

Отрезок прямой $2x + y = 2 \Rightarrow y = 2(1 - x)$ или $x = \frac{1}{2}(2 - y).$

Дуга эллипса $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{1 - x^2}$ или $x = \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$.

$$M_x = \iint_D y ds = \int_0^1 \left(\int_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2\int_0^1 (1 - x^2 - (1-x)^2) dx =$$

$$= 2\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2\left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$M_y = \iint_D x dz = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} x dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (4 - y^2 - (2-y)^2) dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (4y - 2y^2) dy = \frac{1}{8}\left(2y^2 - \frac{2y^3}{3} \right)_0^2 = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

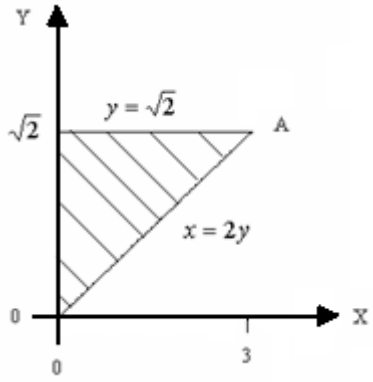
Ответ: $M_x = \frac{2}{3}; M_y = \frac{1}{3}.$

Пример 3

Найти момент инерции относительно оси О*x* фигуры, ограниченной линиями $x=0, y=\sqrt{2}, y=\frac{x}{2},$ если поверхностная плотность массы $\delta = \exp\left(-\frac{xy}{2}\right) = e^{-\frac{xy}{2}}$.

Решение

Выполним чертеж:



По условию задачи выберем формулу момента инерции:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \delta(x,y)ds = \iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}} ds\,.$$

Область *D* удобна для вычисления повторного интеграла при любом порядке интегрирования. Подынтегральная функция по x интегрируется значительно легче, чем по y , поэтому возьмем внутренний интеграл по x , а внешний по y.

Решим уравнения границ относительно x. Левая граница: $x=0$ (задана). Правая граница: $y=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y$.

Область *D* расположена между прямыми $y=0$ и $y=\sqrt{2}.$ Внутри области x изменяется от границы $x=0$ до границы $x=2y,$ значит:

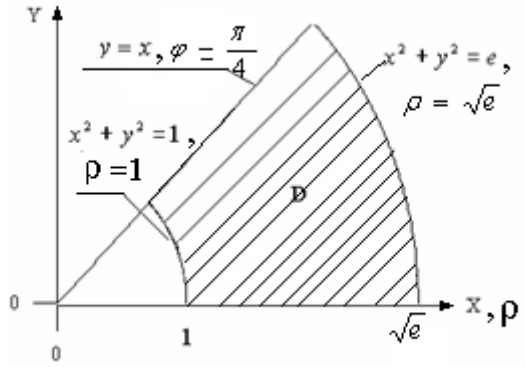
$$J_x = \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{2y} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx\right)dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(y^2\int\limits_0^{2y} e^{-\frac{xy}{2}} dx\right)dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}}(-y^2\cdot\frac{2}{y}e^{-\frac{xy}{2}}\Big|_0^{2y})dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}}(-2ye^{-y^2}+2y)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} d(-y^2) + y^2\Big|_0^{\sqrt{2}} = e^{-y^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 2 = e^{-2} - 1 + 2 = e^{-2} + 1.$$

Ответ: $I_x = 1 + e^{-2}.$

Пример 4

Вычислить $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)ds$, если $D: \begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le e \\ 0 \le y \le x \end{cases}$.



Решение

Построим область *D*. Границы области: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = e$ - окружности радиусов *1* и $\sqrt{e}$ с центром в начале координат *y = 0, y = x* – прямые.

Так как. область интегрирования – часть кольца, перейдем к полярным координатам. В подынтегральном выражении заменим *x, y* и *ds* по формулам:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $ds = \rho d\varphi d\rho$.

Предварительно заменим

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2.$$

Тогда $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)ds = \iint\limits_D \ln\rho^2 \cdot \rho d\varphi d\rho = 2\iint\limits_D \rho\ln\rho d\varphi d\rho$

запишем в полярных координатах уравнения границ области

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1,\ \rho = 1$$
$$x^2 + y^2 = e \Rightarrow \rho^2 = e,\ \rho = \sqrt{e}$$
$$y = 0 \Rightarrow \rho\sin\varphi = 0,\ \rho \neq 0,\ \sin\varphi = 0,\ \varphi = 0$$
$$y = x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi,\ tg\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

В полярных координатах внешний интеграл всегда берем по φ, а внутренний -по ρ. Область расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Внутри

области ρ изменяется от границы $\rho = 1$ до границы $\rho = \sqrt{e}$.Следовательно, по формуле

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho) \right) d\varphi$$

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho\ln\rho d\rho) d\varphi \cdot$$

Внутренний интеграл вычислим, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

$$\int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho\ln\rho d\rho = \left| \begin{array}{c} u = \ln\rho, dv = \rho d\rho \\ v = \int \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \\ du = (\ln\rho)' d\rho = \frac{d\rho}{\rho} \end{array} \right| = \frac{\rho^2}{2}\ln\rho\Big|_1^{\sqrt{e}} - \int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{d\rho}{\rho} = \frac{e}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho d\rho = \frac{e}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Тогда $J = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot\frac{1}{4} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$

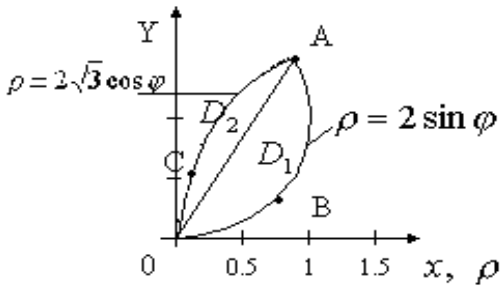
Ответ: $I = \frac{\pi}{8}.$

Пример 5

Вычислить площадь общей части двух кругов: $x^2 + y^2 \le 2y, x^2 + y^2 \le 2x\sqrt{3}$

Решение

Сделаем чертеж



$x^2 + y^2 = 2y$ - окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$ с центром в точке (0;1) радиуса $r = 1.$ $x^2 + y^2 = 2x\sqrt{3}$ - окружность $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$ с центром в точке $(\sqrt{3};0)$ радиуса $R = \sqrt{3}.$

Выберем формулу площади фигуры в полярных координатах, так как область ограничена окружностями

$$S = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho$$

Граница области состоит из дуг $\overset{\cup}{OBA}$ и $\overset{\cup}{OCA}$ разных окружностей, разобьем область D лучом OA на две части - $OBAO = D_1$ и $OACO = D_2$.

Площадь $OBAO$ обозначим $S_{1,}$, площадь $OACO$ – S_2.

Уравнения окружностей запишем в полярных координатах

$$\overset{\cup}{OBA}: x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\sin\varphi, \rho = 2\sin\varphi,$$

$$\overset{\cup}{OCA}: x^2 + y^2 = 2x\sqrt{3} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi.$$

Найдем уравнение луча OA, для чего найдем полярный угол точки A пересечения окружностей.

$$A: \begin{cases} \rho = 2\sin\varphi \\ \rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi. \end{cases}$$

$$2\sin\varphi = 2\sqrt{3}\cos\varphi,\ tg\varphi = \sqrt{3},\ \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Уравнение луча $OA: \varphi = \frac{\pi}{3}$

Так как окружность $\overset{\smile}{OBA}$ касается оси *ox*, то область D_1 ограничена лучом $\varphi = 0$.

Так как окружность $\overset{\smile}{OCA}$ касается оси O*y*, то область D_2 ограничена лучом $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Область D_1 расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$, внутри области D_1 ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2\sin\varphi$. Запишем S_1 и вычислим интеграл по формуле

$$S_1 = \iint\limits_{D_1} \rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\sin\varphi} \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Область D_2 расположена в секторе между лучами $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, внутри области ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$.

$$S_2 = \iint\limits_{D_2} \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{2\sqrt{3}\cos\varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\sqrt{3}\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2\varphi d\varphi = 3\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 3\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $S = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

2. Вычисление и применение тройного интеграла

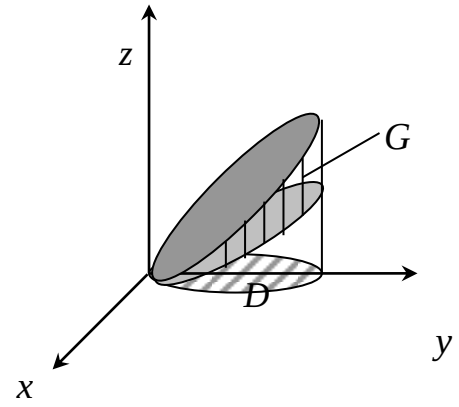
Схема применения тройного интеграла такая же, как двойного: чертеж, выбор формул, поиск всех элементов формул, вычисление полученных интегралов.

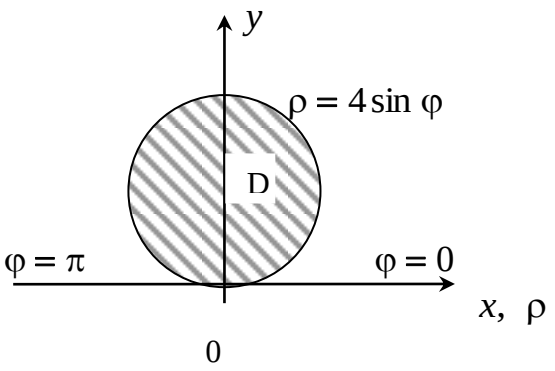
Пример 6

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4y, z = y, z = 2y.$

Решение

Выполним чертеж. Поверхность $x^2 + y^2 = 4y$ - круговой цилиндр, его образующие параллельны оси *oz*, направляющей служит окружность в плоскости *oxy*. Плоскости *z = y, z = 2y* проходят через ось *ox*, но имеют разный наклон к плоскости *xoy*. Они вырезают из цилиндра слой (область *G*, тело), объем которого нам нужно вычислить.





Объем области *G*: $V = \iiint\limits_G dv$.

Вычислим интеграл по формуле

$$V = \iiint\limits_G dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} dz \right) ds .$$

Проекцией области *G* на плоскость *xoy* является область *D*, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4y$. Снизу область *G* ограничена плоскостью $z = y,$ следовательно, $g(x, y) = y.$ Сверху ограничена плоскостью $z = 2y$, следовательно, $h(x, y) = 2y.$

Тогда $V = \iint\limits_D \left(\int\limits_y^{2y} dz \right) ds = \iint\limits_D \left(z \Big|_y^{2y} \right) ds = \iint\limits_D (2y - y) ds = \iint\limits_D y ds$.

Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах:

$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, ds = \rho d\varphi d\rho,$

$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \rho^2 = 4\rho\sin\varphi \Rightarrow \rho = 0(\textit{полюс}), \rho = 4\sin\varphi.$

Область D расположена в секторе между лучами $\varphi = 0 \, и \, \varphi = \pi,$ внутри области ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 4\sin\varphi.$

$$V = \iint\limits_D \rho\sin\varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \iint\limits_D \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^{4\sin\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\rho \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \left(\sin\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} \rho^2 d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\sin\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{4\sin\varphi} \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{64}{3} \sin^4\varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int\limits_0^{\pi} \left(2\sin^2\varphi \right)^2 d\varphi = \frac{16}{3} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3} \int\limits_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{16}{3}\varphi \Big|_0^{\pi} - \frac{16}{3}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{8}{3} \int\limits_0^{\pi} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{16\pi}{3} + \frac{8}{3}\varphi \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{16}{3}\pi + \frac{8}{3}\pi = 8\pi.$$

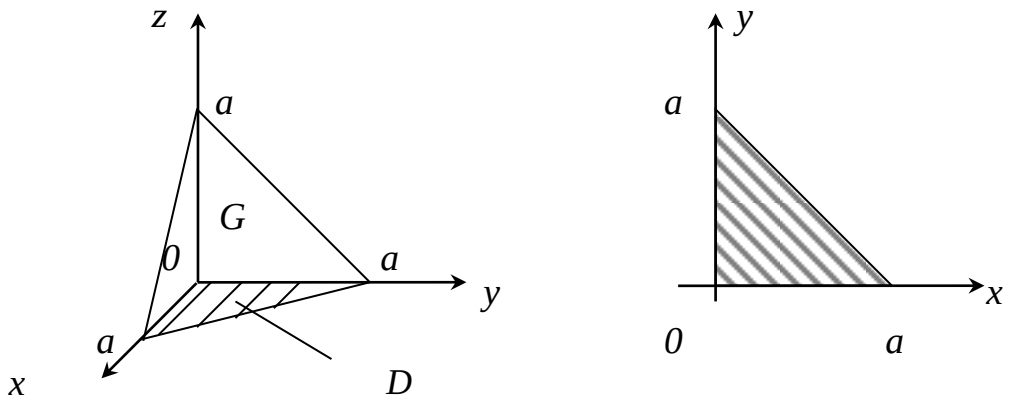
Ответ: $V = 8\pi.$

Пример 7

Найти центр массы одородной пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a.$

Решение

$x = 0, y = 0, z = 0$ - координатные плоскости. Найдем точки пересечения плоскости $x + y + z = a$ с осями координат. Например с Оx: $y = 0, z = 0$ подставим в уравнение плоскости $x + 0 + 0 = a,$ получим точку (a ,0, 0).



Проекция пирамиды на плоскость xoy – равнобедренный прямоугольный треугольник, ограниченный осями координат и линией пересечения плоскости $x+y+z=a$ с плоскостью $z=0$. Уравнение этой линии в плоскости xoy $x+y+0=a$ или $y=a-x$. Из соображений симметрии ясно, что все три координаты центра массы одинаковы. Найдем x_c по формуле

$$x_C=\frac{1}{V}\iiint\limits_G x\,dv\,.$$

G – область, занятая пирамидой. Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H,\quad S_{осн.}=\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{a^2}{2},\quad H=a,\quad V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}.$$

Внутри пирамиды G переменная z изменяется от $z=0$ (нижняя грань) до $z=a-x-y$ (верхняя грань).

Тогда

$$\iiint\limits_G x\,dv=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{a-x-y}x\,dz\right)ds=\iint\limits_D\left(xz\Big|_0^{a-x-y}\right)ds=\iint\limits_D x\,(a-x-y)\,ds=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{a-x}(x\,(a-x)-xy)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^a\left(x(a-x)y-x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{a-x}dx=\int\limits_0^a(x(a-x)(a-x)-\frac{x(a-x)^2}{2})dx=\int\limits_0^a\frac{x(a-x)^2}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^a(a^2x-2ax^2+x^3)dx=\frac{1}{2}(a^2\frac{x^2}{2}-2a\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})\Big|_0^a=\frac{1}{2}(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{4})=\frac{a^4}{24}$$

$x_c=\frac{a^4}{24}:\frac{a^3}{6}=\frac{6a^4}{24\,a^3}=\frac{a}{4}$, тогда $y_c=z_c=\frac{a}{4}$, $C(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{4})$.

Ответ: $(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{4})$.

3. Вычисление и применение поверхностного интеграла первого рода

Схема применения:

1. Выбрать формулу по условию задачи и получить поверхностный интеграл.
2. Найти проекцию поверхности на координатную плоскость. Сделать чертеж получившейся плоской области *D*.
3. Найти формулу элемента $d\sigma$ поверхности.
4. Поверхностный интеграл привести к двойному интегралу и вычислить двойной интеграл.

Пример 8

Найти массу, распределенную по части эллипсоида $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, находящейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{1}{2}z$.

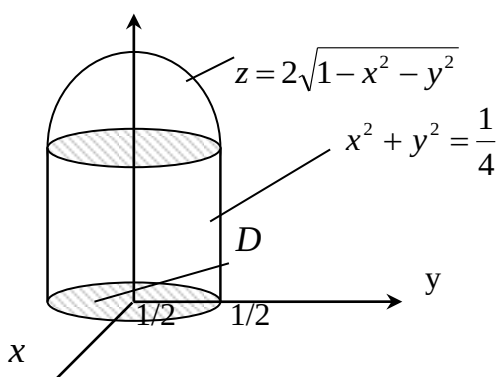
Решение

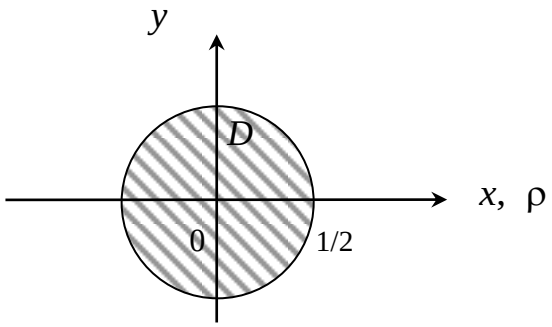
Масса, распределенная по поверхности σ с плотностью, $\delta = \delta\,(x, y, z)$ равна поверхностному интегралу:

$$m = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \frac{1}{2} z d\sigma.$$

Образующие цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ параллельны оси *oz*, направляющей является окружность в плоскости *xoy* с уравнением $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Центр окружности *O* (0;0), радиус $R = \frac{1}{2}$. Следовательно, проекция заданной части эллипсоида на плоскость *xoy* – круг *D*, ограниченный этой окружностью.





Составим формулу элемента $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,ds$;

$$z = 2\sqrt{1-x^2-y^2},\ z'_x = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ z'_y = \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{4x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{4y^2}{1-x^2-y^2}}ds = \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}ds.$$

Подставим z и $d\sigma$ в поверхностный интеграл и приведем его к двойному интегралу

$$m = \iint\limits_{\sigma}\frac{1}{2}z d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}ds = \iint\limits_{D}\sqrt{1+3x^2+3y^2}ds.$$

Двойной интеграл вычислим в полярных координатах. Возьмем $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, ds = \rho d\varphi d\rho,$ уравнение окружности $x^2+y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \rho^2 = \frac{1}{4}, \rho = \frac{1}{2}.$ Полюс *0* находится внутри области *D,* поэтому область *D* занимает сектор от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi.$ Внутри области *D* ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = \frac{1}{2}.$

$$m = \iint\limits_{D}\sqrt{1+3\rho^2\cos^2\varphi+3\rho^2\sin^2\varphi}\rho d\varphi d\rho = \iint\limits_{D}\sqrt{1+3\rho^2}\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+3\rho^2}\rho d\rho)d\varphi.$$

Так как внутренний интеграл не зависит от φ, вынесем его за знак внешнего интеграла:

$$m = (\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2}\,\rho d\rho) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2}\,\rho d\rho = \left| \begin{array}{l} \textit{Сделаем подстановку} \\ \sqrt{1+3\rho^2} = t, 1+3\rho^2 = t^2,\ 6\rho d\rho = 2tdt, \rho d\rho = \frac{1}{3}tdt, \\ \textit{при } \rho = 0, t = 1, \rho = \frac{1}{2}, t = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t \cdot \frac{1}{3} tdt = \frac{1}{3} \int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{7\sqrt{7}}{8} - 1\right) = \frac{7\sqrt{7}-8}{72}, \quad m = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{7}-8}{72} = \frac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}.$$

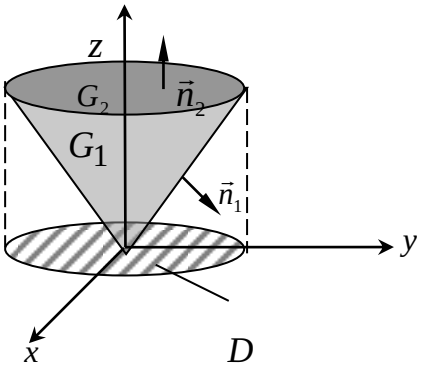
Ответ: $m = \frac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}$.

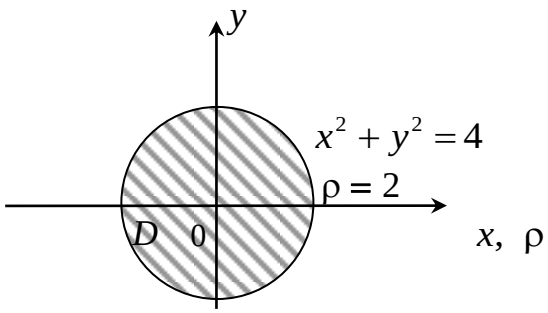
Пример 9

Найти поток векторного поля $\vec{u} = (1-2x)\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ, состоящую из части поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и плоскости $z = 2$.

Решение

Выполним чертеж.





Найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

В плоскости $z = 2$ получили окружность $x^2 + y^2 = 4$ с центром $C(0,0,2)$ радиуса 2.

Вершина конуса $O(0,0,0)$.

Проекцией обеих поверхностей на плоскость xoy является круг D, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 4$ с центром $O(0,0,0)$ радиуса $R=2$. Поверхность σ состоит из конической поверхности σ_1 и части плоскости σ_2, поэтому $\Pi_\sigma(\vec{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\vec{u})$.

Формула вычисления потока

$$\Pi_\sigma(\vec{u}) = \iint\limits_\sigma (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint\limits_D \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\cos\gamma|} \right)_{z = z(x,y)} ds.$$

Для вычисления $\Pi_{\sigma_1}(\vec{u})$ потока вектора $\vec{u}$ через коническую поверхность запишем уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в виде $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0.$

Найдем:

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_z = -1,$$

$$gradF = F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} - \vec{k},$$

$$|gradF| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Вектор $\vec{n}_1$ составляет с oz тупой угол, т. е. $\cos\gamma < 0$, коэффициент перед $\vec{k}$ должен быть отрицательным.

Возьмем

$$\vec{n}_1 = + \frac{gradF}{|gradF|} = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k},$$

Так как $\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$

Получим: $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Вычислим:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (1-2x)\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2}} + 2y\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2}} + 2z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x-2x^2+2y^2-2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

Учитывая, что на поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x-2x^2+2y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \frac{x-4x^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},$$

$$\Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) = \iint\limits_D \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\cos\gamma|}\right)_{z=\sqrt{x^2+y^2}} ds = \iint\limits_D \frac{x-4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds.$$

Полученный интеграл вычислим в полярных координатах. Заменим $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, ds = \rho d\varphi d\rho$

$$x^2+y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4, \rho = 2$$

$$\Pi_{\sigma_1}(u) = \iint\limits_D \frac{\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\varphi d\rho = \iint\limits_D (\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi) d\varphi d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^2 (\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi) d\rho\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - 4\cos^2\varphi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(2\cos\varphi - \frac{32}{3}\cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 2\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{16}{3}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{32\pi}{3}.$$

Вычислим $\Pi_{\sigma_2}(u)$ поток вектора $\bar{u}$ через круг σ_2 в плоскости $z = 2$. Единичный вектор внешней нормали этой плоскости равен $\vec{k} = (0,0,1)$; $\vec{n} = \vec{k}$; поэтому

$$\bar{u}\cdot\bar{n} = (1-2x)\cdot 0 + 2y\cdot 0 + 2z\cdot 1 = 2z, \cos\gamma = \cos 0 = 1, \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\cos\gamma|}\Big|_{z=2} = 2\cdot 2 = 4.$$

$$\Pi_{\sigma_2}(\vec{u}) = \iint\limits_D 4 ds = 4\iint\limits_D ds = 4\cdot S = 4(\pi R^2) = 4\pi\cdot 2^2 = 16\pi,$$

(D – круг радиуса 2).

Следовательно, $\Pi_\sigma(\vec{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\vec{u}) = -\frac{32\pi}{3} + 16\pi = \frac{16\pi}{3}$.

Ответ: $\Pi_\sigma = \frac{16\pi}{3}$.

4. Вычисление и применение криволинейного интеграла

Схема решения задач

1. По условию задачи выбрать формулу и записать искомую величину в виде криволинейного интеграла первого или второго рода.

2. Выразить из уравнения кривой все переменные и их дифференциалы через одну переменную и ее дифференциал. Всё подставить в подынтегральное выражение.

3. Найти интервал изменения этой переменной на заданной дуге кривой и вычислить полученный определенный интеграл.

Пример 10

Вычислить $\int\limits_L \frac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}}$, если L – дуга $\overset{\smile}{OA}$ синусоиды $y = \sin x, O(0, 0), A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода найдем *dl*. Из уравнения кривой $y = \sin x \quad y' = (\sin x)' = \cos x, dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. Так как кривая L не ориентирована, возьмем : $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, y и dl подставим в подынтегральное выражение. Получим и вычислим определенный интеграл.

$$\int\limits_L \frac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x dx = dt, \ \sin x dx = -dt \\ x = 0, t = \cos 0 = 1, \ x = \frac{\pi}{2}, t = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \int\limits_1^0 (1-t^2)(-dt) = \int\limits_0^1 (1-t^2)dt =$$

$= (t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Пример 11

Вычислить $\int\limits_L x\sqrt[3]{y}dx - 6x^3dy$ по дуге кривой $y = x^3$ от A (1,1) до B (-1,-1).

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода выразим y и dy через x и dx из уравнения кривой $y = x^3, dy = 3x^2dx.$ В интегралах второго рода кривая ориентирована. При движении по кривой от A до B переменная x изменяется от 1 до –1. Всё подставим в подынтегральное выражение.

$$\int\limits_L x\cdot\sqrt[3]{y}dy - 6x^2dy = \int\limits_1^{-1}(x\cdot\sqrt[3]{x^3}dx - 6x^3\cdot 3x^2dx) = \int\limits_1^{-1}(x^2 - 18x^5)dx = (\frac{x^3}{3} - 3x^6)\Big|_1^{-1} = (-\frac{1}{3} - 3) - (\frac{1}{3} - 3) = -\frac{2}{3}.$$

Пример 12

Найти массу дуги $\overset{\cup}{OA}$ кривой $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$, если линейная плотность массы в точке $M(x,y)$ пропорциональна длине дуги $\left|\overset{\cup}{OM}\right|$, $O(0,0)$, $A(4,\frac{16}{3})$.

Решение

Выберем формулу $m = \int\limits_L \delta(x,y)dl$, где $\delta = \delta(x,y)$ - линейная плотность массы.

По условию задачи $\delta = k\left|\overset{\cup}{OM}\right| = kl.$ Найдем длину дуги $\overset{\cup}{OM}: l = \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} dl.$ Уравнение $\overset{\cup}{OM}: y = \frac{2x\sqrt{x}}{3},$ тогда $y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, dl = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+x}dx.$

$$l = \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} \sqrt{1+x}dx = \int\limits_0^x \sqrt{1+x}dx = \int\limits_0^x (1+x)^{\frac{1}{2}}d(1+x) = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^x = \frac{2}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Получим $\delta = \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)$,

$m = \int\limits_{\overset{\smile}{OA}} \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)dl, \quad dl = \sqrt{1+x}dx = (1+x)^{\frac{1}{2}}dx, \quad 0 \le x \le 4,$ так как $\overset{\smile}{OM}$ и $\overset{\smile}{OA}$ - дуги одной кривой.

$$m = \int_0^4 \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)(1+x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2k}{3}\int_0^4((1+x)^2 - (1+x)^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2k}{3}(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2k}{3}(\frac{5^3}{3} - \frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}}) - \frac{2k}{3}(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{2k}{9}(125 - 10\sqrt{5} + 1) = \frac{2k}{9}(126 - 10\sqrt{5}).$$

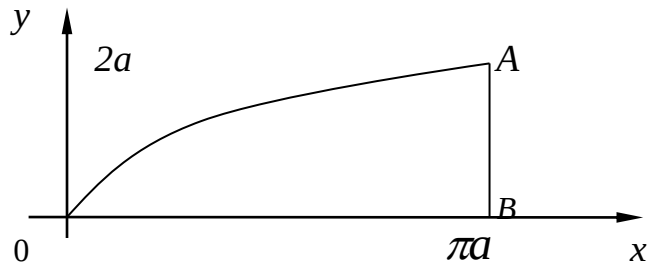
Ответ: $m = \frac{2k}{9}(126 - 10\sqrt{5}).$

Пример 13

Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ при движении точки вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ от $O(0,0)$ до $A(\pi a; 2a).$ Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$, составленного из дуги $\overset{\smile}{AO}$ циклоиды и двух прямых OB и BA, если $B(\pi a; 0).$ Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OA}$ циклоиды.

Решение

Сделаем чертеж



1) Обозначим работу поля $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ через W и найдем её по формуле

$$W = \int_L \vec{F}\,\vec{dr} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy;$$

$$W = \int\limits_{\overset{\smile}{OA}} (2a - y)dx + (y - a)dy.$$

Из уравнения OA:

$$x = a\,(t - \sin t),\ dx = a\,(1 - \cos t)\,dt$$

$$y = a\,(1 - \cos t),\ dy = a \sin t\, dt.$$

В точке $O\,(0, 0)$ $y = 0$, $0 = a\,(1 - \cos t)$, $\cos t = 1$, $t = 0$, в точке $A\,(\pi a;\ 2a)$, $y = 2a$, $2a = a\,(1 - \cos t)$, $2 = 1 - \cos t$, $\cos t = -1$, $t = \pi$ (обязательно проверяем, получаются, ли значения x в этих точках при найденных значениях t).

$$W = \int_0^{\pi} ((2a - a + a\cos t)a(1 - \cos t)dt + (a - a\cos t - a)a\sin t dt)) =$$

$$= \int_0^{\pi} (a^2(1 + \cos t)(1 - \cos t) - a^2 \cos t \sin t)dt = a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t)dt = a^2 \int_0^{\pi} (\sin^2 t - \frac{1}{2}\sin 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2t)dt - \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin 2t dt = \frac{a^2}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Найдем циркуляцию поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$ по формуле

$$Ц_L = \oint_L \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_L (2a - y)dx + (y - a)dy.$$

Контур $L = OBAO = OB + BA + A\breve{O}$

$$\oint_L = \int_{OB} + \int_{\breve{BA}} + \int_{AO}$$

$$\int_{OB} = \int_{OB} (2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения OB: $y = 0$ получим $dy = 0,\ x$ изменяется от 0 до πa.

$$\int_{OB} = \int_0^{\pi a} (2a - 0)dx = 2ax\Big|_0^{\pi a} = 2\pi a^2$$

$$\int_{BA} = \int_{BA} (2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения BA: $x = \pi a, dx = 0, y$ изменяется от 0 до $2a$.

$$\int_{BA} = \int_0^{2a} (y - a)dy = \left(\frac{y^2}{2} - ay\right)\Big|_0^{2a} = 2a^2 - 2a^2 = 0.$$

$$\int_{AO} = -\int_{\breve{OA}} = -\int_{\breve{OA}} (2a - y)dx + (y - a)dy = -W = -\frac{\pi a^2}{2}$$

$$Ц_L(\vec{F}) = 2\pi a^2 + 0 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

2) Найдем поток поля $\vec{F}$ через кривую $\overset{\smile}{OA}$ по формуле

$$\Pi_L(\vec{F}) = \int_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy = \int_{\overset{\cup}{OA}} (y-a)dx - (2a-y)dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \left((a - a\cdot\cos\ t - a)\cdot a\cdot(1-\cos\ t)dt - (2a - a + a\cos\ t)\, a\cdot\sin\ t\, dt \right) =$$

$$= \int_0^{\pi} (-a^2\cos\ t\cdot(1-\cos\ t) - a^2\cdot(1+\cos\ t)\cdot\sin\ t)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (-\cos t + \cos^2 t - \sin t - \cos t\cdot\sin t)\, dt =$$

$$= a^2(-\sin\ t\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)dt + \cos\ t\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\ 2t\, dt) =$$

$$= a^2(0 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\pi} + (-1-1) + \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi}) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\right).$$

Ответ: $W = \frac{\pi a^2}{2}; Ц_L(\vec{F}) = \frac{3\pi a^2}{2}; \Pi_{\overset{\cup}{OA}}(\vec{F}) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\right).$

Пример 14

Найти ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{u} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в произвольной точке M (x, y, z) и в точке $M_0(2;-2;1)$.

Решение

По формуле

$$rot\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k};$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; Q = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; R = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)'_x=(2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})'_x=2\cdot(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Обозначив $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ запишем

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{2x}{r^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{r^3};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{2z}{r^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{x}{r^3};\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{z}{r^3};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x}{r^3};\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{r^3}.$$

Подставим найденные производные в формулу ротора

$$rot\vec{u}(M)=\left(\frac{y}{r^3}+\frac{z}{r^3}\right)\vec{i}-\left(\frac{x}{r^3}+\frac{2z}{r^3}\right)\vec{j}+\left(-\frac{x}{r^3}+\frac{2y}{r^3}\right)\vec{k}=\frac{(z+y)\vec{i}-(x+2z)\vec{j}+(2y-x)\vec{k}}{r^3}=$$

$$=\frac{(z+y)\vec{i}-(x+2z)\vec{j}+(2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

В точке M_0 (2;-2;1)

$$rot\vec{u}(M_0)=\frac{(1-2)\vec{i}-(2+2)\vec{j}+(-4-2)\vec{k}}{\sqrt{(4+4+1)^3}}=\frac{-1\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}}{27}.$$

По формуле

$$div\vec{u}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$div\vec{u}(M)=-\frac{2x}{r^3}-\frac{y}{r^3}+\frac{z}{r^3}=-\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$div\vec{u}(M_0)=-\frac{4-2-1}{27}=-\frac{1}{27}.$$

Ответ:

$$rot\vec{u}(M) = \frac{(z+y)\vec{i} - (x+2z)\vec{j} + (2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$rot\vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}(\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}),$$

$$div\vec{u}(M) = -\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$div\vec{u}(M_0) = -\frac{1}{27}.$$

V. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $y = 2x$, $2y = x$ и расположенной в первой четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 3$.

2. Найти площадь фигуры $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}$.

Ответ: $S = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $1 \leq x \leq 2$, если плотность заряда $\lambda = \frac{y}{x}$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по эллипсу $x=2\cos t$, $y = \sin t$ из A (2, 0) в B (0,1). Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, где D(-1,1), BD и DA - прямые. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{\pi}{2}$; Ц $= \frac{\pi}{2}$; П $= \frac{7}{3}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 3$, $2x + y = 3$.

Ответ: $C(\frac{1}{2}; 1, 2)$.

6. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -(3y^2 + 2x^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$ в точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -4, rot\vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$.

Вариант 2

1. Найти ординату центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1,$ если поверхностная плотность массы $\delta = e^x$.

Ответ: $y = \dfrac{e^3 - 3e^{-1} - 4}{3e^2 - 9}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \sin\varphi)$ и окружностью $\rho = a$ и расположенной вне кардиоиды.

Ответ: $s = \dfrac{a^2(8-\pi)}{4}$.

3. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \le x \le \dfrac{p}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \dfrac{2p^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ из A (2,0) в B (-2,0). Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA, где D (-2;-2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 4\pi, \quad П = 0, \quad Ц = 4\pi + 8$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}, \; x^2 + y^2 = a^2, z = 0,$ если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \dfrac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),$ отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = \dfrac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке M (x, y, z) и в точке $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 0, rot\vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 3

1. Найти момент инерции относительно оси ox однородной фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{h}-\frac{3x}{a}=1,\ \frac{y}{h}+\frac{3x}{2a}=1, y=0,$ если поверхностная плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $J_x=\frac{ah^3}{12}.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=4(1+\sin\varphi)$ и прямой $\rho\sin\varphi=3$ и расположенной выше прямой.

Ответ: $S=8\pi+9\sqrt{3}.$

3. Найти электрический заряд кривой $y=\ln\cos x, 0\le x\le\frac{\pi}{6},$ если линейная плотность заряда равна $\lambda=\sin x\cdot\cos^2 x.$

Ответ: $q=\frac{1}{8}.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=(x^2-y^2)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x=2\cos t, y=\sin t$ от $A(2;0)$ до $B(0;1).$ Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA,$ составленному из дуги $\overset{\smile}{AB}$ и прямых *BD* и *DA*, если *D* (0;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}.$

Ответ: $W=\frac{5}{3};\quad \Pi=\frac{19}{3};\quad Ц=\frac{14}{3}.$

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x}, z=2\sqrt{x}, x+y=6, y=0,$ если плотность массы $\delta=2z.$

Ответ: $m=108.$

6. Найти координаты центра массы части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax.$

Ответ: $C\left(\frac{a}{2};0;\frac{16a}{9\pi}\right).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}(3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})$ в точке *M (x, y, z)* и в точке $M_0(1,-2,-2).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{7}{3};\ rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{3}(12\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}).$

Вариант 4

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2.$

Ответ: $c\left(\frac{45}{28};\frac{279}{70}\right).$

2. Найти момент инерции относительно начала координат фигуры $x^2 + y^2 \le 2Rx,$ если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$

Ответ: $J_0 = \frac{512R^5}{75}.$

3. Найти массу участка кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \le t \le \pi \end{cases}$, если линейная плотность массы $\delta = y.$

Ответ: $m = 2.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x^2$ от O (0,0) до B (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BD и DO, если D (-1,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{31}{30};\quad Ц = \frac{241}{30};\quad П = \frac{47}{30}.$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, x + y = 6, y = 0.$

Ответ: $V = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$

6. Найти электрический заряд части конической поверхности $z = \sqrt{y^2 + x^2},$ отсеченной цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z).$

Ответ: $q = -3\sqrt{2}\pi a^4.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,2,3).$

Ответ: $diva(M_0) = 36, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}.$

Вариант 5

1. Найти абсциссу центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, y = 0, y = 1, x = 0,$ если поверхностная плотность массы $\delta = e^y$.

Ответ: $\bar{x} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3(e+1)}$.

2. Найти электрический заряд фигуры $x^2 + y^2 \le 2Rx, y \ge 0,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = \frac{16}{9}R^3$.

3. Найти момент инерции первого витка однородной винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t$ относительно оси *oz*. Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = a^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x(y-1)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = x^2$ от *B* (-2;4) до *C* (2,4). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{BC}$ параболы и прямой *CB*. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BC}$ параболы.

Ответ: *W* = 0, Ц = 0, П = -9,6.

5. Найти момент инерции относительно оси *Oy* однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2,\quad z = 0,\quad z = H,$ если масса тела равна *m*.

Ответ: $J_y = \frac{m}{12}\left(3R^2 + 4H^2\right)$.

6. Найти массу части поверхности $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченной плоскостями *y* = 0, *y* = 5, *x*=0, *z*=0 *и расположенной в первой октанте*, если поверхностная плотность массы $\delta = z(x + y)$.

Ответ: *m* = 70.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{a} = -(2x^2 + 3y^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k},\ \vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке *M (x ,y ,z)* и в точке M_0 (1,-1,1).

Ответ: $div\vec{a} = -4x,\quad rot\vec{a} = -2y\vec{i} + 4x\vec{j} + (4x + 6y)\vec{k}$.

Вариант 6

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x}{2}, y = \sqrt{\frac{x}{2}},$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(xy^2 + 1).$

Ответ: $q = -\frac{47}{105}.$

2. Найти массу фигуры $1 \le x^2 + y^2 \le 9, \quad 0 \le x \le y,$ если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{x}{y}.$

Ответ: $m = 2\ln 2.$

3. Найти момент инерции линии $y = e^x, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$ относительно оси ox, если линейная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J_x = \frac{1}{3}\left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right).$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x + 2y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 4\cos t, y = 3\sin t$ от B (0,3) до C (-4,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги эллипса $\overset{\smile}{BC}$ и прямых CD и DB, если D (0;-2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BC}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{25 - 6\pi}{2}, \quad Ц = -4 - 3\pi, \quad П = -17.$

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 3 - y^2 - z^2, x = 0.$

Ответ: C (1,0,0).

6. Найти площадь части плоскости $z = 4 - x$, вырезанной поверхностями $z = 0$, $x = y^2$.

Ответ: $S = \frac{32\sqrt{2}}{3}.$

6. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -\left(3\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y}\right)\vec{i} + 2\frac{x}{y}\vec{j} - \left(2\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\vec{k}$ в точке M (x, y, z) и в точке $M_0(1,1,1).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -1, rot\vec{a}(M_0) = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$

Вариант 7

1. Найти абсциссу центра массы однородной фигуры

Ответ: $\bar{x} = \dfrac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1+\cos\varphi)$ и прямой $\rho\cos\varphi = 3$ и расположенной справа от прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти координаты центра массы однородной кривой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $C\left(\dfrac{2a}{5}; \dfrac{2a}{5}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2\sqrt{x}$ от *O* (0,0) до *B* (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *OCBO*, состоящему из дуги *BO* параболы и прямых *OC* и *CB*, если *C* (1; -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OB}$ параболы.

Ответ: $W = -\dfrac{8}{15}$, Ц $= \dfrac{71}{30}$, П $= \dfrac{13}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 3z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ и расположенного в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\dfrac{1}{15}$.

6. Найти массу части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, если поверхностная плотность массы $\delta = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

Ответ: $m = \dfrac{280}{3}\pi\sqrt{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ *и* $M_0(-2,2,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -\dfrac{11}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \dfrac{1}{3}(6\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k})$.

Вариант 8

1. Найти ординату центра массы однородной фигуры $0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \sin x$.

Ответ: $\bar{y} = \frac{(\pi - 2)(2 + \sqrt{2})}{16}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры $x^2 + y^2 \le 2y, y \ge 1$ относительно оси Ox, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{15\pi + 20}{24}$.

3. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Ответ: $l = 6a$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y + 2x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \frac{x + x^2}{2}$ от *B* (-1,0) до *O* (0,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *OCBO*, состоящему из дуги *BO* параболы и прямых *OC* и *CB*, где *C* (-1,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BO}$.

Ответ: $W = -\frac{7}{12}$; Ц $= -\frac{13}{12}$; П $= -\frac{7}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}$.

6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{2}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = arctg\frac{z}{x + y}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ в точке *M(x,y,z)* и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -\frac{1}{5}$; $rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(-3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 9

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{2y} = x, y = 2, x = 0.$

Ответ: $C\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right).$

2. Найти электрический заряд кольца $\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = 2\pi - \pi^2.$

3. Найти электрический заряд участка кривой $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = t^2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,$ если линейная плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4z + 9xy}$.

Ответ: $q = -\frac{62}{15}.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x - x^2$ от *O* (0,0) до *B* (2,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BO}$ и прямых *OC* и *CB*, если *C* (2;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{8}{3}; Ц = \frac{7}{3}; \quad П = \frac{16}{3}.$

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = b,$ если плотность массы $\delta = y.$

Ответ: $m = \frac{\pi b^4}{4}.$

6. Найти момент инерции относительно оси *Oz* части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge h,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J_z = \frac{2\pi R}{3}(R - h)(2R^2 - Rh - h^2).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2y^2 - 3x^2)\vec{i} - x^2\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_o(1,3,-2).$

Ответ: $div\vec{a}(M_o) = -6, rot\vec{a}(M_o) = +6\vec{i} + 6\vec{j} - 14\vec{k}.$

Вариант 10

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x},\ x = 2, y = 0.$

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{4}\right).$

2. Найти момент инерции однородного круга $x^2 + y^2 \le 2Ry$ относительно оси Оx, если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J = \frac{5}{4}\pi R^4.$

3. Найти массу кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a, 0 \le x \le a,$ если линейная плотность массы $\lambda = \sqrt{\frac{x^3}{x+y}}.$

Ответ: $m = \frac{a^2}{2}.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = \cos t, y = 2\sin t$ от B (0;-2) до A (1;0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $BACB$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ и прямых AC и CB, если C (0;1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}.$

Ответ: $W = \frac{5-\pi}{2};\ \text{Ц} = -\frac{1+\pi}{2}; \Pi = \frac{9}{2}.$

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного плоскостями $z = 0, z = ky$ и цилиндрической поверхностью $y = \sqrt{a^2 - x^2}.$

Ответ: $C\left(0; \frac{3}{16}\pi a;\ \frac{3}{32}\pi ak\right).$

6. Найти электрический заряд части поверхности $2z = 9 - x^2 - y^2,$ отсекаемой плоскостью $z = 0,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z - 2.$

Ответ: $q = \frac{\pi}{15}(500\sqrt{10} - 23).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -\frac{4}{9}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{9}(4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k});$

Вариант 11

1. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $y = 2x$, $x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной фигуры $x^2 + y^2 \le 2x, x \ge 1,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{15\pi + 32}{24}$.

3. Найти массу кривой $y = \sqrt{x - x^2}$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 1$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ из A (0;-1) в B (2,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги AB эллипса и прямых BC и CA, если C (-2,0). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; $\text{Ц} = -\frac{10}{3}$; $\text{П} = -\frac{13}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, y = 1,$ если плотность заряда $\lambda = 3x + 4y$.

Ответ: $q = \frac{160}{63}$.

6. Найти координаты центра массы части однородной конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0,$ находящейся между плоскостями $z = 0$, $z = h$.

Ответ: $C\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке M_0 (2; -2,1).

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = \frac{13}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j})$.

Вариант 12

1. Вычислить координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной эллипсом $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и осью абсцисс.

Ответ: $C\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородного круга $x^2 + y^2 \le 4y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 24\pi$.

3. Найти электрический заряд линии $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, 0 \le t \le 2\pi, \\ z = t \end{cases}$ если плотность заряда $\lambda = -z$.

Ответ: $q = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(2+4\pi^2)^3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - 3y)\vec{j}$ при перемещении точки от A (1,0) до B (-1,0) по параболе $y = 1 - x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, если C (-1;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{4}{3}$; Ц $= \frac{7}{3}$; П $= -\frac{4}{3}$.

5. Найти статический момент относительно плоскости xOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $z = 0$, $y + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{xz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{4\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (x^2 + 2y^2)\vec{i} - 2y^2\vec{j} + \frac{2y^2 - x^2}{z}\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -3, rot\vec{a}(M_0) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 13

1. Найти электрический заряд треугольной пластины с вершинами A (-2;-2), B (-1;2), C (-1; $-\frac{3}{2}$), если поверхностная плотность заряда $\lambda = 2x + y$.

Ответ: $q = -\frac{133}{24}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой относительно оси ox, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{21\pi a^4}{32}$.

3. Найти координаты центра массы кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $C\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{\pi}; \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по гиперболе $y = \frac{2}{x}$ от A (1,2) до B (2,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BC и CA, если C (2,3). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; Ц $= -\frac{2}{3}$; П $= -4$.

5. Найти статический момент относительно плоскости yoz однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{2xy}$, отсекаемой плоскостью $x + y = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{2xy}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 - 3x^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,-1,1)$.

Ответ: $diva(M_0) = -6, rot\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Вариант 14

1. Найти момент инерции относительно оси *oy* однородного треугольника с вершинами *A* (,1); *B* (1,2); *C* (3,3), если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = 3$.

2. Найти статический момент относительно оси *Ox* однородной фигуры $1 \le x^2 + y^2 \le 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \dfrac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}$.

3. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ при $-\infty < t \le 0$.

Ответ: $l = \sqrt{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \dfrac{2}{x}$ от *A* (-2,-1) до *B* (-1,-2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ABCA*, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{AB}$ и прямых *BC* и *CA*, если *C* (1;-1). Найти поток вектора через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; Ц = 2; $\Pi = -4$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, z = 2, если плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $m = \dfrac{16\pi}{3}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 2ay$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $q = \dfrac{3\pi a^4}{\sqrt{2}}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = arctg\dfrac{z}{x+y}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ в точках

M (x, y, z) и M_0 (1,1,1).

Ответ: $div a(M_0) = \dfrac{2}{5}$, $rot a(M_0) = \dfrac{1}{5}(i + 3j + 2k)$.

Вариант 15

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x, y = x,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right).$

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a\cos\varphi,$ если плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J_0 = \frac{3}{2}\pi a^4.$

3. Найти массу участка кривой $y = -\ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4},$ если линейная плотность массы $\delta = \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$

Ответ: $m = \frac{\sqrt{2}}{12}.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ от $A(\sqrt{3}, 1)$ до $B(1, \sqrt{3})$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ACBA*, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BA}$ окружности и прямых *AC* и *CB*, где $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = 0,$ Ц $= 0,$ $\Pi = \frac{\pi}{3}.$

5. Найти заряд тела, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a,$ если плотность заряда $\lambda = -x.$

Ответ: $q = -\frac{a^3 h}{6}.$

6. Вычислить массу участка поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2},$ отсеченного плоскостью $z = 1,$ если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2 + 3z^2.$

Ответ: $m = 2\pi\sqrt{2}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j} + k)\ln(x + 2y + 3z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(1,1,1).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = \frac{4}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{-2i + j}{3};$

Вариант 16

1. Найти координаты центра массы фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 3y$, $x = y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{2};\frac{6}{5}\right)$.

2. Найти массу круга радиуса *R*, плотность массы которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до окружности.

Ответ: $m = \frac{\pi R^3}{3}$.

3. Найти статический момент кривой $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ относительно оси *ox*, если линейная плотность массы $\delta = x$.

Ответ: $M_x = 5{,}6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} - \frac{y}{x}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ от *A* (1;-2) до *B* (2;-1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ACBA*, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\cup}{BA}$ и прямых *AC* и *CB*, где $C(-2;-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ гиперболы.

Ответ: $W = 0$, $\text{Ц} = 0$, $\text{П} = 2$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 3$, если плотность заряда $\lambda = -z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = -8$.

6. Найти момент инерции относительно оси *oz* однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 + 3x^2)\vec{i} - 3x^2\vec{j} + (3x^2 - 2y^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 12, rot\vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 17

1. Найти момент инерции относительно оси *Ox* плоской однородной фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{2x},\ x+y=3,\ y=0$, если поверхностная плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $J_x=1{,}4.$

2. Найти массу фигуры $x^2+y^2\le 4x,$ если поверхностная плотность массы $\delta=x^2.$

Ответ: $m=20\pi.$

3. Найти координаты центра массы однородной полуокружности $y=\sqrt{a^2-x^2}.$

Ответ: $C\left(0;\frac{2a}{\pi}\right).$

4. Найти работу поля $\vec{F}=\frac{x\vec{i}-y\vec{j}}{x^2+y^2}$ при перемещении точки по дуге окружности $x=3\cos t, y=3\sin t$ от $A(3,0)$ до $B(0,3).$ Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ACBA*, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых *AC* и *CB*, если *C*(3,3). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W=-1,\quad \text{Ц}=1-\ln 2,\quad \Pi=0.$

5. Найти статический момент относительно плоскости *yoz* тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{1}{2}x^2, x=0, y=0, z=0, 3x+2y=12,$ если плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $M_{yz}=\frac{192}{5}.$

6. Найти электрический заряд части поверхности $z=1-(x^2+y^2),$ отсеченной плоскостью $z=0,$ если плотность заряда $\lambda=\sqrt{1+4x^2+4y^2}.$

Ответ: $q=3\pi.$

7. Найти дивергенцию и ротор поля $\vec{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(2\vec{i}+\vec{y}+3\vec{k})$ в точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(-1;2;2).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=2;\quad rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{3}(4\vec{i}+7\vec{j}-5\vec{k}).$

Вариант 18

1. Вычислить массу четверти кольца $4 \le x^2 + y^2 \le 9, \quad x \le 0, \quad y \ge 0,$ если поверхностная плотность массы $\delta = \dfrac{y - 2x}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 3.$

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры, $1 \le x^2 + y^2 \le 2y,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $C\left(0; \dfrac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}\right).$

3. Найти статический момент относительно оси Oy дуги кривой $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2},$ если линейная плотность массы $\delta = y.$

Ответ: $M_y = 5{,}6.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = \cos\sqrt{y}\,\vec{i} + (x - y)\,\vec{j}$ при перемещении точки по дуге $\overset{\smile}{BO}$ параболы $y = x^2.$ Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BOC}$ параболы $y = x^2$ и прямой CB, B (-1, 1), O (0, 0), C (1, 1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OC}$ параболы.

Ответ: $W = \dfrac{7}{6} + \sin 1, \quad \text{Ц} = \dfrac{4}{3} + 2\sin 1 - 2\cos 1, \quad \Pi = -2(\sin 1 + \cos 1) + \dfrac{1}{6},$

5. Найти момент инерции линии $y = \ln x, 1 \le x \le \sqrt{e},$ относительно оси оу, если линейная плотность $\delta = 1.$

Ответ: $J_y = \dfrac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right).$

6. Вычислить электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $x = 2,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4).$

Ответ: $q = -80\pi\sqrt{2}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})\cos(2x + y - z)$ в произвольной точке $M\,(x, y, z)$ и в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -3; rot\vec{a}(M_0) = -7\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}.$

Вариант 19

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ и осями координат, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$ и фигура расположена при $x \ge 0, \quad y \ge 0.$

Ответ: $q=\frac{100}{3}$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры $1 \le x^2+y^2 \le 2x,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $C\left(\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{4\pi+6\sqrt{3}};0\right).$

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной циклоиды $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$ если линейная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $M_x=\frac{32}{3}.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=\frac{y^2\vec{i}+x^2\vec{j}}{xy}$ при перемещении точки по дуге кривой $y=\frac{4}{x^2}$ от A (1, 4) до B (2, 1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ кривой $y=\frac{4}{x^2}$ и прямых BC и CA, если C (8, 4). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ этой кривой.

Ответ: $W=-0{,}5; Ц=8{,}5-\ln 8; П=7{,}1375.$

5. Вычислить момент инерции относительно оси oz однородного цилиндра $x^2+y^2 \le 2Ry, 0 \le z \le H,$ если масса цилиндра равна m.

Ответ: $J_z=\frac{3}{2}mR^2.$

6. Найти массу части поверхности, $z=\sqrt{9-x^2}$ отсеченной плоскостями $y = 0$ и $y = 3$, если поверхностная плотность массы $\delta=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$

Ответ: $m=\frac{\pi^2}{4}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)\vec{i}-\frac{3x}{y}\vec{j}+\left(\frac{3x}{y}-\frac{2y}{x}\right)\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, t)$ и в точке $M_0(1,1,1).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=5; rot\vec{a}(M_0)=-5\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$

Вариант 20

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Ответ: $C\left(\frac{a}{5};\frac{a}{5}\right)$.

2. Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры $x^2+y^2\le 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $M_x=\pi$.

3. Найти момент инерции относительно оси *Ox* одной арки однородной циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. Линейная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J_x=\frac{256}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=(x-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y=2-x^2$ от *A* (-1,1) до *B* (1,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ACBA*, составленному из дуги $\overset{\cup}{BA}$ параболы и прямых *AC* и *CB*, где *C* (-1; 0). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W=-\frac{142}{15};\text{Ц}=\frac{152}{15};\text{П}=\frac{4}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=1, y = 0$, $y = 1$, если плотность заряда $\lambda=-(x^2+y^2+z^2)$.

Ответ: $q=-\frac{3}{2}\pi$.

6. Найти массу полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta=\frac{z}{R}$.

Ответ: $m=\pi R^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=arctg\frac{x+y}{z}(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{1}{5};rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{5}(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})$.

Вариант 21

1. Найти массу фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ если плотность массы $\delta=|y|$.

Ответ: $m=\frac{4}{3}ab^2.$

2. Найти электрический заряд, распределенный с поверхностной плотностью $\lambda=\sqrt{1-x^2-y^2}$ в области $x^2+y^2\le y.$

Ответ: $q=\frac{3\pi-4}{9}.$

3. Найти статический момент относительно оси Ox циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},0\le t\le 2\pi,$ если линейная плотность массы $\delta=y.$

Ответ: $M_x=\frac{512}{15}a^3.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=\frac{y^2}{x}\vec{i}+\frac{x^2}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y=\sqrt{x}$ от $A(1;1)$ до $B(4;2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, где $C(1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ параболы.

Ответ: $W=6{,}75,\ Ц=6{,}75-\ln 2-4\ln 4,\ П=\frac{57}{5}.$

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z=1-\sqrt{x^2+y^2}, z=0.$

Ответ: $C\left(0;0;\frac{1}{4}\right).$

6. Найти момент инерции относительно оси oz , часть однородной поверхности $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2},$ отсеченной плоскостью $z=h.$

Ответ: $J_z=\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля вектора $\vec{a}$ в точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$, если $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},$ где $\vec{b}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}-x^2\vec{k},\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}.$

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=6, rot\vec{a}=(M_0)=-4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}.$

Вариант 22

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = x.$

Ответ: $q=\frac{a^3}{30}.$

2. Найти площадь фигуры $1 \le x^2+y^2 \le 2x.$

Ответ: $S=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}.$

3. Найти моменты инерции однородной окружности $x^2+y^2=r^2$ относительно осей координат. Масса окружности равна m.

Ответ: $J_x=J_y=\frac{1}{2}mr^2.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=xy\vec{i}+(y-x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $\begin{cases} x=t \\ y=(t+1)^2 \end{cases}$ от A (-1;0) до B (0,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, если C (-1;2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W=\frac{3}{4}; Ц=-\frac{5}{12}; П=\frac{14}{15}.$

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 4, x + z = 2, y = \sqrt{2x},$ если плотность $\delta = y.$

Ответ: $m=\frac{4}{3}.$

6. Найти координаты центра массы полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$ если поверхностная плотность массы $\delta = x^2+y^2.$

Ответ: $C\left(0,0,\frac{3}{8}R\right).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $a=\operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в произвольной точке и в точке $M_0(2,2,1).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{2}{3}; rot\vec{a}(M_0)=0.$

Вариант 23

1. Найти электрический заряд, распределенный в области, ограниченной кривыми $x=0, y=\pi, \quad y=x$ с поверхностной плотностью $\lambda=\cos(x+y)$.

Ответ: $q=-2$.

2. Найти статический момент однородного круга $x^2+y^2\le 2x$ относительно оси оу.

Ответ: $M_y=\pi$.

3. Вычислить массу участка винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ z=bt \end{cases}$, если линейная плотность массы $\delta=xy$.

Ответ: $m=\dfrac{a^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=(y-x)\vec{i}+xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы y = $(x+1)^2$ от *A* (-2;1) до *B* (0;1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ABCA*, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых *BC* и *CA*, если *C* (0;3). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ параболы.

Ответ: $W=\dfrac{52}{15}; Ц=-\dfrac{8}{5}; П=\dfrac{22}{3}$.

5. Найти центр массы однородного конуса, ограниченного поверхностями $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, z = *h*.

Ответ: $C=\left(0,0,\dfrac{3}{4}h\right)$.

6. Вычислить момент инерции относительно оси *Oz* части однородной поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2, x\ge 0, z\ge 0, y\ge 0,$ если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J_z=\dfrac{\pi R^4}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\vec{i}\sin(y^2+3x^2)-\vec{j}\sin(y^2+3x^2)+\vec{k}\sin(3x^2-2y^2)$ в произвольной точке *M*(*x*, *y*, *z*) и в точке $M_0\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}; -\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};0\right)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=-4\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}; rot\vec{a}(M_0)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}(2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})$.

Вариант 24

1. Найти массу, распределенную в области, ограниченной линиями $y=1, y=2, x=0$, $y = e^x$ с поверхностной плотностью $\delta = e^x$.

Ответ: $m = \frac{1}{2}$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной одним лепестком лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{\pi a^4}{4}$.

3. Найти координаты центра массы однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + x + y)\vec{i} + (xy + x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $x = \sqrt{y}$ от O(0,0) до $A(2,4)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *OACO*, состоящему из дуги *OA* параболы и прямых *AC* и *CO*, если *C* (0,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OA}$ в сторону выпуклости дуги.

Ответ: $W = 18{,}8; \Pi = 22{,}8; Ц = \frac{52}{15}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6,$ если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти координаты центра массы части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ при $z \le 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{6\sqrt{3}+1}{5(3\sqrt{3}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_o) = -2, rot\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 25

1. Найти статический момент относительно оси *Ox* массы, распределенной с плотностью $\delta = \frac{1}{x}$ в области, ограниченной линиями $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2.$

Ответ: $M_x = 2{,}25.$

2. Вычислить момент инерции однородного круга радиуса *R* массы *m* относительно начала координат.

Ответ: $J_0 = \frac{1}{2}mR^2.$

3. Вычислить массу участка кривой $y = 0{,}5x^2, 0 \le x \le 1,$ если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{2y}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = R\cos t, y = R\sin t$ от $A(R,0)$ до $B(0,R)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BA}$ окружности и прямых *AC* и *CB*, где $C(2R, R)$. Найти поток вектора *R* через дугу $\overset{\smile}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = \frac{\pi R^2}{2}; \text{Ц} = R^2(3 - \frac{\pi}{2}); \Pi = \frac{3\pi R^4}{8}.$

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, y + x = 6, y = 0$, если плотность заряда $\lambda = z.$

Ответ: $q = 54.$

6. Найти координаты центра массы части однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$ вырезанной плоскостями $x = 0, y = 0, x + y = R, (x \ge 0, y \ge 0, x + y \le R).$

Ответ: $C\left(\frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R}{\pi(\sqrt{2} - 1)}\right).$

7.Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1).$

Ответ: $div\ \vec{a}(M_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad rot\ \vec{a}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\right).$

Вариант 26

1. Найти момент инерции относительно оси *Ox* однородной полукруглой пластинки $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$. Поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_{ox} = \dfrac{\pi R^4}{8}$.

2. Найти координаты центра массы плоской однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Ответ: $C\left(\dfrac{5a}{6}; 0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси *Ox* однородной дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \dfrac{3a^2}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y^2 \ln x\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ от *A* (1;1) до $B\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ гиперболы и прямых *AC* и *CB*, если *C* (1; $-\dfrac{1}{2}$). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -\dfrac{\ln 2}{2}$; Ц $= \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{170}{72}$; П $= \dfrac{-3\ln 2 + 79}{72}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, z = 0, $3x + 2y = 12$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \dfrac{192}{5}$.

6. Найти площадь части цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, заключенной между плоскостями $y = x$ и $y = 0$.

Ответ: $S = 2a^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля:

$\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точках *M* (*x*, *y*, *z*) и $M_0(2,3,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 0; rot\vec{a}(M_0) = -10\vec{k}$.

Вариант 27

1. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(0; \frac{8}{3\pi}\right)$.

2. Найти массу, распределенную в области $2x \le x^2 + y^2 \le 4x, \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3},$ с поверхностной плотностью $\delta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Ответ: $m = \frac{\pi^2 + \pi\sqrt{3} - 6}{8}$.

3. Найти статический момент относительно оси *Oy* однородной дуги астроиды $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1, 0 \le x \le 1,$ если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_y = \frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ от A (-2,0) до B (0,-2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA, где C (-2,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = -2\pi; \text{Ц} = -\frac{6\pi + 8}{3}; \Pi = -2.$

5. Найти электрический заряд части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,$ расположенной в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0),$ если плотность заряда $\lambda = -z$.

Ответ: $q = -\frac{\pi R^4}{16}$.

6. Найти момент инерции относительно оси *Oz* части однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2az, \ 0 \le z \le a,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15}a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = \frac{1}{2}, rot\vec{a}(M_0) = \frac{5}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} - \vec{k}.$

Вариант 28

1. Найти массу, распределенную с поверхностной плотностью $\delta = x^2 + y$ в области, ограниченной кривыми $y = x^2, y^2 = x.$

Ответ: $m = \frac{33}{140}.$

2. Найти момент инерции относительно оси *O*y однородного круга $x^2 + y^2 \le 2x,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J_y = \frac{5}{4}\pi.$

3. Найти статический момент относительно оси ox однородной дуги астроиды $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1,$ расположенной в первой четверти $(0 \le x \le 1, y \ge 0),$ если линейная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $M_x = \frac{3}{5}.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = \cos t, y = \sin t$ от A (1,0) до B (0,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , если C (0;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0; \text{Ц} = \frac{2}{3}; \Pi = \frac{4 - 3\pi}{6}.$

5. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной поверхностями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

Ответ: $C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$

6. Найти электрический заряд части плоскости $x + y + z = a,$ вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2,$ если плотность заряда $\lambda = z^2.$

Ответ: $q = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^4.$

8. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точках $M\,(x, y, z)$ и $M_0(1, 2, 3).$

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 36, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}.$

Вариант 29

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $x=1, \sqrt{y}=x, y=-\sqrt[3]{x}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = xy-(xy)^3$.

Ответ: $q=-\frac{5}{64}$.

2. Найти электрический заряд, распределенный в области $x^2+y^2 \le 2x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Ответ: $q=\frac{8}{9}(3\pi-4)$.

3. Найти координаты центра масс дуги окружности $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=xy^2\vec{i}+2x^2y\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y=-\sqrt{x}$ от O (0;0) до B (1;-1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{OB}$ параболы и прямых BC и CO, если C (1;1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W=\frac{2}{3}; Ц=-\frac{1}{12}; П=-\frac{13}{35}$.

5. Найти ординату центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{1}{2}y^2, x=0, y=0, z=0, 2x+3y=12$.

Ответ: $y_0=\frac{12}{5}$.

6. Найти массу части плоскости $2x+2y+z-4=0$, расположенной в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m=\frac{8}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=xy\vec{i}-yz\vec{j}+yz\vec{k}$ в точках $M(x,y,z)$ и $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=1, rot\vec{a}(M_0)=2\vec{i}-2\vec{k}$.

Вариант 30

1. Найти моменты инерции относительно осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = x^2$, если поверхностная плотность массы в каждой точке фигуры равна ординате точки.

Ответ: $J_x = \frac{31}{420}, J_y = \frac{1}{15}$.

2. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $z = 0, z = 3, x + y = 0$ и цилиндрической поверхностью $x = \sqrt{-4y - y^2}$.

Ответ: $V = 3\pi - 6$.

3. Найти электрический заряд, распределенный по кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t + t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$ с линейной плотностью $\lambda = -(x^2 + y^2)$.

Ответ: $q = -2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при движении точки (m = 1) по параболе $y = 2\sqrt{x}$ от 0 (0,0) до A (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OACO$, состоящему из дуги $\overset{\smile}{OA}$ параболы и прямых AC и CO, где C (1, -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OA}$.

Ответ: $W = \frac{52}{15}$; Ц $= \frac{29}{30}$; П $= -\frac{19}{6}$.

5. Найти центр массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, z= 0.

Ответ: $C\left(0,0,\frac{3}{8}\right)$.

6. Найти площадь части гиперболического параболоида $az = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $S = \frac{2\pi}{3a}(\sqrt{(a^2 + R^2)^3} - a^3)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = 2x^2 y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$ в произвольной точке и в точке $M_0(-1,1,2)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -8, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учебное пособие для втузов. – 6-е изд., испр.- М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.:ил.

Исрапилов Р. Б., Баутин С. П. Курс математики. Часть 3. Математический анализ функций нескольких переменных. – Екатеринбург: УГГГА, 1996.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. -13-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2015.- 608 с.: ил.- (Высшее образование).

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……...4
1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ……..……..…5
1. 1. Понятия определенного интеграла……..5
1. 2. Свойства определенного интеграла …….……..5
1. 3. Вычисление определенного интеграла ……..6
2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.……8
2. 1. Интегрирование по бесконечному промежутку ……...8
2. 2. Интеграл от разрывной функции……...10
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ……12
3. 1. Площадь плоской фигуры ……..…….…...12
3.2. Объем тела вращения ……..……..... 23
3.3. Длина дуги плоской кривой……..27
4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ …… 30
4. 1. Вычисление определенных интегралов….…….30
4. 2. Несобственные интегралы ……..36
4. 3. Площадь …….……..…40
4. 4. Объем тела вращения ……..46
4. 5. Длина дуги плоской кривой ..…….….47
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……53

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме “Определенный интеграл”, рассмотрены основные методы интегрирования, некоторые приложения к геометрическими задачам, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие определённого интеграла

Определённым интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ является число, обозначаемое символом $\int_a^b f(x)dx$ и определяемое как предел интегральной суммы функции на заданном отрезке, а именно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i,$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b;\ \ \bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i),\ \ i = 1,\ldots,n;\ \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$

1. 2. Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad A = \text{const};$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a;b).$

1. 3. Вычисление определённого интеграла

1. Для вычисления определённого интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$.

2. Если для нахождения первообразной используется введение новой переменной $x = \varphi(t)$ (замена переменной), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f\left[\varphi(t)\right]\cdot \varphi'(t)dt,$$

где $t(a)$ и $t(b)$ новые пределы интегрирования, соответствующие переменной t.

При подстановке $u = u(x)$ формула замены переменной имеет вид

$$\int_a^b f\left[u(x)\right]u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

3. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла принимает вид

$$\int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du.$$

Примеры

1. $$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4 = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4 = \frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} = \frac{16}{3}.$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cos 3xdx = 7\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3xd3x = \left.\frac{7\cdot\sin 3x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right) = -\frac{7}{3}.$$

3. $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x\frac{dx}{x} = \int_1^e \ln xd\ln x = \left.\frac{\ln^2 dx}{2}\right|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. $$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x^3}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t, \\ x = t^2, \\ dx = \left(t^2\right)'dt = 2tdt, \\ t(1) = \sqrt{1} = 1;\ t(4) = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{t\cdot 2tdt}{1+t^3} = 2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t^3} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{3t^2dt}{1+t^3} = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\ln|1+8| - \ln|1+1|\right) = \frac{2}{3}\ln\frac{9}{2}.$$

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2. 1. Интегрирование по бесконечному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится; если указанный предел не существует или равен бесконечности, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся.

Аналогично определяются и другие интегралы по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем случае интеграл является сходящимся, если сходятся оба интеграла, его составляющие.

Примеры

Найти несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1.\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{(x-2)^2+9}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\Bigg|_2^{b}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-2}{3}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

интеграл сходится.

$$2.\int_e^{\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}(\ln x)^{\frac{1}{2}}d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_e^{b}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\sqrt{(\ln x)^3}\Big|_e^{b}=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{(\ln b)^3}-\sqrt{(\ln e)^3}\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

3. $$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}(x-2)^{-3}d(x-2)=\lim_{a\to-\infty}\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\Bigg|_{a}^{1}=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{(x-2)^2}\Bigg|_{a}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(a-2)^2}\right)=-\frac{1}{2},$$

интеграл сходится.

2. 2. Интеграл от разрывной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b)$, точка $x=b$ является точкой разрыва второго рода. Предел $\lim\limits_{\xi\to0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)dx$ называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$, т. е.

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\xi\to0}\int_{a}^{b-\xi}f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)dx$, интеграл является сходящимся.

Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b]$, а точка $x = a$ является точкой разрыва второго рода, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^b f(x)\,dx.$$

Если точка $x = c$ является точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, где $c \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

В последнем случае $\int_a^b f(x)\,dx$ будет сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Примеры

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1.\ \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{\xi \to 0} \int_4^{5-\xi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{\xi \to 0} \int_4^{5-\xi} (x-5)^{-\frac{1}{3}} d(x-5) =$$

$$= \lim_{\xi \to 0} \left. \frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_4^{5-\xi} = \frac{3}{2} \lim_{\xi \to 0} \left. \sqrt[3]{(x-5)^2} \right|_4^{5-\xi} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\xi \to 0} \left(\sqrt[3]{(5-\xi-5)^2} - \sqrt[3]{(4-5)^2} \right) = \frac{3}{2} \lim_{\xi \to 0} \left(\sqrt[3]{\xi^2} - \sqrt[3]{1} \right) = -\frac{3}{2},$$

интеграл сходится.

$$2.\ \int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{\frac{1}{3}d(x^3+8)}{x^3+8}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\ln\left|x^3+8\right|\Big|_{-2+\xi}^{0}=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left|(-2+\xi)^3+8\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(-8+12\xi-6\xi^2+\xi^3+8\right)\right)=$$

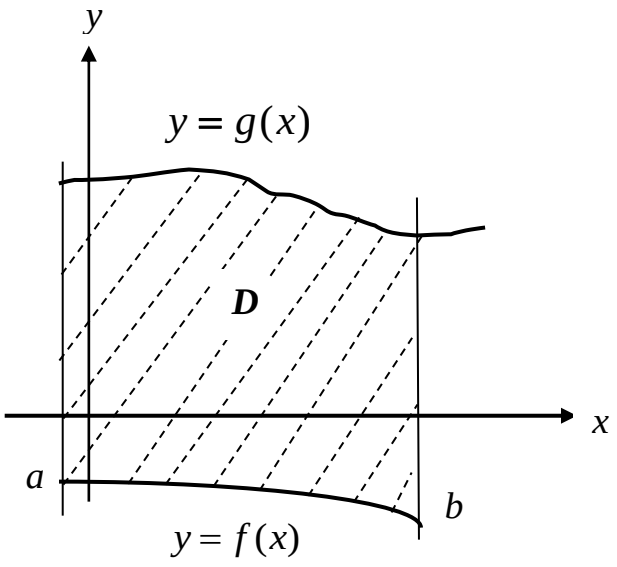
$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(12\xi-6\xi^2+\xi^3\right)\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

3. 1. Площадь плоской фигуры

а) Площадь криволинейной трапеции D, ограниченной кривыми $y=f(x), y=g(x),$ где $f(x)\le g(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a<b$ (см. рис.),



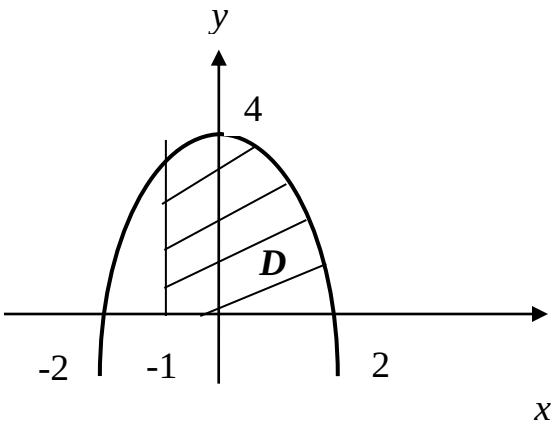
находится по формуле

$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx .$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2;\ x = -1;$ $y = 0.$

Построим фигуру. Верхняя граница: $y = 4 - x^2$, нижняя граница: $y = 0$, левая граница $x = -1$, правая граница $x = 2.$

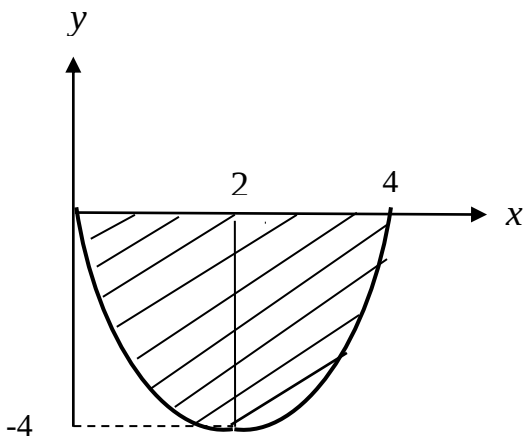


Найдем площадь:

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - 0)\,dx = 4x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 4(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = 12 - 3 = 9\ ed^2.$$

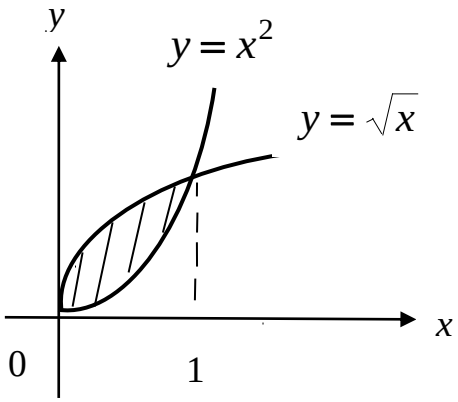
2. Найти площадь фигуры: $y = x^2 - 4x;\quad y = 0.$



$$S = \int_0^4 (0 - (x^2 - 4x))dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + \frac{4x^2}{2}\Big|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{160}{3}\,ed^2.$$

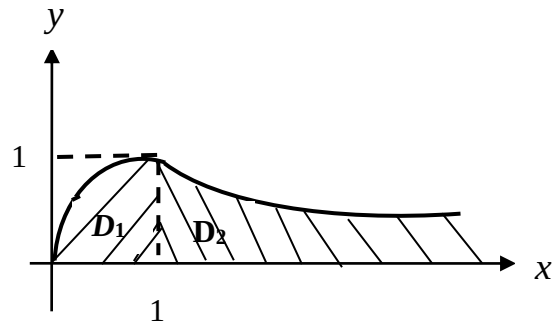
3. Найти площадь фигуры: $y = x^2;\ \ y = \sqrt{x}.$



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,ed^2.$$

4. Найти площадь: $y=\sqrt{x},\ \ y=\frac{1}{x^2},\ y=0.$



Найдем площадь как сумму площадей двух фигур D_1 и D_2.

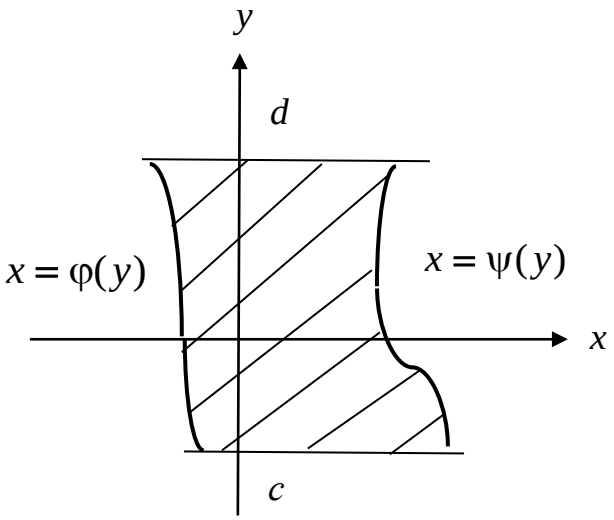
$$S_1=\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}\,e\partial^2,$$

$$S_2=\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1\,e\partial^2,$$

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\,e\partial^2.$$

b) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$x=\varphi(y),\ \ x=\Psi(y),\ \ y=c,\quad y=d,\quad$ где $\varphi(y)\le\Psi(y),\quad c<d$



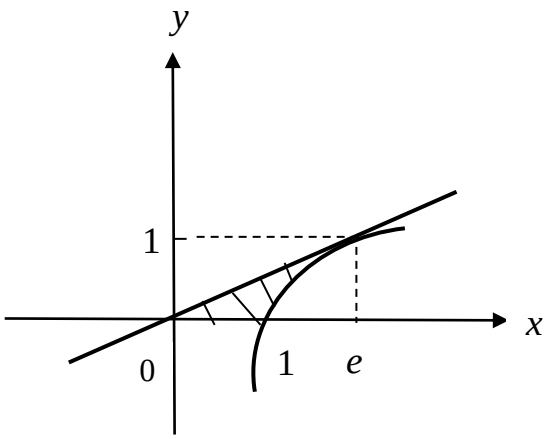
равна:

$$S = \int_c^d (\Psi(y) - \varphi(y))dy.$$

Пример

Найти площадь фигуры: $y = \ln x; \quad y = \frac{1}{e}x; \quad y = 0.$

Построим область:



Запишем её границы: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y; \quad y = \frac{1}{e}x \Rightarrow x = ey; \quad y = 0, \quad y = 1.$

$$S = \int_0^1 (e^y - ey)dy = e^y\Big|_0^1 - e\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = e - 1 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1.$$

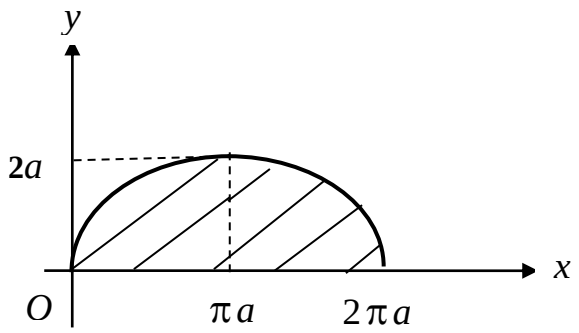
c) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), \quad y = y(t),$ то площадь криволинейной трапеции ограниченной этой кривой, прямыми $x = a,\ x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, находим по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dx,$$

где α и β определяются из условий $x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b,$ а $y(t) \geq 0$ при $\alpha \geq t \leq \beta$.

Пример

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.



Здесь $dx = a(1 - \cos t)\, dt,$ а t изменяется от 0 до 2π.

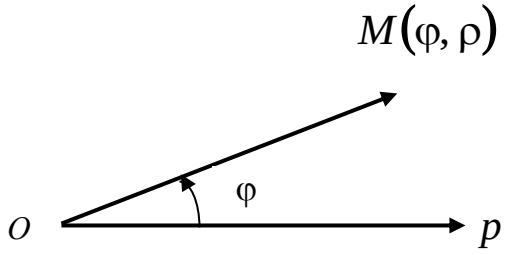
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

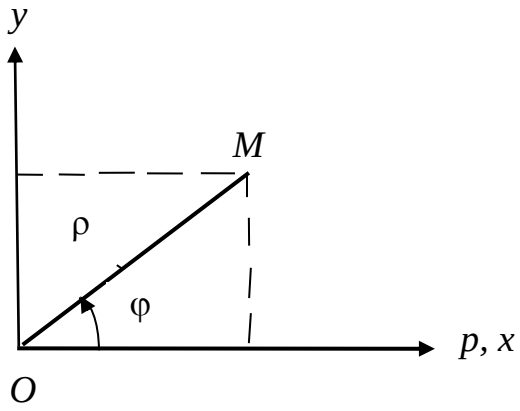
$$= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) = a^2 (2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

d) Площадь фигуры, границы которой заданы в полярных координатах.

Полярная система координат состоит из точки O – полярного полюса и полярной оси Op. Положение точки M определяется двумя координатами: ρ – полярным радиусом – расстоянием от точки M до полюса O и полярным углом φ – углом между радиус-вектором точки M и полярной осью.



Переход от полярных координат к прямоугольным



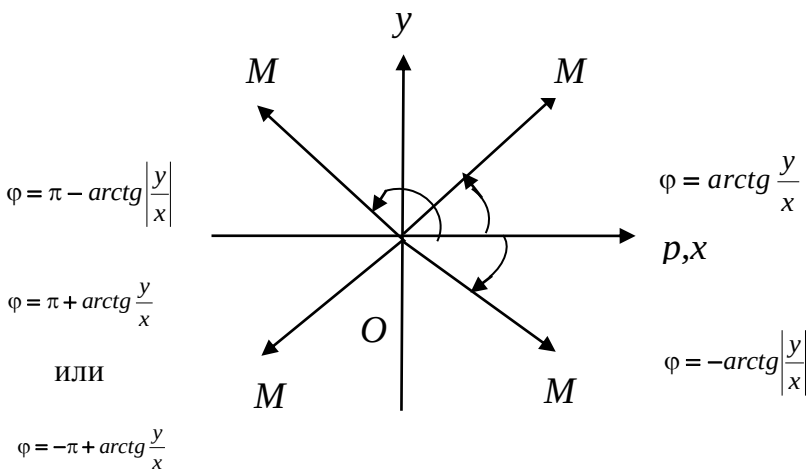
выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Переход от прямоугольных координат к полярным

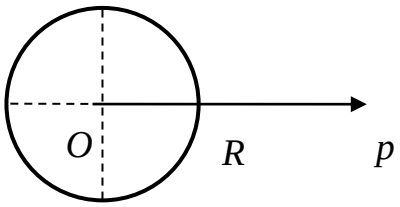
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Угол φ определяется с учетом четверти, в которой лежит точка M (см. рис.).

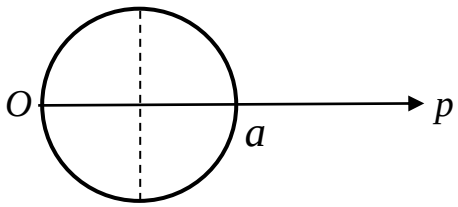


Уравнения некоторых линий в полярных координатах

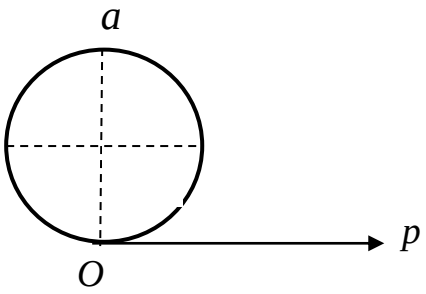
а) $\rho = R$ – уравнение окружности радиуса R с центром в точке O;



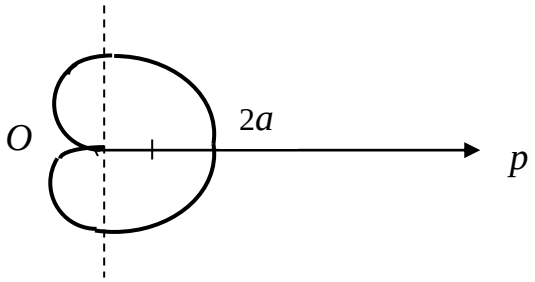
б) $\rho = a\cos\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на полярной оси;



в) $\rho = a\sin\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на прямой, перпендикулярной полярной оси;

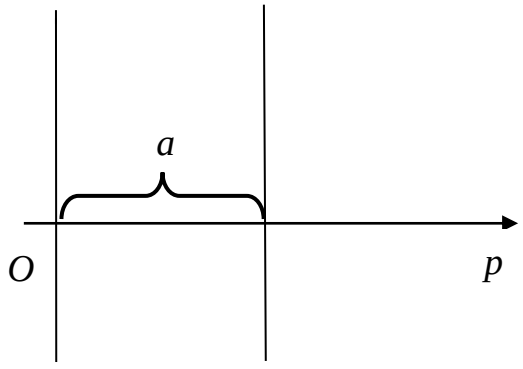


г) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ – уравнение кардиоиды.

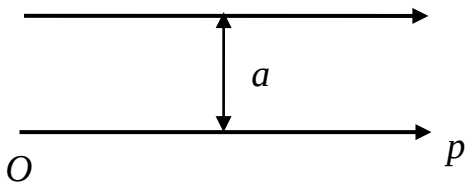


Уравнения $\rho = a(1-\cos\varphi)$; $\rho = a(1+\sin\varphi)$; $\rho = a(1-\sin\varphi)$ – также задают различные кардиоиды.

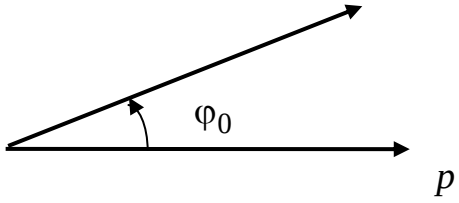
д) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ – уравнение прямой, перпендикулярной оси Op, отстоящей от точки O на расстояние $|a|$;



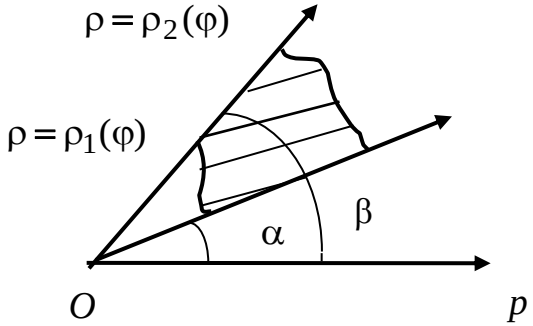
е) $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ – уравнение прямой, параллельной оси Op, отстоящей от неё на расстоянии $|a|$;



ё) $\varphi = \varphi_0$ – уравнение луча, проходящего через точку O под углом φ_0 к оси Op;



Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$

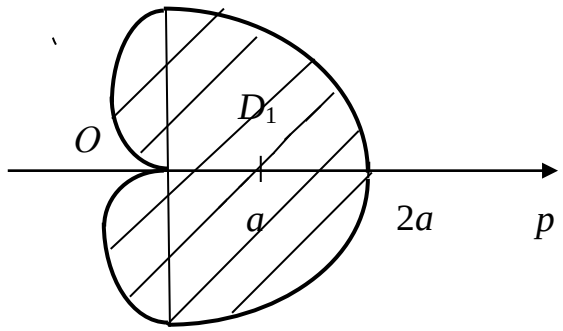


находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, заключенной внутри кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$

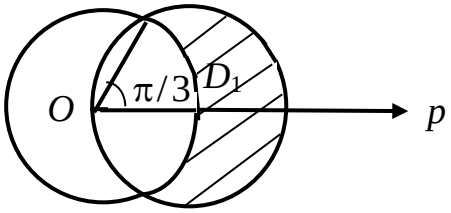


$$S = 2S_{D_1} = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right) = a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= a^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}\ \text{ед}^2.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos\varphi;\quad \rho = 1$ (вне окружности $\rho = 1$).



$$S = 2S_{D_1}$$

Найдем точку пересечения окружностей

$$\begin{cases}\rho = 2\cos\varphi \\ \rho = 1\end{cases} \Rightarrow 2\cos\varphi = 1,\ \cos\varphi = \frac{1}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

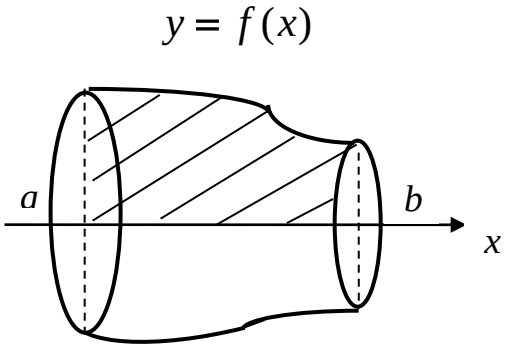
$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\varphi - 1)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 1)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - \sin 0 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ед}^2.$$

3. 2. Объем тела вращения

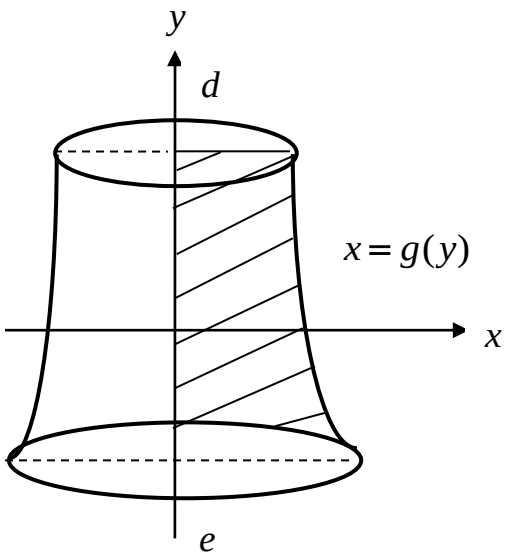
a) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $y = f(x), \quad x = a,$ $x = b, \quad y = 0 \quad (a < b)$ вокруг оси Ox



вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx.$$

b) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $x = g(y), \quad y = c,$ $y = d, \quad x = 0 \quad (c < d)$ вокруг оси Oy



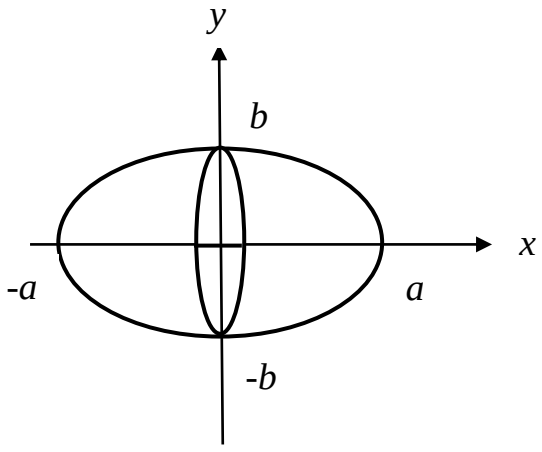
вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

Построим чертеж.



Выразим y^2 из уравнения эллипса

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V_{ox} = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

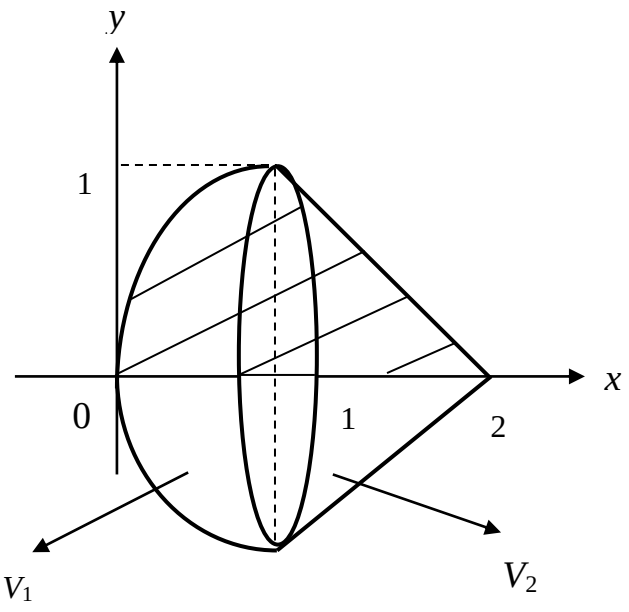
$$= 2\pi b^2\left(x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) = 2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ ед}^3.$$

Заметим, что, если $a = b = R$, то получим объем шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ ед}^3 .$$

2. Найти объем тел вращения вокруг оси Ox и Oy фигуры с границами $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

а)



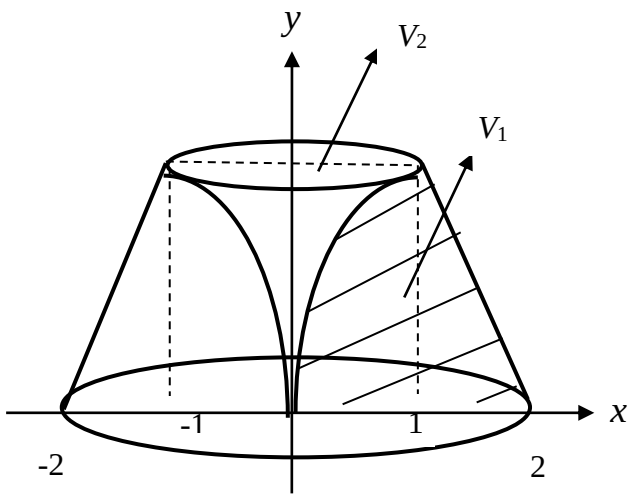
$$V_{0x} = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-2)^2 d(x-2) = \pi \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}\left(0-(-1)^3\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ед}^3$$

$$V_{0x} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \text{ ед}^3.$$

б)



$$V_{0y} = V_1 - V_2$$

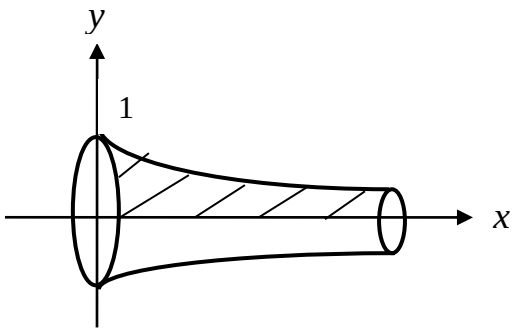
$$V_1 = \pi \int_0^1 (2-y)^2 dy = \pi \int_0^1 (y-2)^2 d(y-2) = \pi \frac{(y-2)^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\left((-1)^3 - (-2)^3\right) = \frac{\pi}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\pi \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ ед}^3$$

$$V_{0y} = \frac{7\pi^{(5}}{3} - \frac{\pi^{(3}}{5} = \frac{32\pi}{15} \text{ ед}^3.$$

3. Вычислить объем тела вращения фигуры с границами $y = e^{-x},\ x = 0,\ y = 0$ вокруг оси $0x$



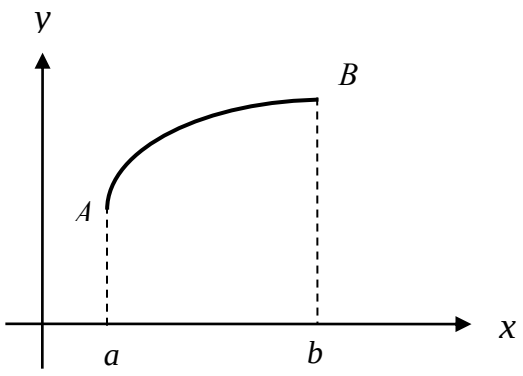
$$V_{ox} = \pi \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2x} d(-2x) = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-2x} \Big|_0^b =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-2b} - e^0\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ед}^2.$$

3.3. Длина дуги плоской кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина дуги кривой от точки A до точки B определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$



Пример

Найти длину дуги кривой: $y=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\,;\quad 0\le x\le 3.$

Найдем производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{3}(3-x)'\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{3}(3-x)\cdot(\sqrt{x})'=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-\frac{2}{3}x+1-\frac{1}{3}x}{2\sqrt{x}}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}.$$

$$l=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{4x}}\,dx=\int_0^3\sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}\,dx=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\,dx=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^3=\frac{1}{3}\sqrt{27}-0+\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}.$$

b) Если кривая AB задана параметрически: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ \alpha\le t\le\beta,$ то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dx.$$

Пример

2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^{3t}\cos 4t \\ y = e^{3t}\sin 3t \end{cases}$, $0 \le t \le \ln 2$,

Найдем производные x'_t и y'_t

$$x'_t = \left(e^{3t}\cdot\cos 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\cos 4t + e^{3t}\cdot\left(\cos 4t\right)' = 3e^{3t}\cos 4t - 4e^{3t}\sin 4t$$

$$y'_t = \left(e^{3t}\cdot\sin 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\sin 4t + e^{3t}\cdot\left(\sin 4t\right)' = 3e^{3t}\sin 4t + 4e^{3t}\cos 4t$$

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = \left(3e^{3t}\cdot\cos 4t - 4e^{3t}\cdot\sin 4t\right)^2 + \left(3e^{3t}\cdot\sin 4t + 4e^{3t}\cdot\cos 4t\right)^2 =$$

$$= 9e^{6t}\cos^2 4t - 24e^{6t}\cos 4t\cdot\sin 4t + 16e^{6t}\sin^2 4t + 9e^{6t}\sin^2 4t +$$

$$+ 24e^{6t}\cdot\sin 4t\cos 4t + 16e^{6t}\cos^2 4t = 25e^{6t}\cos^2 4t + 25e^{6t}\sin^2 4t =$$

$$= 25e^{6t}\left(\cos^2 4t + \sin^2 4t\right) = 25e^{6t}.$$

$$l = \int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt = \int_0^{\ln 2}\sqrt{25e^{6t}}\,dt = \int_0^{\ln 2}5e^{3t}dt = \frac{5}{3}e^{3t}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^0 = \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^0 = \frac{5}{3}e^{\ln 8} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cdot 8 - \frac{5}{3} = \frac{40-5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3};$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4. 1. Вычисление определённых интегралов

Вычислить интегралы, выбрав нужный метод.

1. а) $\int_0^4 \sqrt{4x+1}dx;$ б) $\int_{-2}^{1} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\le x\le 0 \\ 4, & 0<x\le 1 \end{cases};$

в) $\int_0^{\frac{1}{4}} xe^{4x}dx$; г) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}dx.$

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3\cos 3xdx;$ б) $\int_1^2 f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} 0, & 1\le x\le \frac{3}{2} \\ 4x-1, & \frac{3}{2}<x<2 \end{cases};$

в) $\int_1^e x^2\cdot \ln xdx$; г) $\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{4-5x}}.$

3. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$; б) $\int_0^{\pi} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & 0<x\le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases};$

в) $\int_0^1 \operatorname{arctg} xdx$; г) $\int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$

4. 3. а) $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{e^x dx}{e^{6x-1}}$; б) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x<0\\ 1+x, & 0\le x<2\end{cases}$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx$; г) $\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

5. а) $\int_8^{20}\left(\frac{x}{2}+5\right)^{\frac{1}{2}}dx$; б) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}4, & -2\le x<1\\ x, & 1\le x<2\end{cases}$;

в) $\int_0^{\pi}(x-\pi)\cos x dx$; г) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{\left(e^x+1\right)^2}$.

6. а) $\int_8^{0,5}\frac{dx}{(6x-1)^2}$; б) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\le 0\\ 2x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$;

в) $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{e^{2x}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x dx$.

7. а) $\int_{-0,5}^{1} 2\sin\pi x dx$; б) $\int_{-2}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}5, & -2\le x\le -1\\ -5x, & -1<x\le 0\end{cases}$;

в) $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^2}$; г) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)^2}$.

8. а) $\int_{-3}^{0}(x+4)^{-2}dx$; б) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}-2x, & -1\le x<0\\ 2x, & 0\le x\le 2\end{cases}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+4)\sin 2x dx$; г) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

9. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{5dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ e^{2x}, & 0\le x\le 1\end{cases}$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} x^2 \ln x dx$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

10. а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{5dx}{e^{1-5x}}$; б) $\int\limits_{-4}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -4\le x<-2\\ x^2, & -2\le x\le 0\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{e-1} (x+1)\cdot \ln(x+1)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

11. а) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{16x+9}}$; б) $\int\limits_0^{5} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x<4\\ -2, & 4\le x\le 5\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{2\frac{\pi}{}} (x+1)\cos 2x dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$.

12. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(3x+4)^2}$; б) $\int\limits_0^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\le x\le 1\\ 10, & 1<x\le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{1} xe^{9x}dx$; г) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2+8x+15}$.

13. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}6x, & -1\le x\le 0\\ 0, & 1<x\le 3\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot \sin \frac{x}{3}dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$.

14. а) $\int\limits_{0,25}^{0,5} \frac{5dx}{\sin^2 \pi x}$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}6, & -2 \le x < 0\\ 6-x, & 0 < x \le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{e^x}$; г) $\int\limits_{0}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

15. а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\sqrt{3}dx}{x^2+3}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}x_1 - 1, & -1 < x \le 0\\ 2x, & 0 < x \le 1\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x \sin \frac{\pi x}{4} dx$; г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{(2x-1)^3}$.

16. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{16-9x}}$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0 \le x \le \pi\\ \frac{1}{\pi}, & \pi < x \le 2\pi\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} (2x+1)\ln(x+1)dx$; г) $\int\limits_{-3}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

17. а) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\int\limits_{-10}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -10 \le x \le -1\\ (x+1)^2, & -1 < x \le 0\end{cases}$;

в) $\int\limits_{-3}^{-2} (x+3)e^{x+3}dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

18. а) $\int\limits_{0}^{4\pi} 6\cos \frac{x}{12} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}2, & -2 \le x \le -1\\ 0, & -1 < x \le 1\\ 4, & 1 < x \le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$; г) $\int\limits_{2}^{7} \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.

19. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} 12\sin 6x dx;$ б) $\int\limits_{-10}^{10} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases}0, & -10\le x\le 0\\ 5x, & 0<x\le 10\end{cases};$

в) $\int\limits_{0}^{1} x\,e^{1-x}dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(x^2+2x+1)^2}$.

20. а) $\int\limits_{0}^{9}\sqrt[3]{1-x}\,dx;$ б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases};$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x\cdot\sin\, xdx;$ г) $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}dx.$

21. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} 5\sin\frac{x}{4}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases}x+4, & 0\le x\le 1\\ 4, & 1<x\le 2\end{cases};$

в) $\int\limits_{0}^{1-e}\ln(x+e)\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^2+6x+9}.$

22. а) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^x(e^x+1)dx;$ б) $\int\limits_{1}^{3} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases}5, & 1\le x\le 2\\ 5x, & 2<x\le 3\end{cases};$

в) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin 2x}$.

23. а) $\int\limits_{0}^{1} 12(1+x)^5 dx;$ б) $\int\limits_{-11}^{1} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & -1<x\le 0\\ e, & 0<x\le 1\end{cases};$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3x+4)\sin\, xdx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx$.

24. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{\ln 3} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x \le 0 \\ e^x, & 0 < x \le \ln 3 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (4x-3)\cos x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x dx$.

25. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 7, & -2 \le x \le 0 \\ 7x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{e^{2x}}$; г) $\int\limits_5^6 \frac{dx}{(x^2 - 8x + 16)^2}$.

26. а) $\int\limits_0^{e-1} \frac{5dx}{x+1}$; б) $\int f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \frac{\pi}{10} \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-0,25}^{0} xe^{4x+1} dx$; г) $\int\limits_{-5}^{3} x \cdot \sqrt[3]{x+5}\, dx$.

27. а) $\int\limits_5^6 \sqrt[3]{x-5}\, dx$; б) $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le \frac{\pi}{6} \\ \sin 2x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{9}}^{\frac{e}{9}} \ln 9x dx$; г) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 4}$.

28. а) $\int\limits_{10}^{\frac{1}{2}} e^{1-0,1x}dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-1}^{0} \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{xdx}{\sqrt{4x+1}}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{6} \left(\dfrac{x}{6}+1\right)^3 dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 4, & -2 \le x \le 0 \\ 4x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\frac{1}{6}}^{0} x \cdot e^{6x+1}dx$; г) $\int\limits_{0}^{3} x \cdot \sqrt{4-x}\, dx$.

30. а) $\int\limits_{0}^{0,1\pi} 10\cos 5x dx$; б) $\int\limits_{-10}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 2, & -10 < x \le 0 \\ 3x^2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} (4 - x) \cdot e^x\, dx$; г) $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{dx}{1+\sqrt{4-x}}$.

4. 2. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\, xdx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{(2-x)^3}}$;

2. а) $\int\limits_{-\infty}^{1} \dfrac{dx}{x^2+3}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$;

3. а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$;

4. а) $\int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2-4}$;

5. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$;

6. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(2+x^2)^2}$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+8}}$;

7. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. а) $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

9. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$; б) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$;

10. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

11. а) $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$; б) $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$;

12. а) $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)^3}}$;

13. а) $\int_e^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x}$; б) $\int_3^4 \frac{x dx}{x^2 - 9}$;

14. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(3+x^2)^3}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

15. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

16. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$; б) $\int_{-3}^1 \frac{dx}{(3+x)^3}$;

17. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$;

18. а) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^4}$;

19. а) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$; б) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+1)^3}$;

20. а) $\int_1^{\infty} x \cdot e^{-2x^2} dx$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

21. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

22. а) $\int_2^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; б) $\int_4^5 \frac{xdx}{x^2-16}$;

23. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

24. а) $\int_1^{\infty} \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$;

25. а) $\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$; б) $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-6x+5}$;

26. а) $\int_4^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+4}}$; б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}$;

27. а) $\int_1^{\infty} \frac{\ln^3 xdx}{x}$; б) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[6]{5-x}}$;

28. а) $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

29. а) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$; б) $\int_{-3}^0 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+27}}$;

30. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+9}}$; б) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$.

3. 3. Площадь

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

1. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 10;$
   б) $y = 3^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_2 x, \quad y = x, \quad y = 0, \quad y = 1;$
   г) $\rho = \sqrt{3}, \quad \rho = 2\cos\varphi.$

2. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -3x - 1;$
   б) $y = 2^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = 2x, \quad y = -2$ (правая фигура);
   г) $\rho = 2, \quad \rho = 4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

3. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 6;$
   б) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_3 x, \quad y = -3x, \quad y = 1;$
   г) $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (правая фигура).

4. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = x - 2;$
   б) $y = \frac{1}{x^3}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = -x, \quad y = 2, \quad y = 0;$
   г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi.$

5. а) $y = x^2 + 4, \quad y = 5x + 12;$

   б) $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \dfrac{1}{x^4}, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_4 x, \quad y = \dfrac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = 2;$

   г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

6. а) $y = x^2 + 1, \quad y = -x - 11;$

   б) $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad y = x, \quad y = 0, \quad (x \geq 0);$

   в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = 3x, \quad y = 0;$

   г) $\rho = 6\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

7. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -x + 6;$

   б) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = x + 1, \quad y = 0$ (правая фигура);

   в) $y = \log_5 x, \quad y = -5x, \quad y = 0;$

   г) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

8. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = -x - 2;$

   б) $y = e^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad y = -2x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

   г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

9. а) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 10;$

   б) $y = e^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_6 x, \quad y = 3x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

   г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 2$ (нижняя фигура).

10. а) $y=-x^2+9, \quad y=3x-1;$

б) $y=\dfrac{1}{x^5}, \quad y=x, \quad y=0, \quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{5}} x, \quad y=5x, \quad y=-1;$

г) $\rho=1+\cos\varphi, \quad \rho=\dfrac{3}{4\cos\varphi}$ (правая фигура).

11. а) $y=x^2-2x, \quad y=-3x+12;$

б) $y=4^{x-1}, \quad y=x, \quad y=0;$

в) $y=\log_7 x, \quad y=-7x, \quad y=1;$

г) $\rho=1, \quad \rho=4\cos\varphi$ (правая фигура).

12. а) $y=-x^2+25, \quad y=-x+13;$

б) $y=5^{-x+1}, \quad y=1-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{7}} x, \quad y=-2x, \quad y=-1, \quad y=1;$

г) $\rho=2, \quad \rho=2\sqrt{2}\sin\varphi$ (верхняя фигура).

13. а) $y=x^2-8x, \quad y=x;$

б) $y=\dfrac{16}{x^2}, \quad y=x^2, \quad y=0, \quad (x\ge 0);$

в) $y=\log_6 x, \quad y=3x, \quad y=-1 \quad y=2;$

г) $\rho=1+\cos\varphi, \quad \rho=\dfrac{3}{2}$ (правая фигура).

14. а) $y=-x^2+4, \quad y=-5;$

б) $y=\dfrac{32}{x^3}, \quad y=x^2, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x, \quad y=6x, \quad y=-2;$

г) $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi, \quad \rho=\sin\varphi.$

15. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = 2x + 16;$

б) $y = \sqrt{x-2}, \quad y = \dfrac{81}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_8 x, \quad y = -8x, \quad y = 2;$

г) $\rho = \cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{3}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

16. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -7;$

б) $y = \dfrac{1}{(x-3)^3}, \quad y = x - 3, \quad y = 0, \quad (x \geq 3);$

в) $y = \log_{\frac{1}{9}} x, \quad y = -2x, \quad y = 3, \quad y = 0;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{3}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

17. а) $y = x^2 - 6x, \quad y = -6x + 4;$

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = -x + 1, \quad y = 0$ (левая фигура);

в) $y = \lg x, \quad y = \dfrac{1}{3}x, \quad y = -1, \quad y = 0;$

г) $\rho = 1 - \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (левая фигура).

18. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3;$

б) $y = 2e^x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{0,1} x, \quad y = 10x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

19. а) $y = x^2 + 6x, \quad y = 6x - 25;$

б) $y = 3e^{-x}, \quad y = x + 3, \quad y = 0;$

в) $y = \lg x, \quad y = -2x, \quad y = 3;$

г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 1$ (нижняя фигура).

20. а) $y=-x^2+4, \quad y=-2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x-5)^5}, \quad y=x-1, \quad (x\le 1);$

в) $y=\log_{0,1} x, \quad y=-x, \quad y=1, \quad y=2;$

г) $\rho=1-\cos\varphi, \quad \rho=-\dfrac{3}{4\sin\varphi}.$

21. а) $y=x^2-4x, \quad y=-2x+5;$

б) $y=3^{x-2}, \quad y=3-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_2 x, \quad y=3x, \quad y=1, \; y=3;$

г) $\rho=\sqrt{2}, \quad \rho=2\cos\varphi$ (правая фигура).

22. а) $y=-x^2+16, \quad y=-9;$

б) $y=3\cdot 2^{-x}, \quad y=3-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{3}} x, \quad y=3x, \quad y=-3;$

г) $\rho=2\sqrt{2}, \quad \rho=4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

23. а) $y=x^2+4x, \quad y=2x+3;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}, \quad y=(x+2)^2, \quad y=0, \quad (x\ge -2);$

в) $y=\log_3 x, \quad y=-3x, \quad y=4;$

г) $\rho=3(1+\cos\varphi), \quad \rho=3$ (правая фигура).

24. а) $y=-x^2+4, \quad y=2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+1)^3}, \quad y=(x+1)^2, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{4}} x, \quad y=-4x, \quad y=-2, \quad y=2;$

г) $\rho=\cos\varphi, \quad \rho=\sqrt{3}\sin\varphi.$

25. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 4;$

б) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{2}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_4 x, \quad y = 2x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 2\cos\varphi, \quad \rho = \frac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

26. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3x - 3;$

б) $y = \frac{5}{x^3}, \quad y = 5x, \quad y = 0, \quad (x \le 0);$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = 5x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 3(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

27. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -5x + 4;$

б) $y = \frac{3}{1 + x^2}, \quad y = 3 + x, \quad y = 0$ (правая фигура);

в) $y = \log_6 x, \quad y = -6x, \quad y = 1;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \frac{2}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

28. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = 3x + 5;$

б) $y = e^{x-3}, \quad y = 4 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = -2x, \quad y = -2, \quad y = 2;$

г) $\rho = 3(1 + \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (верхняя фигура).

29. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -2x + 8;$

б) $y = e^{-x+2}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_5 x, \quad y = 4x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 3(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 3$ (нижняя фигура).

30. а) $y=-x^2+9, \quad y=2x+1;$

б) $y=\frac{4}{x^5}, \quad y=4x, \quad y=0, \quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x, \quad y=6x, \quad y=-2;$

г) $\rho=1+\sin\varphi, \quad \rho=\frac{3}{4\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

4. 4. Объем тела вращения

Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями,

а) вокруг оси Ox

б) вокруг оси Oy

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1; \quad y=\pm 2$

2. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1; \quad x=8$

3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1; \quad y=2$

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1; \quad x=1$

5. $y^2=2x; \quad x=2$

6. $y^2=-3x; \quad x=-3$

7. $y=x^2+1; \quad y=2$

8. $y=x^2-8; \quad y=-4$

9. $y=\sin x,\ y=2-\frac{2}{\pi}x,\ y=0$

10. $y=\cos x,\ y=1,\ x=-\frac{\pi}{2}$

11. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1; \quad y=\pm 3$

12. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1; \quad x=6$

13 $y^2=5x,\ x=5$

14 $y^2=-4x,\ x=-4$

15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1; \quad y=1$

16. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1; \quad x=3$

17. $y=x^2+4; \quad y=8$

18. $y=x^2-2; \quad y=-1$

19. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

20. $y = \cos x,\ y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

21. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1;\quad y = \pm 1$

22. $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1;\quad x = 2$

23. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1;\quad y = 2$

24. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1;\quad x = 2$

25. $y^2 = 7x;\quad x = 7$

26. $y^2 = 6x;\quad x = -6$

27. $y = x^2 + 9;\quad y = 18$

28. $y = x^2 - 18;\quad y = -9$

29. $y = \sin x,\ y = 1,\ y = 0,\ x = 2$

30. $y = \cos x,\ y = 1,\ y = 0, x = 2$

4. 5. Длина дуги плоской кривой

1. *а)* $y = \sqrt{4 - x^2}$
$-1 \le x \le 1;$

б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

2. *а)* $y = \ln \sin x$
$\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

3. *а)* $y = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
$0 \le x \le 3;$

б) $\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t \\ y = 3\sin t - 4\cos t \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

4. *а)* $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$
$0 \le x \le 4;$

б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

5. *а)* $y = \ln\cos x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

б) $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

6. *а)* $y = 4 - 3\ln(x^2 - 9)$

$4 \le x \le 6;$

б) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

7. *а)* $y = \sqrt{9 - x^2}$

$-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2};$

б) $\begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = \frac{t^3}{3} - 2 \end{cases}$

$0 \le t \le 3.$

8. *а)* $y = \ln(2\sin x)$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 1 \\ y = \frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}} - 3 \end{cases}$

$0 \le t \le 2.$

9. *а)* $y = \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$

$-1 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

10. *а)* $y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$

$0 \le x \le 3$

б) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

11. *а)* $y = \ln(5\cos x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3};$

б) $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

12. *а)* $y = 3 + \ln(x^2 - 1)$

$2 \le x \le 3;$

б) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi.$

13. *а)* $y = \sqrt{16 - x^2}$

$-2 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi.$

14. *а)* $y = \ln(3\sin x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3};$

б) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

15. *а)* $y = 2(x+3)^{\frac{3}{2}}$

$-2 \le x \le 1;$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - 1 \\ y = 2t^2 + 3 \end{cases}$

$0 \le t \le 3.$

16. *а)* $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$

$0 \le x \le 4;$

б) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

17. *а)* $y = \ln(4\cos x)$

$0 \le x \le \frac{\pi}{6};$

б) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

18. *а)* $y = 5 - 3\ln(x^2 - 9)$

$4 \le x \le 5;$

б) $\begin{cases} x = 8\sin t - 6\cos t \\ y = 6\sin t + 8\cos t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

19. *а)* $y = \sqrt{25 - x^2}$

$-\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2};$

б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

20. *а)* $y = \ln(4\sin x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4};$

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

21. *а)* $y = \frac{2}{3}(x + 4)^{\frac{3}{2}}$

$-3 \le x \le 0;$

б) $\begin{cases} x = 4\cos t - \cos 4t \\ y = 4\sin t - \sin 4t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

22. *а)* $y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$

$0 \le x \le 1;$

б) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t^2 - 2 \\ y = \frac{t^3}{3} + 5 \end{cases}$

$0 \le t \le 4.$

23. *а)* $y = \ln(3\cos x)$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4};$

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

24. *а)* $y = 3 + 2\ln(x^2 - 4)$

$3 \le x \le 5;$

б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

25. *а)* $y = \sqrt{36 - x^2}$

$-3 \le x \le 3;$

б) $\begin{cases} x = 4\sin t - 3\cos t \\ y = 3\sin t + 4\cos t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

26. *а)* $y = \ln(5\sin x)$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

27. *а)* $y = \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$1 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

28. *а)* $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$0 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

29. *а)* $y = \ln(2\cos x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4};$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 2 \\ y = \frac{3}{2}t^2 + 7 \end{cases}$

$0 \le t \le 4.$

30. *а)* $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$

$3 \le x \le 4;$

б) $\begin{cases} x = \frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}} + 3 \\ y = \frac{t^3}{3} - 2 \end{cases}$

$0 \le t \le 2.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнниях и задачах. Часть 1. – М.: ООО “Изд-во Оникс”, 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. М. ПЛОТНИКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……... 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ .…… 5
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ .……...… 25
ОТВЕТЫ ….…… 71
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ……....83

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного обучения.

Пособие содержит 30 вариантов заданий по теме «Теория вероятностей». В начале пособия даны методические указания с подробными решениями аналогичных задач. В конце пособия указаны ответы.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и её приложений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным в вариантах.

Задача 1

При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов ровно 84 будут бракованными?

Решение

Так как $n = 400$ представляет собой достаточно большое число и $p = 0{,}2$, то можно считать, согласно локальной теореме Лапласа, что случайная величина $X = k$ распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближённо равна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

По условиям задачи $k = 84$; $q = 0{,}8$, $p = 0{,}2$, $n = 400$, тогда

$$P(X = 84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\varphi(0{,}5) = \frac{1}{8} 0{,}3521 \approx 0{,}044.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приводится в приложениях к учебникам (см., например [4], прил. 1. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике). Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ – чётная.

Задача 2

Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}4;\ \ p_2 = 0{,}5;\ \ p_3 = 0{,}7.$$

Найти вероятности того, что в результате этих трёх выстрелов по мишени будет:

а) ровно одно попадание;

б) хотя бы одно попадание;

в) ровно два попадания.

Решение

а) Пусть событие A – одно попадание в мишень. Обозначим $A_1 - A_3$ – события, означающие попадания в мишень соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Событие A выражается так

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

где $\overline{A}_1 - \overline{A}_3$ – события, противоположные соответственно событиям $A_1 - A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

б) Пусть событие B – хотя бы одно попадание в мишень, тогда

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Но легче подсчитать вероятность противоположного события $\overline{B}$ – ни одного попадания при трёх выстрелах:

$$\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Тогда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$

в) Пусть событие C равно двум попаданиям, тогда

$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3,$$

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41.$$

Задача 3

По каналу связи передаётся один из двух возможных сигналов x_1 или x_2. Сигнал x_2 передаётся в среднем в два раза чаще, чем сигнал x_1. Из-за наличия помех возможны искажения: вместо сигнала x_1 на приёме может быть получен сигнал x_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал x_1 подвергается искажениям в 10 %, а сигнал x_2 – в 20 % случаев. Предположим, что получен сигнал x_1. Какова вероятность, что передан этот же сигнал?

Решение

Введём обозначения:

событие A – передан сигнал x_1;

событие B – получен сигнал x_1.

Тогда событие $\overline{A}$ – передан сигнал x_2. Событие B может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) A и $\overline{A}$.

По условиям задачи:

$$P(A) = \frac{1}{3}; \quad P(\overline{A}) = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, при условии, если передали этот же сигнал:

$$P(B/A)=0{,}9.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, если передали сигнал x_2:

$$P(B/\overline{A})=0{,}2.$$

Искомую вероятность $P(A/B)$ находим по формуле Бейеса

$$P(A/B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{2}{3}\cdot 0{,}2}\approx 0{,}692.$$

Задача 4

"n" стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для каждого стрелка равна $p=0{,}004.$ Определить количество стрелков, которое потребуется для поражения цели с вероятностью не меньшей, чем $P=0{,}98.$

Решение

Пусть событие A – поражение цели стрелками, тогда $\overline{A}-$ промахи всех стрелков. Так как выстрелы производятся независимо друг от друга, то по теореме умножения вероятностей

$$P(\overline{A})=(1-p)^n,$$

а вероятность наступления события A

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-p)^n.$$

По условию задачи необходимо, чтобы

$$1-(1-p)^n\geq P$$

или

$$1-P \geq (1-p)^n.$$

Отсюда

$$\lg(1-P) \geq n \cdot \lg(1-p)$$

и, с учетом того, что $\lg(1-p) < 0$:

$$n \geq \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}.$$

При p = 0,004 и P = 0,98 получим

$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}996} \approx 976.$$

Ответ

Для поражения цели требуется не менее 976 стрелков.

Задача 5

Из партии, состоящей из 50 изделий, среди которых имеется 5 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке, и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Решение

Возможными значениями случайной величины X будут

$x_1 = 0$ (в выборке нет бракованных изделий);

$x_2 = 1$ (в выборке одно бракованное изделие);

$x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4$ (все четыре выбранных изделия бракованные).

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет эти значения.

а) $x_1 = 0.$

Согласно классическому определению вероятности, вероятностью события A называется отношение числа благоприятных случаев m к общему числу случаев n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Общее число состоит из возможных комбинаций, которые можно образовать из 50 изделий по четыре, т. е.

$$n = C_{50}^4,$$

где число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Из этого числа случаев благоприятными являются только те выборки, которые не содержат бракованных изделий. Так как имеется 45 небракованных изделий, то число благоприятных случаев – это число способов, которыми можно выбрать 4 изделия из 45, т. е.

$$m = C_{45}^4,$$

тогда для $x_1 = 0$

$$p_1 = \frac{C_{45}^4}{C_{50}^4} = \frac{\frac{45!}{4!\cdot 41!}}{\frac{50!}{4!\cdot 46!}} = \frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50} = 0{,}64696.$$

б) $x_2 = 1.$

Общее число случаев $n = C_{50}^4.$

Благоприятными случаями являются те выборки, которые содержат одно бракованное изделие и три небракованных.

Число способов, которыми можно выбрать одного бракованное изделие из пяти, равно числу сочетаний из 5 по 1, т. е. $C_5^1.$

Кроме того, число способов, которыми можно выбрать остальные три небракованных изделия из 45, равно $C_{45}^3.$ А так как каждое выбранное бракованное изделие может оказаться в одной выборке с каждой из троек небракованных

изделий, то число всех выборок по 4 изделия, в которых одно бракованное, а три небракованных, равно: $C_5^1 \cdot C_{45}^3$, тогда

$$p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_{45}^3}{C_{50}^4} = 0{,}30807.$$

в) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное 2, равна $(x_3 = 2)$

$$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^4} = 0{,}043.$$

г) $x_4 = 3.$

$$p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^4} = 0{,}00195.$$

д) $x_5 = 4.$

$$p_5 = \frac{C_5^4 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^4} = 0{,}00002.$$

Получим следующий ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,64696	0,30807	0,043	0,00195	0,00002

Определяем математическое ожидание (округлим до 0,001).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 2 \cdot 0{,}043 + 3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0 = 0{,}398 \approx 0{,}4.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2.$$

Для нахождения дисперсии составим ряд распределения для величины x^2 (вероятности округлены до 0,001)

X^2	0	1	4	9	16
P	0,647	0,308	0,043	0,002	0

тогда

$$D(X) = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 4 \cdot 0{,}043 + 9 \cdot 0{,}002 + 16 \cdot 0 - (0{,}4)^2 \approx 0{,}338 \approx 0{,}34.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}34} \approx 0{,}58.$$

Найдём функцию распределения $F(x)$. Согласно определению, функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

1. Пусть $x \le 0$; так как число изделий отрицательным быть не может, то для любого $x \le 0$ (включая 0) $F(x) = 0.$
2. Пусть $0 < x \le 1$ (например, $x = 1/2$):

$$F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}64696.$$

3. Пусть $1 < x \le 2$ (например, 1,75):

$$F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}64696 + 0{,}30807 = 0{,}95503.$$

Очевидно, что и $F(2) = 0{,}95503.$

4. Пусть $2 < x \le 3$, тогда

$$F(x) = P\{X < 3\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} + P\{x = 2\}$$

$$= 0{,}95503 + 0{,}043 = 0{,}99803.$$

5. Пусть $3 < x \le 4$: $F(x) = P\{X < 4\} = 0{,}99803 + 0{,}00195 = 0{,}999.$

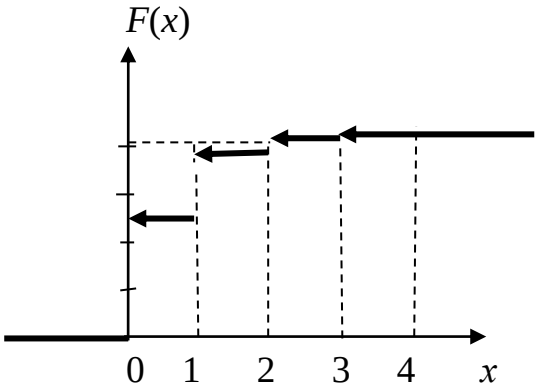
Тогда и $F(4) = 0{,}99998.$

6. Пусть $x > 4$: $F(x) = 0{,}99998 + 0{,}00002 = 1.$

Итого:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}64696, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}95503, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99803, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}99998, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Изобразим графические функции $F(x)$:



Задача 6

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0{,}3; \quad M(X) = 3{,}4; \quad D(X) = 0{,}84.$

Решение

Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет x_2, равна 1 – 0,3 = 0,7.

Напишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
P	0,3	0,7

Для отыскания x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2

Найдем $M(X)$

$$M(X) = 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2.$$

По условию: $M(X) = 3{,}4,$ следовательно,

$$0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 3{,}4 \qquad (1)$$

Напишем закон распределения X^2

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,3	0,7

Найдём $M(X^2)$

$$M(X^2) = 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2.$$

Формула для нахождения дисперсии имеет вид

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Подставляя, $D(X) = 0{,}84,$ получим

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - (3{,}4)^2 = 0{,}84$$

или

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4. \qquad (2)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 3{,}4 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 34 \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 124. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = \frac{34 - 7x_2}{3}.$$

Подставляя это значение x_1 во второе уравнение, получим после упрощения

$$5x_2^2 - 34x_2 + 56 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут числа $x_2' = 2{,}8$ и $x_2'' = 4.$
Для $x_2' = 2{,}8$ находим

$$x_1' = \frac{34 - 7 \cdot 28}{3} = 4{,}8.$$

Для $x_2'' = 4$ находим

$$x_1'' = \frac{34 - 7 \cdot 4}{3} = 2.$$

Но по условию задачи $x_1 < x_2,$ поэтому остаётся принять, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 4.$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	2	4
P	0,3	0,7

Задача 7

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$. Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{12}\right)$, если

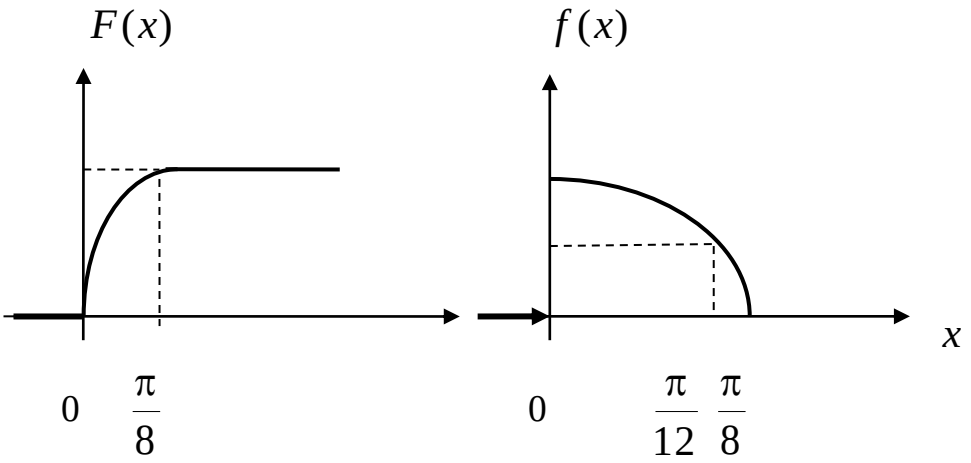
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0\\ \sin 4x, & \text{при} \quad 0\le x\le \frac{\pi}{8}\\ 1, & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{8}\end{cases}$$

Решение

Для нахождения плотности вероятности $f(x)$ воспользуемся формулой $f(x)=F'(x)$. Тогда

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0\\ 4\cos 4x, & \text{при} \quad 0<x\le \frac{\pi}{8}\\ 0, & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{8}.\end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ таковы:



Для нахождения математического ожидания используем формулу

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx,$$

где a и b – границы интервала, которому принадлежат все возможные значения X.

Подставив $a=0;\quad b=\dfrac{\pi}{8};\quad f(x)=4\cos 4x$, получим

$$M(X)=\int_0^{\pi/8} x\cdot 4\cos 4x dx=4\int_0^{\pi/8} x\cdot\cos 4x dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & dv=\cos 4x dx \\ du=dx; & v=\dfrac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right|=$$

$$=4x\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\frac{1}{4}\sin 4x=$$

$$=x\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\sin 4x dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{4\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\pi/8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

тогда

$$D(X) = 4\int_a^b x^2 \cos 4xdx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & \cos 4xdx = dv \\ du = 2xdx, & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{array} \right| =$$

$$= 4\frac{1}{4}\sin 4x \cdot x^2 \Big|_0^{\pi/8} - 4\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} 2x \sin 4x - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= x^2 \sin 4x \Big|_0^{\pi/8} - 2\int_0^{\pi/8} x \sin 4xdx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = u, & \sin 4xdx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{4}\cos x \end{array} \right| =$$

$$\frac{\pi^2}{64} - 2(-\frac{1}{4}x\cos 4x\Big|_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}\cos 4xdx) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - 2\frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8} - -\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi - 3}{16}.$$

Вероятность того, что заданная величина X примет значения, заключённые в интервале $\left(\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{12}\right)$, находится по формуле

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

тогда

$$P\left(\frac{\pi}{16}<X<\frac{\pi}{12}\right)=\sin 4x\Big|_{\pi/16}^{\pi/12}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}159.$$

Задача 8

Найти вероятность того, что в четырёх независимых испытаниях событие A повторится:

а) ровно два раза;

б) не менее двух раз;

в) не более двух раз;

г) хотя бы один раз,

если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,4.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события $p(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q=1-p;$ тогда вероятность того, что в четырёх испытаниях событие A наступит:

а) ровно два раза, равна

$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}16\cdot 0{,}36=0{,}3456;$$

б) не менее двух раз:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=0{,}3456+0{,}1536+0{,}0256=0{,}5248;$$

в) не более двух раз:

$$P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=1-P_4(3)-P_4(4)=$$

$$=1-0{,}1536-0{,}0256=0{,}8208;$$

г) хотя бы один раз:

$$P_4(1)+P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)=$$

$$=1-C_4^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^4=1-0{,}1296=0{,}8704.$$

Задача 9

Известны математическое ожидание $a=7$ и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (4, 13).

Решение

Вероятность того, что нормально распределённая величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), равна:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Подставив $\alpha=4,\quad \beta=13,\quad a=7$ и $\sigma=3$, получим

$$P(4<X<13)=\Phi\left(\frac{13-7}{3}\right)-\Phi\left(\frac{4-7}{3}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1).$$

По таблице значений функций Лапласа (смотреть, например [4]. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, прил. 2) находим:

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Phi(1) = 0{,}3413,$$

тогда

$$P(4 < X < 13) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

Задача 10

В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвёртом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение

Общее число случаев $n = 6^3 = 216, \quad P(A) = \frac{1}{216}.$ Вероятность события B вшестеро больше вероятности события A (так как этажей, на которых можно выйти, 6); $m = 6$ и $\mathrm{P(B)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$ Для события C число способов, которыми можно распределить трёх пассажиров по шести этажам: $m = C_6^3 = 20;$ $P(C) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54.}$

Задача 11

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Решение

Вероятность выигрыша для игроков обозначим p_1 и p_2.

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{2}{3}.$$

Имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4}, S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{3}.$

$$p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{3},$$

где $b_1 = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}.$

Другое решение:

$$p_1 + p_2 = 1,\ p_2 = \frac{1}{2} p_1, \quad \text{т. е.} \quad p_1 = \frac{2}{3},\ p_2 = \frac{1}{3}.$$

Задача 12

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-x^2+2x+3}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $-\frac{1}{3} < X < \frac{4}{3}.$

Решение

Используем формулы для нормального распределения. Плотность нормального распределения: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x) = \gamma e^{-((x^2-2x+1)-1-3)} = \gamma e^{-(x-1)^2+4} = \gamma e^4 e^{-(x-1)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$2\sigma^2 = 1, \quad D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma e^4 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}; \quad \gamma = \frac{1}{e^4\sqrt{\pi}};$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{2}+\Phi(\sqrt{2}(x-1));$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right);$$

$$P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\Phi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=$$

$$=\Phi(0{,}4714)+\Phi(1{,}8856)=0{,}1808+0{,}4706=0{,}6514.$$

Задача 13

Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\bar{\in}[a,b].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной x, если a = 4, b = 6.

Решение

$$Y = \varphi(x) = x^2, \qquad M(Y) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,$$

$$M(Y) = \int_4^6 x^2 \frac{(x-4)}{2} dx = \frac{86}{3};$$

$$D(Y) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - M^2(Y);$$

$$D(Y) = \int_4^6 x^4 \frac{(x-4)}{2} dx - \left(\frac{86}{3}\right)^2 = \frac{1084}{45} \approx 24{,}1.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

1. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

2. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий, соответственно, 0,1; 0,2; 0,5. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

3. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы один раз?

4. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

а) не менее 20 конденсаторов;

б) менее 28 конденсаторов;

в) от 14 до 26 конденсаторов.

5. Опыт состоит из трёх бросаний монеты, из которых герб выпадает с вероятностью p = 0,5. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

Вариант № 2

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два; в) только один вопрос.

2. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

3. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в соотношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажён.

4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах, стрелок поразит мишень 8 раз. Результат, полученный применением локальной теоремы Лапласа, сравнить с результатом, полученным по формуле Бернулли.

5. Опыт состоит из четырех независимых бросаний монеты, в каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

Вариант № 3

1. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется чёрным.

2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

3. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 рублей, на 50 билетов – по 20 рублей, на 100 билетов – по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

4. Для определения содержания полезных компонентов на металлургическом комбинате проводится опробование вагонов с товарной рудой. Найти вероятность того, что из 400 вагонов опробование пройдут ровно 80 вагонов, если из 5 вагонов опробуется только один.

5. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Для случайного числа попаданий построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения, г) найти математическое ожидание.

Вариант № 4

1. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях производят по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадает в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

2. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе – 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Найти вероятность того, что любая извлечённая литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

3. Студент знает 70 из 90 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

4. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включённым в течение $p = 0{,}8$ всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 80 станков?

5. Производится взрывание пяти скважин. Вероятность высокой эффективности объёма взорванной массы одной скважины равна 0,7. Построить ряд распределения эффективности объёма взорванной массы и найти её математическое ожидание.

Вариант № 5

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

2. Автомат штампует детали. Вероятность того, что за один час не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Найти вероятность того, что будут стандартными все детали, выпущенные за 3 часа.

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3/2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

4. Из цифр 1 – 5 выбирается наудачу одна, затем из оставшихся также наудачу выбирается вторая. Найти вероятности следующих событий:

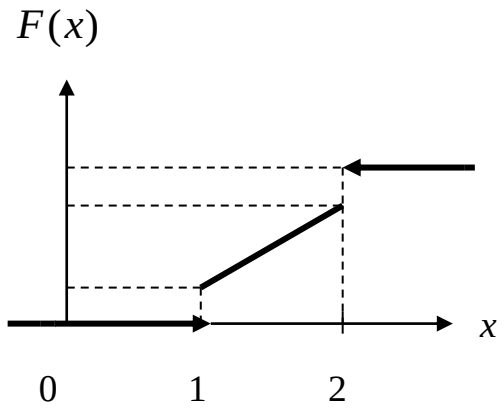
событие A – первая цифра чётная;

событие $Б$ – вторая цифра чётная;

событие B – обе цифры чётные;

событие D – хотя бы одна цифра чётная.

5. Случайная величина X имеет функцию распределения, заданную графически.



Значения $x=1$ и $x=2$ имеют отличные от нуля вероятности:

$$P\{x=1\}=0{,}25,$$

$$P\{x=2\}=0{,}75,$$

при $x<1$ $F(x)=0,$ при $x>2$ $F(x)=1.$

На участке $1\le x\le 2$ $F(x)$ изменяется по линейному закону. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант № 6

1. Для сигнализации об аварии установили три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9; второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

2. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02; для второго – 0,03; для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

3. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 1.

4. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

5. Производятся последовательные испытания приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

Вариант № 7

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1400 испытаниях событие наступит ровно 28 раз.

2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

3. Из колоды в 52 карты вынимается наудачу три карты. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность следующих событий:
событие A – все пять раз появится герб;
событие $Б$ – хотя бы один раз появится герб;
событие B – герб появится ровно два раза.

5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб.; четыре выигрыша по 25 руб.; десять – по 10 руб.; остальные невыигрышные. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша) и найти математическое ожидание.

Вариант № 8

1. В партии из 100 деталей имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 5 изделий, наудачу взятых из этой партии, только 2 окажутся дефектными.

2. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причём из них в первом ящике 17, а во втором – 15 нестандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика будет стандартной.

3. Данное предприятие в среднем даёт 21 % продукции высшего сорта и 70 % продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

4. Вероятность того, что в результате четырёх независимых опытов событие A произойдёт хотя бы один раз, равна 0,5. Определить вероятность появления события A при одном опыте, если она во всех опытах остаётся неизменной.

5. Игральная кость брошена 2 раза. Написать ряд распределения числа появлений «тройки» и найти математическое ожидание.

Вариант № 9

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

2. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт, вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, для второй эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица.

3. Два студента ищут нужную им книгу в букинистических магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым – 0,7. Какова вероятность того, что только один из студентов найдет книгу?

4. С помощью карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

5. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

Вариант № 10

1. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляется 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

2. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено 2 залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

3. На столе лежат 36 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, …, 36. Преподаватель берёт три любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырёх?

4. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна 0,6. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5. Энергосистема состоит из четырёх блоков, работающих независимо. Вероятность исправного состояния блоков в течение времени T равна 0,6. Рассматривается случайная величина X – число блоков, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить ряд распределения, функцию распределения величины X. Найти её математическое ожидание.

Вариант № 11

1. Из трёх орудий произведены залпы по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадает в цель.

2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 0,2 % брака, а второй – 0,3 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 3000, а со второго 2000 деталей.

3. На экзамене студенту предлагается 20 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять из известных ему вопросов?

4. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа от каждого из которых равна $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа: а) одного элемента; б) хотя бы одного элемента.

5. В техническом устройстве работают независимо 2 блока. Вероятность безотказной работы первого блока 0,4; второго – 0,7. Случайная величина X – число работающих блоков. Построить ряд распределения, многоугольник распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант № 12

1. Из 50 проб химического состава рудной массы в 35 пробах обнаружено наличие тяжелых металлов. Найти вероятность того, что тяжёлые металлы содержатся в двух взятых наудачу пробах.

2. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найти вероятность получения небракованной детали после трёх операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются событиями независимыми.

3. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1 : 3 : 6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9; средний – 0,3; мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьёт её?

4. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

Вариант № 13

1. В каждой из двух урн содержатся 3 чёрных и 7 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

2. Охотники Александр, Виктор и Павел попадают в летящую утку с вероятностями, соответственно равными: 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет убита?

3. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит 3 технологических операции, вероятность получения брака при каждой из которых равны, соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются 2 операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае вероятность получения продукции первого сорта для небракованной детали равна 0,9, а во втором – 0,8.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение 1 минуты не будет ни одного вызова?

5. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 руб., четыре – по 50 руб., 5 – по 40 руб. и десять по 10 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша). Найти $M(X), D(X),$ составить функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Вариант № 14

1. Три автомата изготовляют детали, которые поступают на общий контейнер. Производительность первого, второго и третьего автоматов относится как 2/3/5. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, отличного качества, равна 0,9, для второго и третьего автоматов эти вероятности, соответственно, равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

2. В записанном номере телефона оказалась стёртой последняя цифра. Какова вероятность того, что, наудачу набирая последнюю цифру телефонного номера, Вы сразу позвоните нужному лицу? Вычислить эту вероятность, предлагая, что Вы вспомнили, что последняя цифра: а) нечётная; б) не больше 5.

3. Производится выстрел по трём складам боеприпасов. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

4. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.

Вариант № 15

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии первое устройство сработает, равна 0,8, для второго и третьего устройства эти вероятности, соответственно, равны 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают: а) только одно устройство, б) только два устройства; в) все три устройства.

2. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат даёт 0,3 % брака, второй – 0,2 % брака, третий – 0,4 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

3. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделён на 6 секторов, отмеченных определёнными цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда цифры образуют определённую комбинацию. Какова вероятность открыть замок, установив определённую комбинацию цифр?

4. Игральная кость брошена 3 раза. Написать ряд распределения числа появлений шестёрки. Найти $M(X), D(X),$ составить функцию распределения $F(x)$.

5. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 40?

Вариант № 16

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность двух попаданий при трёх выстрелах.

2. На сборку поступают детали с четырёх автоматов. Первый даёт 40 %, второй – 30 %, третий – 20 %, а четвёртый 10 % всех деталей данного типа, которые поступают на сборку. Первый автомат даёт 0,1 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвёртый – 0,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

3. Каждая из букв Т, М, Р, О, Ш написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова вероятность того, что образуется слово «ШТОРМ»?

4. Случайная величина X принимает только два значения $+C$ и $-C$, каждые с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой случайной величины.

5. На склад магазина поступают изделия, из которых 80 % оказывается высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наугад изделий не менее 85 изделий окажутся высшего сорта.

Вариант № 17

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трёх выстрелах равна 0,992. Найти вероятность четырёх попаданий при пяти выстрелах.

2. Однотипные детали поступают на сборку с двух автоматов. Первый автомат даёт 80 % необходимых для сборки деталей, а второй – 20 %. Вероятность детали быть бракованной, если она изготовлена на первом автомате, равна 1 %, если на втором – 4 %. Поступившая на сборку деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена: а) на первом автомате;
б) на втором автомате?

3. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры различны.

4. При ведении горных работ происходит загрязнение атмосферы послегазовыми выбросами в 9 из 10 случаев. Найти вероятность того, что при 50 массивных взрывах загрязнение атмосферы наступит не более, чем в 40 случаях.

5. В урне находится 15 белых, 10 чёрных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что: а) при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором – чёрный (событие В) и при третьем – синий (событие С); б) при первом испытании появится белый шар, а при втором и третьем – чёрные шары.

Вариант № 18

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

2. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,7; четвёртый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

3. Литьё в болванках поступает с двух заготовительных цехов – 70 % из первого и 30 % из второго. При этом материал первого цеха имеет 10 % брака, а второго – 20 %. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка без дефектов.

4. Случайная величина принимает только два значения – +10 и -10, каждое с вероятностью 0,5. Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

5. В урне 15 белых и 20 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут чёрными; 2) оба шара будут разного цвета.

Вариант № 19

1. Партия деталей изготовлена двумя рабочими. Первый рабочий изготовил 2/3 партии, второй – 1/3 партии. Вероятность брака для первого рабочего 1 %, для второго – 10 %. На контроль взяли одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

2. Из зенитного орудия производится три выстрела по снижающемуся самолёту. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность не менее двух попаданий в самолёт.

3. Найти функции распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, если известен ряд распределения случайной величины X:

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

4. На восьми одинаковых карточках написаны, соответственно, числа 2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократится.

5. Имеется три одинаковых урны, из которых в первой находится два белых и два чёрных шара, во второй и третьей – по три белых и четыре черных шара. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Найти вероятность того, что шар извлечён: а) из второй урны; б) из первой урны.

Вариант № 20

1. Сборщик получил 3 ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором – 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что хотя бы два экзамена будут сданы.

3. Производится два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}3$. а) записать ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий при двух выстрелах; б) найти математическое ожидание общего числа попаданий при двух выстрелах; в) найти дисперсию и построить многоугольник распределения.

4. Из колоды карт (36) наудачу вынимается две карты. Найти вероятность того, что среди них одна «дама» и один «король».

5. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,6. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,7. На обоих станках изготовлено по две детали. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

Вариант № 21

1. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных изделий. Найти вероятность того, что среди трёх наугад вынутых из ящика деталей нет дефектных.

2. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, равна 0,6. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

3. Имеется 5 урн: в двух урнах – по 2 белых и 1 чёрному шару; в одной 10 чёрных и ещё в двух – по 3 белых и 1 чёрному шару. Найти вероятность того, что вынутый из наудачу взятой урны шар окажется белым.

4. Из колоды в 36 карт вынимается наудачу две карты. Найти вероятность того, что это шестёрка и семёрка.

5. В лотерее 100 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 25 руб.; на 5 билетов – 20 руб.; на 10 билетов – 5 руб.; на 20 билетов – 1 руб.; остальные билеты невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 5 руб. на 1 билет. Составить ряд распределения случайной величины X – стоимости выигрыша на 1 билет. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Билет № 22

1. Чему равна вероятность того, что дни рождения трёх человек придутся на разные месяцы: июнь, июль и август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

2. Студент знает 40 вопросов из 50. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает:

а) все три вопроса; б) только два вопроса.

3. Имеются три одинаковые урны: первая содержит 1 белый и 6 чёрных шаров; вторая – 3 белых и 2 чёрных шара; третья – 7 белых и 8 чёрных шаров. Из одной урны, наудачу выбранной, вынут шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынут из первой урны?

4. Прибор, обладающий надёжностью (вероятностью безотказной работы за время t), равной $p = 0{,}8$, представляется недостаточно надёжным. Для повышения надёжности он дублируется ещё одним точно таким же работающим прибором. Если первый прибор за время t отказал, происходит автоматическое переключение на дублирующий. Приборы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что система из двух приборов прорабатывает безотказно время t.

5. Электронная аппаратура имеет три дублирующих линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантированного срока работы аппаратуры равна 0,1. Найти закон распределения случайного числа вышедших из строя линий за время гарантийного срока, если выход из строя одной линии не зависит от рабочего состояния других линий. Найти $M(X), \sigma(X)$.

Вариант № 23

1. При разведке медноколчеданных месторождений в 7 из 10 случаев опознавательным признаком может служить присутствие ярозита или барита. Найти вероятность присутствия минералов хотя бы в одном из трёх месторождений.

2. Студент знает 25 вопросов из 30. Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) оба вопроса; б) хотя бы один вопрос.

3. В урне A белых, B чёрных и C красных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары будут разных цветов.

4. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 чёрных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров?

5. Противник стремится сорвать связь, создавая помехи в двухчастотных диапазонах со средними частотами f_1 и f_2. С этой целью мешающий передатчик настраивается попеременно на частоты f_1 и f_2 через равные промежутки времени. Вероятность сбоя от помехи на частоте f_1 составляет 0,3, а на частоте f_2 – 0,6. Какова вероятность того, что связь будет сорвана?

Вариант № 24

1. При установке одного пылеуловителя вероятность выброса в атмосферу вредных веществ составляет 0,8. Сколько пылеуловителей нужно поставить последовательно, чтобы сократить вероятность выбросов в 1,5 раза?

2. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что две наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

3. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложили 1 шар в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

4. Вероятность изделия некоторого производства оказаться доброкачественным равна 0,996. Чему равна вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 5?

5. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. За каждое попадание стрелку засчитывается 3 очка. Построить ряд распределения числа выбитых очков и многоугольник распределения. Найти математическое ожидание.

Вариант № 25

1. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

2. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлено две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

3. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, причём каждый из них делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

4. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 120, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8.

5. Производятся последовательные испытания четырёх приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9. Найти математическое ожидание $M(X)$.

Вариант № 26

1. Сборщик получил 2 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № 1, и три коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода № 2 – 0,7. Из наудачу взятой коробки сборщик наудачу извлёк деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

2. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятёрки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

3. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих трёх выстрелов в мишени будет одна пробоина.

4. ОТК проверяет детали на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) три первых проверенных изделия стандартны; 2) нестандартным окажется третье по порядку проверки изделие; 3) из трёх проверенных изделий только одно стандартно.

5. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	0	1	3	4
P	0,1	0,2	0,6	0,1

Найти функцию распределения и построить её график. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант № 27

1. В урне A белых и B черных шаров. Из урны вынимается шар, отмечается его цвет, и шар возвращается в урну. После этого из урны берётся ещё один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шары – белые.

2. Вероятность попасть в цель равна 0,01. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание: а) с вероятностью, не меньшей 0,5; б) с вероятностью, не меньшей 0,9?

3. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что из 300 родившихся детей будут 160 мальчиков.

4. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно, равны 0,5; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Найти вероятность того, что он принадлежит второй группе.

5. Вероятность появления случайного события A в одном испытании равна 0,6. Проведено два независимых испытания. Составить ряд распределения случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях и найти математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 28

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится 76 раз.

2. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подмётки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1 % каблуков, 4 % подмёток и 5 % верхов. Произведённые каблуки, подмётки и верхи случайным образом комбинируются в цехе, где и шьются ботинки. Найти вероятность не быть испорченным одному ботинку. Какой процент ботинок будет испорченным, т. е. будет содержать дефекты?

3. По танку производятся два одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом – 0,5, при втором – 0,8. Для вывода танка из строя достаточно двух попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов танк будет выведен из строя.

4. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них три стандартные); во втором – 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали окажутся стандартными; 2) только одна из двух деталей стандартная; 3) хотя бы одна из двух деталей стандартная.

5. Случайная величина задана законом распределения:

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Вариант № 29

1. Сколько нужно передать одинаковых сообщений, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что сообщение принято не менее одного раза правильно, если вероятность правильного приёма сообщения составляет 0,5?

2. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предполагается упрощённая схема испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и 0,05 для изделий, которые ему не удовлетворяют. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

3. В студии телевидения имеется 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включена хотя бы одна камера; б) включена только одна камера; в) включены все три камеры; г) выключены все камеры.

4. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причём в каждой партии по два изделия бракованных. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность бракованного изделия из второй партии.

5. Найти математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть при одном бросании игральной кости. Записать закон распределения в виде таблицы. Найти $D(X)$.

Вариант № 30

1. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,64. Произведено144 испытания. Найти вероятность того, что событие A появится не менее 100 раз.

2. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

3. В урне 5 белых и 7 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

4. В батарее из 10 орудий одно непристрелянное. Вероятность попадания из пристрелянного орудия равна 0,73, а из непристрелянного – 0,23. Производили один выстрел и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведён из непристрелянного орудия.

5. Построить ряд распределения, многоугольник распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания p = 0,3. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Задание 6

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание *M*(X) и дисперсия *D*(X). Найти закон распределения этой случайной величины, если:

Таблица 1

Данные для нахождения закона распределения случайной величины

Номер варианта	p_1	***M*(*X*)**	***D*(*X*)**
1	0,2	3,8	0,16
2	0,1	3,9	0,09
3	0,3	3,7	0,21
4	0,5	3,5	0,25
5	0,7	3,3	0,21
6	0,9	3,1	0,09
7	0,9	2,2	0,36
8	0,8	3,2	0,16
9	0,6	3,4	0,24
10	0,4	3,6	0,24
11	0,3	5,4	0,84
12	0,1	4,8	0,36
13	0,3	4,1	1,89
14	0,5	4,5	2,25
15	0,7	2,9	1,89
16	0,9	1,4	1,44
17	0,3	2,4	0,84
18	0,9	3,3	0,81
19	0,3	2,7	0,21
20	0,4	2,2	0,96

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	p_1	***M*(*X*)**	***D*(*X*)**
21	0,9	4,1	0,09
22	0,7	3,9	1,89
23	0,1	5,8	0,36
24	0,2	2,6	0,64
25	0,1	1,9	0,09
26	0,3	3,1	1,89
27	0,5	3	1
28	0,4	2,6	0,24
29	0,6	3,2	2,16
30	0,6	3,6	3,84

Задание 7

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$.

Таблица 2

Данные для выполнения задания № 7

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
1	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{3}{4}\pi \\ \cos 2x, & \frac{3}{4}\pi < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{6}\pi\right)$	2	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
3	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1{,}5;\ 1{,}8)$	4	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^3, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
5	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$	6	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2 \\ 0{,}5x - 1, & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1; 3)$
7	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & \text{при } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1; 2)$	8	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1; 2)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	**Функция** $F(x)$	**Номер вар.**	**Функция** $F(x)$
9	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right)$	10	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 2\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{6}\right)$
11	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2 \\ \frac{x+2}{4}, & \text{при } -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(-1;\ 1)$	12	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$
13	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0 \le x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right)$	14	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{25}, & \text{при } 0 < x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(4;5)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	**Функция $F(x)$**	**Номер вар.**	**Функция $F(x)$**
15	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	16	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$
17	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 1-\cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$	18	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{x+1}{3}, & \text{при } -1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(0{,}5;\ 1{,}5)$
19	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{36}, & \text{при } 0 < x \le 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$ $(2;\ 4)$	20	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{100}, & \text{при } 0 < x \le 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$ $(5;\ 10)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	**Функция $F(x)$**	**Номер вар.**	**Функция $F(x)$**
21	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{при } -1 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$	22	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\ 2)$
23	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{8}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1;\ 2)$	24	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{1}{3}x, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\ 2)$
25	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{1}{4}x, & \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1;\ 2)$	26	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{1}{5}x, & \text{при } 0 \le x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(1;\ 3)$
27	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(0;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$	28	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 3x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\dfrac{\pi}{3};\ 0\right)$

Окончание таблицы 2

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
29	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$	30	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\ 2)$

Задание 8

Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A повторяется: а) ровно k раз; б) не менее k раз; в) не более k раз; г) хотя бы один раз, зная что в каждом испытании вероятность появления события A равна p.

Таблица 3

Данные для выполнения задания № 8

Номер варианта	*n*	*k*	*p*	Номер варианта	*n*	*k*	*p*
1	6	3	0,7	2	7	2	0,2
3	6	4	0,2	4	5	3	0,1
5	4	3	0,7	6	6	4	0,1
7	5	4	0,5	8	6	2	0,8
9	4	3	0,8	10	3	2	0,8
11	4	2	0,9	12	4	2	0,8
13	5	2	0,7	14	5	3	0,6
15	4	2	0,5	16	4	3	0,4
17	5	2	0,3	18	5	3	0,4

Окончание таблицы 3

Номер варианта	***n***	***k***	***p***	**Номер варианта**	***n***	***k***	***p***
19	4	2	0,3	20	4	3	0,2
21	5	2	0,1	22	5	2	0,2
23	4	3	0,3	24	3	2	0,4
25	5	3	0,5	26	6	3	0,6
27	4	2	0,7	28	5	4	0,8
29	6	4	0,9	30	6	5	0,1

Задание 9

Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β).

Таблица 4

Данные для выполнения задания № 9

Номер варианта	***a***	σ	α	β	**Номер варианта**	***a***	σ	α	β
1	2	4	6	10	2	10	4	2	13
3	9	5	5	14	4	8	1	4	9
5	7	2	3	10	6	6	3	2	11
7	5	1	1	12	8	4	5	2	11
9	3	2	3	10	10	2	5	4	9
11	2	2	1	5	12	3	2	2	6
13	4	3	3	7	14	7	3	4	8
15	6	3	5	9	16	4	1	1	5
17	4	2	2	6	18	5	2	3	7
19	5	3	4	8	20	6	3	5	9

Окончание таблицы 4

Номер варианта	***a***	σ	α	β	**Номер варианта**	***a***	σ	α	β
21	3	4	6	10	22	5	3	5	9
23	2	2	4	6	24	3	2	1	5
25	7	2	3	13	26	9	5	7	14
27	6	2	2	12	28	2	2	4	7
29	8	4	4	13	30	6	3	2	12

Исходные данные к расчётным заданиям № 10 – 15 приведены в таблице 5 в конце заданий.

Задание 10

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит n; б) произведение числа очков не превосходит n; в) произведение числа очков делится на n.

Задание 11

Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

Задание 12

В лифт k-этажного дома вошли n пассажиров $(n < k)$. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятности того, что: а) все пассажиры выйдут одновременно на одном и том же этаже; б) все вышли на разных этажах.

Задание 13

В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2.

Задание 14

Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком p_1, вторым – p_2. Первый сделал n_1, второй – n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

Задание 15

Два игрока поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок A, второй – B, третий A и т. д.

Найти вероятность указанного ниже события.

Варианты 1 – 8. Выиграл A до k-ого броска.

Варианты 9 – 15. Выиграл A не позднее k-ого броска.

Варианты 16 – 23. Выиграл B до k-ого броска.

Варианты 24 – 30. Выиграл B не позднее k-ого броска.

Задание 16

Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Варианты $1-8$: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\overline{\in}[a;b].\end{cases}$

Варианты $9-16$: $f(x)=\begin{cases}a, & x\in[\gamma;b],\\ 0, & x\overline{\in}[\gamma;b].\end{cases}$

Варианты $17-24$: $f(x)=\begin{cases}\gamma, & x\in[a;b],\\ 0, & x\overline{\in}[a;b].\end{cases}$

Варианты $25-30$: $f(x)=\begin{cases}a, & x\in\left[\dfrac{b-\gamma}{2};\dfrac{b+\gamma}{2}\right],\\ 0, & x\overline{\in}\left[\dfrac{b-\gamma}{2};\dfrac{b+\gamma}{2}\right].\end{cases}$

Указание

Использовать формулы равномерного распределения.

Задание 17

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $F(x)=\gamma e^{ax^2+bx+c}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1<X<x_2$.

Указание

Использовать формулы для нормального распределения.

Задание 18

Дана плотность распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь одной из указанных ниже геометрических фигур.

Варианты 1-15: $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\overline{\in}[a;b];\end{cases}$$

в вариантах 1 – 5: Y – площадь равностороннего треугольника со стороной x;

в вариантах 6 – 10: Y – площадь круга радиуса x;

в вариантах 11 – 15: Y – площадь квадрата со стороной x.

Варианты 16-31: $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\overline{\in}[a;b];\end{cases}$$

в вариантах 16 – 20: Y – площадь равностороннего треугольника со стороной x;

в вариантах 21– 25: Y – площадь круга радиуса x;

в вариантах 26 – 31: Y – площадь квадрата со стороной x.

Таблица 5

Исходные данные к расчётным заданиям

Номер варианта	Задание № 10	Задание № 11				Задание № 12		Задание № 13		
	n	***n***	***l***	***m***	***k***	***k***	***n***	***R***	S_1	S_2
1	3	10	2	4	6	6	4	11	2,25	3,52
2	4	10	2	3	6	7	4	12	2,37	3,52
3	5	10	3	5	7	8	5	13	2,49	3,52
4	6	10	3	5	6	9	5	14	2,55	1,57
5	7	11	2	5	7	10	6	11	2,27	5,57
6	8	11	3	4	8	11	4	12	2,39	5,57
7	9	11	3	5	7	12	4	13	2,51	1,57
8	10	12	3	8	5	13	3	14	2,57	3,52
9	3	12	2	8	3	14	3	11	2,29	3,52
10	4	12	2	5	4	13	4	12	2,41	3,52
11	5	9	2	4	6	12	3	13	2,53	3,52
12	6	9	3	5	6	11	3	14	2,59	5,57
13	7	9	2	3	7	10	4	15	2,5	8,7
14	8	8	2	4	5	9	4	16	2,6	8,5
15	9	8	2	5	4	8	3	11	2,2	3,5
16	10	8	3	4	5	7	3	12	2,4	3,5
17	11	10	4	6	5	6	4	13	2,5	3,5
18	12	10	5	7	7	7	4	14	2,6	1,8
19	13	10	4	6	7	8	5	15	2,7	7,9
20	14	12	4	8	6	9	5	16	2,7	8,2
21	15	8	2	3	4	10	6	11	2,3	3,5
22	16	8	2	3	5	11	4	12	2,4	3,5
23	17	8	2	4	3	12	4	13	2,5	3,5

Окончание таблицы 5

номер варианта	**Задание № 10**	**Задание № 11**				**Задание № 12**		**Задание № 13**		
	n	***n***	***l***	***m***	***K***	***k***	***n***	***R***	S_1	S_2
24	18	8	3	5	4	13	3	14	2,6	5,6
25	19	8	1	4	2	14	3	15	2,5	8,7
26	20	9	2	3	5	12	3	11	2,3	5,6
27	3	9	3	4	4	11	3	12	2,4	5,6
28	4	9	2	6	3	10	4	13	2,5	3,5
29	5	9	4	5	5	9	4	14	2,6	5,6
30	6	9	3	5	4	8	3	15	2,7	7,9

В первой горизонтальной строке указаны номера задач; в левом столбце – номера вариантов.

Таблица 6

Исходные данные к расчётным заданиям

Номер варианта	**Задание № 14**				**Зад. № 15**	**Задание № 16**				**Задание № 17**					**Задание № 18**	
	p_1	p_2	n_1	n_2	***k***	***a***	***b***	x_1	x_2	***a***	***b***	***c***	x_1	x_2	***a***	***b***
1	0,61	0,55	2	3	4	2,5	4	3	3,3	-2	8	-2	1	3	0	2
2	0,62	0,54	3	2	5	1,5	3	2	2,6	-2	4/3	-2/3	1/3	2/3	1	2
3	0,63	0,53	2	3	6	1,5	2,5	2	2,3	-2	-8	2	-3/2	-1	2	3
4	0,64	0,52	3	2	7	1	3,5	2	2,8	-4	6	2	0	3/4	2	4
5	0,65	0,51	2	3	8	-1	2	-0,7	1,1	-3	3	-2	1/2	3/2	3	5
6	0,66	0,49	3	2	9	-2	1	-1,5	0,3	-4	-6	-2	-3/4	1/4	0	2
7	0,67	0,48	2	3	10	-3	5	-2	2	-3	-3	2	-1/2	3/2	1	3
8	0,68	0,43	3	2	11	-1,5	2,5	-1	0	-3	-4	2	1/3	4/3	2	4
9	0,69	0,46	2	3	4	1	1,8	1,3	1,6	-2	-4/3	2/3	-1/3	2/3	3	5
10	0,71	0,45	3	2	5	1	2,4	1,5	2	-3	4	-2	-1/3	5/3	4	6

Окончание таблицы 6

Номер варианта	**Задание № 14**				**Задание № 15**	**Задание № 16**				**Задание № 17**					**Задание № 18**	
	p_1	p_2	n_1	n_2	***k***	***a***	***b***	x_1	x_2	***a***	***b***	***c***	x_1	x_2	***a***	***b***
11	0,72	0,44	2	3	6	2	3,5	2,5	3	-2	8	0	1	3	0	2
12	0,73	0,43	3	2	7	2	2,8	2,1	2,5	-2	1,3	0	1/3	2/3	1	2
13	0,74	0,42	2	3	8	1	2,8	-1	3	-2	-8	0	-3/2	-1	2	3
14	0,75	0,41	3	2	9	1	2,6	1,5	3	-4	6	0	0	3/4	2	4
15	0,76	0,39	2	3	10	2	3	1	3	-3	3	0	1/2	3/2	3	5
16	0,77	0,38	3	2	12	2	4,8	4,5	5	-4	-6	0	-3/4	1/4	0	2
17	0,78	0,37	2	3	5	-4	-2	-1	0	-3	-3	0	-1/2	3/2	1	3
18	0,39	0,45	3	2	6	-3	-1	-2	0	-3	-4	0	1/3	4/3	2	4
19	0,38	0,46	2	3	7	2	4	0	3	-2	-4/3	0	-1/3	2/3	3	5
20	0,37	0,47	3	2	8	1	3	0	2	-3	4	0	-1/3	5/3	4	6
21	0,36	0,48	2	3	9	1	1,5	0	0,5	-2	8	-1	1	3	0	2
22	0,35	0,49	3	2	10	-1	1,5	0	1	-4	6	1	0	3/4	1	2
23	0,34	0,51	2	3	11	-1,5	-1	-1	2	-2	-8	-1	-3/2	-1	3	4
24	0,33	0,52	3	2	4	-1,5	1	-1	1	-4	-6	-1	-3/4	1/4	2	4
25	0,32	0,53	2	3	5	0,5	1	0	3	-3	3	-1	1/2	3/2	3	5
26	0,31	0,54	3	2	6	0,2	2	0	4	-3	-4	1	1/3	4/3	3	4
27	0,29	0,55	2	3	7	0,5	3	0	0,5	-3	-3	1	-1/2	3/2	0	2
28	0,28	0,56	3	2	8	0,4	4	1	5	-3	4	-1	-1/3	5/3	1	3
29	0,27	0,57	2	3	9	1/4	1	0	3	-2	-4/3	1/3	-1/3	2/3	2	4
30	0,26	0,58	3	2	10	0,02	2	0	3	-2	4/3	-1/3	1/3	2/3	3	5

ОТВЕТЫ

Вариант № 1

1) $\frac{1}{144}$; 2) 0,25; 3) $\frac{91}{216}$;

4) ≈ 0,5; ≈ 0,9599; ≈ 0,8664;

5)

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Вариант № 2

1) ≈ 0,41; ≈ 0,43; ≈ 0,14;

2) 0,126; 3) $\frac{5}{8}$; 4) ≈ 0,28; ≈ 0,27;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Вариант № 3

1) $\frac{2}{3}$; 2) 0,32; 3) 0,061; 4) ≈ 0,04986;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

Вариант № 4

1) 0,092; 0,398; 0,504; 2) 0,85; 3) 0,456; 4) $\approx 0{,}4938$;

5)

X	0	1	2	3	4	5
P	0,0024	0,0284	0,1323	0,3087	0,3601	0,1683

Вариант № 5

1) $\approx 0{,}9375 \cdot 10^{-6}$; 2) 0,729; 3) $\frac{3}{7}$; 4) 0,4; 0,4; 0,1; 0,7;

5) $M(X) = \frac{3}{4}$; $D(X) = \frac{29}{48}$.

Вариант № 6

1) 0,02525; 0,24725; 0,727; 2) 0,024; 3) 0,2; 4) $\approx 0{,}9768$;

5)

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

Вариант № 7

1) $\approx 0{,}00001$; 2) 0,08; 3) 0,00289; 4) $\frac{1}{32}$; $\frac{31}{32}$; $\frac{5}{16}$;

5)

X	0	1	10	25	50
P	0,35	0,5	0,1	0,04	0,01

Вариант № 8

1) $\frac{C_{90}^{3}C_{10}^{2}}{C_{100}^{5}}$; 2) $\frac{13}{84}$; 3) 0,763; 4) $\approx 0{,}159$;

5)

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

Вариант № 9

1) $\approx 0{,}0125$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0,46; 4) $\frac{1}{360}$;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Вариант № 10

1) 0,85; 2) 0,8236; 3) $\frac{1}{1785}$; 4) 0,84;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

Вариант № 11

1) 0,116; 2) 0,0024; 3) $\approx 0{,}573$; 4) $\frac{1}{e}$; $1-\frac{1}{e}$;

5)

X	0	1	2
P	0,18	0,54	0,28

Вариант № 12

1) $\approx 0{,}47$; 2) $\approx 0{,}93$; 3) 0,24; 4) 6,4; 13,04; 3,61;

5) $\approx 0{,}196$.

Вариант № 13

1) 0,7; 2) $\frac{15}{16}$; 3) 0,4536; 4) $\frac{1}{e}$;

5)

X	0	10	40	50	100
P	0,98	0,01	0,005	0,004	0,001

Вариант № 14

1) 0,77; 2) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$;; 3) 0,0425; 4) $\sigma = 2{,}2$;

5) $\approx 0{,}052$.

Вариант № 15

1) 0,068; 0,352; 0,576; 2) $\approx 0{,}0031$; 3) $\frac{1}{1296}$;

4) 5) $\approx 0{,}0021$.

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Вариант № 16

1) 0,384; 2) 0,002; 3) $\frac{1}{120}$; 4) C^2; 5) 0,1056.

Вариант № 17

1) 0,4096; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; 3) $\approx 0{,}302$; 4) $\approx 0{,}0091$;

5) $\frac{25}{1092}$; $\frac{25}{364}$.

Вариант № 18

1) $\approx 0{,}05$; 2) 0,0336; 3) 0,87; 4) 10; 5) $\frac{38}{119}$; $\frac{60}{119}$.

Вариант № 19

1) 0,04; 2) 0,124; 3) $M(X) = 3{,}9$; $D(X) = 1{,}89$;; 4) $\frac{5}{14}$;

5) $\frac{7}{19}$; $\frac{6}{19}$.

Вариант № 20

1) $\frac{2}{5}$; 2) 0,954; 3)

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0,12

4) $\frac{8}{315}$; 5) 0,1764.

Вариант № 21

1) ≈ 0,7265; 2) 0,936; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $\frac{8}{315}$;

5)

X	0	1	5	20	25
P	0,64	0,2	0,1	0,05	0,01

Вариант № 22

1) $\frac{1}{288}$; 2) $\frac{741}{1470}$; $\frac{39}{98}$; 3) $\frac{15}{127}$; 4) 0,96;

5)

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Вариант № 23

1) 0,973; 2) $\frac{20}{29}$; $\frac{85}{87}$; 3) $\frac{ABC \cdot 3!}{(A+B+C)(A+B+C-1)(A+B+C-2)}$;

4) $\frac{5}{32}$; 5) 0,72.

Вариант № 24

1) 3; 2) $\frac{27}{16\pi^2}$; 3) $\frac{23}{45}$; 4) $\approx 0{,}176$;

5)

X	0	3	6	9
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Вариант № 25

1) $\frac{11}{93}$; 2) $\approx 0{,}251$; 3) $\frac{6}{7}$; 4) $\approx 0{,}003$;

5)

X	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

Вариант № 26

1) 0,78; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 0,36; 4) 0,729; 0,081; 0,027; 5) 2,4; 1,44.

Вариант № 27

1) $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$; 2) 69; 229; 3) $\approx 0{,}033$; 4) $\frac{21}{59}$;

5)

X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

Вариант № 28

1) $\approx 0{,}06$; 2) 0,903; 9,7 %; 3) 0, 6; 4) $\frac{3}{25}$; $\frac{23}{50}$; $\frac{29}{50}$; 5) 2,2.

Вариант № 29

1) 4; 2) 0,99; 3) 0,936; 0,288; 0,216; 0,064; 4) $\frac{13}{66}$; 5) 3,5; $\frac{35}{12}$.

Вариант № 30

1) $\approx 0{,}869$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{5}{33}$; 4) 0,241;

5)

X	0	1
P	0,7	0,3

Ответы к заданию № 6 из таблицы 1

Номер варианта	X_1	X_2	P_1	P_2	**Номер варианта**	X_1	X_2	P_1	P_2
1	3	4	0,2	0,8	16	1	5	0,9	0,1
2	3	4	0,1	0,9	17	1	3	0,3	0,7
3	3	4	0,3	0,7	18	3	6	0,9	0,1
4	3	4	0,5	0,5	19	2	3	0,3	0,7
5	3	4	0,7	0,3	20	1	3	0,4	0,6
6	3	4	0,9	0,1	21	4	5	0,9	0,1
7	2	4	0,9	0,1	22	3	6	0,7	0,3
8	3	4	0,8	0,2	23	4	6	0,1	0,9
9	3	4	0,6	0,4	24	1	3	0,2	0,8
10	3	4	0,4	0,6	25	1	2	0,1	0,9
11	4	6	0,3	0,7	26	1	4	0,3	0,7
12	3	5	0,1	0,9	27	2	4	0,5	0,5
13	2	5	0,3	0,7	28	2	3	0,4	0,6
14	3	6	0,5	0,5	29	2	5	0,6	0,4
15	2	5	0,7	0,8	30	2	6	0,6	0,4

Ответы к заданию № 7 из таблицы 2

Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$	**Номер варианта**	$M(X)$	$D(X)$
1	$\pi-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi-3}{4}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{19}{12}$	$\frac{11}{144}$	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{80}$
5	$\frac{5}{27}$	$\frac{13}{1458}$	6	3	$\frac{1}{3}$
7	2	0,5	8	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$
9	1	$\pi-3$	10	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$	$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}-9$
11	0	$\frac{4}{3}$	12	0	$\frac{\pi^2}{4}-2$
13	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}-2$	14	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{18}$
15	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{27}$	16	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi+3}{4}$
17	1	$\pi-3$	18	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
19	4	2	20	$\frac{20}{3}$	$5\frac{5}{9}$
21	0	$\frac{1}{3}$	22	2	$\frac{1}{3}$
23	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{20}$	24	1,5	0,75

Окончание таблицы

Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$	**Номер варианта**	$M(X)$	$D(X)$
25	2	$\frac{4}{3}$	26	2,5	2,08
27	$\frac{\pi}{2}-1$	$\pi-3$	28	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{3}+\frac{1}{9}$
29	$\pi-1$	$\pi-3$	30	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{80}$

Ответы к заданию № 8 из таблицы 3

Номер варианта	**а) ровно *k* раз**	**б) не менее *k* раз**	**в) не более *k* раз**	**г) хотя бы один раз**
1	0,1852	0,93	0,256	0,9993
2	0,28	0,42	0,86	0,79
3	0,01536	0,01696	0,9984	0,74
4	0,0081	0,00856	0,99954	0,4095
5	0,4116	0,6517	0,7599	0,9919
6	0,001215	0,00127	0,99994	0,4686
7	0,15625	0,1875	0,96875	0,96875
8	0,01536	0,998	0,27904	0,99993
9	0,4096	0,8192	0,5904	0,9984
10	0,384	0,896	0,488	0,992
11	0,0486	0,9963	0,0523	0,9999
12	0,1536	0,9728	0,1808	0,9984
13	0,1323	0,9692	0,1631	0,9976
14	0,3456	0,6826	0,6630	0,9898

Окончание таблицы

Номер варианта	**а) ровно *k* раз**	**б) не менее *k* раз**	**в) не более *k* раз**	**г) хотя бы один раз**
15	0,375	0,6875	0,6875	0,9375
16	0,1586	0,1792	0,9744	0,3704
17	0,3087	0,4718	0,8369	0,8319
18	0,2304	0,3174	0,9133	0,92222
19	0,2646	0,3483	0,9163	0,7599
20	0,0256	0,0272	0,9984	0,5904
21	0,0729	0,0815	0,99144	0,4095
22	0,2048	0,2627	0,9421	0,6723
23	0,0756	0,0837	0,9919	0,7599
24	0,288	0,352	0,936	0,784
25	0,3125	0,5	0,8125	0,9675
26	0,2765	0,8208	0,4557	0,9959
27	0,2646	09163	0,3483	0,9919
28	0,4096	0,7373	0,6723	0,9997
29	0,0984	0,9841	0,1143	0,9999
30	0,000054	0,000055	0,999999	0,4686

Ответы к заданию № 9 из таблицы 4

№ 1: 0,1359; № 2: 0,7506; № 3: 0,6294;
№ 4: 0,8412; № 5: 0,9104; № 6: 0,0493;
№ 7: 0,9998; № 8: 0,5746; № 9: 0,4998;
№ 10: 0,2638; № 11: 0,6247; № 12: 0,6247;
№ 13: 0,4706; № 14: 0,4706; №: 15: 0,4706
№ 16: 0,8399; № 17: 0,6826; № 18: 0,6826;
№ 19: 0,4706; № 20: 0,4706; № 21: 0,1865;
№ 22: 0,4082; № 2: 0,1359; № 24: 0,6826;
№ 25: 0,9758; № 26: 0,4967; № 27: 0,9758;
№ 28: 0,1525; № 29: 0,7357; № 30: 0,8854.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 456 с.

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие. – М.: Кнорус, 2010. – 492 с.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 403 с.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшее образование, 2009. – 480 с.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1988. – 406 с.

Соболев А. Б., Рыбалко А. Ф., Вараксин А. Н. Математика: курс лекций для технических вузов. Книга 2. – М.: Изд. центр «Академия», 2010. – 445 с.

Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1983. – 110 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург

2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Учебно-методическим советом УГГУ

Председатель совета
_____Упоров С.А.

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург, 2019

Методические указания рассмотрены на заседании кафедры физики 26 марта 2019 года (протокол № 19) и рекомендованы для издания в УГГУ

ФИЗИКА. Методические указания для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки/Садырева О.В., Коршунов И.Г.; Урал.гос. горный ун-т.– Екатеринбург, 2019.– 29 стр.

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0{,}5\,t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/^{2} , при спуске с ускорением 9,8 м/с^2.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 м/^{2}, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин$^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой $8с^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом $C_2 H_2$ при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 $см^3$ воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, γ=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 $см^3$ при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°C до 100° C надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° C, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° C до 2000° C. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° C. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° C. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 $см^2$?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 $см^2$. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора $1,5 \cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30^0 С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 $мм^2$, $\rho = 0{,}017$(Ом· $мм^2$ /м), $\alpha = 0{,}0044$ град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ² находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 $см^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 $см^2$, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника
0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 $мин^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 $мин^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 $мин^{-1.}$ Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 $с^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4\pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5\cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см^2 и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см^2.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5\cdot^{10\text{-}6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 $см^2$ каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 $м^2$ и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 $см^2$ имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 $см^2$ каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 $см^2$ каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете (λ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт. Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно $2,2 \cdot 10^{-7}$ $Н/м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$ за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 107 м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$кг, масса протона $1,67 \cdot 10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью $6 \cdot 10^6$м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения (λмин =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной *l* находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_Z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *l*
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.
158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?
60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_7N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_6C^{12}$, если известно, что m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^6$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_8O^{16}$, если m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что m $_3Li^7$ =7,01601 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: m $_5B^{11}$ = 11,00931 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977 а.е.м.; m $_{11}Na^{22}$ = 21,99444 а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 15,99491 а.е.м.; m $_7N^{15}$ = 15,00011 а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если m $_{13}Al^{27}$ =2 6,98154 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{15}P^{30}$= 29,97263 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_1H^3$ =3,01605 а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. (m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.; m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. (m $_7N^1$ ^{4}= 14,00307а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м ; m $_6C^{14}$= 14,00324 а.е.м.; m $_1H^1$= 1,00783 а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H^2$= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.(m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{19}K^{41} + 2He^4$. ($m\ {}_{20}Ca^{4\,4}$= 43,95549 а.е.м.; $m\ {}_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ {}_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; $m\ {}_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

.

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И..Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	*1а.е.м.*	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с $1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Множитель	Приставка			Множитель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^{9}	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^{6}	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^{3}	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^{2}	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^{1}	атто	а	a	10^{-18}
П р и м е ч а н и е: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)							

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Приложение 4

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^3 кг $1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86400 с
Плоский угол	градус минута секунда град	…• …′ …″ град	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад $2.91 \cdot 10^{-4}$ рад $4.85 \cdot 10^{-6}$ рад $(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1.50 \cdot 10^{11}$ м $9.46 \cdot 10^{15}$ м $3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	гектар	Га	10^4 м^2
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
П р и м е ч а н и е: Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Приложение 5

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см^3	Твердое тело	Плотность, г/см^3
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8◌
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г·/см^3	Газ (при нормальных условиях	Плотность, кг/м^3
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2{,}53\cdot10^{-8}$	Ртуть	$9{,}6\cdot10^{-7}$
Алюминий провод	$2{,}87\cdot10^{-8}$	Свинец	$2{,}08\cdot10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$
Вода дистиллированная	10^{4}	Сталь литая	$1{,}3\cdot10^{-7}$
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1{,}01\cdot10^{-7}$
Вольфрам	$5{,}5\cdot10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3{,}9\cdot10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9{,}8\cdot10^{-8}$	Угольные щётки	$4\cdot10^{-5}$
Железо	$8{,}7\cdot10^{-8}$	Цинк	$5{,}9\cdot10^{-8}$
Золото	$2{,}2\cdot10^{-8}$	Чугун серый	$1\cdot10^{-6}$
Константан	$5\cdot10^{-7}$	Никель	$8{,}7\cdot10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1{,}12\cdot10^{-6}$
Магний	$4{,}4\cdot10^{-8}$	Олово	$1{,}2\cdot10^{-7}$
Манганин	$4{,}3\cdot10^{-7}$	Платина	$1{,}07\cdot10^{-7}$
Медь	$1{,}72\cdot10^{-8}$	Медь провод	$1{,}78\cdot10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
A, α	Альфа	N, ν	ню
B, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
E, ε	Эпсилон	P, ρ	ро
Z, ς	Дзета	Σ, σ	сигма
H, η	Эта	T, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Y, υ	ипсилон
J, i	Иота	Φ, φ	фи
K, κ	Каппа	X, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	10
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	12
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	19
Список литературы	23
Приложения	24

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

Е. И. Шангина

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Екатеринбург – 2006

УДК 514.18
Ш 20
Шангина Е. И.
Ш 20 Компьютерная графика: Учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2006. – 189 с.: ил.
ISBN 5-8019-0098-5

В пособии рассматривается графический интерфейс системы AutoCAD, описываются средства создания двух- и трёхмерных объектов. Приводятся методики и рассматриваются конкретные примеры создания чертежей, позволяющие студентам, начинающим изучение компьютерной графики, легко адаптироваться к среде системы AutoCAD. Пособие содержит описание базовых команд, необходимых для создания твёрдотельных моделей и выполнения чертежей в ортогональных и аксонометрических проекциях.

Отличие этого пособия от существующих в том, что даются основные понятия теории множеств и размерности для корректного задания на чертеже (экране компьютера) различных геометрических многообразий (точка, прямая, плоскость, кривые линии и т. д.).

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 170100-«Горные машины и оборудование», а также может быть использовано студентами технических специальностей всех форм обучения, изучающих курс «Компьютерная графика».

Рецензенты:

В. Н. Бабич – канд. техн. наук, профессор кафедры «Теория искусства, архитектуры и дизайна» Уральской государственной архитектурно-художественной академии.

Д. В. Куреннов– канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Прикладная геометрия и автоматизация проектирования» Уральского государственного технического университета (УПИ).

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета

© Уральский государственный
горный университет, 2006
© Шангина Е. И., 2006

ISBN 5-8019-0098-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Количество прикладных программных систем, функционирующих на персональных компьютерах и решающих различные задачи в различных отраслях промышленности, на сегодняшний день достаточно велико. Направленность и решаемые ими задачи различны. Одна из наиболее важных составляющих использования компьютерной графики – знание законов построения геометрической модели проектируемого объекта, теоретической основой которых является начертательная геометрия.

Известно, что современная начертательная геометрия занимается теорией методов моделирования пространств и многообразий различной размерности (возможно с дополнительной структурой) точками плоскости (экран компьютера тоже плоское поле). Другими словами, начертательная геометрия занимается изучением взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений. При построении какого-либо многообразия, независимо от геометрического определителя, размерность этого многообразия не изменяется. Таким образом, одним из инвариантов является размерность.

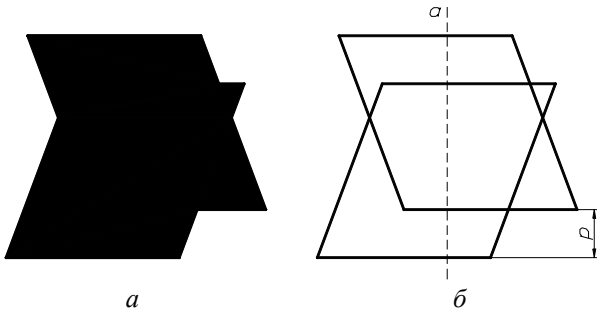
Приведём пример построения окружности в системе ***AutoCAD***. Известно, что окружность задаётся тремя параметрами. Поэтому, вызывая команду ***CIRCLE*** (КРУГ) – формирование окружности – построение может производиться путём задания: 1) центра и радиуса или 2) трёх точек (3P), или 3) двух точек, которые определяют диаметр (2P); 4) двух касательных и радиуса (Ttr); 5) трёх касательных (Tan Tan Ta). В некоторых случаях окружность удобнее задавать одним из перечисленных способов, но число параметров, определяющих данную окружность, остаётся неизменным, то есть равным трём. Таким образом, применяя теорию размерности, можно находить различные решения при построении новых моделей в среде компьютерных программ.

Кроме этого, в современных программах для создания графических объектов нередко используются команды меню «Редактор» («Зеркало», «Поворот», «Сдвиг»», «Копия» и др.), которые позволяют ускорять и упрощать процесс создания чертежа, при этом возрастает точность геометрических построений.

Теоретической основой построения чертежей с использованием этих команд является симметрия. С точки зрения теории симметрии команда «Зеркало» представляет собой осевую симметрию; команда «Поворот» - поворотную симметрию; «Сдвиг» - параллельный перенос; «Копия» - движение, сохраняющее тождественное преобразование. Однако чаще всего студенты не владеют теорией симметрии и поэтому строят чертёж привычными методами, при которых используются традиционные чертёжные инструменты.

Примером может служить метод построения геометрической фигуры, показанной на рис.1.

Построение геометрической фигуры (рис. 1, а), как ни странно, осуществляется последовательным заданием семейства точек или ломаной линии. Однако такая методика является неверной, так как снижается точность изображения и усложняются построения. Указанные недостатки могут быть устранены весьма простым способом – построением скользящей симметрии параллелограмма (рис.1, б), представляющей композицию (произведение) осевой симметрии с осью *a* и параллельного переноса *p*.



а *б*

Рис. 1.

Итак, построение геометрических фигур на основе их инвариантных характеристик – это основной принцип, который позволяет значительно упростить освоение компьютерной графики.

Использование графических компьютерных программ, безусловно, позволило поднять на новый уровень графические методы решения различных технических задач, за счёт резкого повышения точности построений. Но при этом не следует забывать о теории формирования геометрических моделей, в основе которой лежат классические методы начертательной геометрии.

Глава 1
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1. МНОЖЕСТВА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Вводя понятие «***множество***», обычно поясняют его смысл на примерах: библиотека – множество книг; алфавит – множество букв; лес – множество деревьев и т. д. В геометрии прямую, плоскость, пространство, прежде всего, понимают как множество точек.

Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества имеют определённые характеристические свойства. Например, если имеем множество целых чисел, то буква не является элементом этого множества. Множество, элементы которого можно подсчитать, называется конечным множеством, в противном случае – бесконечным. Например, множество страниц книги конечно, так как его можно подсчитать; время – бесконечное множество. Если все элементы множества M являются частью множества N, то M называется подмножеством N. Например, прямая, лежащая в плоскости, является подмножеством множества точек плоскости. Другой пример: студенты одной группы являются подмножеством студентов всего института.

Рассмотрим основные теоретико-множественные понятия: 1) принадлежность ($\in$); 2) включение ($\subset$); 3) пересечение ($\bigcap$); 4) объединение ($\bigcup$); 5) разность (\ ); 6) пустое множество ($\varnothing$):

1. Если m есть элемент множества M, записывают $m \in M$; если m не принадлежит M, то пишут $m \notin M$. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$. Точка является нульмерным множеством (это аксиома и определению не подлежит).
2. Если любой элемент множества M принадлежит множеству N, то M называют ***подмножеством*** множества N. Символическая запись: $M \subset N$ («множество M содержится в N»). При этом N называют надмножеством (объемлющим множеством) множества M.
3. Множество, состоящее из общих элементов нескольких множеств A, B, C, …, называется пересечением этих множеств и обозначается $A \bigcap B \bigcap C, \ldots$.
4. Объединение (или сумма) множеств M и N $(M \cup N)$ – это множество, элементами которого являются все элементы множества M и множества N.
5. Разностью множеств M и N называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих M, но не принадлежащих N $(M \setminus N)$. Если $N \subset M$, то разность $M \setminus N$ называют дополнением множества N в множестве M и обозначают $\overline{N}$; при этом $N \cup \overline{N} = M$.

Рассмотрим три множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнению и неравенствам (рис. 1):

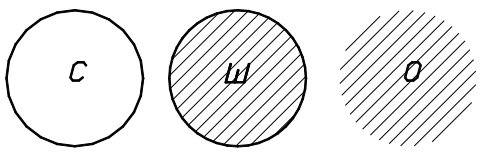


Рис. 1.

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ – **С**.
Шар: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ – **Ш**.
Открытый шар: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ – **О**.

В этом случае справедливы следующие теоретико-множественные тождества:
$\mathbf{C} \bigcap \mathbf{Ш} = \mathbf{C}$, $\mathbf{Ш} \bigcap \mathbf{О} = \mathbf{О}$, $\mathbf{C} \bigcap \mathbf{О} = \varnothing$;
$\mathbf{C} \bigcup \mathbf{Ш} = \mathbf{C} \bigcup \mathbf{О} = \mathbf{Ш} \bigcup \mathbf{О} = \mathbf{Ш}$;

Ш\С=О, **Ш\О=С**, **О\С=О**, **С\О=С**;
С\Ш=О\Ш=∅; **С=О**, **О=С**, **Ш=∅**.

При определении пересечения трех и большего числа множеств пользуются следующими свойствами пересечения:

$M \cap N = N \cap M$ – коммутативность (то есть переместительный закон, выражающий независимость получаемого множества при пересечении множеств M и N от их перестановки);

$(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$ – ассоциативность (то есть сочетательный закон, выражающий независимость получаемого множества от замены некоторых множеств их пересечением);

$M \cap M = M$ – идемпотентность (то есть результатом пересечения множества M самого с собой является множество M).

Операции пересечения, объединения, разности позволяют исходя из данных множеств строить новые множества. Другим же распространенным приемом конструирования множеств является то, что некоторые подмножества данного множества объявляются элементами нового множества. Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Множество прямых на плоскости называют плоским полем прямых. Элементами этого множества являются все прямые данной плоскости. ***Пучок прямых*** – множество прямых, проходящих по плоскости через данную точку (если эта точка несобственная (бесконечно удаленная), имеем пучок параллельных прямых).

ПРИМЕР 2. Множество прямых пространства называют линейчатым пространством. Примерами подмножеств линейчатого пространства могут служить следующие множества. ***Связка прямых*** – множество прямых пространства, проходящих через заданную точку (если эта точка несобственная, имеем связку параллельных прямых). ***Специальный линейчатый комплекс*** - семейство прямых, пересекающих данную прямую. ***Гиперболическая линейная конгруэнция*** – множество прямых, пересекающих две скрещивающиеся прямые (называемые ее осями или директрисами). Множество прямых, пересекающих три скрещивающиеся прямые, называется ***регулюсом***, или ***линейчатой поверхностью***.

ПРИМЕР 3. ***Пучок плоскостей*** – множество плоскостей, проходящих через заданную прямую (если прямая несобственная, имеют пучок параллельных плоскостей). ***Связка плоскостей*** – множество плоскостей, проходящих через заданную точку.

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Пусть между элементами множества M определено некоторое отношение ~, то есть для любых двух элементов $a \in M$ и $b \in M$ известно $a \sim b$ (читается «a эквивалентно b»). Это отношение должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $a \sim a$ - рефлексивность;

2) если $a \sim b$, то $b \sim a$ - симметричность;

3) если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$ - транзитивность.

Знак ~ называется ***отношением эквивалентности***.

ПРИМЕР 1. В линейчатом пространстве параллельность прямых ***a, b, c,…*** является отношением эквивалентности, так как 1) $a \| a$, 2) если $a \| b$, то $b \| a$, 3) если $a \| b$ и $b \| c$, то $a \| c$.

ПРИМЕР 2. Отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости симметрично ($a \perp b$ и $b \perp a$), но не рефлексивно и не транзитивно и поэтому отношением эквивалентности не является.

В связи с заданием на множестве M отношения эквивалентности оно разбивается на непересекающиеся подмножества, называемые ***классами эквивалентности***: в один класс входят эквивалентные между собой элементы. Пересечение любых двух классов пусто, а объединение всех классов эквивалентности есть M (M – это «слоеный пирог», а классы – это слои). Множество, элементами которого являются классы эквивалентности (слои), называет-

ся ***фактор-множеством*** множества ***M*** по отношению к эквивалентности ~. Фактор-множество в примере 1 – это множество связок параллельных прямых.

Два множества называются ***эквивалентными***, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Под взаимно однозначным соответствием будем понимать такое соответствие, при котором любому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества, и, наоборот, любым различным (не совпадающим) элементам одного множества соответствуют различные элементы другого множества, задействованы все элементы обоих множеств.

Об эквивалентных множествах говорят, что они имеют одинаковую мощность. Эквивалентные конечные множества состоят из одного и того же числа элементов. Если бы это было не так, то при установлении взаимно однозначного соответствия каким-то элементам не было бы соответствующих. В случае конечных множеств понятие мощности совпадает с понятием числа элементов.

1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Одним из фундаментальных понятий современной математики является понятие ***функции***. Как известно, переменная ***y*** называется функцией переменной ***x***, если каждому значению ***x***, взятому из области её определения, отвечает одно или несколько значений ***y***. Это записывают так: $y = f(x)$. Большое значение имеют однозначные функции, когда каждому значению ***x*** соответствует единственное значение ***y*** (и наоборот).

Геометрическим аналогом понятия однозначной функции является ***отображение***. Тогда под ***x*** и ***y*** понимают какие-либо геометрические образы: точки, прямые, плоскости, окружности…. Для конкретности в дальнейшем под ***x*** и ***y*** будем понимать точки.

Если даны два множества $X(x_1, x_2, x_3\ldots, x_i, x_n)$, $Y(y_1, y_2, y_3\ldots, y_i, y_n)$ и указано правило, по которому каждому элементу x_i множества ***X*** ставится в соответствие определённый элемент y_i множества ***Y***, то говорят, что задано отображение ***f*** множества ***X*** в множество ***Y***, и пишут: $f : X \to Y$ (рис. 2). При этом элемент y_i называется образом элемента x_i, а x_i – прообразом элемента y_i. Символическая запись $y = f(x)$ читается: «в отображении ***f*** элементу ***x*** соответствует элемент ***y***» или «отображение ***f*** переводит ***x*** в ***y***».

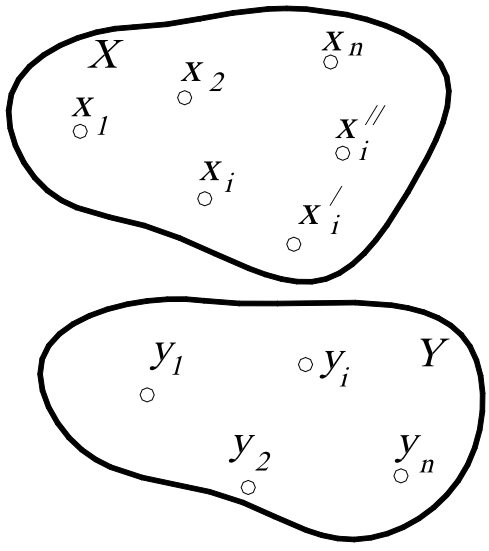


Рис. 2.

Множество ***X*** называют ***областью определения (областью отправления)***, а ***Y*** - ***областью значений (областью прибытия)*** отображения ***f***.

Пусть область определения ***X*** состоит из множества точек $x_1, x_2, x_3\ldots, x_i, x_n$, а область значений ***Y*** – из множества точек $y_1, y_2, y_3\ldots, y_i, y_n$ (см. рис. 2). Следовательно, при отображении любой точке x_i в области ***X*** соответствует единственный образ y_i в области ***Y***, но точка y_i может иметь несколько прообразов $x_i, x_i', x_i'' \ldots$. Следовательно, обратное соответствие $x = f^{-1}(y)$ является в этом случае неоднозначным.

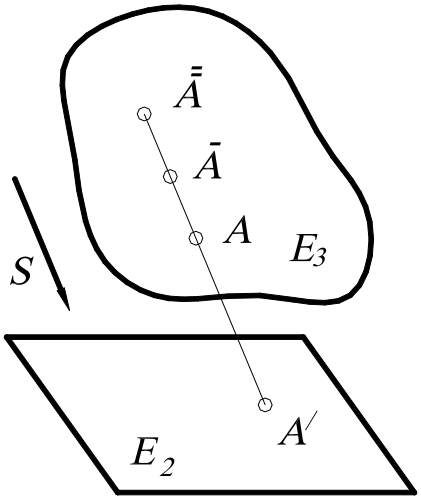


Рис. 3.

Таким образом, об отображении можно говорить, если заданы два множества и некоторое правило или закон, по которому элементы множеств образуют пары, причем эти множества по этому закону, вообще говоря, не равноправны.

Наглядной иллюстрацией сказанного является отображение точек трёхмерного пространства $\boldsymbol{E^3}$ на плоскость (двумерное пространство) $\boldsymbol{E^2}$ путём параллельного проецирования (рис. 3): каждая точка $\boldsymbol{A}$ трёхмерного пространства $\boldsymbol{E^3}$ в данном направлении $\boldsymbol{S}$ проецируется в единственную точку $\boldsymbol{A'}$ плоскости $\boldsymbol{E^2}$. Однако в точку $\boldsymbol{A'}$ проецируется не только точка $\boldsymbol{A}$, но и все точки $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}, \bar{\boldsymbol{A}}, \ldots$.

Рассмотрим пример. Пусть $\boldsymbol{З}$ – множество зрителей в фойе театра перед спектаклем, а $\boldsymbol{К}$ – множество кресел. Как узнать, что зрителей и кресел поровну? Конечно, можно подсчитать, но мы получим избыточную информацию, нас не интересует их количество. Однако если во время спектакля все места заняты, причем никто из зрителей не стоит в проходах и на каждом месте сидит только один театрал, то это означает, что эти множества равны, в противном случае – наоборот.

Рассмотрим другой пример. Пусть в классе находится множество учеников и множество стульев. Предположим, что после звонка на урок каждый ученик занял свое место, то есть свой стул. В этом случае можно сказать, что задано отображение множества учеников на множество стульев. При этом если на каждом стуле сидит только один ученик, никто не стоит в проходах и все места заняты (например, имеем в классе 30 учеников и 30 стульев), то есть каждому ученику соответствует один единственный стул, и, наоборот, каждому стулу соответствует единственный ученик. Такое отображение называют ***взаимно однозначным*** (иногда говорят: «взаимно однозначное соответствие»).

Отображение называется ***взаимно однозначным***, если каждому элементу $\boldsymbol{y_i \in Y}$ соответствует единственный прообраз $\boldsymbol{x_i \in X}$ (и наоборот), то есть прямое соответствие $\boldsymbol{y = f(x)}$ и обратное соответствие $\boldsymbol{x = f^{-1}(y)}$ являются однозначными. Такое отображение называется ***биективным***, или ***биекцией***.

Взаимно однозначное соответствие между элементами множеств (или между множествами) может быть установлено различными способами. На рис. 4 такое соответствие между точками двух отрезков (или между отрезками) $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$ установлено прямыми, проходящими через точку $\boldsymbol{S}$. При этом точке $\boldsymbol{X \in AB}$ соответствует точка $\boldsymbol{Y \in CD}$, что символически записывается так: $\boldsymbol{X \leftrightarrow Y}$. Между этими отрезками можно установить соответствие так: $\boldsymbol{X \leftrightarrow Y}$, если $\boldsymbol{\frac{CY}{AX} = \frac{CD}{AB}}$, где $\boldsymbol{CY}$, $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AX}$ – длины отрезков.

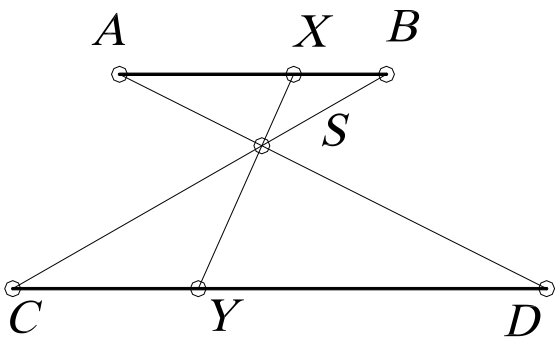


Рис. 4.

Второе соответствие отличается от первого не только формой задания, но и парами соответствующих точек. Это можно заметить хотя бы по концам отрезка. В первом соот-

ветствии $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$, во втором – $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$. Этими двумя примерами не исчерпывается множество взаимно однозначных соответствий, которые могут быть установлены для точек данных отрезков.

Кроме этого, встречаются многозначные соответствия. Например, легковой машине соответствует 4 колеса, и наоборот. Такое отображение называется одно-четырёхзначное ($1 \leftrightarrow 4$). Одно-двузначное отображение можно рассмотреть на примере действительных чисел, то есть каждому действительному числу соответствует пара рационального и иррационального чисел, и наоборот: $1 \leftrightarrow 2$.

Примером обратимого соответствия является отображение двух плоскостей друг на друга при параллельном проецировании (рис. 5). Если в обратимом отображении область прибытия и область отправления – одно и то же множество ***M***, то такое отображение называется отображением множества на себя, или ***преобразованием множества M.***

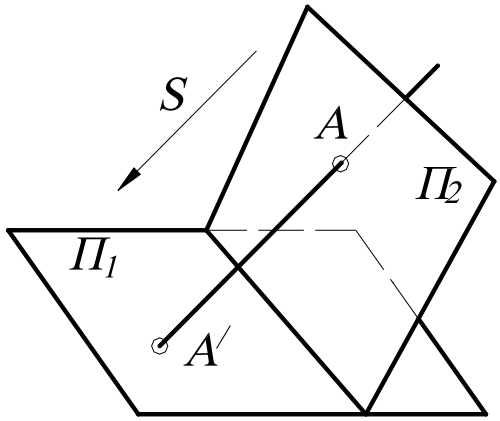


Рис. 5.

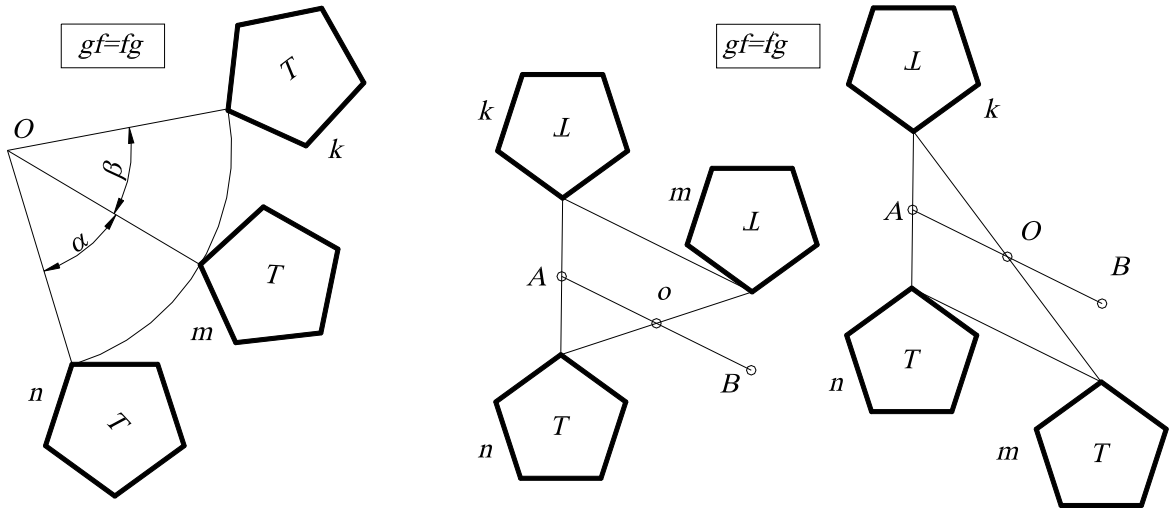
Отображение называется ***преобразованием***, если множества ***X*** и ***Y*** совмещены, то есть не только элементу x_i соответствует определённый элемент y_i, но и элементу y_i соответствует тот же элемент x_i. В этом случае говорят, что множество ***X*** отображается на себя ***{X=Y}***. Другими словами, если отображение является обратимым, то оно называется преобразованием. Например, центральная симметрия точек пространства относительно некоторой точки ***O*** есть преобразование пространства.

Говоря о геометрическом ***преобразовании***, обычно подразумевают, что ***M*** – множество точек плоскости или пространства. Если какое-то свойство фигуры ***F*** сохраняется в преобразовании ***f***, то есть фигура $F' = f(F)$ обладает тем же свойством, то это свойство называется ***инвариантом*** преобразования.

Итак, ***преобразование*** – это взаимно однозначное отображение между всеми точками плоскости (или пространства), то есть правило, при котором каждой точке ***P*** соответствует единственная точка P', и, наоборот, каждой точке P' соответствует единственная точка ***P***. Другими словами, правило, таким образом составляющее пары точек, что каждая точка ***P*** плоскости (или пространства) ровно в одной паре стоит на первом месте и ровно в одной паре - на втором.

Может случиться, что обе точки пары окажутся одинаковыми. То есть что точка P' совпадает с точкой ***P***. В этом случае точка ***P*** называется неподвижной (двойной) точкой преобразования.

Результат последовательного выполнения нескольких преобразований называется их ***произведением***, или ***композицией преобразований.*** Другими словами, преобразование, переводящее прообразы первого в образы второго при условии, что образы первого отождествлены с прообразами второго. Иначе говоря, если $f(k) = m$ и $g(m)=n$, то произведение $h=gf$ переводит ***k*** в ***n***, то есть $h(k)=n$ (преобразование, выполняемое первым, пишут ***справа!***). Например, если ***f*** и ***g*** – повороты вокруг центра ***O*** на углы α и β, то $h=gf$ – поворот с той же осью на угол $\alpha+\beta$ (рис. 6, *а*). Если ***f*** – перенос на вектор ***AB***, а ***g*** – симметрия с центром ***O***, то $h=fg$ – симметрия с центром ***A***, где $2AO=AB$ (такое преобразование показано на рис. 6, *б*).
Здесь в первом примере произведение $h=gf=fg$, то есть не зависит от порядка сомножителей, то есть в этом случае говорят, что ***f*** и ***g перестановочны*** или ***коммутируют***. Однако во втором примере произведение зависит от порядка сомножителей, то есть не коммутирует: $fg \neq gf$ (сравните два рисунка – 6, *а* и 6, *в* или 6, *а* и 6, *б*).



а *б* *в*

Рис. 6.

Аналогично иногда результат двух операций зависит от порядка их выполнения, а иногда – и нет. Например, операции надевания левого и правого ботинок ***Л*** и ***П*** перестановочны: ***ЛП=ПЛ***, а операции надевания ботинка ***Б*** и носка ***Н*** – не коммутируют ***БН≠НБ.***

1.3. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ НА ПОСТРОЕНИЕ

Любую задачу на построение можно сформулировать в общем виде так: «Построить объекты a_1, a_2 …, являющиеся элементами множества M и удовлетворяющие условиям *1*, *2* **…**». Число объектов и условий зависит от конкретного содержания задачи.

Элементы множества M, удовлетворяющие условию *1*, образуют некоторое подмножество $M_1 \subset M$, условие *2* выделяет из M подмножество M_2 и т. д. Искомые объекты получаются как результат пересечения подмножеств M_1, M_2, **…**, т. е. $\{a_1, a_2, \ldots\}=M_1 \cap M_2 \cap \ldots$.

Задача 1. Построить на плоскости точки a_1, a_2, удаленные от данной точки O_1 на расстояние r_1 и от точки O_2 на расстояние r_2 (рис. 7).

Подмножество M_1, выделяемое из плоскости M (здесь плоскость – это множество M) согласно первому условию, – это окружность с центром O_1 и радиусом R_1. Аналогично, M_2 – это окружность с центром O_2 и радиусом R_2. Тогда получают искомые точки: $\{a_1, a_2\}=M_1 \cap M_2$.

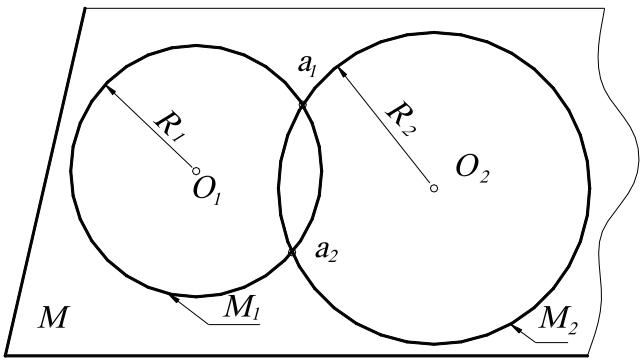
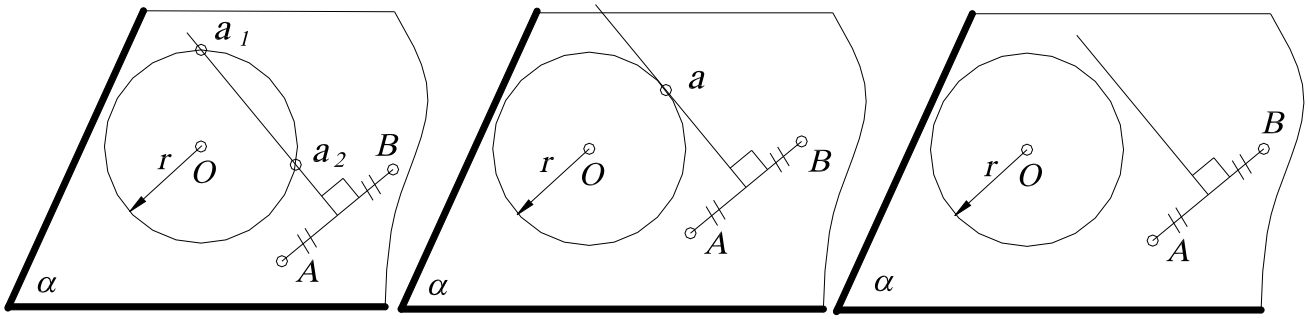


Рис. 7.

Задача 2. Найти на плоскости точку a, удаленную на расстояние r от точки O и равноудаленную от точек A и B.

Подмножество M_1, выделяемое первым условием из плоскости M, - окружность с центром O и радиусом r. Подмножество M_2, удовлетворяющее второму условию, – перпендикуляр, восстановленный к середине отрезка AB. Искомая точка a есть пересечение окружности с перпен-

дикуляром, то есть $a=M_1 \cap M_2$. В данном случае может получиться две, одна или ни одной точки (мнимые) пересечения $M_1 \cap M_2=\varnothing$ (рис. 8, *а*, *б*, *в*).



а *б* *в*

Рис. 8.

Такой метод называется ***расчленением условий***, то есть элементы из ***M***, удовлетворяющие первому условию, образуют некоторое подмножество; взятое отдельно второе условие выделяет из множества ***M*** другое подмножество и т. д. Искомые объекты получаются как результат пересечения этих подмножеств.

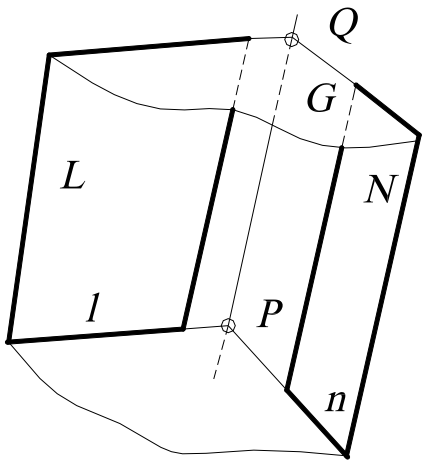


Рис. 9.

Задача 3. Найти прямую пересечения двух плоскостей ***L*** и ***N*** (рассматривают ***L*** и ***N*** как подмножества пространства, элементом которых является точка). Задают вспомогательную плоскость-посредник ***M*** и находят пересечение этих подмножеств $L \cap N \cap M$ (рис. 9). Пользуясь свойством идемпотентности, преобразуют: $L \cap N \cap M = L \cap N \cap (M \cap M)$, и далее, пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности, преобразуют: $L \cap N \cap (M \cap M)=(L \cap M) \cap (M \cap N)$. Другими словами, введя плоскость-посредник, находят вначале пересечение посредника с заданными плоскостями (прямые ***l***, ***n***), а затем пересечение этих пересечений (точка ***P***).

Взяв другую вспомогательную плоскость ***G*** и повторив те же самые операции, находят вторую точку ***Q***. Соединив точки ***P*** и ***Q***, получают искомую прямую ***m***. Этот прием применяют в начертательной геометрии при построении точек линии пересечения поверхностей, введя предварительно поверхность-посредник.

1.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ РАЗМЕРНОСТЬ

Термин «пространство» часто встречается в геометрии. Существуют аффинное пространство, евклидово, проективное, топологическое, эллиптическое и другие. Любое пространство представляет собой множество, удовлетворяющее определенной системе аксиом.

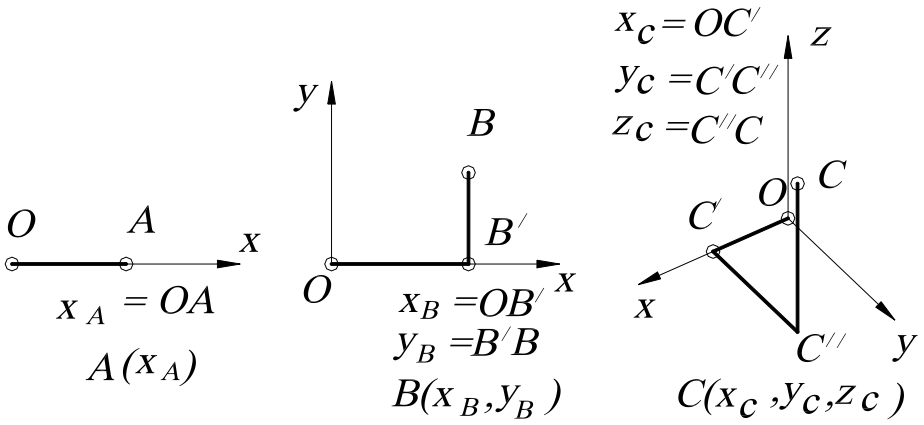
В данном курсе будем рассматривать евклидово пространство, то есть множество точек, удовлетворяющее аксиомам евклидовой геометрии, которая изучалась в средней школе. Необходимо отметить, что евклидово пространство не одно. Множества точек различной мощности будут давать отличающиеся друг от друга евклидовы пространства. Точка, прямая, плоскость, физическое пространство – это примеры евклидовых пространств различной мощности.

Интуитивно мы понимаем, что на плоскости точек больше, чем на прямой, так как прямая может быть совмещена с некоторой прямой на плоскости. На поверхности точек меньше, чем в пространстве, то есть поверхность - подмножество пространства, поэтому поверхность содержит «меньше» точек, чем пространство.

Таким образом, среди бесконечных множеств существует своя иерархия. Можно сказать, что если множество ***M*** можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на множество ***N***, то ***M*** и ***N*** имеют одинаковую размерность. Если же такого отображения не существует, но существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение множества ***M*** на подмножество $N_1 \in N$, то ***M*** имеет размерность меньше, чем ***N***.

При моделировании необходимо иметь возможность оценить мощность бесконечного множества. Для этого вводится понятие параметра. ***Параметром называется величина, входящая в некоторую совокупность величин, задание которых определяет элемент множества.*** При этом параметры должны быть независимыми, то есть значения, которые принимает один из параметров, не влияют на значения других, при любом изменении параметров им должен соответствовать уже другой элемент множества. Иными словами, между элементами множества и совокупностями (наборами) параметров установлено взаимно однозначное соответствие.

Число параметров ***p***, которое необходимо задать, чтобы определить элемент множества, называется ***параметрическим числом*** этого множества, а само множество – ***p-параметрическим.*** Параметрическое число может быть взято в качестве количественной характеристики бесконечных множеств. В качестве параметров для евклидовых пространств могут быть взяты координаты точки в декартовой системе координат (декартовы координаты).



а *б* *с*

Рис. 10

На прямой для того, чтобы определить (задать) точку, необходима одна координата (говорят, что точка на прямой имеет одну степень свободы) (рис. 10, *а*), на плоскости – две координаты (то есть точка имеет две степени свободы) (рис. 10, *б*), в пространстве – три, и точка имеет три степени свободы (рис. 10, *в*). Нетрудно заметить, что координаты являются независимыми, то есть при изменении координаты, например ***x***, изменяется положение точки на плоскости.

Число параметров (координат), которое необходимо задать, чтобы определить точку в пространстве, называется ***размерностью*** пространства. Таким образом, ***размерность*** – это параметрическое число множества, которое является пространством. В связи с этим будем считать, что точка – «нульмерное» пространство (аксиома). Линия (прямая) – одномерное евклидово пространство, которое обычно обозначается E_1, или одномерное множество точек - ∞^1. Поверхность (плоскость) – двумерное евклидово пространство, обозначается E_2, или

двумерное множество точек - ∞^2, а трехмерное евклидово пространство имеет размерность, равную ***3***, – трехмерное множество точек - ∞^3, обозначается E_3. Употребляется также запись ***dim M=n***, означающая «размерность множества ***M*** равна ***n***» (***dimension*** (англ.) – размерность).

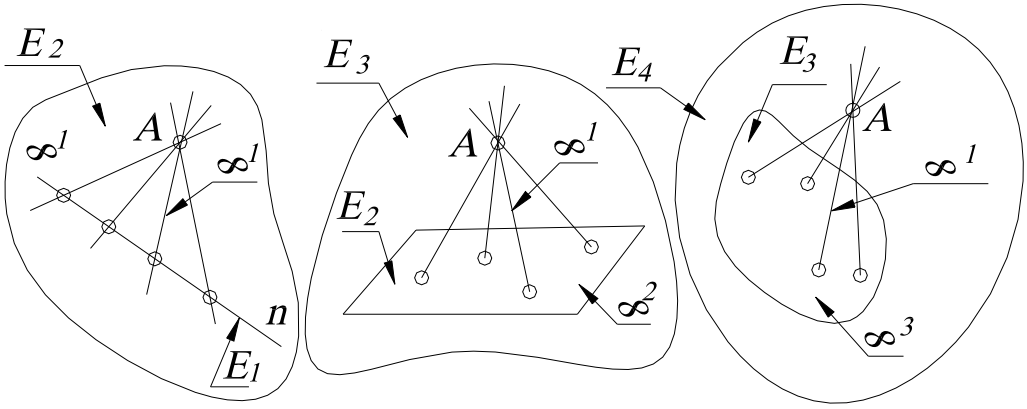
Пусть ***N*** – двупараметрическое множество. Каждый элемент из ***N*** определяется конкретной парой чисел из множества (a_1, a_2). Между ***N*** и E_2 можно установить взаимно однозначное соответствие, так как они одной мощности (параметрическое число ***N*** и размерность E_2 равны). Соответствие можно установить, например, так: $x=a_1$, $y=a_2$. Каждому элементу из ***N*** будет соответствовать точка из E_2. Пространство E_2 будет являться геометрической моделью ***N***.

Итак, множество имеет размерность ***n***, если его элементам можно взаимно однозначно поставить ***n***-ки («***энки***») чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$, то есть ***n***-я декартова степень множества. Эти числа называют параметрами конкретного множества.

Таким образом, за ***эталон n-мерного множества принимают множество R_n, элементом которого служит n-ка вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, то есть n-я декартова степень множества вещественных чисел***.

1.5. ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА

ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Для геометрического построения пространства E_2 возьмем точку, не принадлежащую прямой ***n*** (или пространство E_1), и установим взаимно однозначное соответствие между прямыми пучка и точками прямой. Объединение точек всех этих прямых (вместе с их несобственными точками) будет определять двумерное пространство E_2 (рис. 11, *а*). Если не учитывать несобственные точки, то пришлось бы «выбросить» из E_2 прямую, параллельную прямой ***n***.



E_2: $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^{1+1} = \infty^2$; E_3: $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^{1+2} = \infty^3$; E_4: $\infty^1 \cdot \infty^3 = \infty^{1+3} = \infty^4$

а *б* *в*

Рис. 11.

ТРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Для геометрического построения пространства E_3 возьмем точку, не принадлежащую пространству E_2 (то есть плоскости) и также установим взаимно однозначное соответствие между прямыми связки и точками ***2***-пространства (рис.11, *б*). Объединение точек всех этих прямых (вместе с их несобственными точками) есть трехмерное пространство E_3. Пространство E_2 (как и в первом случае пространство E_1) является проективным пространством, то есть пространство, дополненное несобственными элементами. В противном случае из связки нам пришлось бы «выбросить» пучок прямых, параллельных E_2, а из E_3 – плоскость этого пучка.

ЧЕТЫРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Начнем с аналогичного построения четырехмерного пространства E_4. Возьмем точку, не принадлежащую трехмерному евклидову пространству E_3, дополненному несобственными элементами, и установим взаимно однозначное соответствие между прямыми гиперсвязки и точками ***3***-пространства (рис.11, *в*). Объединение точек всех этих прямых будет определять пространство E_4. Аналогично строится многомерное пространство.

Таким образом, мы пришли к идее многомерного пространства. Понятие многомерного пространства или многомерного множества довольно абстрактное, но и в евклидовом пространстве на каждом шагу встречаются такие множества. Например, прямая – одномерное множество точек (самое простое множество), множество сфер и множество прямых трёхмерного пространства – четырехмерны, множество конусов вращения – шестимерно; цилиндров вращения – пятимерно; множество сфер, касающихся данной плоскости, - трёхпараметрическое множество.

Рассмотрим подробнее примеры и приемы подсчета параметров.

1.6. ПРИЁМЫ ПОДСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ

1. Эталон *n*-мерного множества. За эталон ***n***-мерного множества принимают множество R_n, элементом которого служит ***n***-ка вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, то есть ***n***-я декартова степень множества вещественных чисел.

2. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение данного множества на эталон. Например, устанавливая взаимно однозначное соответствие между прямыми связки и точками плоскости или устанавливая взаимно однозначное соответствие между пучком плоскостей и точками прямой.

Два важных замечания

Замечание 1. Для бесконечных множеств имеют место два факта, кажущиеся на первый взгляд парадоксальными, поскольку они не имеют места для конечных множеств.

Некоторые собственные подмножества бесконечного множества можно взаимно однозначно отобразить на это множество.

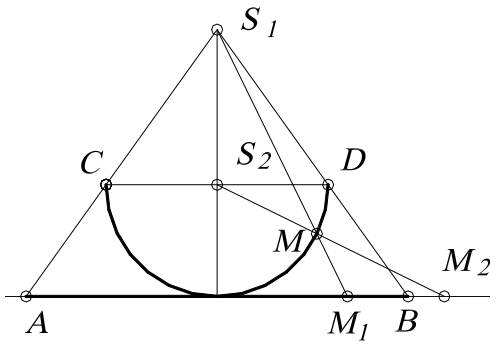


Рис. 12.

Для примера рассмотрим отображение открытого отрезка ***AB*** (открытый отрезок – «отрезок без концов», координаты которого удовлетворяют неравенству $x_A < x_i < x_B$) на прямую, которая совпадает с прямой ***AB*** (рис.12). Полуокружность ***CD*** касается в точке середины отрезка ***AB***. Вначале отображают точки отрезка ***AB*** на эту полуокружность из точки S_1, то есть точке M_1 соответствует точка ***M***).

Затем точки полуокружности (см. точку ***M***) отображают на прямую (точке ***M*** соответствует точка M_2) из центра S_2. Ясно, что при этом каждой точке прямой соответствует одна и только одна точка прямой, причём ни одна точка на прямой не пропущена. Это отображение является взаимно однозначным, то есть отрезку прямой соответствует вся прямая.

Полученное соответствие можно установить и по-другому, с помощью кривой тангенсоиды, графика функции $y = tg\ x$. Отображают вначале (с помощью пучка параллельных прямых) открытый отрезок $(-\pi/2, \pi/2)$ на тангенсоиду, причём каждой точке открытого отрезка соответствует единственная точка тангенсоиды, а затем точки тангенсоиды на ось ***y*** (рис. 13).

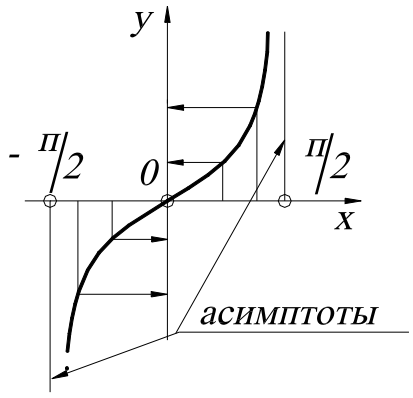


Рис. 13.

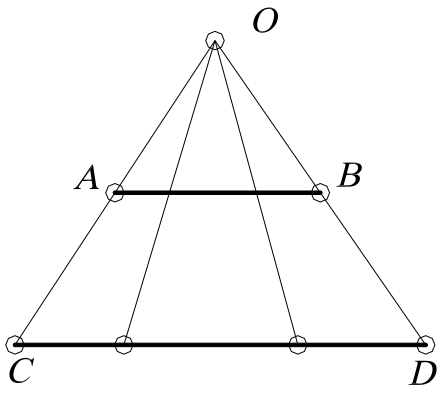


Рис. 14.

<u>Замечание 2.</u> Размерность суммы (объединения) нескольких бесконечных множеств принимают равной максимальной из размерностей слагаемых.

Другими словами, размерность множества не увеличится, если к нему добавить множество меньшей или равной размерности. Например, если объединить множество точек прямой и множество точек плоскости (то есть вложить прямую в эту плоскость), то размерность множества точек на плоскости не увеличится.

Рассмотрим еще примеры сравнения бесконечных множеств. Ответ на вопрос: где больше точек, на отрезке длиной 1 мм или на отрезке 1 м вряд ли бы вызвал тень сомнения – ясно, что отрезок 1 мм в 1000 раз короче метра. Однако можно установить взаимно однозначное соответствие и проверить это. Как это сделать, лучше всего видно на рис. 14.

Отобразим отрезок ***AB*** на отрезок ***CD*** из точки ***O*** пучком прямых. Каждой точке отрезка ***AB*** соответствует единственная точка отрезка ***CD***. Трудно примириться с мыслью, что дорога в миллион световых лет имеет столько же точек, сколько радиус атомного ядра!

<u>3. Степени свободы подпространств.</u> Если две точки пространства E_m принадлежат E_n, то E_m называется подпространством E_n. Например, ***m=1***, ***n=2*** – прямая принадлежит плоскости, тогда прямая является подпространством плоскости, очевидно, что $m<n$. В многомерной геометрии наиболее распространена следующая терминология: E_n – объемлющее ***n***-мерное пространство, E_m – ***m***-мерная плоскость или ***m***-плоскость, если размерность подпространства меньше объемлющего пространства на единицу, то такое многообразие называется ***(n-1)***-плоскость, или ***гиперплоскость***.

Из аксиом принадлежности следует, что прямая (***1***-плоскость) определяется двумя точками, ***2***-плоскость – тремя неколлинейными точками, ***3***-плоскость – четырьмя некомпланарными точками, …, ***n***-плоскость – ***(n+1)***-точками. При этом каждая плоскость (где $m<n$) определяется заданием ***(m+1)***-точек, и эти точки не должны содержаться в ***(m-1)***-пространстве.

Рассмотрим множество ***m***-плоскостей E_n (где ***n*** – размерность пространства), элементом этого множества является ***m***-плоскость. Начнем с простого примера – прямой, находящейся в двумерном пространстве.

<u>ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО.</u> Точка (***0***-плоскость) в двумерном пространстве определяется двумя координатами, то есть параметрическое число равно двум - ∞^2.

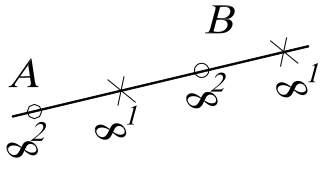


Рис. 15.

Прямая (***1***-плоскость) однозначно задается двумя независимыми точками ***A*** и ***B*** (то есть ***m+1=1+1=2***), каждая из которых в двумерном пространстве имеет по две степени свободы. Поэтому на задание каждой из них затрачиваем по два параметра, а на пары (или ***m+1***-точек) точек – следующее число параметров: ***n(m+1)=2(1+2)=4*** (рис.15). Другими словами, го-

ворят, что система из ***(m+1)***- точки составляет ***n(m+1)***-параметрическое множество.

Но прямая ***AB*** определяется не только парой точек ***A*** и ***B***, но и любой другой своей парой, принадлежащей прямой ***AB***. Каждая из этих двух точек ***(m+1***-точек), находясь на прямой (в общем случае в ***m***-плоскости), имеет по одной степени свободы (в общем случае – ***m*** степеней свободы), а вместе – ***m(m+1)=1(1+1)=2*** степеней свободы.

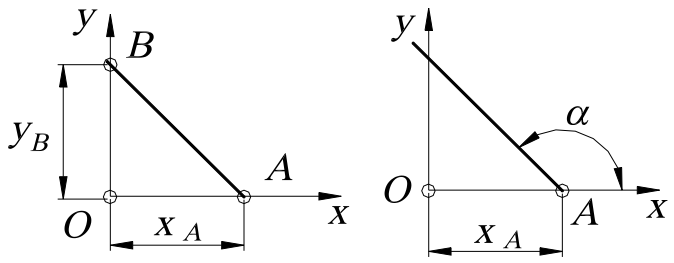
Следовательно, число условий, требуемых для определения прямой (***m***-плоскости), принадлежащей 2-пространству (*n*-плоскости):

$$\frac{\infty^{2}\cdot\infty^{2}}{\infty^{1}\cdot\infty^{1}}=\frac{\infty^{2+2}}{\infty^{1+1}}=\infty^{4-2}=\infty^{2};$$

в общем случае $\dfrac{\infty^{n(m+1)}}{\infty^{m(m+1)}}=\infty^{(n-m)(m+1)}$.

Таким образом, число ***P*** степеней свободы (параметрическое число) ***m***-плоскости в ***n***-пространстве:

$$P=(n-m)(m+1). \qquad (1)$$

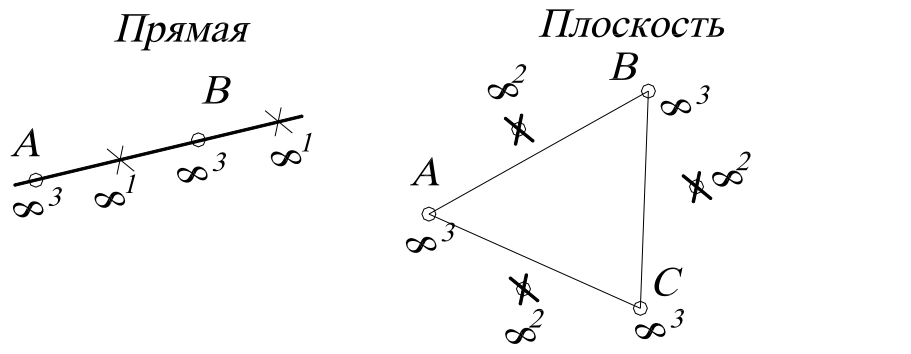


а *б*

Рис. 16.

Геометрический смысл параметров может быть различным. Например, для двупараметрического множества прямых на плоскости это могут быть x_A, y_B (рис. 16, *а*) или x_A, α (рис. 16, *б*).

ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Точка (***0***-плоскость) в трехмерном пространстве имеет три степени свободы - ∞^{3}. ***Прямая*** однозначно задается двумя независимыми точками (рис. 17, *а*), каждая из которых в ***3***-пространстве имеет по три степени свободы, а значит, пар точек $\infty^{3}\cdot\infty^{3}=\infty^{6}$. Но эта прямая определяется не только этой парой точек, но и любой другой своей парой, имеющей на этой прямой по одной степени свободы, то есть $\infty^{1}\cdot\infty^{1}=\infty^{2}$. Следовательно, число степеней свободы прямой в ***3***-пространстве $\infty^{6}:\infty^{2}=\infty^{4}$, что соответствует формуле ***P=(n-m)(m+1)=(3-1)(1+1)=4.***



$$\frac{\infty^{3}\cdot\infty^{3}}{\infty^{1}\cdot\infty^{1}}=\frac{\infty^{3+3}}{\infty^{1+1}}=\infty^{6-2}=\infty^{4} \qquad \frac{\infty^{3}\cdot\infty^{3}\cdot\infty^{3}}{\infty^{2}\cdot\infty^{2}\cdot\infty^{2}}=\frac{\infty^{3+3+3}}{\infty^{2+2+2}}=\infty^{9-6}=\infty^{3}$$

а *б*

Рис. 17.

Плоскость однозначно задается тремя точками, каждая из которых имеет по три степени свободы, а значит, троек точек: $\infty^3 \cdot \infty^3 \cdot \infty^3 = \infty^9$ (рис.17, *б*). Но плоскость определяется не только этой тройкой, но и любой другой своей тройкой точек, имеющих в этой плоскости по две степени свободы, то есть $\infty^2 \cdot \infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^6$. Тогда параметрическое число плоскости, находящейся в ***3***-пространстве, будет составлять трехпараметрическое множество, то есть $\infty^9 : \infty^6 = \infty^{9-6} = \infty^3$, что соответствует формуле ***P=(3-2)(2+1)=3***.

Вообще это число ***(n-m)(m+1)*** стоит на месте ***(к+1)*** меньше в ***n***-й строке «подвешенной за угол» таблице умножения, такая таблица называется «Треугольник Паскаля» (рис. 18).

```
          1
        2   2
      3   4   3
    4   6   6   4
  5   8   9   8   5
6  10  12  12  10  6
.....................
```

Рис. 18.

Примеры различных геометрических многообразий

1. Сфер в пространстве E_3 - ∞^4, так как сфере соответствует четыре числа – три координаты ее центра и одно – длина её радиуса.

2. Цилиндр вращения в пространстве E_3 определяется пятью параметрами ∞^5 - четыре параметра на ось и один на радиус.

3. Треугольников в пространстве E_3 – ∞^9, поскольку треугольник однозначно определен, если заданы три его вершины тройкой координат ***3·3=9***. Аналогично, тетраэдров в ***3***-пространстве - ∞^{12}.

4. Сфер в трёхмерном пространстве, проходящих через данную точку, - ∞^3, то есть центров, лежащих на прямой, составляет - ∞^1, а таких прямых – связка ∞^2.

5. Сфер, касающихся плоскости - ∞^3.

6. Окружностей на плоскости - ∞^3.

7. Множество касательных плоскостей к поверхности - ∞^2 (за исключением развертывающихся ∞^1).

8. Окружностей в ***3***-пространстве - ∞^4.

4. Связывание параметров. Если на элементы ***n***-мерного многообразия ***M*** (например, ***M***-связка прямых) наложено определенное условие (например, прямые связки ***M*** должны пересекать произвольную прямую), причем элементы из ***M***, которые удовлетворяют этому условию, образуют n_1-мерное подмножество $M_1 \subset M$ (пучок прямых, определяемых центром связки и произвольной прямой, не проходящей через центр), то это условие (требование, ограничение) равносильно фиксированию $n-n_1$ параметров, то есть приданию этим параметрам определенных числовых значений. Это означает, что, фиксируя $n-n_1$ параметров, мы выделяем из ***M*** подмножество той же размерности n_1. В этом случае говорят не о фиксации, а о связывании параметров, употребляя выражения: «***условие связывает $n-n_1$ параметров***», «***ограничение поглощает $n-n_1$ параметров***», «***требование накладывает на параметры $n-n_1$ связей (понижает размерность многообразия на $n-n_1$)***».

Аналитически такое задание эквивалентно тому, что ***n***-ки параметров, соответствующие элементам из ***M***, удовлетворяют $n-n_1$ уравнениям. Аналогично, фиксируя две (три) координаты или связывая координаты двумя (тремя) параметрами (уравнениями), мы выделяем из трехмерного пространства его одномерное (нульмерное) подмножество.

Пусть ***m***-плоскость (***m***-плоскость определяется ***(m+1)*** фиксированной точкой) проходит через пространство ***r***, которое задается ***(r+1)*** фиксированной точкой. Тогда для полного

определения необходимо дозадать еще $(m+1)-(r+1)=m-r$ точек. Поэтому ***число P степеней свободы m-плоскости, принадлежащей n-мерному пространству и проходящей через r-плоскость:***

$$P=(n-m)(m-r). \quad (2)$$

ПРИМЕР 1. Множество прямых $(m=1)$ плоскости $(n=2)$, проходящих через точку $(r=0)$, составляет пучок, то есть однопараметрическое множество: $P=(n-m)(m-r)=(2-1)(1-0)=1$.

ПРИМЕР 2. Множество прямых $(m=1)$ пространства $(n=3)$, проходящих через точку $(r=0)$, составляет связку: $P=(3-1)(1-0)=2$.

ПРИМЕР 3. Множество плоскостей $(m=2)$ трехмерного пространства $(n=3)$, проходящих через точку $(r=0)$, составляет связку: $P=(3-2)(2-0)=2$.

ПРИМЕР 4. Множество прямых пространства $(n=3)$, пересекающих прямую, рассчитывается следующим образом. Вначале считают, сколько прямых проходит через точку, – связка $P_1=2$ (см. пример 3), затем считают, сколько связок $(m=2)$ в трехмерном пространстве на прямой $P_1=(3-2)(2-1)=1$. Следовательно, прямые, пересекающие заданную прямую, составляют комплекс $P=P_1+P_2=1+2=3$.

В пространстве E_n m-пространство имеет $(n-m)(m+1)$ степеней свободы, но если оно проходит через r-пространство, то оно имеет $(n-m)(m-r)$ степеней свободы. Следовательно, число условий, необходимых для того, чтобы m-пространство в E_n проходило через данное r-пространство (где $n>m>r$):

$$D=(n-m)(m+1)-(n-m)(m-r)=(n-m)(r+1). \quad (3)$$

ПРИМЕР 5. В трехмерном пространстве $(n=3)$ число условий, необходимых для прохождения прямой линии $(m=1)$ через данную точку $(r=0)$: $D=(n-m)(r+1)=(3-1)(0+1)=2$. Другими словами, множество прямых трехмерного пространства четырехпараметрично $(P_1=(3-1)(1+1)=4)$, а в связке (множество прямых, проходящих через точку) – двупараметрично $(P_2=(3-1)(1-0)=2)$. Поэтому число условий D, которые требуется наложить на прямые, чтобы они принадлежали данной связке, равно разности P_1-P_2, то есть $D=4-2=2$.

Если r-пространство не фиксировано и имеет степени свободы в q-пространстве, равное $(r+1)(q-r)$, следовательно, число условий, которое необходимо наложить, чтобы m-пространство и q-пространство в пространстве E_n пересекались по r-пространству:

$$(n-m)(r+1)-(r+1)(q-r)=(r+1)(n-m-q+r), \quad (4)$$

где $m+q \le n+r$, если $m+q>n+r$, то они пересекаются по пространству размерности $m+q-n$, что больше, чем r.

ПРИМЕР 6. Применение формулы (4) покажем на примере определения количества направляющих линейчатой поверхности (в качестве направляющих для простоты возьмем прямые). Требование пересечения образующей линии $(m=1)$ с одной направляющей прямой $(q=1)$ в точке $(r=0)$ равносильно числу условий, накладываемых на образующую и вычисляемых так: $D=(3-1-1+0)(0+1)=1$. Поэтому для выделения из четырехпараметрического множества прямых трёхмерного пространства линейчатой поверхности (однопараметрического множества прямых) необходимо задать три направляющие ($n-n_1=4-1=3$).

ПРИМЕР 7. Коническая поверхность определяется вершиной одной направляющей. Как было показано (пример 6), пересечение образующей с направляющей линией в точке равносильно наложению на образующую одного условия. Прохождение образующей через вершину равносильно наложению двух условий и подсчитывается по формуле (3): $(3-1)(0+1)=2$. В сумме эти требования накладывают на прямую три условия и выделяют из четырехпараметрического множества прямых пространства коническую поверхность.

5. Размерность пересечения. Пусть M – n-мерное множество, M_1 и M_2 – его подмножества размерности m_1, m_2, выделенные условиями, связывающими соответственно $(n-m_1)$ и $(n-m_2)$ параметров.

Оба эти условия вместе связывают: $(n-m_1)+(n-m_2)=2n-m_1-m_2$ параметров. Поэтому размерность пересечения множеств M_1 и M_2, элементы которых удовлетворяют обоим условиям: $n-(2n-m_1-m_2)=m_1+m_2-n$.

$$n\cap = m_1 + m_2 - n, \qquad (5)$$

то есть ***размерность пространства пересечения равна сумме размерностей пересекающихся пространств без размерности операционного пространства***.

Если пересекаются ***i*** пространств, то применяется следующая формула:

$$n_{\cap} = m_1 + m_2 + \ldots + m_i - n(i-1);$$

$$n_{\cap} = \sum_{i=1}^{n} m_i - n(i-1), \qquad (6)$$

то есть ***размерность пространства пересечения равна сумме размерностей пересекающихся пространств без размерности пространства пересечения, взятой i -1 раз, где i – число пересекающихся пространств.***

Условия применения при использовании этой формулы:

1. Если оказалось, что размерность меньше нуля, это означает, что заданные множества не пересекаются.

2. Следует иметь в виду, что формула справедлива лишь для подмножеств M_1 и M_2 общего положения. Например, если M_1 и M_2 – прямые, а n – трехмерное пространство, то $n_1=n_2=1$, $n=3$, а $r= -1$, то есть M_1 и M_2 не пересекаются, хотя в частном случае две прямые могут иметь общую точку и даже совпадать (если прямые принадлежат одной плоскости).

3. В случае $r=0$ (нульмерным называется множество, состоящее из конечного числа элементов), поэтому, получив такой результат, не следует думать, что множество пересечений состоит из одного элемента; это возможно, но возможно также, что оно состоит из двух, трех и любого конечного числа элементов.

6. Расслоение множества на классы эквивалентности.

Итак, для множества M, имеющего размерность n: каждому элементу a, принадлежащему M $(a \in M)$, соответствует n-ка параметров $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Зафиксируем какой-либо параметр, например $a_n=0$. Тогда подмножество $M_1 \subset M$ (для элементов, где $a_n=0$). Следовательно, размерность множества M_1 равна $(n-1)$, то есть элемент из множества M_1 определяется набором $(n-1)$ параметров, «чисел».

Поскольку имеется бесчисленное однопараметрическое множество способов, которыми можно зафиксировать параметр a_n, то, следовательно, множество M расчленяется на однопараметрическое множество $(n-1)$-мерных подмножеств, каждое из которых соответствует одному из этих однопараметрических значений параметра a_n, причем никакие два из этих подмножеств не пересекаются, и объединение всех этих подмножеств есть множество M.

Такие подмножества называются ***классами эквивалентности***, означающими, что элементам a и b, принадлежащим множеству M, отнесены n-ки чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, в которых $a_n=b_n$. Для фиксированной координаты u_1 в вышеприведенном примере такими классами эквивалентности являются непересекающиеся 2-поверхности.

Если фиксируются два параметра, то из множества M выделяется $(n-2)$-мерное подмножество. Выполняя перебор всех двухпараметрических способов фиксации этих двух параметров, мы получаем двупараметрическое семейство прямых, параллельных оси y.

В общем случае, фиксируя ∞^n раз m каких-то параметров, мы расслаиваем n-мерное множество M на ∞^m классов по ∞^{n-m} элементов в каждом.

Таким образом, если множество M разбить на ∞^m взаимно непересекающихся и заполняющих все множества M_1 подмножеств по ∞^n элементов в каждом, то M содержит:

$$\infty^m \cdot \infty^n = \infty^{m+n}. \qquad (7)$$

ПРИМЕР. Множество плоскостей пространства расслаивается на ∞^2 пучков параллельных плоскостей по ∞^1 плоскостей в пучке, то есть содержит $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^{1+2} = \infty^3$.

7. Использование уравнений. Далее рассмотрим, как осуществляется подсчет параметрического числа поверхности, если последняя задана в аналитической форме. Для простоты начнем исследование с ***2***-поверхностей пространства E_3.

Рассматривая уравнение типа $Ax+By+Cz+D=0$, можно подсчитать размерность многообразия, а именно множество плоскостей пространства. Если мы придадим коэффициентам ***A, B, C, D*** определенные числовые значения A_0, B_0, C_0, D_0, то мы получим некоторую определенную плоскость $\alpha \in M$. Таким образом, имеется соответствие: «четверка чисел» (A_0, B_0, C_0, D_0) $\rightarrow$ плоскость пространства α_0, которое однозначно лишь в одном направлении.

Действительно, плоскости α_0 отвечает любая из четверок коэффициентов kA, kB, kC, kD, где k – любое число, не равное нулю. То есть уравнения:

$$A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0;$$
$$kA_0x+kB_0y+kC_0z+kD_0=0$$

задают одну и ту же плоскость. Итак, одной четверке чисел соответствует одна плоскость, но одной плоскости соответствует однопараметрическое множество четверок чисел (столько же, сколько чисел k), соответственно пропорциональных четверок. Отношение «быть соответственно пропорциональным» является отношением эквивалентности на множестве четверок чисел. Поэтому четырехпараметрическое множество четверок чисел расслаивается на трехпараметрическое многообразие классов по однопараметрическому семейству пропорциональных четверок в каждом.

Таким образом, соответствие «класс пропорциональных четверок чисел – плоскость пространства» однозначно уже в обе стороны, и поэтому плоскостей в множестве M столько же, сколько таких классов, то есть ∞^3 - трехпараметрическое множество.

Если координаты x, y, z связаны двумя уравнениями, то этим выделяется одномерное подмножество трехмерного множества точек пространства – линия (в общем случае пространственная).

8. Размерность кривых, поверхностей. Параметрическое число P плоской алгебраической кривой m-го порядка:

$$P = \frac{m(m+3)}{2}. \qquad (8)$$

ПРИМЕР 1. Параметрическое число кривой второго порядка $m=2$ (например, коники): $P = \frac{2(2+3)}{2} = 5$, то есть, чтобы на плоскости выделить конику, нужно задать пять параметров.

В общем случае параметрическое число алгебраической поверхности m-го порядка:

$$P = \frac{1}{n!}\left[\prod_{i=1}^{n}(m+i)\right] - 1, \qquad (9)$$

где n – размерность объемлющего пространства; m – порядок поверхности.

ПРИМЕР 2. Поверхность второго порядка $m=2$ в трехмерном пространстве $n=3$ имеет следующее параметрическое число:

$$P = \frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1 = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3} - 1 = 9.$$

В приведенных выше примерах каждый коэффициент эквивалентен заданию одного условия. Поэтому говорят, что кривая второго порядка, будучи пятипараметрической, однозначно определяется заданием пяти точек, а поверхность второго порядка – заданием девяти точек.

1.7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

При решении любой задачи важнейшим значением является задание необходимого и достаточного числа условий (параметров), которое необходимо при корректной постановке задачи. Если задача поставлена корректно, то у нее конечное число решений. Мы будем рассматривать только геометрические задачи, хотя в общем случае эту методику можно использовать при решении любых задач (экономических, технологических, экологических и т. д.).

На интуитивном уровне мы иногда понимаем, что задача составлена некорректно, то есть условий для выделения конечного числа решений недостаточно. Иногда встречаются такие задачи, где условий слишком много, то есть если убрать одно условие, то задача будет иметь конечное число решений. О таких задачах говорят, что условие поставлено слишком «жестко». Разрешить эти сомнения позволяет подсчет параметров. Рассмотрим конкретные задачи начертательной геометрии, начиная с самых простых.

ПРИМЕР 1. В плоскости ***xOy*** построить окружность, касающуюся оси ***x*** и имеющую центр на прямой **a** (рис. 19).

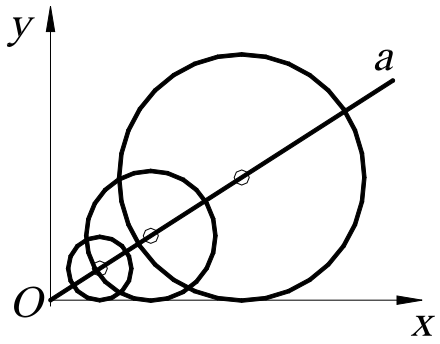


Рис. 19.

Условие задачи «неоднозначно», так как таких окружностей будет столько, сколько точек на прямой, то есть ∞^1. Действительно, параметрическое число окружности в пространстве E_2 равно трем (два параметра тратится на центр и один на радиус), а в задаче – только два условия (условие касания и принадлежность центра прямой). Поэтому необходимо задать еще одно условие, чтобы выделить конечное число решений, например, фиксированную точку на прямой – центр окружности или радиус окружности.

ПРИМЕР 2. Через точку ***B*** провести прямую, параллельную плоскостям ***α*** и ***β*** и пересекающую горизонтальную плоскость ***H*** в точке ***A*** (рис. 20).

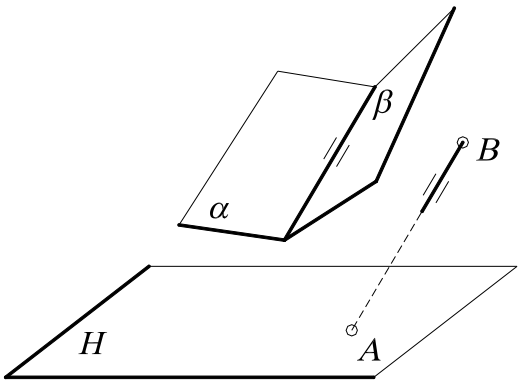


Рис. 20.

Условие задачи поставлено некорректно, «перезадано», так как параметрическое число прямой в пространстве E_3 равно четырем, а в задаче связывается пять условий (условие прохождения через точку связывает два параметра - ***2+2,*** так как две точки – ***A*** и ***B***; условие параллельности линии пересечения двух плоскостей – один). Действительно, если одну из точек переместить, то задача не будет иметь решения.

ПРИМЕР 3.

1. Через точку ***A*** провести прямую, пересекающую две скрещивающиеся прямые ***a*** и ***b.***

Известно, что прямых в **3**-пространстве четырехпараметрическое множество. Поэтому для того, чтобы построить эту прямую, необходимо «связать» четыре параметра. Условие прохождения прямых через фиксированную точку связывает у последней два параметра. В самом деле, возьмем произвольную (фиксированную) точку и установим взаимно однозначное соответствие (биекцию) между прямыми связки и точками плоскости (каждой точке плоскости соответствует единственная прямая связки, и наоборот). Точек на плоскости ∞^2, поэтому и множество прямых связки составляет дву-

параметрическое множество - ∞^2 (или по формуле ***P=(n-m)(m-r)=(3-1)(1-0)=2***). Очевидно, что связали два параметра ***D=4-2=2***, что соответствует формуле ***D=(n-m)(r+1)=(3-1)(0+1)=2***.

В случае прохождения прямых через две скрещивающиеся прямые (в данной задаче две прямые) связывает еще два параметра, так как в пучке прямых, пересекающих прямую ***b***, – ∞^1, но и на прямой ***a*** точек также ∞^1. Поэтому мы выделяем двупараметрическое множество прямых: $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^{1+1} = \infty^2$, то есть конгруэнцию. Таким образом, связали все четыре параметра: ***D=4-2-2=0***. Задача поставлена корректно.

2. Если условие задачи изменить на следующее: построить прямую, проходящую через точку ***A*** и пересекающую три скрещивающиеся прямые.

В данной задаче число условий (как говорят) перезадано для выделения конечного числа решений. Условие прохождения через прямую связывает один параметр, так как в связке прямых ∞^2, а точек на прямой ∞^1, поэтому мы выделяем трехпараметрическое множество прямых $\infty^2 \cdot \infty^1 = \infty^3$, то есть линейный комплекс. Комплекс определяется заданием всех прямых, проходящих через фиксированную прямую.

Прямых в ***3***-пространстве, как известно, ∞^4, то есть связали один параметр ***D=4-3=1***. Условие прохождения всех прямых через две фиксированные прямые, как было сказано выше, «связывает» два параметра. Таким образом, условие прохождения прямых через три скрещивающиеся «связывает» три параметра. Следовательно, ***D=4-3=1***, то есть выделили однопараметрическое множество прямых, которое называется ***линейчатой поверхностью***, или ***регулюс***. Поэтому условие задачи поставлено некорректно, так как нет конечного числа решений. Однако на примере этой задачи показано, как выделяется линейчатая поверхность.

2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

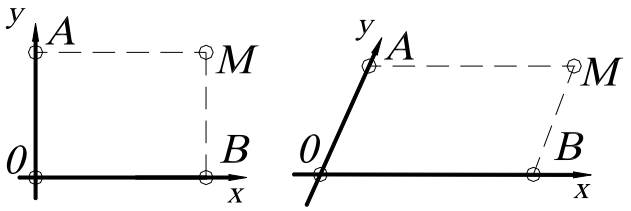
Координатами (от лат. *co* – приставка, означающая совместность, и *ordinatus* – упорядоченный, определённый) называют величины, заданием которых определяется положение точки на прямой, плоскости, поверхности или в пространстве.

2.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Для одномерного случая хорошей иллюстрацией координат является термометр. Некоторой точке ставится в соответствие число ***0***, задаётся единица измерения, определяющая точки ***1, 2, 3…*** - положительные значения координат, которые располагаются на равных расстояниях друг от друга и с одной стороны от точки ***0***. Отрицательные целые числа ***-1, -2, -3…*** определяются симметрично с противоположной стороны от положительных чисел, а дробные вставляются между ними. Произвольной точке ***A*** ставится в соответствие одно из этих чисел.

В двумерном случае положение точки на плоскости может быть определено её расстоянием до двух фиксированных перпендикулярных прямых – ***осей***. Эти понятия встречаются уже у Архимеда Сиракузского (его знаменитая фраза «дайте мне точку опоры, и я переверну весь мир» говорит об этом) и Аполлония Пергского, живших более двух тысяч лет назад, и даже у древних египтян.

Впервые идея о прямоугольных координатах (рис. 21, *а*) была систематизирована французами Пьером Ферма (1601 – 1665) и Рене Декартом (1596 – 1650). Однако в их формулировках расстояния могли быть только положительными. Значительную роль в математике сыграла важная идея, которая принадлежала сэру Исааку Ньютону (1642 – 1727), о том,



а *б*

Рис. 21.

что эти расстояния можно считать и отрицательными, Г. В. Лейбниц (1646 – 1716) первым назвал эти расстояния «координатами».

Для некоторых целей можно использовать неперпендикулярные оси, расстояния от точки ***0*** представляют собой параллелограмм (рис.21, *б*). Отрезки ***AM = 0B = x*** – абсцисса; ***BM = 0A = y*** – ордината точки ***M*** от двух осей координат ***0x*** и ***0y***. Ось ***x*** выражается уравнением ***y =0***, так как каждая точка оси ***x*** удовлетворяет этому уравнению. По аналогии для оси ***y***: ***x=0***.

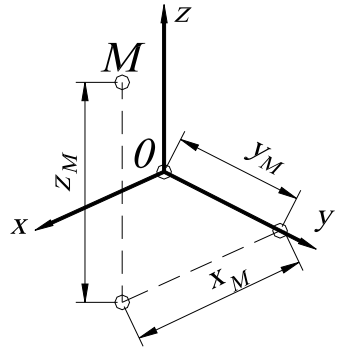


Рис. 22.

Систему координат в пространстве определяют три взаимно перпендикулярные плоскости, которые в своём пересечении дают три взаимно перпендикулярные оси ***x, y, z*** (z_M– аппликата) (рис. 22). Точка ***0*** во всех случаях называется началом координат.

2.2. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

Полярные координаты на плоскости есть расстояние ***0A = r*** от фиксированной точки ***0*** (полюса) и угол ***POM = φ*** между прямой ***0A*** и полярной осью ***0P***, где ***r*** - радиус-вектор, ***φ*** - полярный угол (рис. 23).

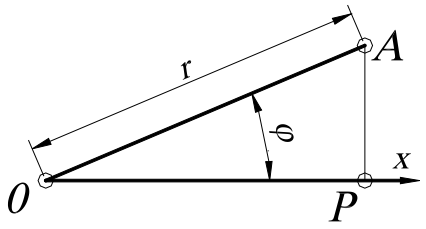


Рис. 23.

Ось ***0P*** можно отождествить с осью ***x*** прямоугольных декартовых координат. Тогда точка ***A*** имеет две координаты ***(r; φ)***. Иногда можно использовать и отрицательные значения ***r***, считая, что точка ***(r; φ)*** совпадает с точкой ***(-r;φ+180^0)***.

Если даны декартовы координаты, то можно перейти к полярным координатам, используя тригонометрические функции, а именно: координаты точек

x = r cos φ, y = r sin φ.

Полярные координаты особенно удобны для описания тех движений и преобразований подобия (центральная симметрия, симметрия относительно прямой, гомотетия и т. д.), которые имеют неподвижную точку. Начало координат в этом случае выбирают именно в этой точке. В пространстве аналогом полярных координат служат цилиндрические и сферические координаты.

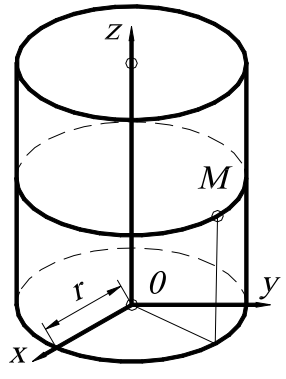


Рис. 24.

2.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Цилиндрические координаты точки ***M*** есть числа ***r, φ, z*** (рис. 24), связанные с декартовыми координатами ***x, y, z*** следующими уравнениями: ***x = r cos φ;***

y = r sin φ;

z = z.

2.4. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Сферические координаты точки M есть три числа r, φ, θ, связанные с декартовыми координатами следующими уравнениями:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta;$$
$$y = r\sin\varphi\cos\theta;$$
$$z = \sin\theta,$$

где r – радиус-вектор, равный $0M$ (рис. 25);

φ - угол между положительным направлением оси $0x$ и горизонтальной проекцией радиус-вектора $0M$ на плоскость $x0y$, взятый против часовой стрелки;

θ - угол между радиус-вектором $0M$ и горизонтальной проекцией его на плоскость $x0y$;

Угол $90^0 - \theta = \sigma$ называется зенитным углом. Сферические координаты применяются для определения географических координат на земной поверхности.

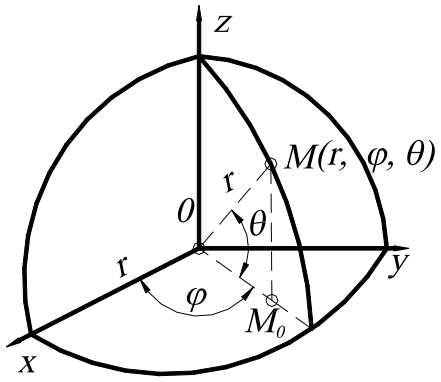


Рис. 25.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое независимые параметры?

2. Привести примеры одно- , двух-, трёх-, четырёхпараметрических многообразий.

3. Проверьте правильность следующих утверждений: 1) прямую в пространстве можно задать: а) точкой и параллельной ей прямой; б) точкой и парой пересекающихся прямых; 2) плоскость: а) тройкой точек; б) точкой и прямой; в) парой пересекающихся прямых; 3) сферу: а) центром и точкой; б) центром и касательной плоскостью; в) четвёркой некомпланарных точек; г) диаметром; 4) цилиндром вращения: а) осью и образующей; б) тройкой некомпланарных образующих.

4. Проверить корректность постановки следующей задачи. В пространстве даны плоскость ω и точки O_1 и O_2. Построить в плоскости ω точки A_1 и A_2 на расстоянии r_1 от O_1 и на расстоянии r_2 от O_2.

5. Определить размерность пересечения геометрических многообразий в различных пространствах: пересечение двух прямых в плоскости (пространстве), пересечение двух плоскостей в трёх- и четырёхмерном пространствах.

Глава 2
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. ЗАПУСК СИСТЕМЫ *AutoCAD*

Запуск ***AutoCAD*** осуществляется так же, как и любого другого приложения в **Windows**: при помощи ярлыка, размещённого на рабочем столе, или посредством меню (на панели задач щелкнуть на кнопке ***Start*** (Пуск), выбрать пункт ***Programs*** (Программы) и затем из выпавшего меню – ***AutoCAD 2005***).

После запуска ***AutoCAD***, в зависимости от его настройки выводится диалоговое окно ***Startup*** (Начало работы) (рис. 26) или рабочее окно ***AutoCAD*** (рис. 27) .

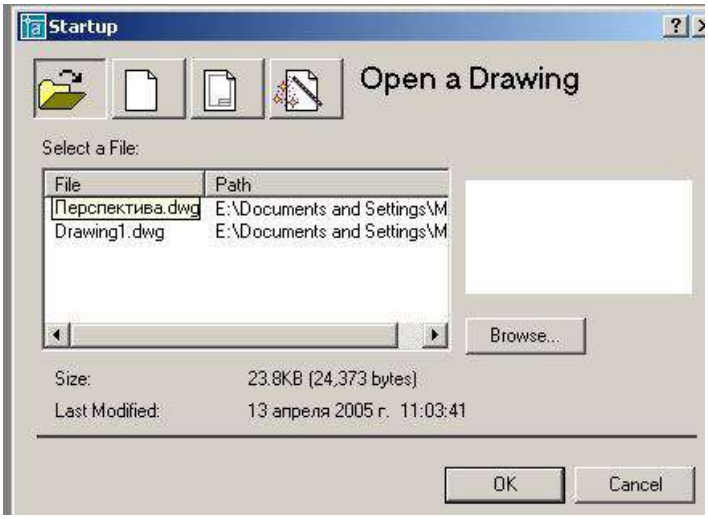


Рис. 26

В диалоговом окне ***Startup*** (Начало работы) предоставляют пользователю 4 кнопки:

1. ***Open a Drawing*** (Открытие чертежа) для открытия ранее созданного чертежа.
2. ***Start from Scratch*** (Без шаблона), то есть начать чертёж без предварительной настройки. При этом пользователю предлагается установить только единицы измерения – британские (футы и дюймы) или метрические.
3. ***Use a Template*** (Использовать шаблон). При этом ***AutoCAD*** выводит список имеющихся шаблонов. Кроме этого пользователь может создать свои шаблоны с нужными ему настройками, например основную надпись и рамку формата.
4. ***Use a Wizard*** (Вызов Мастера) для выполнения предварительной настройки. Мастер позволяет последовательно выполнить полную установку параметров рабочей среды ***AutoCAD***: установить единицы измерения длины (***Units***); единицы измерения углов (***Angle***); задать начало отсчёта угла (***Angle Measure***); положительное направление отсчета угла (***Angle Direction***); определить границы области рисунка (***Area***).

Диалоговое окно ***Startup*** (Начало работы) вызывается при каждой загрузке сеанса ***AutoCAD*** только один раз. В дальнейшем для создания рисунков в запущенном сеансе ***AutoCAD*** вызывается диалоговое окно ***Create New Drawing*** (Создание нового рисунка). Если после загрузки ***AutoCAD*** сразу открывается рабочее окно, то вышеописанные настройки можно выполнить при помощи команд UNITS и LIMITS (пункт меню ***Format***). Для открытия диалогового окна при запуске ***AutoCAD*** необходимо предварительно настроить, войдя в меню ***Format*** (Формат), выбрать вкладку ***System*** (Система) и в раскрывающемся списке ***Startup*** назначить пункт ***Show traditional startup dialog***, что соответствует выбору традиционного диалогового окна.

2. ВИД РАБОЧЕГО ОКНА *AutoCAD*

Рабочее окно системы ***AutoCAD*** содержит типичные для программ, работающих в Windows, элементы (панели инструментов, строка меню, линейки прокрутки). Кроме этого в рабочем окне располагаются две основные области ***AutoCAD*** – зона чертежа и командная строка, в которых происходит основной диалог пользователя с системой (см. рис. 27).

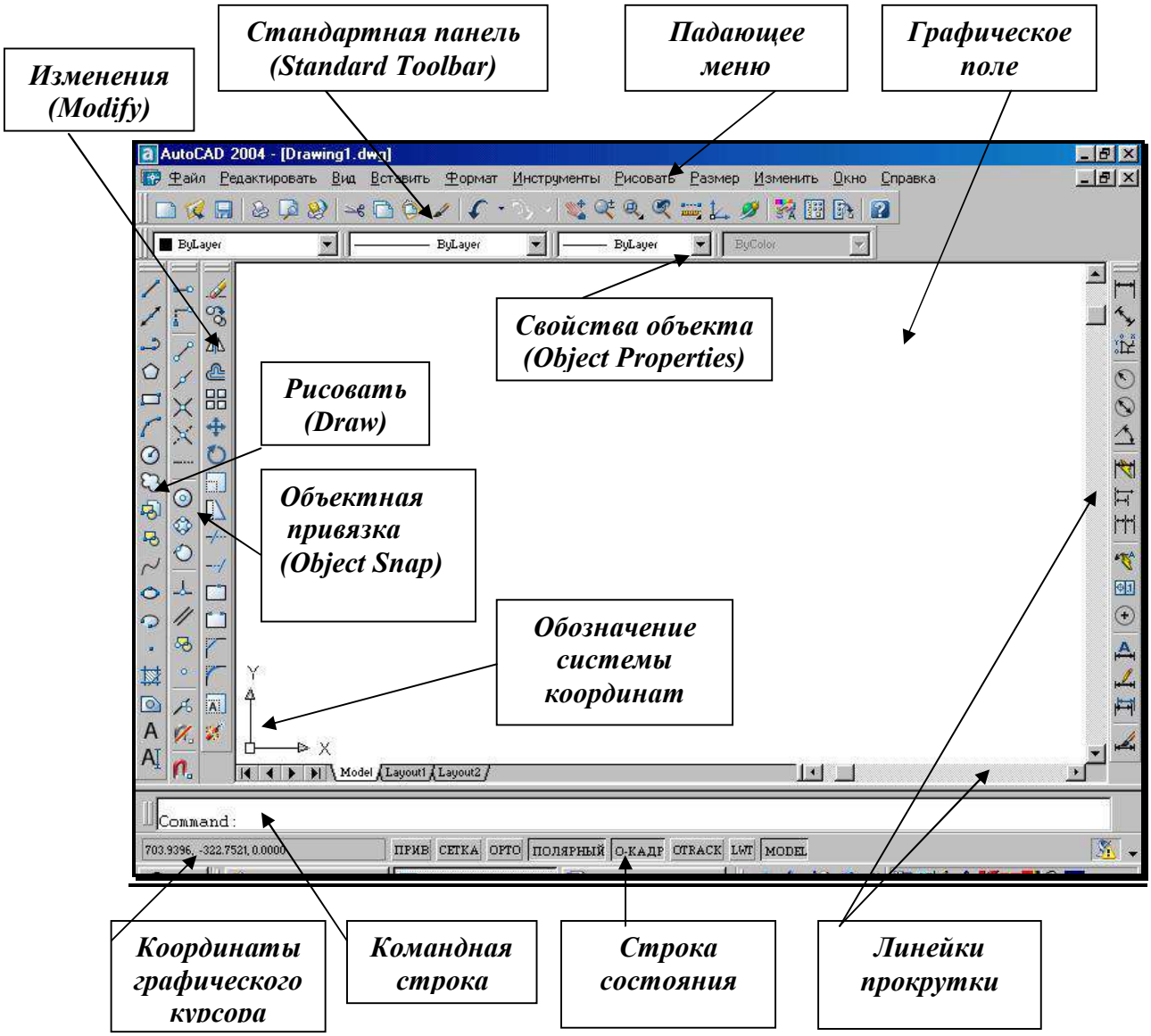


Рис. 27.

3. ПАДАЮЩЕЕ МЕНЮ

Падающее меню (рис. 28) содержит названия меню, в которых по функциональному признаку сгруппированы часто используемые команды ***AutoCAD***. Команды в меню могут располагаться на нескольких уровнях (отличительный признак – «стрелка-треугольник» в конце строки с именем команды). Если за именем команды идёт многоточие, то это означает, что параметры команды определяются в диалоговом окне.

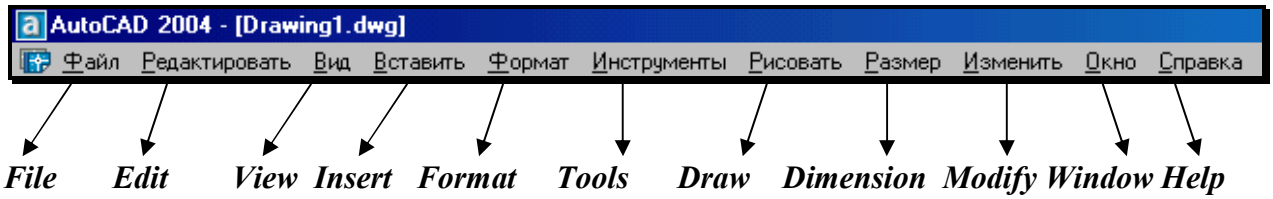


Рис. 28.

Строка падающих меню содержит следующие пункты:

- **File** (Файл) – меню работы с файлами: открытие, сохранение, печать, экспорт файлов в другие форматы и т. д.;
- **Edit** (Правка) – меню редактирования частей графического поля Рабочего стола Wndows;
- **View** (Вид) – команды управления изображением на экране монитора, установки точки зрения, удаления невидимых линий, закраски, тонирования, позволяет устанавливать необходимые панели инструментов;
- **Insert** (Вставка) – осуществляет вставку блоков, внешних объектов, объектов других приложений;
- **Format** (Формат) – обеспечивает работу со слоями, цветом, типами линий, управление стилем текста, размеров, видом маркера точки, стилем мультилинии; установку единиц измерения, границ чертежа;
- **Tools** (Сервис) – содержит средства управления системой, экраном пользователя, включает установку параметров черчения и привязок с помощью диалоговых окон; обеспечивает работу с пользовательской системой координат;
- **Draw** (Рисование) – содержит команды рисования;
- **Dimension** (Размеры) – включает команды простановки размеров и управления параметрами размеров;
- **Modify** (Редактирование) – включает команды редактирования элементов чертежа;
- **Window** (Окно) – содержит средства управления окнами при работе в многооконном режиме;
- **Help** (Справка) – содержит средства справочной системы ***AutoCAD***.

4. СТРОКА СОСТОЯНИЯ

Строка состояния (рис. 29) находится в нижней части экрана, под командной строкой и содержит следующие кнопки.

Рис. 29.

- **SNAP** (ПРИВ) – Шаговая привязка (***Snap Mode***) – включение и выключение дискретного перемещения курсора с заданным шагом (**F9**);
- **GRID** (СЕТКА) – Отображение сетки (***Grid Display***) – включение и выключение сетки (**F7**);
- **ORTHO** (ОРТО) – Режим «ОРТО» (***Ortho Mode***) – включение и выключение ортогонального режима, параллельного осям ***x*** и ***y*** (**F8**);
- **POLAR** (ПОЛЯРНЫЙ) – Полярное отслеживание (***Polar Tracking***) – включение и выключение режима полярного отслеживания (**F10**);

- **OSNAP** (О-КАДР) – Объектная привязка (***Object Snap***) - включение и выключение режимов объектной привязки (**F3**);
- **OTRACK** (ОТС – ПРИВ) – Отслеживание при объектной привязке (***Object Snap Tracking***) - включение и выключение режима отслеживания при объектной привязке (**F11**);
- **LWT** (ВЕС) – Отображение линий в соответствии с весами (***Show/Hide Lineweight***) – включение и выключение режима отображения линий в соответствии с их толщиной;
- **MODEL/PAPER** (МОДЕЛЬ/ЛИСТ) – Пространство модели или пространство листа (***Model or Paper space***) – переключение из пространства модели в пространство листа.

5. ВВОД КОМАНД

Вводить команды в ***AutoCAD*** можно с клавиатуры, из разнообразных меню или с панелей инструментов. Для ввода команды с клавиатуры необходимо напечатать имя команды в командной строке и нажать клавишу ENTER или SPACE. Ввод команд из меню представляется более удобным и наглядным. Чтобы ввести команду, необходимо выбрать нужную команду из списка меню или панели инструментов и нажать левую кнопку мыши. Для повторения последней команды достаточно нажать клавишу ENTER или SPACE. Выполнение команды можно прервать на любой стадии диалога, нажав клавишу ESC.

6. ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ

Панели инструментов являются частью интерфейса ***AutoCAD***. Они состоят из кнопок (пиктограмм), предназначенных для быстрого ввода наиболее часто используемых команд. При загрузке ***AutoCAD*** по умолчанию выводятся четыре панели: 1) ***Standard Toolbar*** (Стандартная панель инструментов); 2) ***Object Properties*** (Свойства объектов); 3) ***Draw*** (Рисовать); 4) ***Modify*** (Изменить).

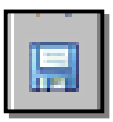
Остальные панели инструментов можно вывести на экран через меню ***View*** (Вид)→***Toolbars*** (Панели). *Удобно выбирать требующуюся панель инструментов нажатием правой кнопки мыши, находящейся на любой пиктограмме панелей инструментов*. Далее рассматриваются наиболее часто используемые панели инструментов.

7. СТАНДАРТНАЯ ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ

(*Standard Toolbar*)

– ***New*** (Новый) – создание нового чертежа;

– ***Open*** (Открыть) – загрузка существующего файла;



– ***Save*** (Сохранить) – сохранение текущего файла;

– ***Print Preview*** (Предварительный просмотр) – предварительный просмотр чертежа перед выводом на печать;

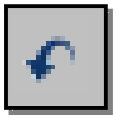
– ***Plot*** (Печать) – вывод чертежа на плоттер или принтер;

– ***Find and Replace*** (Поиск и замена) – поиск, замена, выбор и показ крупным планом текста на рисунке;

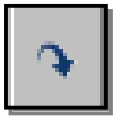
– ***Cut to Clipboard*** (Вырезать) – копирование объектов в буфер обмена с удалением их из рисунка.

– ***Copy to Clipboard*** (Копировать) – копирование выбранных элементов чертежа в буфер Windows;

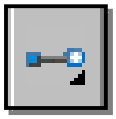
– ***Paste from Clipboard*** (Вставить) – вставка данных из буфера Windows;



– ***Undo*** (Отменить) – отмена действия последней команды;



– ***Redo*** (Повторить) – восстановление только что отменённого действия;



– Подменю ***Object Snap*** (Объектная привязка) – раскрывающийся набор инструментов для выбора объектной привязки;

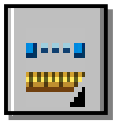
– Подменю ***UCS*** (ПСК) – раскрывающийся набор инструментов для определения новой пользовательской системы координат;

– Подменю ***Zoom*** (Зумирование) – раскрывающийся набор инструментов для задания различных способов увеличения и уменьшения видимого размера объектов на текущем видовом экране;

– ***Zoom Previous*** (Показать Предыдущий) – возврат к показу предыдущего вида;

– ***Pan Realtime*** (Панорамирование в реальном времени) – перемещение изображения на текущем видовом экране в режиме реального времени;

– ***Zoom Realtime*** (Зумирование в реальном времени) – увеличение или уменьшение видимого размера объекта на текущем видовом экране;



– Подменю ***Inquiry*** (Сведения) – раскрывающийся список инструментов:

- - ***Distance*** (Расстояние) – определение расстояния и угла между точками;
- - ***Locate Point*** (Координаты) – определение координат указанной точки;
- - ***Area*** (Площадь) – вычисление площади и периметра объекта;
- - ***Mass Properties*** (Масса) – вычисление массоинерционных характеристик;
- - ***List*** (Список***)*** – вывод информации о примитиве;

– ***Display Viewports Dialog*** (Диалоговое окно видовых экранов) – вызов диалогового окна ***Viewports*** (Видовые экраны);

– ***Named Views*** (Именованные виды) – вызов диалогового окна для работы с видами и выбора аксонометрических проекций;

– ***3D Orbit*** (3М Орбита) – интерактивный просмотр объектов в трёхмерном пространстве; позволяет, изменяя направление взгляда на модель, рассмотреть её с любой точки зрения;

– ***Properties*** (Свойства) – вызов окна для управления свойствами выбранных объектов.

8. ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ *Object Properties* *(Свойства объекта)*

Панель инструментов ***Object Properties*** (рис.30) облегчает работу со слоями и типами линий и размещается сверху от рабочей зоны чертежа.

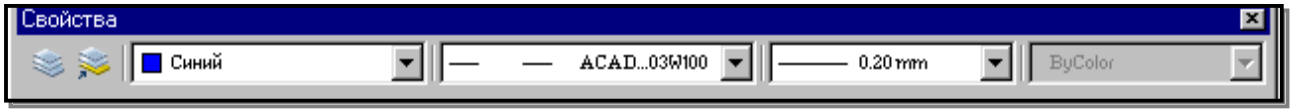
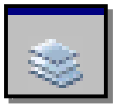


Рис. 30.

Построенные объекты всегда размещаются на определённом слое. Слой – это средство для группировки данных, подобное наложению друг на друга прозрачных калек с фрагментами чертежа («слоёный пирог»). Слои могут быть использованы по умолчанию, а также заданы и именованы пользователем (имя слоя может содержать до 255 символов). Слой может отображаться на экране монитора отдельно или в комбинации с другими слоями, он может быть включён, выключен или заблокирован для редактирования. С каждым слоем связаны определённый цвет, тип и вес (толщина) линии, стиль печати.



– ***Layers*** (Слои) – вызов диалогового окна установки параметров слоёв ***Layer Properties Manager*** (Диспетчер Свойств Слоя), также может загружаться из падающего меню ***Format*** (Формат)→***Layer…***(Слой).

– ***Make Object's Layers Current*** (Сделать слой объекта текущим) – установка текущего слоя в соответствии со слоем выбранного объекта.

При создании нового рисунка автоматически создаётся слой с именем ***0***. Слой ***0*** не может быть удалён или переименован. С помощью кнопки ***New*** (Новый) диалогового окна ***Layer Properties Manager*** (Диспетчер Свойств Слоя) создается новый слой (рис. 31), в котором можно задать другой цвет объекта, тип линии и вес (толщину) линии. После щелчка мышью по этой кнопке в списке слоёв появляется новый слой с временным именем.

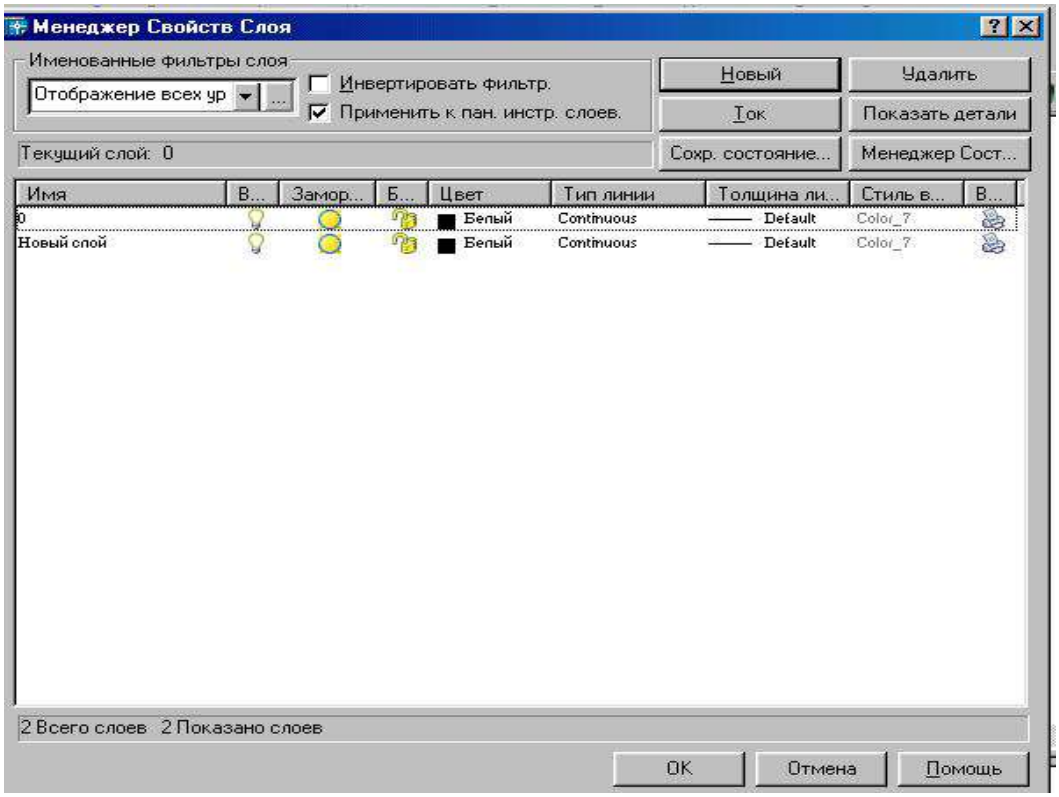


Рис. 31.

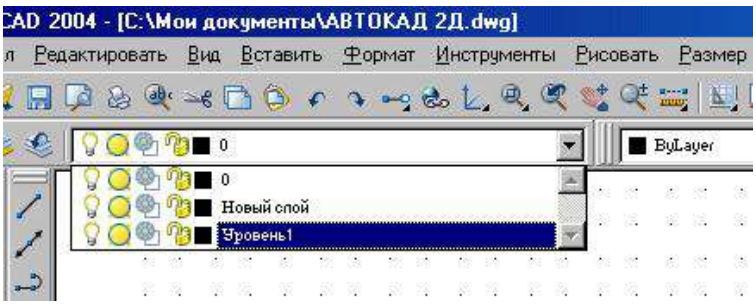


Рис. 32.

Все новые слои именуются в порядке их создания. Чтобы присвоить слою другое имя, необходимо набрать его с клавиатуры в поле временного имени и нажать Enter. Для переименования имеющегося слоя необходимо войти в поле имени слоя двойным щелчком мыши. Для того, чтобы сделать слой текущим, необходимо либо установить курсор мыши на нужный слой и щелкнуть мышью по кнопке ***Current*** (Текущий), либо выбрать его из раскрывающегося списка управления слоями в строке свойств объектов (рис. 32).

Управление видимостью слоя.

AutoCAD не отображает на экране объекты, расположенные на невидимых слоях, и не выводит их на плоттер. Если при работе с деталями рисунка на одном или на нескольких слоях рисунок слишком загромождён, допускается отключить или заморозить неиспользуемые слои.

Для запрещения вывода на печать объектов определённых слоёв, например слоёв для вспомогательных линий, можно оставить эти слои видимыми, но отключить их вывод на печать.

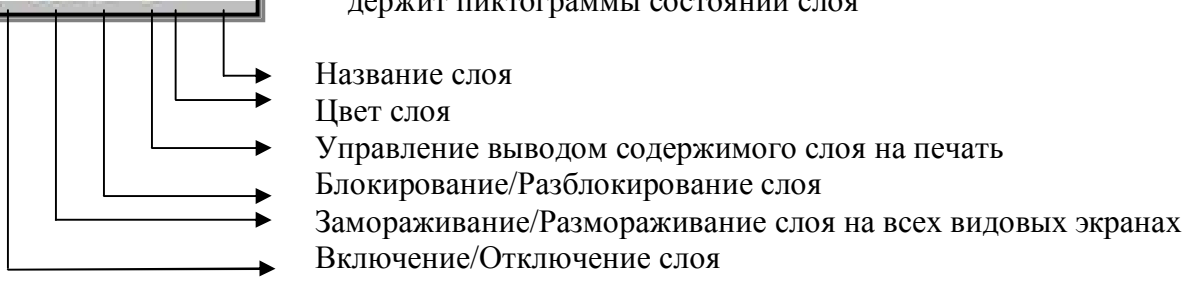
Выбор способа отключения видимости слоёв зависит от характера использования слоёв и от сложности рисунка. Замораживание слоёв лучше осуществлять в тех случаях, когда видимость слоя можно отключить на длительное время. В тех случаях, когда требуется частое изменение видимости слоев, лучше использовать отключение слоёв, а не

замораживание. На печать могут выводиться только объекты включенных и размороженных слоёв. Видимый слой печатается, если не отключен его вывод на печать.

Редактировать объекты на блокированных слоях нельзя. Однако они остаются видимыми, если слой включен и разморожен. Можно установить блокированный слой текущим и создавать на нем объёкты.

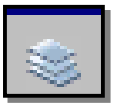
Для управления слоями используются следующие пиктограммы, которые активизируются при помощи щелчка мышью на соответствующей пиктограмме.

– Раскрывающийся список управления слоями ***Layer*** (Слой) содержит пиктограммы состояний слоя



Выполнить упражнение № 1.

Создать слой ШТРИХОВЫЕ ЛИНИИ ***№ 1***



LAYER (Слои)

Падающее меню FORMAT (Формат) → LAYER (Слои)

В диалоговом окне *Layer Properties Manager* (Менеджер свойств слоя) выбрать кнопку New (Новый) и в появившемся поле нового слоя ввести имя ШТРИХОВЫЕ ЛИНИИ.

В области *Line type* (Тип линии) выбрать (щелчком мыши) Continuous.

В диалоговом окне *Select Line type* (Выбор типа линии) выбрать кнопку *Load…* (Загрузить).

В диалоговом окне *Load or Line type* (Загрузка или Перезагрузка типов линий) выбрать *Hidden 2*

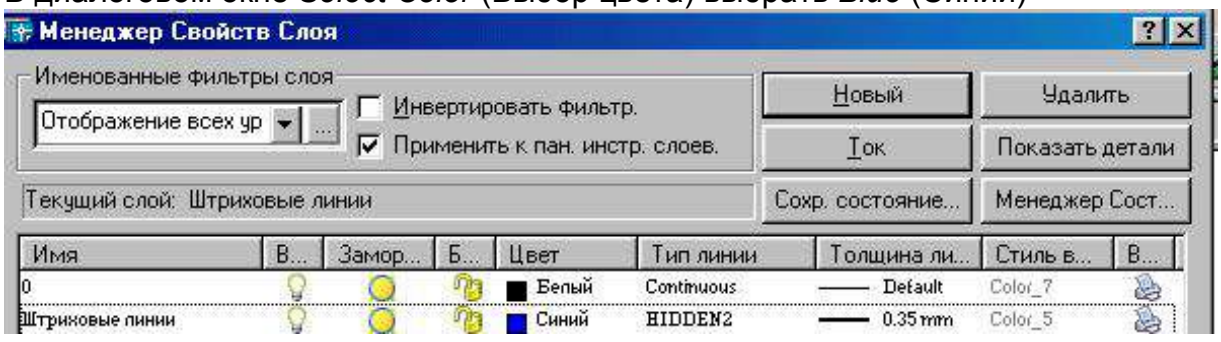
В диалоговом окне *Layer Properties Manager* (Менеджер свойств слоя) установить *Hidden 2*.

В области *Lineweight* (Толщина линии) выбрать (щелчком мыши) *Default*.

В диалоговом окне *Lineweight* выбрать 0,35.

В области *Color* (Цвет линии) выбрать (щелчком мыши) *White* (Белый).

В диалоговом окне *Select Color* (Выбор цвета) выбрать *Blue* (Синий)



9. ГРАФИЧЕСКИЕ ПРИМИТИВЫ

Примитив – это заранее определённый основной геометрический элемент, при помощи которого строятся более сложные модели. Система ***AutoCAD*** использует обширный набор

примитивов: точки, отрезки, круги, дуги, полилинии (непрерывная последовательность отрезков и дуг), мультилинии (ломаная линия, сегменты которой состоят из нескольких параллельных отрезков), сплайны (гладкая кривая, проходящая через заданный набор точек), тексты, блоки (именованный объект, сформированный из нескольких примитивов), эллипсы, многоугольники, фигуры (часть плоскости, ограниченная тремя или четырьмя отрезками) и т. д. Общими свойствами, которыми обладают все примитивы, являются принадлежность к слою, цвет и тип линии. Многие примитивы обладают также толщиной. Отдельные примитивы (текст, блок) имеют специальные свойства (угол наклона, точка вставки и др.).

10. ВВОД КООРДИНАТ ТОЧКИ

Ввод координат в **AutoCAD** осуществляется двумя способами:

1. Непосредственно с клавиатуры, путём задания численных значений в командной строке.
2. При помощи графического курсора, который перемещается по экрану мышью или клавишами управления курсором. Ввод координаты осуществляется щелчком левой кнопки мыши.

При этом в строке состояния, расположенной в нижней части Рабочего стола, происходит отображение текущих значений координат. Для удобства ввода координат можно использовать следующие режимы, которые устанавливаются в строке состояния:

- ***ORTHO*** (Орто) – режим, когда изменение происходит только по осям ***x*** или ***y***.
- ***SNAP*** (Шаговая привязка) – привязка к узлам невидимой сетки, определённой с некоторым шагом по ***x*** и ***y***.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В двумерном пространстве точка определяется в плоскости ***xOy***, которая называется плоскостью построений. Точка может быть задана *абсолютными* и *относительными координатами*. Ввод значений *абсолютных координат* в системе ***AutoCAD*** может осуществляться в следующих форматах:

- *Прямоугольные (декартовы) координаты*: **…point: x,y**.

В случае использования такого формата необходимо на запрос системы о местоположении точки ввести с клавиатуры численное значение координаты ***x***, затем через запятую – значение координаты ***y***, а также направление (+ или -).

- *Полярные координаты***: …point: ρ<φ**,

где ρ - длина вектора (расстояние), соединяющего точку с началом координат,

φ - угол наклона этого вектора относительно предыдущей точки (< - специальный символ, знак «меньше»). За положительное направление изменения угла принято вращение против часовой стрелки от положительного направления оси ***x***.

Относительные координаты не ссылаются на точку начала системы отсчёта. *Относительные координаты* – это смещение по осям ***x*** и ***y*** от предыдущей введённой точки.

- *Прямоугольные координаты*: **…point: @Δx,Δy**.

Для ввода относительных прямоугольных координат точек необходимо сначала ввести специальный символ **@**, который вводится нажатием комбинации клавиш ***SHIFT+2***, а затем приращение по оси абсцисс ***x***, запятую и приращение по оси ординат ***y***.

- *Полярные координаты*: **…point: @ρ<φ**.

В системе ***AutoCAD*** допускается использовать *прямую запись расстояния*, что особенно удобно для быстрого ввода длины линии. Для ввода координат точки, отстоящей на заданное расстояние и в заданном направлении, необходимо вначале переместить графический курсор в желаемом направлении, а затем напечатать в командной строке требуемое расстояние: **point: 85**.

11. ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ *Draw* (*Рисовать*)

Панель инструментов ***Draw*** (рис. 33) содержит кнопки для вызова команд вычерчивания, наиболее часто используемых графических примитивов.

Рис. 33.

Панель инструментов ***Draw*** (Рисовать), показанная на рис. 33, содержит кнопки (пиктограммы) для вызова команд вычерчивания наиболее часто используемых графических примитивов. Для ввода команды достаточно щелкнуть мышью по этой кнопке. Панель инструментов разделена на следующие группы:

- команды для вычерчивания отрезков прямых линий различного типа и специальных линий;
- команды для вычерчивания линий, содержащих прямолинейные и дуговые сегменты, а также прямоугольников и правильных многоугольников;
- команды для вычерчивания рациональных B-сплайнов, окружностей, эллипсов и их дуг;
- команды создания блоков и точек;
- команды нанесения штриховок и создание замкнутых контуров и областей;
- команды нанесения текстов.

12. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИМИТИВОВ

Графические примитивы создаются командами рисования, которые вызываются из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) или панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Необходимо отметить, что одни и те же элементы чертежа могут быть получены с помощью различных команд.

При построении чертежей требуется их редактирование. *Прежде чем редактировать объекты чертежа, необходимо выбрать, то есть указать системе набор примитивов, с которыми предполагается дальнейшая работа. Выбранные примитивы изображаются на экране монитора пунктирными линиями, что служит визуальным подтверждением их выбора.*

Здесь разрешены следующие способы выбора объектов: указание объекта «прицелом» графического курсора; выбор с помощью предполагаемой рамки (для этого графический курсор устанавливают над частью чертежа, нажимают левую кнопку мыши и «растягивают» рамку по диагонали, указывая вторым щелчком мыши размер рамки). Если диагональ рамки определяется слева направо, то выбираются объекты, полностью разместившиеся в окне выбора. Если же диагональ рамки определяется справа налево, то выбираются объекты не только полностью разместившиеся в окне рамки, но и пересекающие рамку.

Иногда невозможно выбрать объекты без случайного указания другого близлежащего объекта. В этом случае нужно указать примитив «прицелом» курсора и щелкнуть левой кнопкой мыши при нажатой клавише *Shift*. Для удаления объектов необходимо выбрать объект и нажать клавишу *Delete*.

12.1. ТОЧКА

Команда ***Point*** (Точка) – формирование точки, вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Point*** (Точка) или щелчком мыши по пиктограмме ***Point*** (Точка) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Точка определяется указанием её координат или указанием курсора.

Рис. 34.

Форма точки задается с помощью системной переменной PDMODE, а её размер – с помощью переменной PDSIZE. Значения этих переменных пользователь устанавливает в диалоговом окне ***Point Style*** (Стиль точки), которое вызывается из падающего меню ***Format*** (Формат) → ***Point Style*** (Стиль точки) (рис. 34). В этом диалоговом окне показано 16 образцов значков. Для выбора любого из них нужно щелкнуть мышью на любом из них.

Размер маркера точки может определяться в процентах от размера экрана монитора или в абсолютных единицах. Чтобы настроить размер точки, необходимо выбрать один из переключателей и вписать с клавиатуры нужное значение размера точки.

12.2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ

Линии в ***AutoCAD*** являются базовым примитивом и могут быть различных видов: одиночные отрезки, ломаные (с сопряжениями дугами и без них), пучки параллельных линий (мультилинии), сплайны, а также эскизные линии.

12.2.1. ОТРЕЗОК

Команда ***Line*** (Отрезок) – формирование отрезка – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Line*** (Отрезок) или щелчком мыши по пиктограмме ***Line*** (Отрезок) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

Отрезки могут быть одиночными или объединёнными в ломаную линию. *При этом каждый отрезок ломаной линии является отдельным примитивом*; если же необходимо, чтобы набор линейных сегментов был единым объектом (областью), лучше применять полилинии.

При построении непрерывной ломаной линии конец предыдущего звена ломаной является началом следующего. Завершение построения ломаной линии осуществляется после нажатия клавиши ***Enter*** (условное обозначение – ↵). Если же ломаная линия является замкнутой, то в командной строке нужно с клавиатуры набрать слово ***Close*** (Закрыть) или начальную букву этого слова ***C***.

Выполнить упражнения № 2, 3, 4 (см. «Ввод координат точки»).

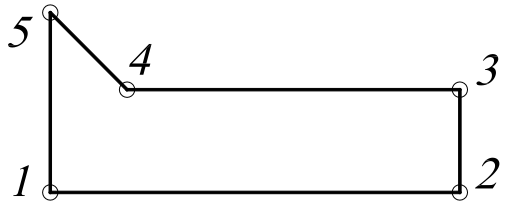
Построить многоугольник, задавая точки в абсолютных координатах № 2

Line Падающее меню ***Draw → Line***

Line Specify first point:	20, 20	точка 1↵
Specify next point or [Undo]:	100, 20	точка 2↵
Specify next point or [Undo]:	100, 40	точка 3↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	35, 40	точка 4↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	20, 55	точка 5↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	Close	замкнуть ↵

Undo

Отмена последнего действия

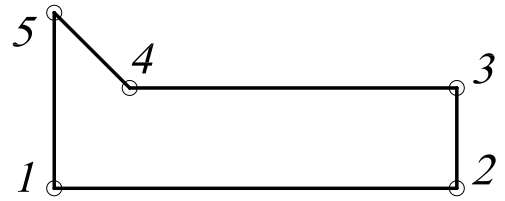


Построить многоугольник,
задавая точки в относительных координатах № 3

Line Падающее меню ***Draw → Line***

Line Specify first point:	20, 20	точка 1↵
Specify next point or [Undo]:	@ 80, 0	точка 2↵
Specify next point or [Undo]:	@ 0, 20	точка 3↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	@ -65, 0	точка 4↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	@ -15, 15	точка 5↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	C	замкнуть

@ - комбинация клавиш Shift + 2

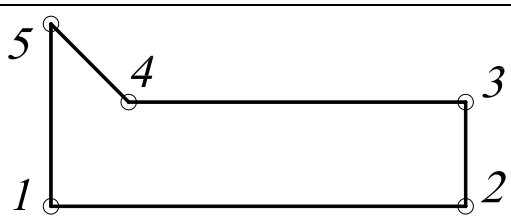


Построить многоугольник,
задавая точки в полярных координатах № 4

Line Падающее меню ***Draw → Line***

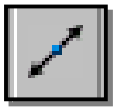
Line Specify first point:	20, 20	точка 1↵
Specify next point or [Undo]:	@ 80 < 0	точка 2↵
Specify next point or [Undo]:	@ 20 < 90	точка 3↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	@ 65 < 180	точка 4↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	@ 21 < 135	точка 5↵
Specify next point or [Close/ Undo]:	C	замкнуть

@ - комбинация клавиш Shift + 2



12.2.2. ПРЯМАЯ И ЛУЧ

В ***AutoCAD*** допускается построение линий, не имеющих конца в одном или в обоих направлениях. Такие линии называются соответственно *лучами* или *прямыми*. Их можно использовать в качестве вспомогательных линий при построении объектов, и удобнее строить их в отдельных слоях.



Команда ***XLine*** (Прямая) – формирование прямой – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Construction line*** (Конструкционная прямая) или щелчком мыши по пиктограмме ***Construction line*** (Конструкционная прямая) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Команда ***XLine*** (Прямая) применяется в двумерном и трехмерном черчении.

Опции команды ***XLine*** (Конструкционная прямая):

- ***Hor*** (Гор) – для построения горизонтальной вспомогательной линии нужно с клавиатуры набрать h \Enter, а затем задать точку любым из способов, через которую должна пройти эта линия;
- ***Ver*** (Вер) – для построения вертикальной вспомогательной линии нужно с клавиатуры набрать v \Enter, а затем задать точку любым из способов, через которую должна пройти эта линия;
- ***Ang*** (Угол) – для построения наклонной вспомогательной прямой линии нужно ввести с клавиатуры a \Enter. Далее AutoCAD выведет дополнительные запросы:
  Enter angle of xline (0) or [Reference] \ Задайте угол наклона или…
  Specify through point \ Задайте точку, через которую пройдёт линия:

После ответа на эти запросы система строит вспомогательную линию через указанную точку под заданным углом. Задавая следующие точки, можно строить пучок линий, параллельных первой построенной линии. Если в ответ на запрос - Specify through point \ Задайте точку, через которую пройдёт линия:…- нажать клавишу Enter, то это действие приведёт к завершению работы с командой.

- ***Bisect*** (Биссект) –эта опция позволяет построить биссектрису угла по его вершине и двум точкам, расположенным на сторонах угла;
- ***Offset*** (Смещение) – по смещению от заданной линии (следует задать величину смещения, выбрать базовую линию и указать, с какой стороны должна проходить прямая).

Команда ***Ray*** (Луч) – построение луча – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Ray*** (Луч) или щелчком мыши по пиктограмме ***Ray*** (Луч) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

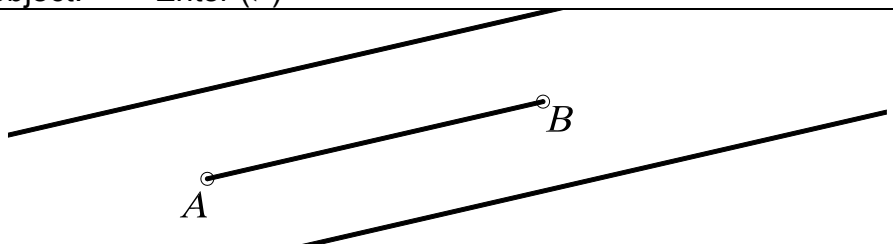
Эта команда применяется при выполнении вспомогательных построений, которые используются как база при вычерчивании контурных линий. В отличие от прямых, бесконечных с обеих сторон, луч не имеет конца только в одном направлении, что позволяет снизить загромождённость рисунка.

Выполнить упражнение № 5.

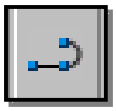
Построить вспомогательную прямую,
с величиной смещения 20 от заданного отрезка AB ***№ 5***

XLine Падающее меню ***Draw → XLine***

XLine Specify a point or [Hor/Ver/Ang/Bisect/Offset]: offset задать опцию - смещение
Specify offset distance or [Through] < Through>: 20 задать расстояние 20 или <по умолчанию>
Select a line object: выбрать линейный объект, указав курсором и щелкнув мышью
Specify side to offset: задать сторону смещения, щелкнув выше отрезка AB
Select a line object: выбрать линейный объект, указав курсором и щелкнув мышью
Specify side to offset: задать сторону смещения, щелкнув ниже отрезка AB
Select a line object: Enter (↵)



12.2.3. ПОЛИЛИНИЯ



Команда ***PLine*** (ПЛиния) – построение полилинии – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Polyline*** (Полилиния) или щелчком мыши по пиктограмме ***Polyline*** (Полилиния) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

Команда ***PLine*** (ПЛиния) служит для вычерчивания линии заданной толщины, состоящей из непрерывной последовательности отрезков прямых линий и дуг окружностей, и обрабатывается системой как графический примитив. Разрешено многократное переключение между режимом вычерчивания отрезков прямых и режимом вычерчивания дуг окружностей. Каждый режим имеет собственный набор параметров, который повторяется после вычерчивания каждого сегмента. По умолчанию эта команда использует режим вычерчивания отрезков прямых линий. При вычерчивании дуги окружности на экране монитора последовательно визуализируются её промежуточные положения.

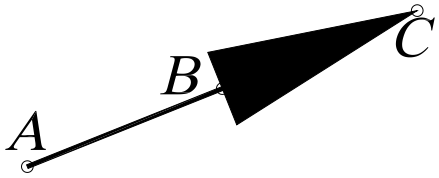
После вызова команды система выдает запрос о местоположении начальной точки. После ввода координат (с клавиатуры или с помощью графического курсора) появляется сообщение о текущей толщине линии Current line-width is 0.0000 (Текущая ширина линии равна 0.0000). Затем появляется список параметров команды:

- ***Arc*** (Дуга) – переход в режим дуг;
- ***Close*** (Замкнуть) – замыкает полилинию отрезком;
- ***Halfwidth*** (Полуширина) – позволяет задать полуширину, то есть расстояние от осевой линии широкого сегмента до края;
- ***Length*** (Длина) – длина сегмента, созданного как продолжение предыдущего в том же направлении;
- ***Undo*** (Отменить) – отменяет последний созданный сегмент;
- ***Width*** (Ширина) – позволяет задать ширину последующего сегмента.

Опции команды ***PLine*** (ПЛиния) в режиме дуг:

- ***Angle*** (Угол) – ввести центральный угол. По умолчанию дуга вычерчивается против часовой стрелки. Если требуется построить дугу по часовой стрелке, необходимо задать отрицательное значение угла;
- ***CEnter*** (Центр) – указать центр дуги;
- ***Close*** (Замкнуть) – замкнуть дугой;
- ***Direction*** (Направление) – задать направление касательной;
- ***Halfwidth*** (Полуширина) – определить полуширину полилинии;
- ***Line*** (Линейный) – переход в режим отрезков;
- ***Radius*** (Радиус) – ввести радиус дуги;
- ***Second pt*** (Вторая) – вторая точка дуги по трём точкам. Если дуга не является сегментом полилинии, то она начинается в конечной точке предыдущего сегмента и по умолчанию проводится по касательной к нему;
- ***Undo*** (Отменить) – отменить последнюю точку;
- ***Width*** (Ширина) – определить ширину полилинии.

Выполнить упражнения № 6, 7, 8, 9.

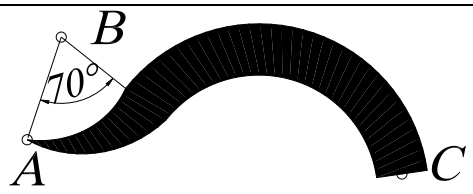
Построить полилинию с переменной толщиной	***№ 6***
PLine	Падающее меню ***Draw → Polyline***
	Specify start point: 90,50 начальная точка A
	Current line-width is 0.0000 (ширина полилинии по умолчанию)
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: w	ширина полилинии
Specify starting width <0.0000>: 1	стартовая ширина
Specify ending width <1.0000>: 1	конечная ширина
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: 140, 70	точка B
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: w	ширина полилинии
Specify starting width <1.0000>: 20	стартовая ширина
Specify ending width <20.0000>: 0	конечная ширина
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: 190, 90	точка C
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: Enter	
	

Многократное применение параметра Undo приводит к последовательному уничтожению сегментов полилинии и соответствующему переключению режимов работы команды.

Построить полилинию в режиме дуг *№ 7*

PLine Падающее меню ***Draw*** → ***Polyline***

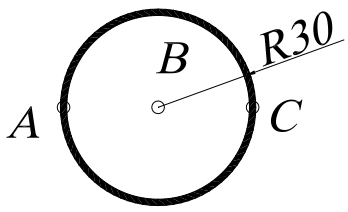
Specify start point: 90,50 начальная точка A
Current line-width is 0.0000 (ширина полилинии по умолчанию)
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: w ширина полилинии
Specify starting width <0.0000>: 0 стартовая ширина
Specify ending width <0.0000>: 15 конечная ширина
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: Arc режим дуг
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: Ang задать углом
Specify included angle: 70 величина угла
Specify endpoint of arc or [Center/Radius]: Cen задать центр
Specify center point of arc: 100, 80 точка B
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: 200,40 точка C
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: Enter



Построить окружность командой полилиния *№ 8*

PLine Падающее меню ***Draw*** → ***Polyline***

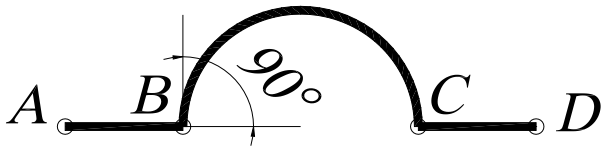
Specify start point: 90,50 начальная точка A
Current line-width is 0.0000 (ширина полилинии по умолчанию)
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: w ширина полилинии
Specify starting width <0.0000>: 2 стартовая ширина
Specify ending width <0.0000>: 2 конечная ширина
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: Arc режим дуг
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: CE задать центром
Specify center point of arc: 120, 50 точка B
Specify endpoint of arc or [Angle/Length]: @150, 0 точка C
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: CL замкнуть



Построить полилинию с помощью направления	*№ 9*

PLine Падающее меню ***Draw*** → ***Polyline***

Specify start point: 90,50 начальная точка A
Current line-width is 0.0000 (ширина полилинии по умолчанию)
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: w ширина полилинии
Specify starting width <0.0000>: 2 стартовая ширина
Specify ending width <0.0000>: 2 конечная ширина
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: 120 ,50 точка B
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: Arc режим дуг
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/Direction/…/Second pt/Undo/Width]: Dir задать направлением
Specify the tangent direction for the start point of arc: 90 направление от точки A
Specify endpoint of the arc:180, 50 точка C
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Line/Radius/Second pt/Undo/Width]: Line режим линий
Specify next point or [Arc/Close/Halfwidth/Length/Undo/Width]: 210 ,50 точка D
Specify endpoint of arc or
[Angle/CEnter/CLose/…/Second pt/Undo/Width]: Enter



12.2.4. СПЛАЙН

Команда ***Spline*** (Сплайн) – построение сплайна – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Spline*** (Сплайн) или щелчком мыши по пиктограмме ***Spline*** (Сплайн) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

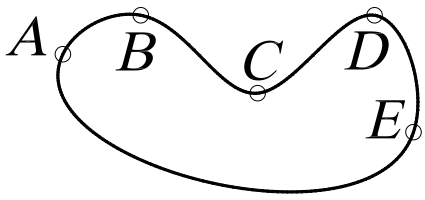
Система ***AutoCAD*** вычерчивает неоднородные рациональные B-сплайны (NURBS-кривые). Сплайны могут быть как двумерными, так и трёхмерными объектами, которые строятся на основе некоторого множества точек.

Выполнить упражнение № 10.

Построить сплайн	*№ 10*

Spline Падающее меню ***Draw*** → ***Spline***

Specify first point or [Object]: 90,50 начальная точка A
Specify start point: 110,60 точка B
Specify next point or [Close/Fit tolerance]<start tangent>: 140,40 точка C
Specify next point or [Close/Fit tolerance]<start tangent>: 170,60 точка D
Specify next point or [Close/Fit tolerance]<start tangent>: 180,30 точка E
Specify next point or [Close/Fit tolerance]<start tangent>: Close замкнуть
Specify tangent: Enter



Замечания:

1. Выбор параметра Object в первом основном запросе системы позволяет преобразовать существующие сглаженные сплайном полилинии в правильный сплайн. После ввода этого параметра следует указать существующую полилинию, сглаженную сплайном.
2. Сплайн обрабатывается системой как единый объект.
3. Толщина линии не задается и соответствует толщине, установленной для текущего слоя.
4. Параметр Close можно использовать, если предварительно вычерчено не менее двух сегментов.
5. Параметр Fit tolerance используется, если необходимо задать, насколько близко к введенным точкам должен проходить сплайн. Величина допуска сглаживания выражается в единицах измерения текущего чертежа. По умолчанию принято значение допуска 0, при котором сплайн проходит точно по данным точкам.
6. Параметр <start tangent> (определить касательную к сплайну) задается по умолчанию (скобки вида < > определяют параметр по умолчанию). Для выбора принятого по умолчанию направления касательной следует нажать клавишу Enter или, перемещая точку с помощью курсора, определяющую направление касательной, задать форму кривой.

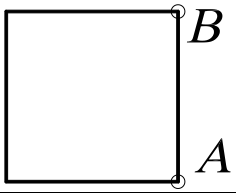
12.3. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

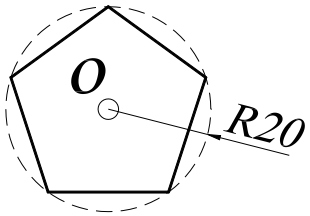
12.3.1. МНОГОУГОЛЬНИК

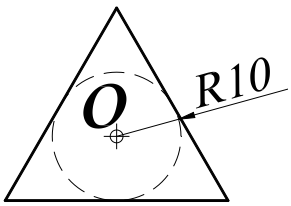
– Команда ***Poligon*** (Многоугольник) – построение правильного многоугольника с числом сторон от 3 до 1024 – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Poligon*** (Многоугольник) или щелчком мыши по пиктограмме ***Poligon*** (Многоугольник) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

- ***Edge*** (Сторона) – задание длины одной стороны;
- ***Inscribed in circle*** (Вписанный в окружность) – определяет способ построения многоугольника
- ***Circumscribed about circle*** (Описанный вокруг окружности) – определяет способ построения многоугольника как описанного вокруг некоторой окружности (как вписанного в некоторую окружность);

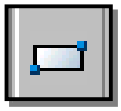
Выполнить упражнения № 11, 12, 13.

Построить многоугольник по известной стороне		***№ 11***
Polygon	Падающее меню ***Draw*** → ***Polygon***	
	Enter number of side <4>: 4	количество сторон
	Specify center of polygon or [Edge]: E	задать стороной
	Specify first endpoint of edge: 90, 50	точка A
	Specify second endpoint of edge: 90, 100	точка B
		

Построить многоугольник, вписанный в окружность	*№ 12*
Polygon Падающее меню ***Draw*** → ***Polygon*** Enter number of side <4>: 5 количество сторон Specify center of polygon or [Edge]: 100,100 центр окружности O Enter an option [Inscribed in circle/ Circumscribed about circle] <I>: i вписанный многоугольник в окружность Specify radius of circle: 20 радиус окружности	
	

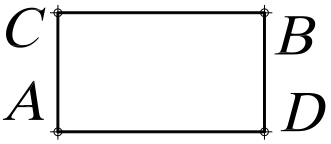
Построить многоугольник, описанный вокруг окружности	*№ 13*
Polygon Падающее меню ***Draw*** → ***Polygon*** Enter number of side <4>: 3 количество сторон Specify center of polygon or [Edge]: 100,100 центр окружности O Enter an option [Inscribed in circle/ Circumscribed about circle] <I>: c описанный многоугольник вокруг окружности Specify radius of circle: 10 радиус окружности	
	

12.3.2. ПРЯМОУГОЛЬНИК



Команда ***Rectangle*** (Прямоугольник) – построение прямоугольника – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Rectangle*** (Прямоугольник) или щелчком мыши по пиктограмме ***Rectangle*** (Прямоугольник) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Прямоугольник строится по двум любым диагональным точкам.

Выполнить упражнение № 14.

Построить прямоугольник	*№ 14*
Rectangle Падающее меню ***Draw*** → ***Rectangle*** Specify first corner point or [Chamfer/Elevation/Fillet/Thickness/Width]: указать точку A (или точку C) Specify other corner point: указать точку B (или точку D)	
	

Опции команды ***Rectangle*** (Прямоугольник):

- ***Chamfer*** (Фаска) используется, если необходимо вычертить прямоугольник с заранее определёнными фасками;
- ***Fillet*** (Сопряжение) используется, если необходимо вычертить прямоугольник с заранее определённым радиусом сопряжения углов;
- ***Width*** (Толщина) используется, если необходимо вычертить прямоугольник с заранее определённой толщиной линии.

Во всех случаях система предлагает параметры по умолчанию, которые проставлены в скобках <…>.

Выполнить упражнения № 15, 16.

Построить прямоугольник с фасками ***№ 15***

Rectangle Падающее меню ***Draw*** → ***Rectangle***

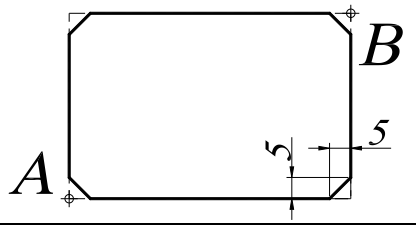
Specify first corner point or [Chamfer/Elevation/Fillet/Thickness/Width]: c — задать фаски

Specify first chamfer distance for rectangles <0.0000>: 5 — первый размер фаски

Specify second chamfer distance for rectangles <0.0000>: 5 — второй размер фаски

Specify first corner point or [Chamfer/Elevation/Fillet/Thickness/Width]: указать точку A

Specify other corner point: указать точку B



Построить прямоугольник с сопряжением углов ***№ 16***

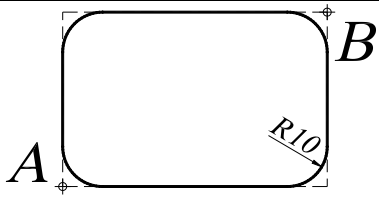
Rectangle Падающее меню ***Draw*** → ***Rectangle***

Specify first corner point or [Chamfer/Elevation/Fillet/Thickness/Width]: f — задать радиус сопряжения

Specify fillet radius for rectangles <0.0000>: 5 — размер радиуса сопряжения

Specify first corner point or [Chamfer/Elevation/Fillet/Thickness/Width]: указать точку A

Specify other corner point: указать точку B



Замечания:

1. Команда ***Rectangle*** (Прямоугольник) формирует полилинию, поэтому прямоугольник можно рассматривать как единый объект.
2. Параметр Width используется, если необходимо вычертить прямоугольник с заранее определённой толщиной линии. Если задать значение толщины, равное нулю, то линия вычерчивается с толщиной, установленной для текущего слоя.
3. Использование параметров Elevation, Thickness, Width позволяет создать трёхмерный объект (параллелепипед с прямоугольником в основании).

12.4. ПОСТРОЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ, ЭЛЛИПСОВ И ИХ ДУГ

12.4.1. ОКРУЖНОСТЬ

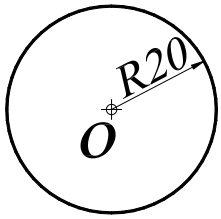
– Команда ***Circle*** (Круг) – построение окружности – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Circle*** (Круг) или щелчком мыши по пиктограмме ***Circle*** (Круг) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Окружности можно строить различными способами. По умолчанию построение выполняется путём задания центра и радиуса.

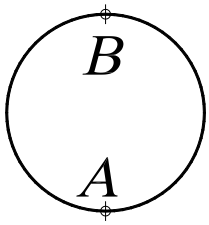
Опции команды ***Circle*** (Круг):

- ***3P*** (3Т) – по трём точкам, не принадлежащим одной прямой;
- ***2P*** (2Т) – по двум точкам, лежащим на диаметре;
- ***Ttr*** (ККР) – по двум касательным и радиусу;
- ***Tan Tan Tan*** (Кас Кас Кас) – окружность, касающаяся трёх объектов. В этом случае система автоматически включает режим объектной привязки Tangent (см. панель инструментов «Объектная привязка»).

При построении окружности, касательной к двум примитивам, необходимо указать графическим курсором на экране монитора приблизительную точку касания на заданных примитивах. Данный способ построения окружности предполагает её вычерчивание как касательной к двум отрезкам прямых, касательной к двум окружностям, касательной к отрезку и окружности.

Выполнить упражнения № 17 - 26 (для выполнения упражнений постройте примитивы, показанные штриховой линией).

Построить окружность по центру и радиусу	***№ 17***
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle*** Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 100,100 центр O Specify radius of circle or [Diameter]: 20 радиус окружности	
	

Построить окружность по двум точкам диаметра	***№ 18***
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle*** Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 2P Specify first end point of circle's diameter: 100,50 точка A Specify second end point of circle's diameter: 100,90 точка B	
	

Построить окружность по трём точкам	*№ 19*

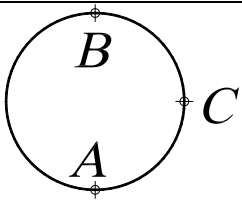
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 3P

Specify first end point of circle's diameter: 100,50 точка A

Specify second end point of circle's diameter: 100,90 точка B

Specify third end point of circle's diameter: 120,70 точка C



Построить окружность, касательную двум примитивам	*№ 20*

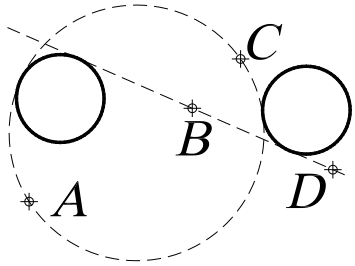
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: TTR

Specify point on object for first tangent of circle:указать на окружность A (или C)

Specify point on object for second tangent of circle: указать на линию B (или D)

Specify radius of circle: 10 радиус окружности



Построить окружность, касательную к прямой	*№ 21*

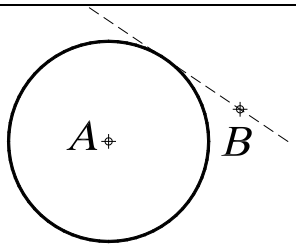
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]:

указать центр окружности A

Specify radius of circle or [Diameter]:_ tan to щелкнуть мышью по пик-тограмме панели объектной привязки Tangent и

указать на точку B



Построить окружность, касательную двум окружностям ***№ 22***

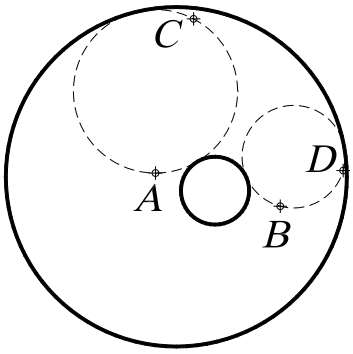
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: TTR

Specify point on object for first tangent of circle:указать на окружность A (или C)

Specify point on object for second tangent of circle: указать на линию B (или D)

Specify radius of circle: 10 радиус окружности



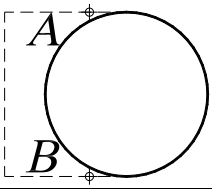
Построить окружность по двум точкам диаметра, лежащим на концах отрезка ***№ 23***

Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 2P

Specify first end point of circle's diameter: щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки ENDpoint и указать графическим курсором на точку A

Specify second end point of circle's diameter: щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки ENDpoint и указать графическим курсором на точку B

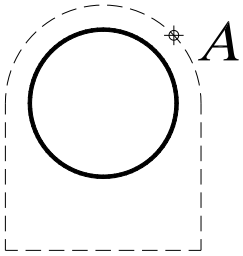


Построить концентрическую окружность ***№ 24***

Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки CENter и указать графическим курсором на точку A

Specify radius of circle or [Diameter]: 15 радиус окружности



Построить окружность, касательную к трём примитивам ***№ 25***

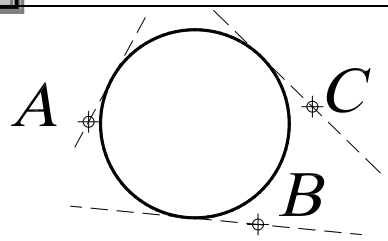
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 3P

Specify first point on circle: _ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку A

Specify second point on circle:_ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку B

Specify third point on circle:_ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку C



Построить окружность, касательную к трём примитивам ***№ 26***

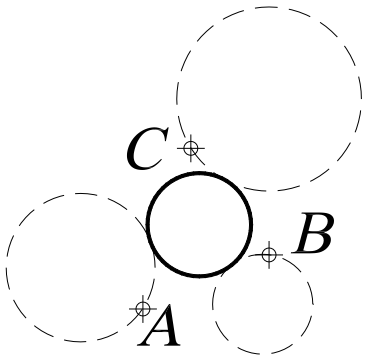
Circle Падающее меню ***Draw*** → ***Circle***

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius]: 3P

Specify first point on circle: _ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку A

Specify second point on circle:_ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку B

Specify third point on circle:_ tan to щелкнуть мышью по пиктограмме панели объектной привязки Tangent и указать графическим курсором на точку C

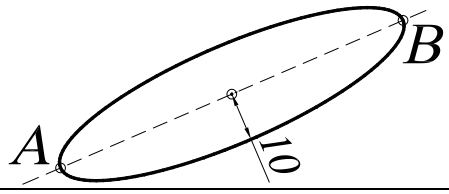


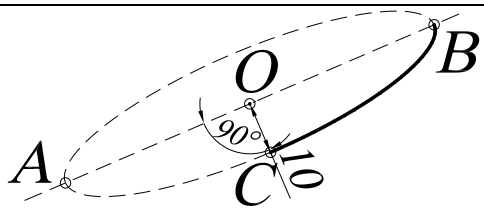
12.4.2. ЭЛЛИПС

– Команда ***Ellipse*** (Эллипс) – построение эллипса – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Ellipse*** (Эллипс) или щелчком мыши по пиктограмме ***Ellipse*** (Эллипс) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Эллипсы можно строить различными способами. По умолчанию строится путём указания начала и конца первой оси эллипса, а также половины второй оси.

- ***Center*** (Центр) – построение эллипса по точке его центра и двум конечным точкам его осей;
- ***Arc*** **(**Дуга**) –** режим построения эллиптических дуг. По умолчанию эллиптические дуги, как и эллипсы, строятся путём указания конечных точек первой оси и половины длины второй. После этого задаются начальный и конечный углы. За начало отсчёта углов эллиптической дуги принимается большая ось эллипса. Если начальный и конечный углы совпадают, строится полный эллипс. Вместо задания конечного угла можно указать центральный угол дуги, измеренный от начальной точки.

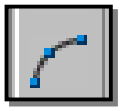
Выполнить упражнения №27, 28

Построить эллипс по двум осям	***№ 27***
Ellipse Падающее меню ***Draw*** → ***Ellipse*** Specify axis endpoint of ellipse or [Arc/Center]: 130, 170 точка A Specify other endpoint of axis: 200, 200 точка B Specify distance to other axis [Rotation]: 10 длина половины оси	
	

Построить эллиптическую дугу	***№ 28***
Ellipse Падающее меню ***Draw*** → ***Ellipse*** Specify axis endpoint of ellipse or [Arc/Center]: A режим построения дуг Specify axis endpoint of elliptical arc or [Center]: 130, 170 точка A Specify other endpoint of axis: 200, 200 точка B Specify distance to other axis or [Rotation]: 10 длина половины оси Specify start angle or [Parameter]: 90 угол AOC Specify end angle or [Parameter/ Included angle]: 180 угол AOB	
	

Для построения эллиптической дуги можно использовать команду - ***Elliptical arc*** (Эллиптическая дуга), которая вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Elliptical arc*** (Эллиптическая дуга) или щелчком мыши по пиктограмме ***Elliptical arc*** (Эллиптическая дуга) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

12.4.3. ДУГА ОКРУЖНОСТИ



– Команда ***Arc*** (Дуга) – построение дуги окружности – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Arc*** (Дуга) или щелчком мыши по пиктограмме ***Arc*** (Дуга) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Дуги строятся различными способами, однако по умолчанию построение производится по трём точкам – начальной, промежуточной и конечной.

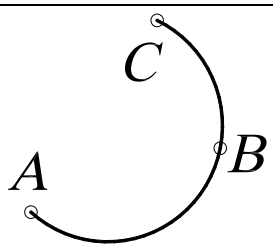
Опции команды ***Arc*** (Дуга):

- ***Center*** (Центр) – точка центра дуги;
- ***End*** (Конец) – конечная точка дуги;
- ***Angle*** (Угол) – величина угла;
- ***Chord Length*** (**Длина хорды**) – длина хорды;
- ***Direction*** (Направление) – направление касательной;
- ***Radius*** (Радиус) – радиус дуги.

Существует несколько способов построения дуги окружности по следующим трём параметрам:

1) ***3 Point*** (3 точки) – по трём точкам, не принадлежащим одной прямой;
2) ***St, C, End*** (Н, Ц, К) – по стартовой точке, центру и конечной точке дуги (положительным считается направление против часовой стрелки);
3) ***St, C, Ang*** (Н, Ц, Угол) – по стартовой точке, центру и углу;
4) ***St, C, Len*** (Н, Ц, Длин) – по стартовой точке, центру и длине хорды. Дуга строится против часовой стрелки от начальной точки, причем по умолчанию строится меньшая из двух возможных дуг (та, что меньше 180^0). Если же вводится отрицательное значение длины хорды, будет построена большая дуга;
5) ***St, E, Ang*** (Н, К, Угол) – по стартовой точке, конечной точке и углу;
6) ***St, E, Dir*** (Н, К, Напр) – по стартовой точке, конечной точке и направлению – углу наклона касательной из начальной точки;
7) ***St, E, Rad*** (Н, К, Рад) – по стартовой точке, конечной точке и радиусу. Меньшая дуга строится против часовой стрелки;
8) ***Ce, S, End*** (Ц, Н, К) – построение дуги по центру, стартовой и конечной точке;
9) ***Ce, S, Ang*** (Ц, Н, Угол) – построение дуги по центру, стартовой точке и углу;
10) ***Ce, S, Len*** (Ц, Н, Длин) – построение дуги по центру, стартовой точке и длине хорды;
11) ***ArcCont*** (ПродДуг) – построение дуги как продолжение отрезка или дуги.

Выполнить упражнения № 29 – 33.

Построить дугу по трём точкам	***№ 29***
Arc Падающее меню ***Draw*** → ***Arc (3 point)*** Specify start point of arc or [Center]: 100, 250 точка A Specify second point of arc or [Center/End]: 130, 260 точка B Specify start point of arc: 120,280 точка C	
	

Построить дугу по начальной точке, центру и величине угла	*№ 30*

Arc Падающее меню ***Draw → Arc (St,C,Ang)***

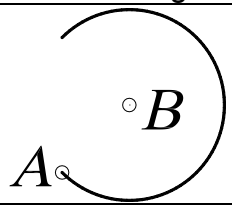
Specify start point of arc or [Center]: 100, 250 точка A

Specify second point of arc or [Center/End]: c

Specify center point of arc: 110, 260 точка B

Specify end point of arc or [Angle/ chord Length]: a

Specify included angle: 270 угол



AutoCAD всегда проводит дугу от начальной точки в направлении против часовой стрелки. Две дуги, построенные одним и тем же способом, могут совершенно отличаться друг от друга. В следующих упражнениях показаны различия в построении одних и тех же дуг, но с противоположным значением длины хорды, размера радиуса. Необходимо помнить, что положительным считается направление против часовой стрелки.

Построить дугу по начальной точке, центру и длине хорды	*№ 31*

Arc Падающее меню ***Draw → Arc (St,C,Len)***

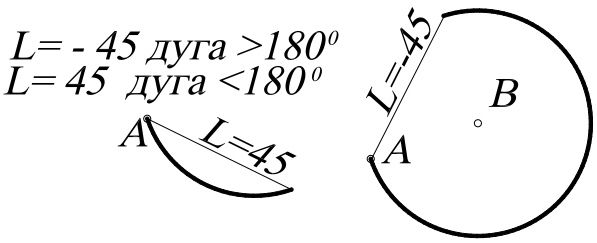
Specify start point of arc or [Center]: 100, 250 точка A

Specify second point of arc or [Center/End]: c

Specify center point of arc: 130, 260 точка B

Specify end point of arc or [Angle/ chord Length]: a

Specify end point of arc or [Angle/chord Length]: - 45 длина хорды



Построить дугу по двум точкам и радиусу	*№ 32*

Arc Падающее меню ***Draw → Arc (St,E,Rad)***

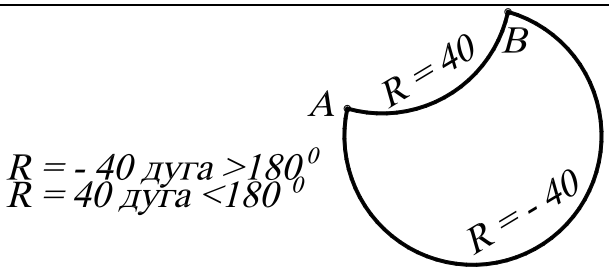
Specify start point of arc or [Center]: 100, 250 точка A

Specify second point of arc or [Center/End]: e

Specify end point of arc:150,280 конечная точка B

Specify center point of arc or [Angle/Direction/Radius]: r

Specify radius of arc: -40



Построить дугу по двум точкам и касательной	*№ 33*

Arc Падающее меню ***Draw → Arc (St,E,Dir)***

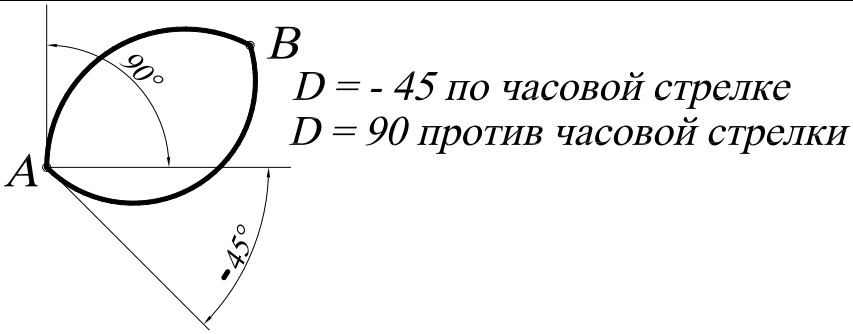
Specify start point of arc or [Center]: 80,420 точка A

Specify second point of arc or [Center/End]: e

Specify end point of arc: 130,450 точка B

Specify center point of arc or [Angle/Direction/Radius]: d

Specify tangent direction for the start point of arc: -45 направление



13. ТЕКСТОВЫЕ СТИЛИ

При нанесении надписи в ***AutoCAD*** используется некоторый текстовый стиль, который задает высоту, угол поворота, ориентацию и др. В одном рисунке можно создавать и использовать несколько текстовых стилей.

Все текстовые стили, кроме STANDART, пользователь создает по своему желанию. Создание текста и команды его регенерации производятся в диалоговом окне ***Text Style*** (Текстовые стили) (рис. 35), вызываемом из падающего меню ***Format*** (Формат) → ***Text Style*** (Текстовые стили).

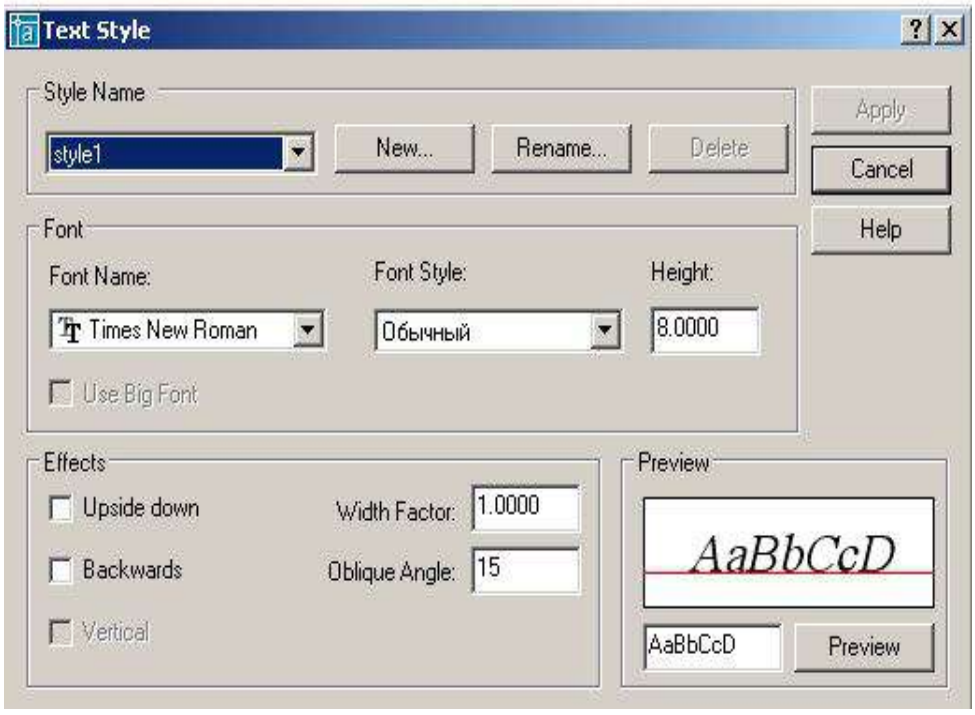


Рис. 35.

Для создания нового стиля необходимо щелкнуть мышью по кнопке ***New*** (Новый), при этом открывается диалоговое окно ***New Text Style*** (Новый текстовый стиль), в котором задается имя создаваемого стиля. Новому стилю присваиваются значения параметров, заданные первоначально в окне ***Text Style*** (**Текстовые стили**), которые, как правило, нуждаются в изменении.

В области ***Font*** (Шрифт) в раскрывающемся списке поля ***Font Name***: (Имя шрифта:) следует выбрать подходящий шрифт, например Times New Roman. Сделанные изменения для нового шрифта иллюстрируются в поле ***Preview*** (Образец).

Высота текста задается в поле ***Height:*** (Высота:) и определяет размер знаков используемого шрифта. Если в процессе описания стиля текста задана фиксированная высота текста, при создании однострочных надписей запрос ***Height:*** (Высота:) не выводится. При необходимости нанесения надписей разной высоты с использованием одного и того же текстового стиля следует при его создании указать высоту, равную 0.

Угол наклона текста задается в поле ***Oblique Angle*** (Угол наклона). Угол наклона текста задается от вертикальной линии по часовой стрелке.

13.1. ОДНОСТРОЧНЫЙ ТЕКСТ

Надписи на чертежах могут представлять собой сложные спецификации, элементы основной надписи, заголовки и т. п. Небольшие надписи, не требующие внутреннего форматирования, создаются в виде однострочных текстов при помощи команды ***TEXT*** (**ТЕКСТ**). Однострочные тексты удобно применять для заголовков.

– Команда ***TEXT*** (Текст) – формирование текста – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***TEXT*** (Текст) → ***Single Line Text*** (Однострочный) или щелчком мыши по пиктограмме ***TEXT*** (Текст) одноимённой панели инструментов.

Однострочный текст формируется по следующим опциям команды:

- ***Style*** (**Стиль**) – установление нового текстового стиля, путем выбора его из имеющихся стилей;
- ***Justify*** (**Выравнивание**) – выравнивание текстовой строки с использованием ключей выравнивания:

1. ***Align***, ***Fit*** – формируют вписанный текст между двумя введёнными точками:

– ***Align*** – высота и ширина каждого символа вычисляется автоматически;

– ***Fit –AutoCAD*** запрашивает высоту шрифта и автоматически подбирает ширину символа;

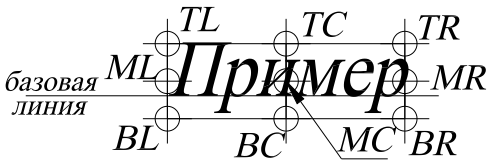
2.***Center***, ***Middle*** – центрирует текст относительно введенной точки:

– ***Center*** – центрирование текста по горизонтали;

– ***Middle*** – центрирование текста по горизонтали и по вертикали;

3.***Right*** – выравнивание текста по правому краю:

4. Выравнивание текста относительно указанной точки, обозначаемой следующими символами – ***TL***, ***TC***, ***TR***, ***ML***, ***MC***, ***MR***, ***BL***, ***BC***, ***BR***, аббревиатуры слов:
T – ***Top*** (верхний), ***M*** – ***Middle*** (средний), ***B*** – ***Bottom*** (нижний), ***L*** – ***Left*** (левый), ***C***-***Center*** (центр), ***R*** – ***Right*** (правый).



Выполнить упражнения № 34 – 40.

Сформировать однострочный текст	***№ 34***

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text*** → ***Single Line Text***

```
Current text style:  "Standard"  Text height:  8.0000
Specify start point of text or [Justify/Style]: 100,500     начальная точка 1
                Specify height <8.0000>: 20                 высота текста
          Specify rotation angle of text <0>: 0             угол поворота строки
                                Enter text: пример          формируемая надпись
                                Enter text: выполнения      формируемая надпись
                                Enter text: <ENTER>
```

1 пример
выполнения

Для продолжения многострочных текстов команду ***Text*** повторяют обычным, принятым в системе способом, а затем на первый запрос отвечают нажатием клавиши ENTER. Тогда новая строка текста разместится под последней строкой вычерченного перед этим текста и будет иметь тот же текстовый стиль, высоту и угол поворота (см. упражнение 34).

Сформировать однострочный вписанный текст	***№ 35***

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text*** → ***Single Line Text***

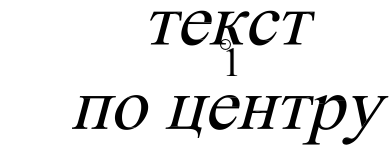
```
                                Current text style:  "style2"  Text height:  15.0000
          Specify start point of text or [Justify/Style]: Jus                выровненный
Enter an option
[Align/Fit/Center/Middle/Right/TL/TC/TR/ML/MC/MR/BL/BC/BR]: Align            вписанный
       Specify first endpoint of text baseline: 150,490                      точка 1
Specify second endpoint of text baseline: 240,490                            точка 2
                                Enter text: пример                 формируемая надпись
                                Enter text: вписанного текста      формируемая надпись
                                Enter text: <ENTER>
```

1 *пример* 2
вписанного текста

Сформировать текст, выровненный по центру	*№ 36*

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text***→ ***Single Line Text***

```
                    Current text style:  "style2"  Text height:  15.0000
Specify start point of text or [Justify/Style]: Jus                выровненный
Enter an option
 [Align/Fit/Center/Middle/Right/TL/TC/TR/ML/MC/MR/BL/BC/BR]: Center     по центру
                  Specify center point of text: 60,530                 точка 1
                    Specify height <15.0000>: 10                       высота символа
                    Specify rotation angle of text <0>: 0              угол поворота строки
                    Enter text: текст                                  формируемая надпись
                    Enter text:  по центру                             формируемая надпись
                    Enter text: <ENTER>
```



Первоначальное представление строки текста на экране дисплея не зависит от выбора параметра. Текст модифицируется в соответствии с указанным параметром в момент окончания работы команды.

Сформировать текст, выровненный по ширине	*№ 37*

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text***→ ***Single Line Text***

```
 Current text style:  "style2"  Text height:  10.0000
Specify start point of text or [Justify/Style]: Jus                выровненный
Enter an option
 [Align/Fit/Center/Middle/Right/TL/TC/TR/ML/MC/MR/BL/BC/BR]: Fit       по ширине
Specify first endpoint of text baseline: 10,610                        точка 1
Specify second endpoint of text baseline: 70,610                       точка 2
Specify height <10.0000>: 10                                       высота символа
Enter text: Текст,                                                 формируемая надпись
Enter text: выровненный по ширине                                  формируемая надпись
Enter text: <ENTER>
```

Сформировать текст, выровненный по средней точке **№ 38**

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text*** → ***Single Line Text***

Current text style: "style2" Text height: 10.0000
Specify start point of text or [Justify/Style]: Jus — выровненный
Enter an option
[Align/Fit/Center/Middle/Right/TL/TC/TR/ML/MC/MR/BL/BC/BR]: Middle
— по средней точке
Specify middle point of text: 170,620 — точка 1
Specify height <10.0000>: 10 — высота символа
Specify rotation angle of text <0>: 0 — угол поворота
Enter text: **Надпись,** — формируемая надпись
Enter text: **выровненная по средней точке** — формируемая надпись
Enter text: <ENTER>

Надпись,
выровненная по средней точке

Сформировать текст, выровненный вправо **№ 39**

TEXT Падающее меню ***Draw*** → ***Text*** → ***Single Line Text***

Current text style: "style2" Text height: 10.0000
Specify start point of text or [Justify/Style]: Jus — выровненный
Enter an option
[Align/Fit/Center/Middle/Right/TL/TC/TR/ML/MC/MR/BL/BC/BR]: Right — вправо
Specify right endpoint of text baseline: 240,680 — точка 1
Specify height <10.0000>: 10 — высота символа
Specify rotation angle of text <0>: 0 — угол поворота строки
Enter text: **Текст**, — формируемая надпись
Enter text: **выровненный вправо** — формируемая надпись
Enter text: <ENTER>

Текст,
выровненный вправо

Создать новый наклонный стиль **№ 40**

Падающее меню ***Format*** → ***Text Style***
В диалоговом окне ***Text Style*** выбрать кнопку *New* (Новый)
В поле Style Name: указать новое любое имя стиля
В раскрывающемся списке названий шрифтов ***Font Name:*** выбрать arial
В поле Oblique Angle: (Угол наклона:) указать 10 градусов
В поле Height: (Высота:) указать 0
Используя команду ***TEXT*** написать свое имя, фамилию

решение
новых вопросов

Использование специальных символов в однострочном тексте осуществляется с помощью управляющих кодов, которые вводятся в командную строку непосредственно перед вводом текста:

- %%o – включает или выключает режим надчеркивания символов;
- %%u - включает или выключает режим подчеркивания символов;
- %%d – размещает в соответствующей позиции строки текста символ «градус» (°);
- %%p – размещает в соответствующей позиции строки текста символ «плюс-минус» (±);
- %%c – размещает в соответствующей позиции строки текста символ «диаметр окружности» (∅).

13.2. МНОГОСТРОЧНЫЙ ТЕКСТ

Многострочный текст используется для нанесения многострочных текстов на чертежах.

– Команда ***MTEXT*** (**МТЕКСТ**) – формирование многострочного текста - вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Text*** (Текст) → ***Multiline Text*** (Многострочный текст) или щелчком мыши по пиктограмме ***Multiline Text*** (Многострочный текст) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

В ответ на команду система выдает в первой строке сообщение, а затем запрос: Current text style: "Standard" Text height: 8 (Текущий текстовый стиль).

Specify first corner: (Задайте первый угол:). Задать координаты первой точки рамки текстового окна (с помощью клавиатуры или графическим курсором).

Specify opposite corner or [Height/Justify/Line spacing/Rotation/Style/Width]: (Задайте противоположный угол или…)

- ***Height*** используется, если необходимо изменить высоту символов многострочного текста;
- ***Justify*** используется, если необходимо изменить способ выравнивания многострочного текста;
- ***Line spacing*** используется, если необходимо изменить расстояния между строками в текстовом окне;
- ***Rotation*** используется, если необходимо изменить угол поворота рамки текстового окна;
- ***Style*** используется, если необходимо изменить текстовый стиль;
- ***Width*** используется, если необходимо задать ширину рамки текстового окна.

После указания размеров абзаца загружается диалоговое окно ***Text Formatting*** (Форматирование текста) (рис. 36), которое содержит средства форматирования символов текста:

- Font – раскрывающийся список выбора шрифтов;
- Font Height – раскрывающийся список ввода высоты шрифта;
- Bold – кнопка установки полужирного начертания символов;
- Italic – кнопка начертания символа курсивом;
- Underline – кнопка установки начертания символа с подчеркиванием;
- Undo – кнопка отмены;
- Stack/Unstack – кнопка установки начертания дробей в одну или две строки;
- Text Color – раскрывающийся список выбора цвета символа.

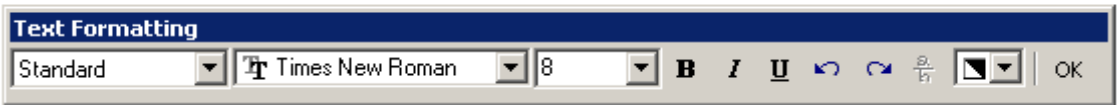


Рис. 36.

14. БЛОК

Пакет ***AutoCAD*** предоставляет пользователю различные способы работы с данными в чертежах. В том случае, когда часто встречается одна и та же группа объектов (крепежные изделия, подшипники, уплотнения и т. п.), целесообразно использовать блоки. *Блоки* – это именованные объекты, состоящие из любого количества примитивов системы ***AutoCAD***. Блоки можно вставлять в рисунок с масштабирование и поворотом, расчленять на составляющие объекты и редактировать. Блок может включать в себя другие блоки. При создании блока задается базовая точка и выбираются объекты, входящие в блок.

Возможны два типа блоков: *локальные* и *автономные*. Локальные блоки входят в состав того чертежа, в котором они были созданы, и не могут быть перенесены в другой чертеж. Автономные блоки хранятся в виде отдельного файла чертежа и могут быть использованы в других чертежах.

С каждым блоком можно связать *атрибуты*, то есть текстовую информацию для хранения вместе с блоком, которую допускается редактировать в процессе вставки блока. Распространенный пример использования атрибутов – заполнение основной надписи чертежа.

14.1. СОЗДАНИЕ БЛОКОВ

– Команда ***Block*** (Блок) – создание локального блока из объектов текущего чертежа - вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Block*** (Блок) → ***Make*** (Создать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Make Block*** (Создать блок) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). Команда раскрывает диалоговое окно ***Block Definition*** (Описание блока), представленное на рис. 37.

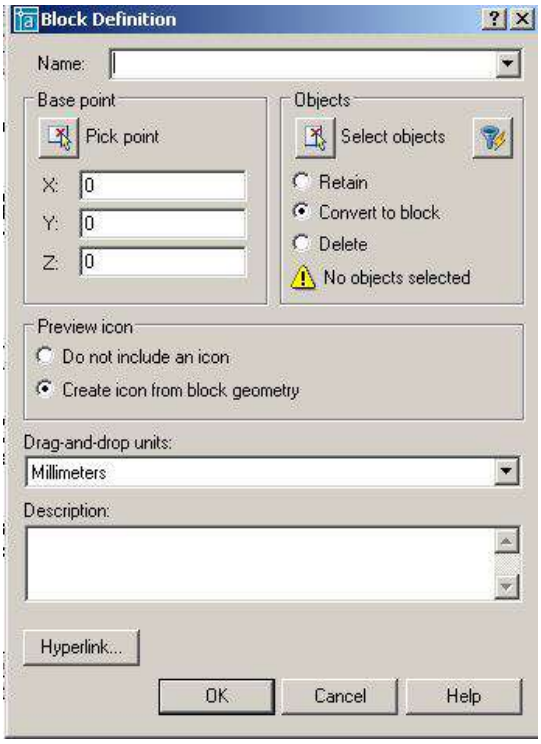


Рис. 37.

При создании блока в диалоговом окне ***Block Definition*** (Описание блока) следует:

- в поле ***Name:*** (Имя:) ввести имя создаваемого блока;
- в области ***Objects*** (Объекты) нажать кнопку ***Select objects*** (Выбрать объекты) и выбрать объекты на экране монитора, подлежащие включению в блок. При этом диалоговое окно временно закрывается. Затем следует нажать клавишу ***Enter*** после окончания выбора объектов и диалоговое окно снова откроется;
- в области ***Base point*** (Базовая точка) задать координаты базовой точки вставки или нажать на кнопку ***Pick point*** (Указать) для выбора базовой точки. После щелчка по этой кнопке диалоговое окно временно закрывается, и пользователь имеет возможность указать базовую точку на изображении блока;
- в поле ***Description*** (Пояснение) ввести текстовые пояснения для облегчения идентификации и поиска блока в дальнейшем;
- кнопка ***Hyperlink*** позволяет включить в описание создаваемого объекта гиперсвязь.

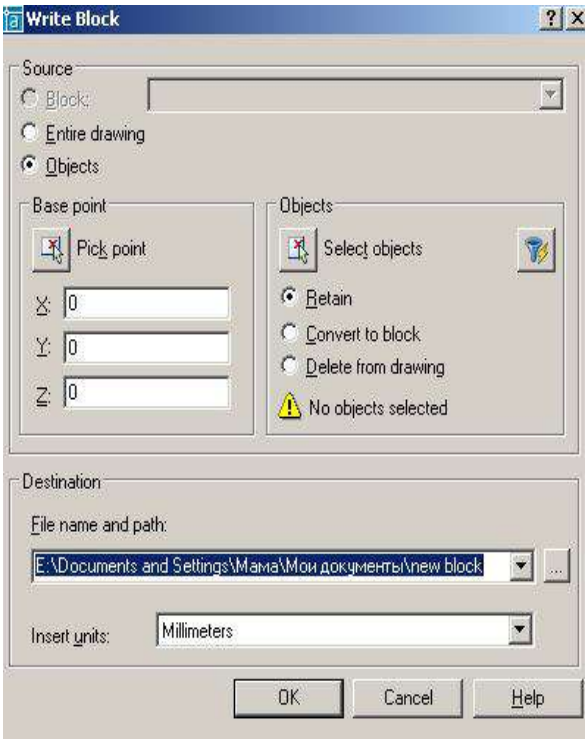
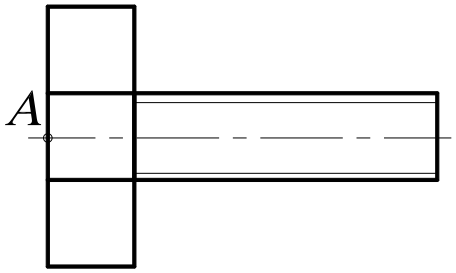


Рис. 38.

Для создания автономных блоков применяется команда ***WBLOCK*** (ПБЛОК), которая вызывается через командную строку: ***WBLOCK*** (***W***). В ответ на команду система открывает диалоговое окно ***Write Block*** (Запись блока на диск), показанное на рис. 38, в котором следует указать блок или объект, записываемый в отдельный файл. Описание блока сохраняется в отдельном чертеже.

Выполнить упражнение № 41 (для выполнения упражнения создайте чертёж, показанный в данном упражнении).

Создать локальный блок	***№ 41***
Block Падающее меню ***Draw*** → ***Block*** → ***Make*** В диалоговом окне ***Block Definition*** в поле Name: ввести произвольное имя создаваемого блока, например, BOLT. Щелкнуть мышью по кнопке ***Pick point***. Specify insertion base point: указать точку A Щелкнуть мышью по кнопке ***Select objects*** Select objects: выбрать весь объект рамкой. Select objects: <ENTER> Щелкнуть мышью по кнопке OK.	
	

14.2. ВСТАВКА БЛОКА

– Команда ***Insert*** (Вставить) – служит для вставки ранее созданного блока или чертежа из файла в текущий чертёж. Вызывается из падающего меню ***Insert*** (Вставить) → ***Block*** (Блок) или щелчком мыши по пиктограмме ***Insert*** (Вставить) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать). В ответ на команду система открывает диалоговое окно ***Insert*** (Вставить), представленное на рис. 39.

Раскрывающийся список ***Name:*** (Имя:) позволяет выбрать для вставки в текущий чертёж существующий локальный блок. Чтобы вставить в текущий чертёж автономный блок,

нужно нажать кнопку ***Browse***, а затем выбрать необходимый файл. Информационное поле ***Path*** содержит путь к отобранному файлу автономного блока. Флажок ***Explode*** (Взорвать) разрешает системе при вставке блока расчленить его на исходные данные.

Диалоговое окно ***Insert*** (Вставить) содержит три основные панели.

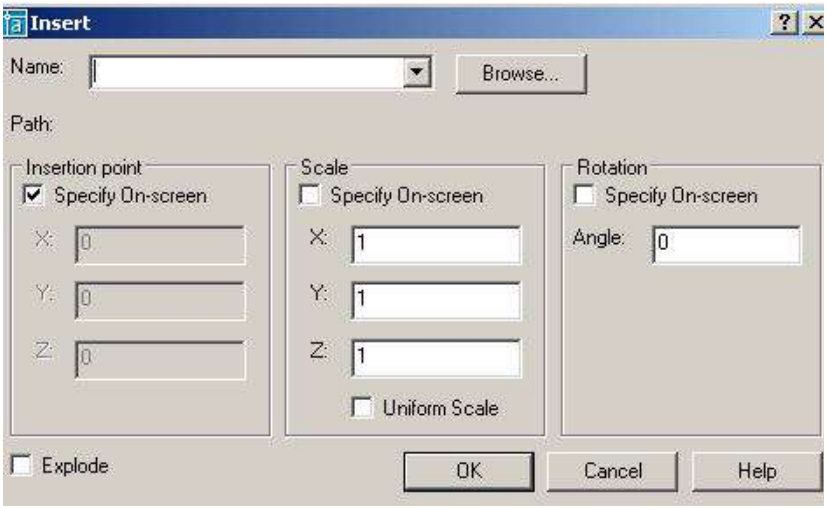


Рис. 39.

1. Панель ***Insertion point*** позволяет выбрать способ задания координат точки вставки блока (точки, с которой будет совмещена базовая точка, созданная при формировании блока): указание на чертеже или ввод числовых значений координат. Поля ввода **X**, **Y**, **Z** позволяют задать числовые значения координат точки вставки блока в текущей системе координат.

Флажок ***Specify On-screen*** разрешает указать нужную точку на чертеже. После щелчка по кнопке ОК диалоговое окно временно закрывается и пользователь имеет возможность указать точку вставки блока на чертеже.

2. Панель ***Scale*** (Масштаб) позволяет выбрать способ задания коэффициентов масштабирования при вставке блока: указание на чертеже или ввод числовых значений координат. Поля ввода **X**, **Y**, **Z** позволяют задать числовые значения масштабирования при вставке блока по осям координат.

Флажок ***Specify On-screen*** разрешает задать значения коэффициентов масштабирования на чертеже.

Флажок ***Uniform Scale*** устанавливает по осям координат одинаковые значения коэффициентов масштабирования.

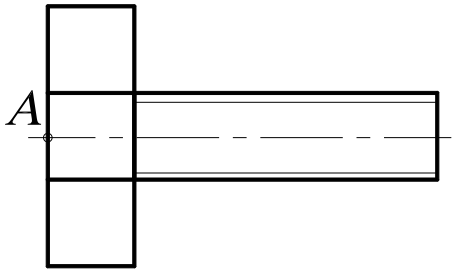
3. Панель ***Rotation*** позволяет выбрать способ задания при вставке блока угла поворота относительно номинального его положения: указание на чертеже или ввод числового значения. Панель содержит кнопку-переключатель и поле ввода числового значения угла поворота. Поле ввода ***Angle*** позволяют задать числовые значения угла поворота при вставке блока. Флажок ***Specify On-screen*** разрешает задать числовые значения угла поворота на чертеже. После щелчка по кнопке ОК диалоговое окно временно закрывается и дальнейший диалог осуществляется в командной строке. Выполнить упражнение № 42.

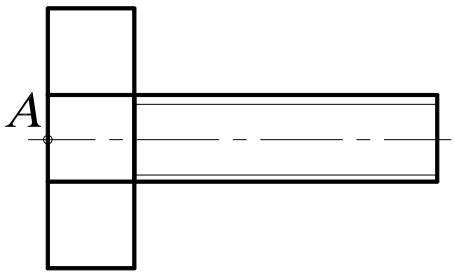
– Команда ***Explode*** (Взорвать) – расчленяет блок, размер, штриховку на отдельные составляющие объекты. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) или щелчком мыши по пиктограмме ***Explode*** (Взорвать) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

При вставке блока в чертёж ***AutoCAD*** обрабатывает его как графический примитив, то есть единый объект, который нельзя изменять. Для обеспечения работы с отдельными составляющими блока его необходимо разбить или «взорвать». Это можно сделать и в момент вставки блока в чертёж, установив в диалоговом окне ***Insert*** (Вставить) флажок ***Explode*** (Взорвать).

Команда ***Explode*** (Взорвать) используется для расчленения объектов, созданных командой ***Region*** (Область) (см. далее в разделе «Создание замкнутых объектов»).

Выполнить упражнение № 43.

Вставить блок в чертёж	***№ 42***
Insert Падающее меню ***Insert*** → ***Block*** В диалоговом окне ***Insert*** в поле Name: ввести имя вызываемого блока, которое можно указать из раскрывающегося списка, например: BOLT. Щелкнуть мышью по кнопке ***OK*** Specify insertion point or [Scale/X/Y/Z/Rotate/PScale/PX/PY/PZ/PRotate]: указать точку вставки блока	
	

Взорвать (расчленить) блок	***№ 43***
Explode Падающее меню ***Modify*** → ***Explode*** Select objects: указать блок в любой точке контура, например, точка A Select objects: <ENTER>	
	

15. СОЗДАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕКТОВ

Для построения некоторых объектов, например трёхмерных объектов методом выдавливания или вращения, могут быть использованы замкнутые полилинии либо области. Разница между этими двумя типами объектов состоит в том, что объект *полилиния* представляет собой именно замкнутую линию, а объект *область* – часть плоскости, ограниченную замкнутой линией. Поэтому последний объект может характеризоваться массогабаритными параметрами вроде веса, положения центра тяжести, площади и т. д.

Массогабаритные параметры области вычисляются с помощью команды MASSPROP, которая запускается из меню ***Tools*** (Инструменты)→ ***Inquiry*** (Запрос).

Если исходный контур состоит из нескольких объектов (отрезков, дуг, эллиптических дуг и т. п.), его можно превратить в единый объект, используя команду ***Region*** (Область).

– Команда ***Region*** (Область) – создаёт замкнутую область из набора существующих объектов – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Region*** (Область) или щелчком мыши по пиктограмме ***Region*** (Область) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

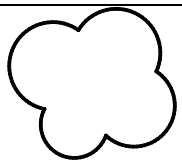
Выполнить упражнение № 44. Для выполнения этого упражнения вначале создайте произвольный объект, состоящий из нескольких элементов, например, из четырёх дуг, контур которых является замкнутым.

Создать замкнутую область	*№ 44*

Region Падающее меню ***Draw*** → ***Region***

Select objects: Specify opposite corner: 4 found выбрать графическим курсором все четыре дуги с помощью предполагаемой рамки, растягивая по диагонали.
Select objects: <ENTER>
Щелкните мышью на контур – создан единый объект

Разбейте данный объект на составляющие его четыре дуги с помощью команды *Explode*.



16. ШТРИХОВКА

– Команда ***Hatch*** (Штриховка) – выполнение штриховки замкнутой области – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Hatch*** (Штриховка) или щелчком мыши по пиктограмме ***Hatch*** (Штриховка) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать).

Команда ***Hatch*** (Штриховка) позволяет штриховать область, ограниченную замкнутой линией, как путём указания любой точки внутри контура, так и путём выбора объектов. Эта команда автоматически определяет контур и игнорирует любые целые примитивы и их составляющие, которые не являются частью контура. Текущим значением по умолчанию (в угловых скобках) может быть или имя одного из образцов штриховки, или по желанию пользователя (User). В первом случае в ответ на запрос системы необходимо указать имя одного из образцов, а во втором случае пользователь сообщает системе о намерении создать свой несложный топ штриховки, для чего отвечает символом ***U***.

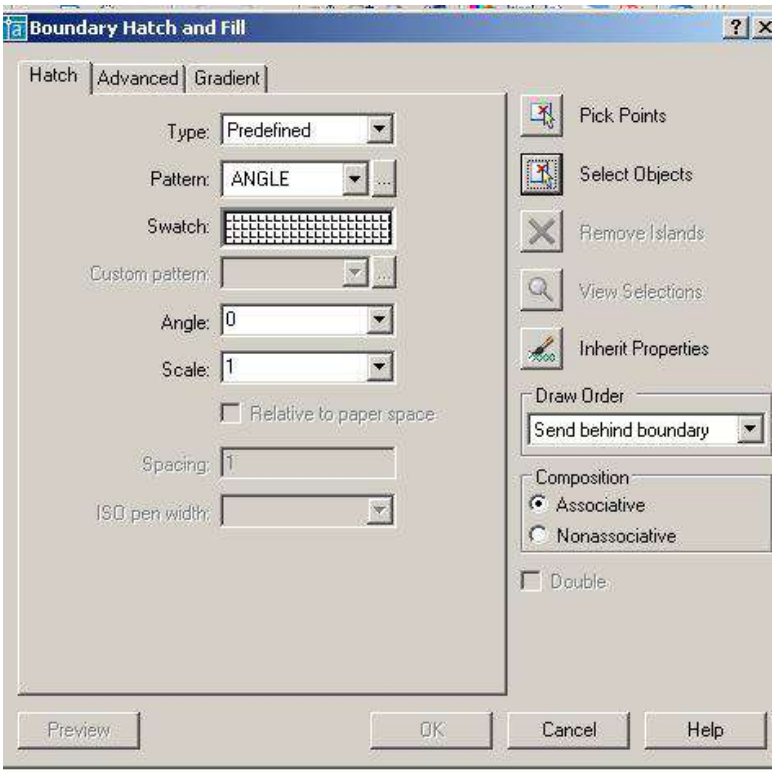


Рис. 40.

Обращение к команде ***Hatch*** (Штриховка) загружается диалоговое окно ***Boundary Hatch and Fill*** (Штриховка по контуру и заполнение), представленное на рис. 40.

1. Вкладка ***Hatch*** (Штриховка) позволяет выбирать образцы штриховки, которые имеются в области ***Pattern:*** (Образец:). Можно пользоваться как раскрывающимся списком, так и диалоговым окном ***Hatch Pattern Palette*** (Палитра образцов штриховки), содержащим пиктограммы с графическими образцами различных штриховок (рис. 41). Для выбора образца штриховки достаточно указать его изображение.

Для использования стандартных образцов штриховок необходимо в области ***Type:*** (Тип:) в раскрывающемся списке выбрать

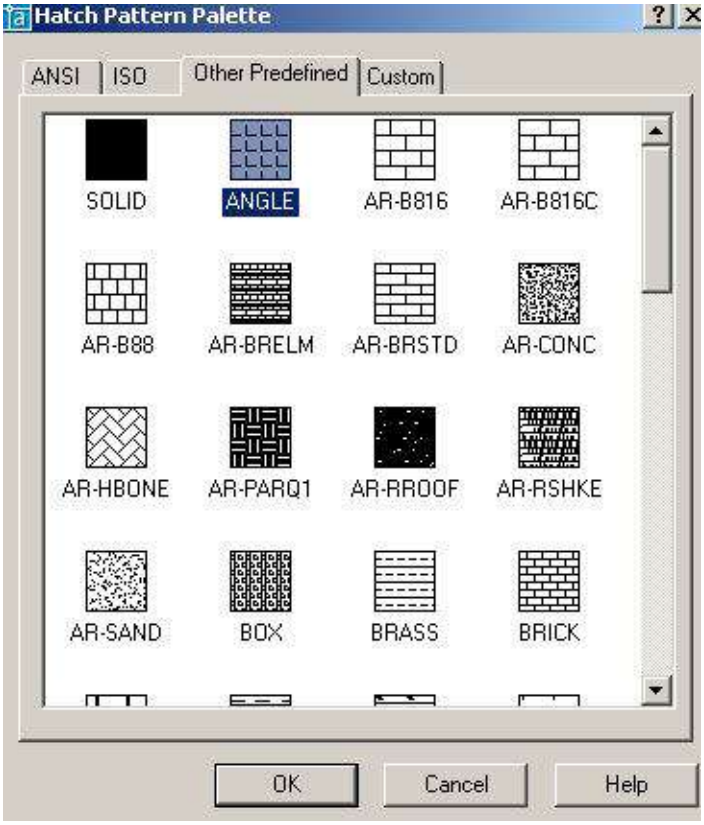


Рис. 41.

Predefined (Стандартный). Текстовые поля ***Scale:*** (Масштаб:) и ***Angle:*** (Угол:) позволяют задать масштабный коэффициент и угол наклона для выбранного образца штриховки.

Чтобы создать свой образец штриховки, надо в области ***Type:*** (Тип:) в раскрывающемся списке выбрать ***User defined*** (**Пользовательский**). При использовании типа штриховки ***Custom*** (По типу линии) следует задать угол наклона в поле ***Angle:*** (Угол:), расстояние между линиями штриховки в поле ***Spacing:*** (Интервал:), если необходимо включить флажок ***Double*** (Крест-накрест) для вычерчивания дополнительных линий под углом 90^0 к основным линиям штриховки.

Для автоматического определения контура штриховки необходимо указать кнопку ***Pick Points*** (Указание точек). Это возможно в том случае, если на чертеже создана замкнутая область.

При определении нескольких контуров штриховки необходимо выбрать несколько внутренних точек, после чего нажать клавишу Enter. Если ***AutoCAD*** определяет, что контур не замкнут или что точка находится вне контура, на экране появляется сообщение об ошибке в диалоговом окне ***Boundary Definition Error*** (Ошибка определения контура).

Для выбора объектов в качестве контура штриховки любым из стандартных способов выбора необходимо указать кнопку ***Select objects*** (Выбор объектов).

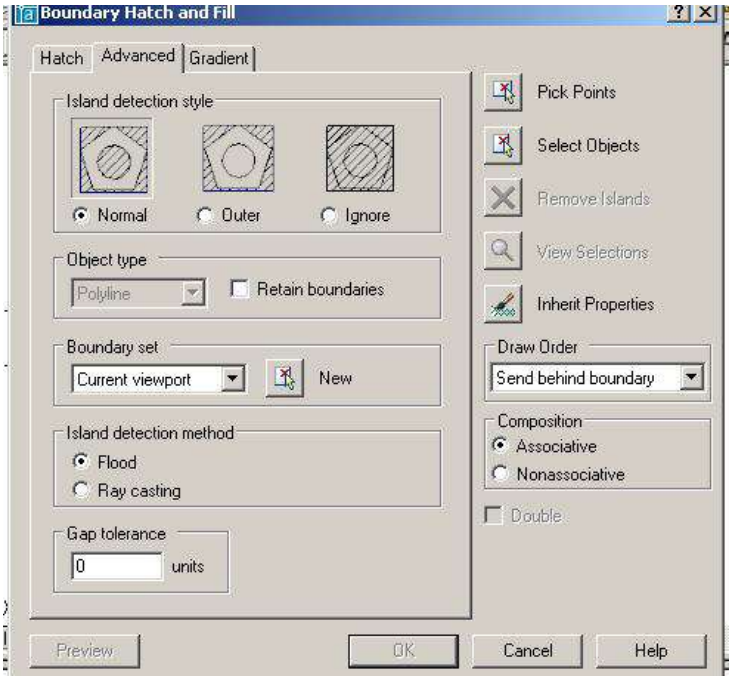


Рис. 42.

2. Вкладка ***Advanced*** (рис. 42) обеспечивает настройку параметров штриховки и содержит четыре панели.

Панель ***Island Direction Style*** содержит три кнопки выбора.

- ***Normal*** – устанавливает стиль штриховки, при котором режим штриховки изменяется при пересечении внутренних границ (используется по умолчанию).
- ***Outer*** – устанавливает стиль штриховки, при котором выполняется штриховка только внешней замкнутой области.
- ***Ignore*** – устанавливает стиль штриховки, при котором выполняется штриховка всей области внутри контура (внутренние границы игнорируются).

Панель ***Object Type*** содержит раскрывающийся список, который позволяет указать, в каком виде сохранять границу штриховки: как полилинию или как область. Кроме того, в этом поле размещена кнопка-переключатель ***Retain Boundaries*** – разрешает режим сохранения границ штриховки.

Панель ***Boundary Set*** – содержит раскрывающийся список, который определяет набор объектов для штрихуемой области.

Панель ***Island Direction Method*** – управляет методом поиска границ внутри выделенной области и содержит две кнопки выбора.

- ***Float*** – включать изолированные участки как граничные объекты.
- ***Ray Casting*** – исключать изолированные участки.

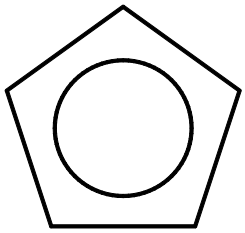
3. Вкладка ***Gradient*** позволяет заполнять замкнутые области градиентной заливкой. При этом можно выбирать угол заливки, количество цветов, центрировать.

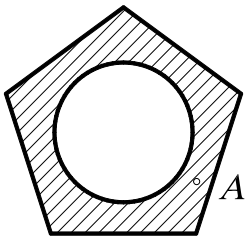
Выполнить упражнения № 45, 46. Для выполнения упражнений сначала создайте замкнутую область, показанную слева в этих упражнениях.

Выполнить штриховку замкнутой области ***№ 45***

Hatch Падающее меню ***Draw*** → ***Hatch***

В диалоговом окне Boundary Hatch and Fill в поле Pattern: выбрать кнопку ….
В диалоговом окне Hatch Pattern Palette выбрать закладку ANSI.
В закладке ANSI выбрать шаблон ANSI31.
В диалоговом окне Boundary Hatch в поле Scale: указать масштаб 1
В диалоговом окне Boundary Hatch в поле Angle: указать угол 0.
Выбрать Pick Points, указать точку A внутри контура, <ENTER>.
В диалоговом окне Boundary Hatch and Fill нажать кнопку OK.

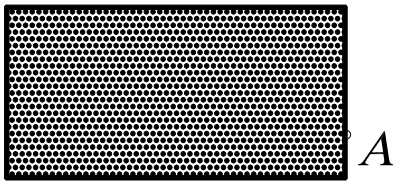




Выполнить штриховку замкнутой области ***№ 46***

Hatch Падающее меню ***Draw*** → ***Hatch***

В диалоговом окне Boundary Hatch and Fill в поле Pattern: выбрать кнопку ….
В диалоговом окне Hatch Pattern Palette выбрать закладку Other Predefined.
В закладке Other Predefined выбрать шаблон DOTS.
В диалоговом окне Boundary Hatch в поле Scale: указать масштаб 1
В диалоговом окне Boundary Hatch в поле Angle: указать угол 0.
Выбрать Select Objects, указать точку A на контуре, <ENTER>.
В диалоговом окне Boundary Hatch and Fill нажать кнопку OK.



17. ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ *Object Snap*
(Объектная привязка)

Объектная привязка (***Osnap***), панель которой показана на рис. 43, позволяет строить новые точки на чертеже, привязываясь к характерным точкам существующих объектов или относительно них, без необходимости знания её координат, а также для построения вспомогательных линий.

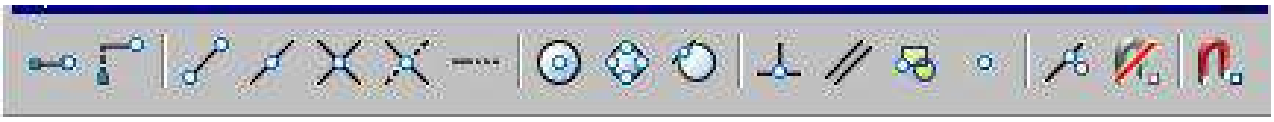


Рис. 43.

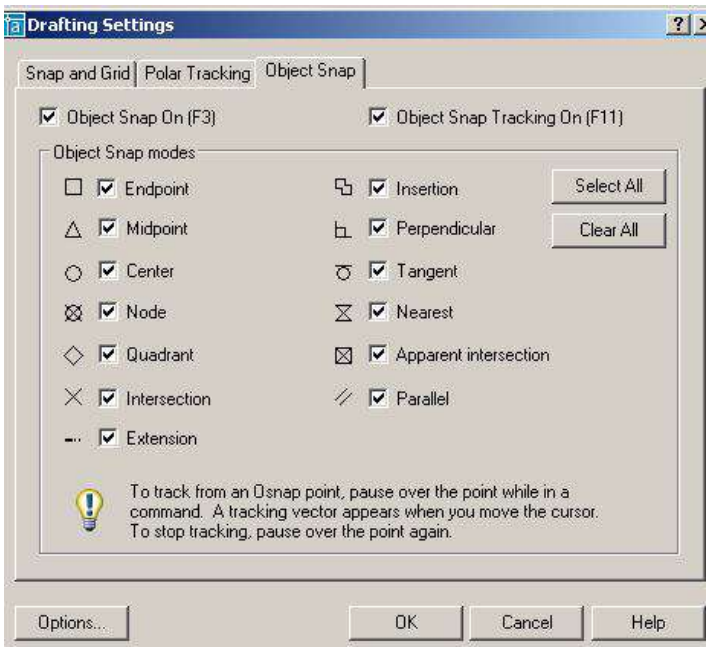
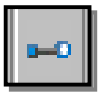


Рис. 44.

Перед применением этого способа необходимо настроить и включить режим ***Osnap***. Настройка осуществляется в диалоговом окне режимов черчения ***Drafting Settings*** (Настройки эскиза) выпадающего меню ***Tools*** (Инструменты), которое также может быть вызвано на экран командой ***OSNAP*** или нажатием правой кнопки мыши при указании на индикатор режима в строке состояния (рис. 44). В системе предусмотрена возможность временного отключения постоянного режима ***Osnap***, для чего достаточно щелкнуть на индикаторе ***Osnap*** в строке состояния.

Для одноразового использования какого-либо инструмента из набора объектных привязок в процессе выполнения команды используют контекстное меню, которое вызывают, удерживая клавишу ***SHIFT*** и нажимая правую кнопку мыши при нахождении графического курсора в рабочей зоне окна ***AutoCAD***.

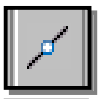
Инструменты режима объектной привязки перечислены ниже:



– ***Temporary Tracking Point*** (Точка отслеживания) – привязка к временной линии, проведённой через выбранную точку параллельно одной из осей координат;

– ***Snap From*** (Смещение) – привязка к точке, находящейся на заданном расстоянии от указанной точки (сначала выбирают любую точку, а затем вводят с клавиатуры расстояние или координаты точки, к которой нужна привязка);

– ***Snap to Endpoint*** (Привязка к конечной точке) – привязка к конечной точке линии, дуги, границы области, трёхмерного тела;



– ***Snap to Midpoint*** (Привязка к средней точке) – привязка к средним точкам объектов (отрезков, дуг и т. п.);

– ***Snap to Intersection*** (Привязка к пересечению) – привязка к точке пересечения двух объектов;

– ***Snap to Apparent Intersection*** (Привязка к предполагаемому пересечению) – привязка к воображаемой или предполагаемой точке пересечения линий или границ областей;

– ***Snap to Extension*** (Привязка к продолжению) - привязка к точке, лежащей на продолжении линии или дуги;

– ***Snap to Center*** (Привязка к центру) – привязка к центру окружности, дуги или эллипса (необходимо указывать на линию дуги или окружности или эллипса, а не на их центр);

– ***Snap to Quadrant*** (Привязка к квадранту) – привязка к ближайшему квадранту (точке, расположенной под углом 0^0, 90^0, 180^0 или 270^0 от центра) дуги, окружности или эллипса;

– ***Snap to Tangent*** (Привязка к касательной) – привязка к точке на дуге, окружности, эллипсе или сплайне, которая при соединении с последней точкой образует касательную к выбранному объекту;

– ***Snap to Perpendicular*** (Привязка к перпендикуляру) – привязка к точке на линии, окружности, эллипсе, сплайне или дуге, которая при соединении с последней точкой образует нормаль к выбранному объекту;

– ***Snap to Parallel*** (Привязка к параллели) – привязка объектов к точке на линии, которая при соединении с последней точкой образует линию, параллельную выбранному отрезку;

– ***Snap to Insert*** (Привязка к точке вставки) – привязка к точке вставки блока, формы, текста;

– ***Snap to Node*** (Привязка к узлу) – привязка к точке, сформированной командой ***Point*** (Точка);

– ***Snap to Nearest*** (Привязка к ближайшей) – привязка к произвольной точке примитива (на линии, дуге, окружности и др.), являющейся ближайшей к позиции перекрестия графического курсора;

– ***None*** (Ничего) – этот режим отменяет на одну команду все текущие режимы объектных привязок;

– ***Object Snap Sitting*** (Установка объектных привязок) – установка режима объектной привязки.

Выполнить упражнения № 47, 48, 49, 50 (вначале задайте исходные примитивы, показанные в левой части упражнения).

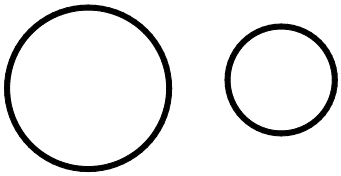
Построить касательные к окружностям ***№ 47***

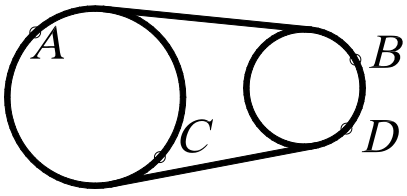
Line Падающее меню ***Draw → Line***

Specify first point: объектная привязка tangent указать A (или C)

Specify next point or [Undo]: объектная привязка tangent указать B (или D)

Specify next point or [Undo]: <ENTER>.

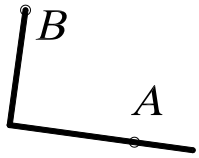




Восстановить перпендикуляр к концу отрезка ***№ 48***

Line Падающее меню ***Draw → Line***

Specify first point: объектная привязка perpendicular указать A
Specify next point or [Undo]: указать B
Specify next point or [Undo]: <ENTER>.



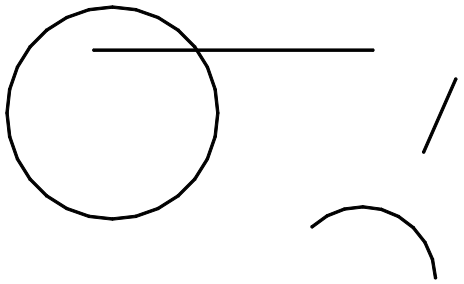
Привязка к точке предполагаемого пересечения примитивов ***№ 49***

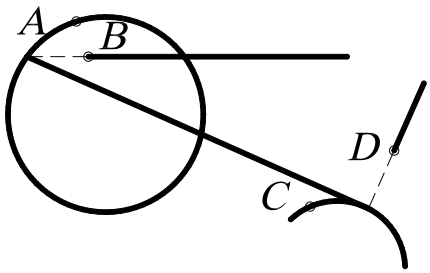
Line Падающее меню ***Draw → Line***

Specify first point: об. привязка Apparent Intersection указать A, B

Specify next point or [Undo]: об. привязка Apparent Intersection указать C, D

Specify next point or [Undo]: <ENTER>.



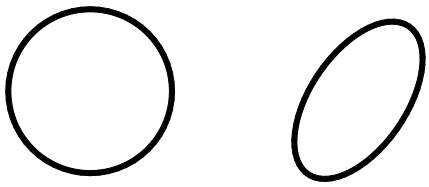


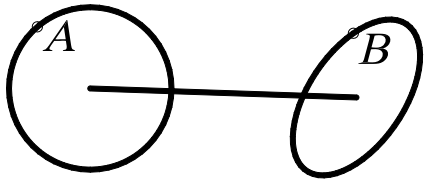
Привязка к центру окружности и эллипсу ***№ 50***

Line Падающее меню ***Draw → Line***

Specify first point: об. привязка Center указать A

Specify next point or [Undo]: об. привязка Center указать B
Specify next point or [Undo]: <ENTER>.





18. ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ *Modify*
(Изменить или редактировать)

Ни один чертёж не удается выполнить без корректировки. Вносить изменения в чертёж приходится по различным причинам. Некоторые процедуры редактирования являются частью процесса построения чертежа, например, копирование объекта вместо его повторного вычерчивания. Другие операции приводят к изменению большого количества объектов, на-

пример перенос целого фрагмента чертежа, если необходимо освободить место в графическом поле для новых объектов. Часто возникает потребность в удалении каких-то фрагментов, переносе повороте или изменении масштаба. Каждой из этих операций в наборе команд ***AutoCAD*** соответствует отдельная команда или набор команд, которые вызываются с помощью панели инструментов ***Modify*** (рис. 45) или с помощью падающего меню ***Modify*** (Редактировать).

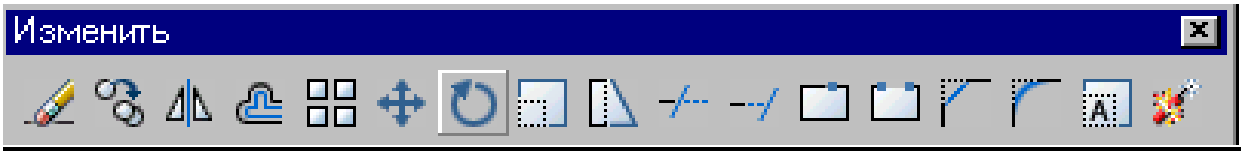


Рис. 45.

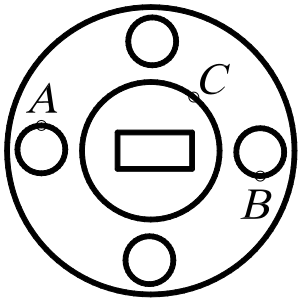
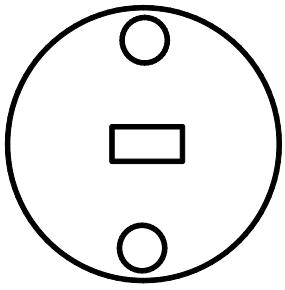
Для выполнения команд редактирования необходимо вначале выбрать эти объекты. Выбранная группа объектов называется *набором*, который состоит из одного или нескольких объектов. Набор объектов можно создавать как до, так и после вызова команды редактирования. Как только вызвана одна из команд редактирования, ***AutoCAD*** предлагает выбрать объекты. В командной строке появляется запрос ***Select objects:*** (Выберите объекты:). При этом перекрестье курсора заменяется прицелом выбора. Выбирать объекты можно с помощью предполагаемой рамки, с помощью курсора и др. Далее рассматриваются команды и примеры выполнения редактирования объектов. В примерах сначала создайте примитивы, показанные на рисунках слева, а затем редактируйте эти объекты.

18.1. УДАЛЕНИЕ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

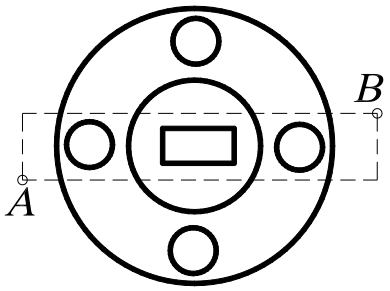
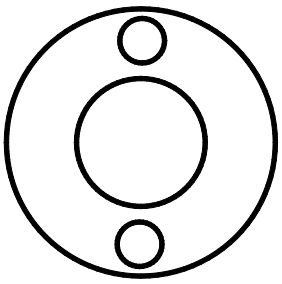
– Команда ***Erase*** (Стереть) – удаляет графический примитив и вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Erase*** (Стереть) или щелчком мыши по пиктограмме ***Erase*** (Стереть) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

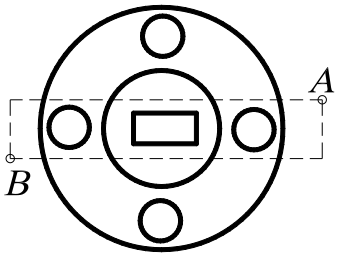
Для восстановления удаленных объектов последней командой ***Erase*** (Стереть) используется команда ***OOPS*** (Ой), название которой переводится на русский язык как «ой» и может пригодиться чересчур «активным» пользователям.

Выполнить упражнения № 51-53 (вначале задайте исходные примитивы, показанные в левой части упражнения).

Удалить набор примитивов, используя точечный выбор	***№ 51***
Erase Падающее меню ***Modify*** → ***Erase*** Select objects: указать курсором объект A Select objects: указать курсором объект B Select objects: указать курсором объект C Select objects: <ENTER> *OOPS* - восстановить последний удаленный объект C.	
	

Выбор геометрических объектов может производиться с помощью рамки. Если указать первый угол рамки, а затем второй угол в направлении слева направо, то выбираются объекты, которые полностью попали в рамку. Если же указать первый угол рамки, а затем второй угол в направлении справа налево, то секущая рамка выбирает все объекты, которые находятся внутри или пересекают контур рамки.

Удалить набор примитивов, выбирая их рамкой	***№ 52***
Erase Падающее меню ***Modify*** → ***Erase*** Select objects: указать точку A Select objects: указать точку B Select objects: <ENTER>	
	

Удалить набор примитивов, выбирая их рамкой	***№ 53***
Erase Падающее меню ***Modify*** → ***Erase*** Select objects: указать точку A Select objects: указать точку B Select objects: <ENTER>	
	

18.2. КОПИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ

– Команда ***Copy*** (Копировать) – копирует выбранные объекты и вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Copy*** (Копировать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Copy*** (Копировать) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

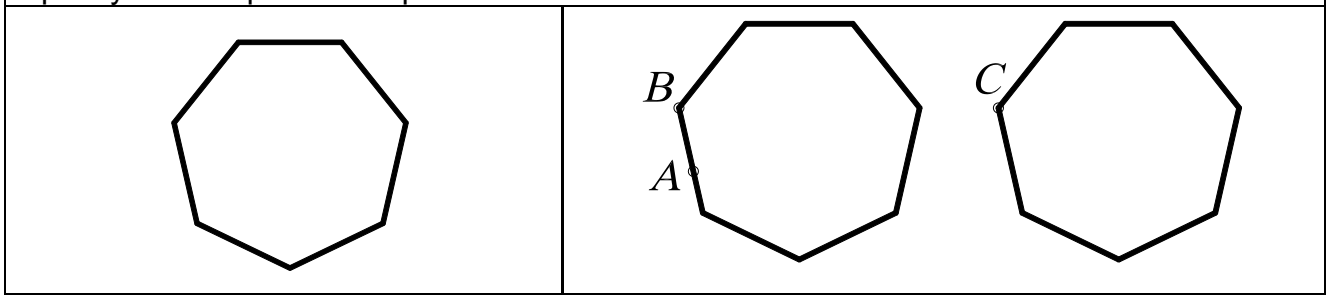
Команда позволяет создавать множество копий одного или нескольких объектов. При её применении последний запрос требует указания точки смещения (или расстояния) относительно базовой точки. После получения нужного числа копий в ответ на запрос нажать клавишу Enter.

Выполнить упражнение № 54.

Скопировать объект	*№ 54*

Copy Падающее меню ***Modify*** → ***Copy***

Select objects: указать A
Select objects: ENTER
Specify base point or displacement: указать базовую точку B с использованием любой объектной привязки
Specify second point of displacement or
<use first point as displacement>: указать новое положение объекта – точку C
(или задавая расстояние BC с указанием направления курсора)
Specify second point of displacement: <ENTER>



18.3. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

– Команда ***Mirror*** (Зеркало) – зеркально отображает выбранный объект или набор объектов, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Mirror*** (Зеркало) или щелчком мыши по пиктограмме ***Mirror*** (Зеркало) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Замечания:

1. Ось симметрии (отрезок, положение которого определяется первой и второй точками) может проходить под любым углом к горизонтальной линии.
2. Ось симметрии может быть предполагаемым отрезком, то есть не обязательно его вычерчивать.
3. При выполнении команды ***Mirror*** (Зеркало) рекомендуется в строке состояния установить режим ***Orto***, так как в большинстве случаев оси симметрии ортогональны.
4. При зеркальном отображении участков чертежа, содержащего текст, последний становится трудночитаемым. Чтобы устранить данный недостаток, необходимо предварительно установить значение системной переменной MIRRTEXT равным нулю (то есть в командной строке написать слово MIRRTEXT и затем в следующей строке на запрос Enter new value for MIRRTEXT <0>: установить значение 0).
5. При выполнении команды ***Mirror*** (Зеркало) можно исходные объекты (оригиналы) сохранять или удалять. При этом на запрос команды Delete source objects? [Yes/No] <N>: указать Yes.

Выполнить упражнение № 55.

Зеркально отобразить объект	*№ 55*

Mirror Падающее меню ***Modify*** → ***Mirror***

Select objects: выбрать объекты, показанные на рисунке толстыми линиями

Select objects: ENTER

Specify first point of mirror line: указать точку A,

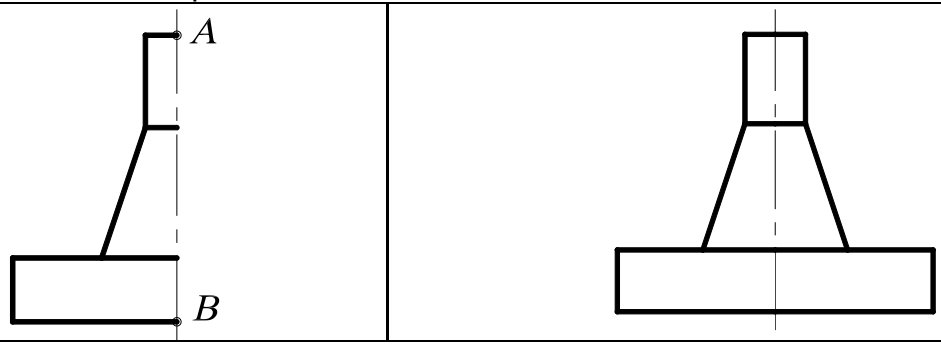
используя любой удобный режим об. привязки

Specify second point of mirror line: указать точку B,

используя любой удобный режим об. привязки

Delete source objects? [Yes/No] <N>: <ENTER>

Если на последний запрос команды ответить Y, то исходный объект не сохранится.



18.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОДОБНЫХ ПРИМИТИВОВ

– Команда ***Offset*** (Подобие) – строит примитив, подобный другому графическому примитиву (строит эквидистантные линии); вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Offset*** (Подобие) или щелчком мыши по пиктограмме ***Offset*** (Подобие) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование). Новый, подобный примитив проходит через заданную точку на чертеже или на заданном расстоянии от исходного.

Первый запрос системы в ответ на команду Specify offset distance or [Through] <Through>: (Задайте величину постоянного смещения каждого объекта или…<значение по умолчанию>)

Если выбрать режим Through, то подобный объект будет построен проходящим через заданную впоследствии точку на чертеже.

Если выбрать режим Offset, то системе необходимо указать величину смещения (ввести числовое значение с помощью клавиатуры) и позицию относительно примитива-оригинала. Подобный элемент будет построен на заданном смещении от оригинала и в нужную сторону от него. По умолчанию система всегда предлагает тот режим использования данной команды, который был применен в предыдущий раз.

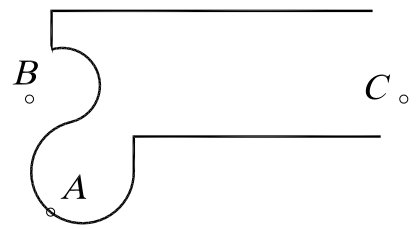
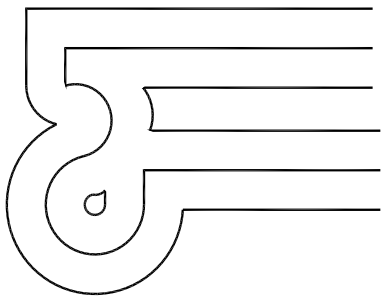
Замечания:

1. Для использования с командой ***Offset*** (Подобие) можно выбирать дуги, окружности, эллипсы, отрезки, лучи, прямые полилинии, сплайны, при этом указанные примитивы трансформируются следующим образом:
   - дуга – новая дуга имеет центральный угол и точку центра исходной дуги, однако длина дуги изменяется;
   - окружность, эллипс – новые объекты имеют центр исходных объектов, однако их радиусы изменяются;
   - отрезки, лучи, прямые – новые объекты являются дубликатами исходных;
   - полилинии – конечные точки новой полилинии размещаются вдоль нормали, направленной к соответствующим точкам исходной полилинии, в результате чего изменяются длины линейных и дуговых сегментов новой полилинии;

- сплайн – конечные точки нового сплайна размещаются вдоль нормали, направленной к соответствующим конечным точкам исходного сплайна, в результате чего изменяются длина и форма нового сплайна.

2. Для создания подобных объектов можно одновременно выбирать только один объект, причем разрешен только явный выбор.
3. Нельзя трансформировать объекты, находящиеся в плоскости, не параллельной текущей ПСК.

Выполнить упражнение № 56.

Построить эквидистанту полилинии	***№ 56***
Offset Падающее меню ***Modify*** → ***Offset*** Specify offset distance or [Through] <Through>: 10 величина смещения Select object to offset or <exit>: указать объект A Specify point on side to offset: указать точку B (сторону смещения) Select object to offset or <exit>: указать объект A Specify point on side to offset: указать точку C (сторону смещения) Select object to offset or <exit>:<ENTER>	
	

18.5. РАЗМНОЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ МАССИВОМ

Команда ***Array*** (Массив) – тиражирует изображение графического примитива или их группы в заданной прямоугольной или круговой структуре, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Array*** (Массив) или щелчком мыши по пиктограмме ***Array*** (Массив) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

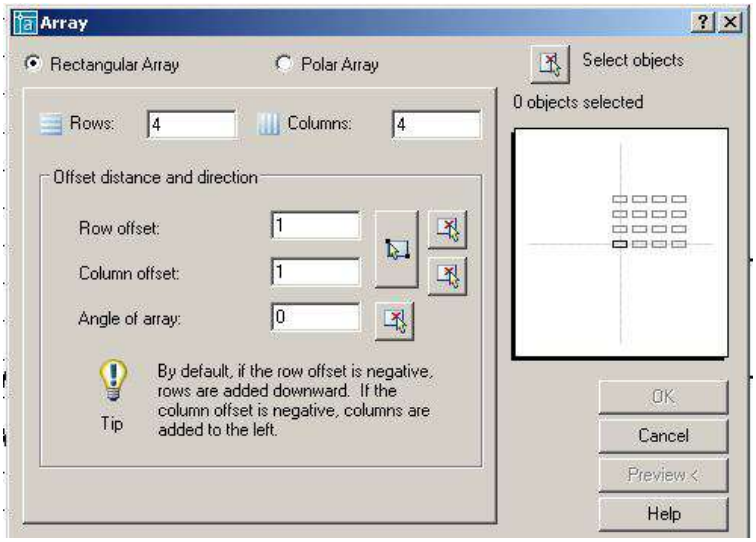


Рис. 46.

В ответ на команду система открывает диалоговое окно ***Array*** (рис. 46). Окно содержит две кнопки выбора, информационное поле, панель и кнопку.

- Кнопка выбора ***Rectangular Array*** устанавливает копирование выбранных объектов в виде прямоугольного массива.
- Кнопка выбора ***Polar Array*** устанавливает копирование выбранных объектов в виде кругового массива.
- Кнопка ***Select Object*** позволяет перейти в режим указания объектов, массив из которых необходимо создать.
- Информационное поле отображает вид создаваемого массива.

Панель служит для ввода параметров массива. В зависимости от выбора пользователя ***Rectangular Array*** или ***Polar Array*** состав компонентов панели изменяется. В режиме создания массива панель ввода параметров содержит следующие компоненты.

- Поле ввода ***Rows*** служит для задания числа строк прямоугольного массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Columns*** служит для задания числа столбцов прямоугольного массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Rows offset*** служит для задания расстояния между строками массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Column offset*** служит для задания расстояния между столбцами массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Angle of array*** служит для задания угла наклона осей, вдоль которых строится массив. Поле снабжено контекстным меню.
- Кнопка ***Pick Both Offset*** позволяет задать расстояния между строками и столбцами массива, указав на графическом поле две произвольные точки. При этом расстояние между строками равно разности координат указанных точек вдоль оси ***x***, а расстояние между столбцами – разности координат указанных точек вдоль оси ***y***.
- Кнопка ***Pick Row Offset*** позволяет задать расстояния между строками массива, указав на графическом поле две произвольные точки.
- Кнопка ***Pick Column Offset*** позволяет задать расстояния между столбцами массива, указав на графическом поле две произвольные точки.
- Кнопка ***Pick Angle of Array*** позволяет задать угол наклона осей массива, расстояния между строками массива, указав на графическом поле две произвольные точки.

В режиме создания полярного массива панель ввода параметров содержит следующие компоненты (рис. 47).

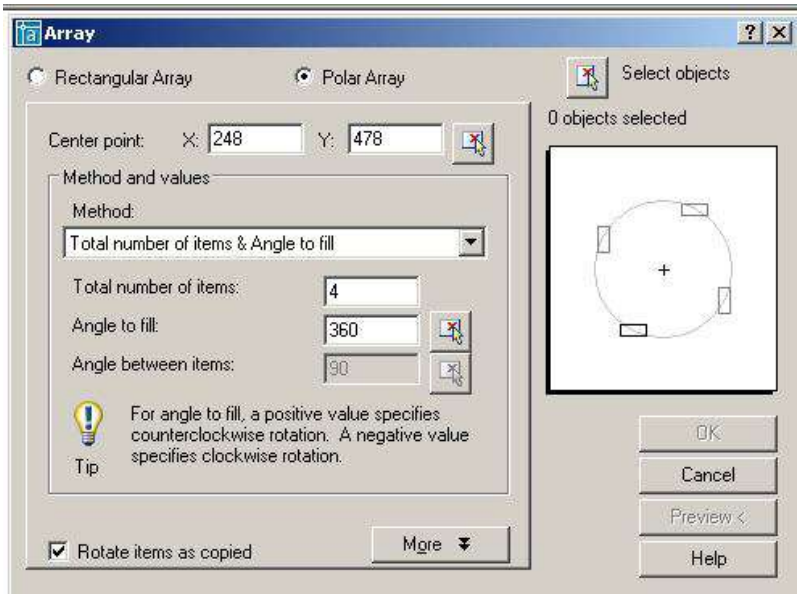


Рис. 47.

- Поля ***Center X:***, ***Y:*** служат для задания координат центра массива. Поля снабжены контекстным меню.
- Кнопка ***Center Pick Point*** позволяет задать центр массива, указав на графическом поле произвольную точку (можно использовать объектную привязку).

- Раскрывающийся список ***Method*** позволяет выбрать режим создания полярного массива:

  -***Total number of items & Angle to fill*** – создание массива с определённым числом элементов, равномерно распределённых в пределах заданного угла;

  -***Total number of items & Angle between items*** - создание массива с определенным числом элементов и заданным угловым шагом;

  -***Angle to fill & Angle between items*** – создание массива элементов, расположенных в пределах определённого угла с заданным угловым шагом.
- Поле ввода ***Total number of items*** служит для задания общего числа элементов массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Angle to fill*** служит для задания угла, в пределах которого размещаются элементы массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Поле ввода ***Angle between items*** служит для задания углового шага между элементами массива. Поле снабжено контекстным меню.
- Флажок ***Rotate items as copie***d разрешает режим, при котором объекты создаваемого массива поворачиваются на соответствующий угол.
- Кнопка ***More*** открывает дополнительную панель ***Object base point***, позволяющую задать положение базовой точки объекта (точки, расстояние до которой от центра массива остается постоянным).

Панель ***Object base point*** содержит следующие компоненты.

- Флажок ***Set to object's default*** разрешает использовать режим определения базовой точки, принятой для данного объекта по умолчанию:

  -точка центра для окружностей и эллипсов;

  -первый угол для многоугольников и прямоугольников;

  -начальная точка для линий, полилиний, сплайнов и лучей;

  -точка вставки для блоков и текста;

  -средняя точка для конструкционных линий.
- Поля ввода ***Base point X:***, ***Y:*** служат для задания координат базовой точки объекта, которая отличается от принятой по умолчанию.
- Кнопка ***Pick Base Point*** позволяет задать базовую точку объекта, указав на графическом поле произвольную точку.

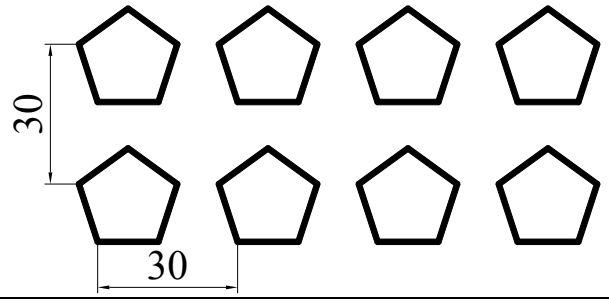
После задания всех необходимых параметров и выбора кнопки ***OK*** система производит построение массива элементов и завершает работу с командой. Кнопка ***Preview*** позволяет предварительный просмотр построенного массива, изображение которого можно редактировать или согласиться с тем, которое построено, нажав кнопку ***OK***.

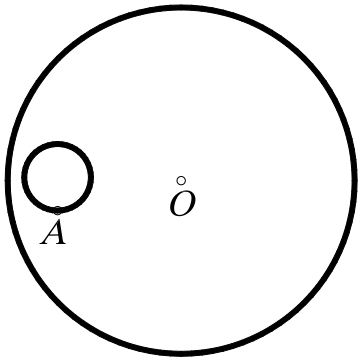
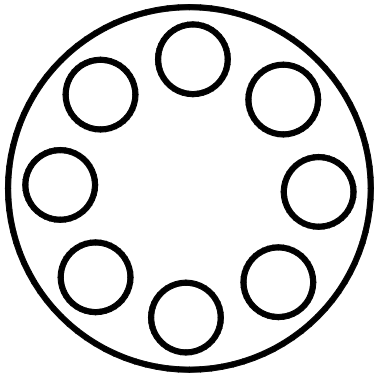
Замечания:

1. Команда позволяет выбрать объекты как после ее задания, так и до ее задания.
2. Каждый элемент массива можно редактировать независимо от других элементов.
3. Прямоугольные массивы выравниваются по осям ***X*** и ***Y*** текущей системы координат.

Для многих пользователей системы ***AutoCAD*** привычнее и удобнее работа с командной строкой. В этом случае команда ***Array*** (Массив) вводится с префиксом ***–ARRAY*** или ***(-AR)***.

Выполнить упражнение № 57, 58 (вначале постройте исходный элемент, показанный в левой части упражнений).

Размножить объект прямоугольным массивом	***№ 57***
В командной строке с клавиатуры набрать ***–ARRAY*** или ***-AR*** Select objects: выбрать объект (пятиугольник) Select objects: Enter Enter the type of array [Rectangular/Polar] <R>: Enter выбрать прямоугольный массив Enter the number of rows (---) <1>: 2 количество строк Enter the number of columns (|||) <1> 4 количество столбцов Enter the distance between rows or specify unit cell (---): 30 расстояние между строками Specify the distance between columns (|||): 30 расстояние между столбцами	
	

Размножить объект круговым массивом	***№ 58***
В командной строке с клавиатуры набрать ***–ARRAY (-AR)*** Select objects: выбрать объект А Select objects:Enter Enter the type of array [Rectangular/Polar] <R>: P круговой режим Specify center point of array or [Base]: указать центр окружности О Enter the number of items in the array: 8 количество элементов Specify the angle to fill (+=ccw, -=cw) <360>:360 или Enter угол заполнения элементами массива Rotate arrayed objects? [Yes/No] <Y>: <ENTER>	
	

Параметры ввода массива в диалоговое окно для упражнения № 57 показаны на рис. 48, а для упражнения № 58 – на рис. 49.

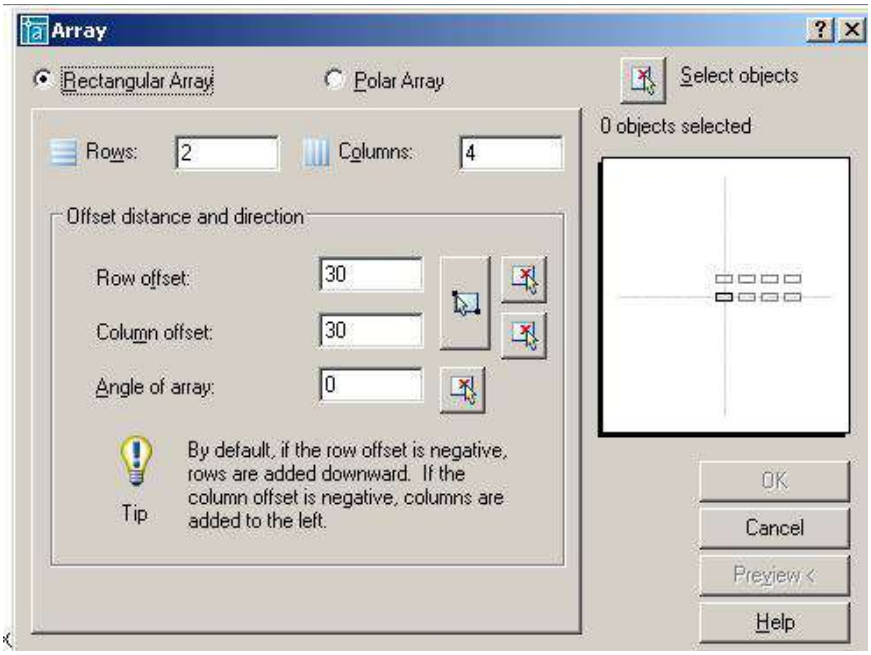


Рис. 48.

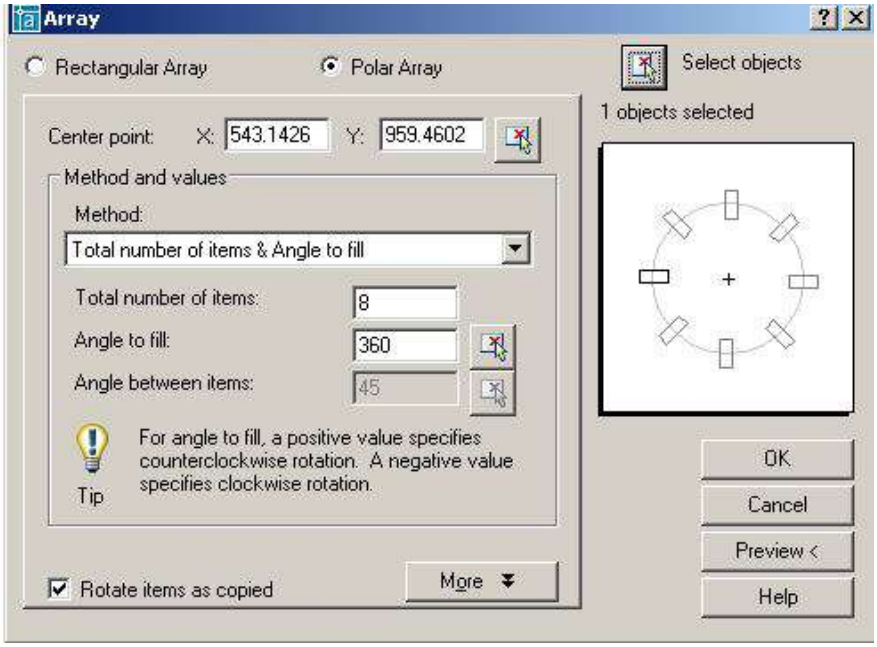


Рис. 49.

18.6. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

- Команда ***Move*** (Перемещение) – перемещает выбранные объекты, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Move*** (Перемещение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Move*** (Перемещение) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Выполнить упражнение № 59.

Переместить окружности	*№ 59*

Move Падающее меню ***Modify*** → ***Move***

Select objects: указать A

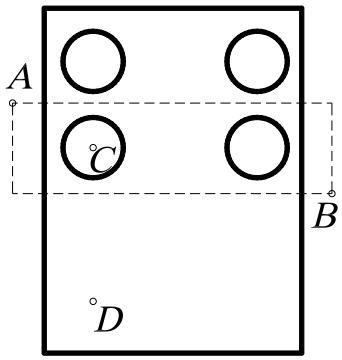
Specify opposite corner: указать B

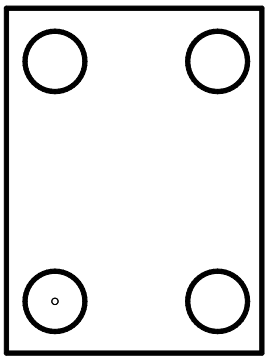
Select objects: Enter

Specify base point or displacement: указать окружность в точке C с объектной привязкой Center

Specify second point of displacement or

<use first point as displacement>: указать точку D с объектной привязкой Node





18.7. ПОВОРОТ ОБЪЕКТОВ

- Команда ***Rotate*** (Повернуть) – поворачивает выбранные объекты вокруг указанной точки на заданный угол; вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Rotate*** (Повернуть) или щелчком мыши по пиктограмме ***Rotate*** (Повернуть) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование). По умолчанию отсчет значений углов ведется от положительного направления оси ***x***. Против часовой стрелки – положительное значение угла, по часовой стрелке – отрицательное.

Опция команды ***Reference*** (Опорный угол) используется, если необходимо повернуть объект относительно существующего угла. Для автоматического определения угла нужно указать на примитиве две точки с помощью объектной привязки.

Выполнить упражнения № 60, 61.

Повернуть объект	*№ 60*

Rotate Падающее меню ***Modify*** → ***Rotate***

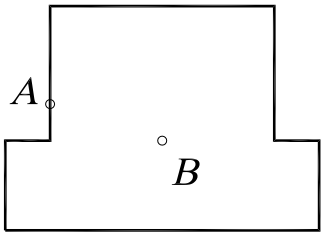
Current positive angle in UCS: ANGDIR=counterclockwise ANGBASE=0

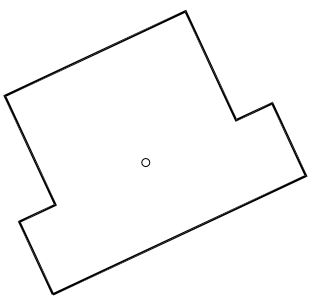
Select objects: указать объект A

Select objects: Enter

Specify base point: указать центр поворота – базовую точку B с объектной привязкой Node

Specify rotation angle or [Reference]: 25 угол поворота





Повернуть объект со ссылкой на известный угол	*№ 61*

Rotate Падающее меню ***Modify*** → ***Rotate***

Current positive angle in UCS: ANGDIR=counterclockwise ANGBASE=0

Select objects: указать объект A

Select objects: Enter

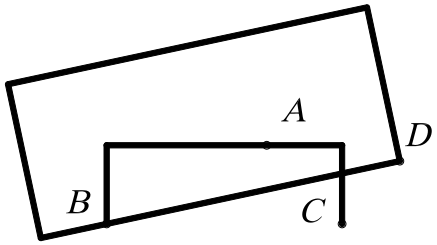
Specify base point: указать центр поворота точку B с объектной привязкой Intersection

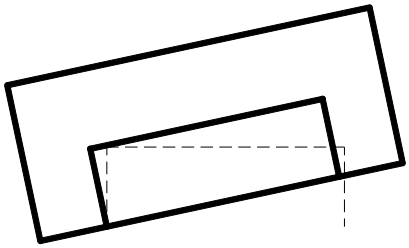
Specify rotation angle or [Reference]: R режим ссылки

Specify the reference angle <0>: указать точку B с объектной привязкой

Specify second point: указать точку C с объектной привязкой

Specify the new angle: указать точку D с объектной привязкой.





18.8. МАСШТАБИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ

– Команда ***Scale*** (Масштаб) – пропорционально изменяет размеры объекта относительно заданной точки, умножая их на заданный коэффициент масштаба, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Scale*** (Масштаб) или щелчком мыши по пиктограмме ***Scale*** (Масштаб) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

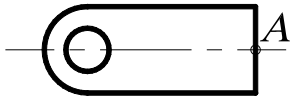
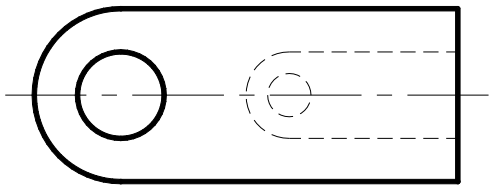
При масштабировании объектов масштабные коэффициенты по осям ***x*** и ***y*** одинаковы. Таким образом, можно делать объект больше или меньше, но нельзя изменять соотношение его размеров по этим осям. Масштабирование выполняется путем указания базовой точки и новой длины объекта, из которой выводится масштабный коэффициент для текущих единиц, или путем явного ввода коэффициента. Кроме того, коэффициент может определяться путем указания текущей длины и новой длины объекта.

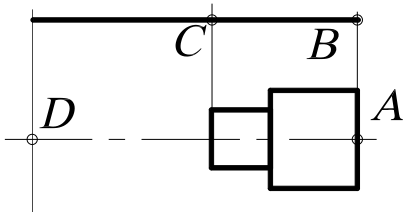
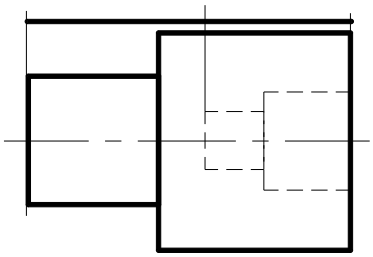
Опция ***Reference*** (Опорный отрезок) используется для определения коэффициента масштабирования с применением существующих объектов.

Одна из наиболее эффективных возможностей использования ***Reference*** (Опорный отрезок) – изменение масштаба всего рисунка. Если окажется, что выбранные единицы рисунка не соответствуют заданным требованиям, то для выбора всех объектов на рисунке (например, рамкой) можно сначала воспользоваться командой ***Scale*** (Масштаб), затем использовать опцию ***Reference*** (Опорный отрезок), указать два конца объекта, требуемая длина которого известна, и ввести эту длину. В результате масштаб всех объектов на рисунке пропорционально изменится соответствующим образом. Для автоматического определения исходной длины нужно указать на объекте с помощью объектной привязки две точки.

При использовании команды ***Scale*** (Масштаб) базовая точка не меняет своего положения при изменении размеров объекта.

Выполнить упражнения № 62, 63.

Масштабировать объект	*№ 62*
Scale Падающее меню ***Modify*** → ***Scale*** Select objects: выбрать заданный объект Select objects: Enter Specify base point: указать базовую точку A Specify scale factor or [Reference]: 2 коэффициент	
	

Масштабировать объект со ссылкой на заданную длину	*№ 63*
Scale Падающее меню ***Modify*** → ***Scale*** Select objects: выбрать заданный объект любым способом Select objects: Enter Specify base point: указать базовую точку A Specify scale factor or [Reference]: R ссылка Specify reference length <1>: указать точку B Specify second point: указать точку C Specify new length: указать точку D	
	

18.9. РАСТЯГИВАНИЕ ОБЪЕКТОВ

– Команда ***Stretch*** (Растянуть) – обеспечивает растягивание или сжатие объекта, не разрывая его, за счёт перемещения отдельных его частей, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Stretch*** (Растянуть) или щелчком мыши по пиктограмме ***Stretch*** (Растянуть) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

После запуска команды необходимо выбрать объекты. Выбор объектов осуществляется секущей рамкой, которая получается при движении курсора справа налево. При выполнении команды все объекты, которые попали внутрь секущей рамки, переносятся на одно и то же расстояние, а те, которые не попали, остаются на месте.

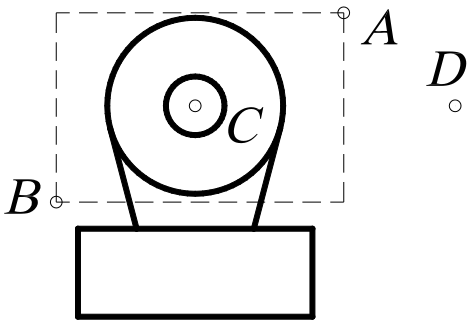
Под действие команды ***Stretch*** (Растянуть) попадают следующие типы объектов: отрезки, полилинии, дуги, лучи, сплайны, эллиптические дуги, размеры. Объекты – круг, текст, блок – растягивать нельзя.

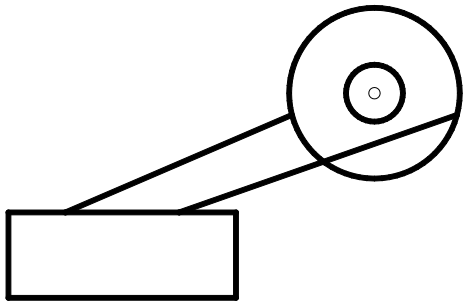
Выполнить упражнение № 64.

Растянуть объект со смещением вправо	*№ 64*

Stretch Падающее меню ***Modify*** → ***Stretch***

Select objects to stretch by crossing-window or crossing-polygon...
Select objects: выбрать объекты секущей рамкой
(растягивая её справа налево), указать точку A
Specify opposite corner: указать точку B
Select objects: Enter
Specify base point or displacement: указать точку C (применяя об. привязку к центру)
Specify second point of displacement or <use first point as displacement>: указать точку D





18.10. ПОДРЕЗАНИЕ ОБЪЕКТОВ

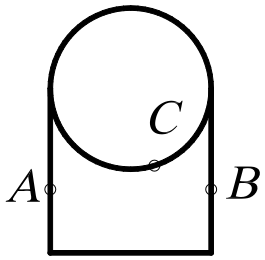
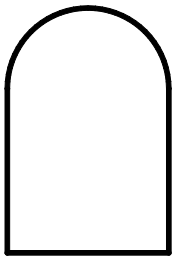
– Команда ***Trim*** (Обрезать) – удаляет часть графического объекта, обрезая его по заданной режущей кромке, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Trim*** (Обрезать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Trim*** (Обрезать) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Прежде чем удалить лишние фрагменты – подрезать объект, необходимо определить *режущую кромку*. Режущей кромкой могут служить отрезки, дуги, окружности, двумерные полилинии, эллипсы, сплайны, прямые, лучи. Можно выбирать несколько режущих кромок и подрезать несколько объектов одновременно. В пространстве листа режущими кромками могут быть границы видовых экранов. После определения объектов, которые будут использованы в качестве режущих кромок, выбираются объекты для подрезания. При этом перечисляются следующие опции команды.

- ***Select object to trim*** (Выберите объекты для подрезания). Эта опция предлагается по умолчанию. Нужно выбрать любым известным способом те объекты, которые нужно откорректировать, при этом каждый объект должен быть указан с того конца, который нужно удалить.
- ***Project*** (Проекция). Эта опция определяет режим отсечения объектов по пересечению проекции объектов с границей в трехмерном пространстве:
  - ***None*** (Никакой) – режущая кромка не проектируется, она должна явно (физически) пересекать корректируемый объект;
  - ***UCS*** (ПСК) – кромка проектируется на координатную плоскость ***XY*** текущей пользовательской системы координат. Фактически при этом в качестве режущей кромки используется плоскость, нормальная к плоскости ***XY*** текущей ПСК;
  - ***View*** (Вид) – режущая кромка и подрезаемый объект проектируются на плоскость экрана в текущем виде.
- ***Edge*** (Кромка) определяет режим поиска пересечения:
  - ***Extend*** (Удлинить) – выполняет удлинение режущей кромки до воображаемого пересечения с корректируемым объектом;

- ***No Extend*** (Не удлинять) – отсечение объектов по границе, с которой они имеют пересечение.

Выполнить упражнение № 65.

Отсечь часть окружности	***№ 65***
Trim Падающее меню ***Modify*** → ***Trim*** Current settings: Projection=UCS, Edge=None Select cutting edges ... Select objects: указать режущую кромку, выбрав объекты A и B Select objects: Enter Select object to trim or shift-select to extend or [Project/Edge/Undo]: указать объект C Select object to trim or shift-select to extend or [Project/Edge/Undo]: <ENTER>	
	

18.11. УДЛИНЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

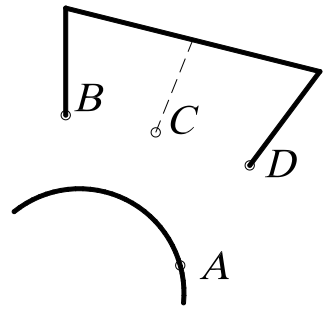
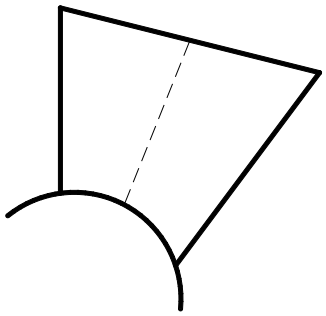
– Команда ***Extend*** (Удлинить) – удлиняет объекты до пересечения с указанной линией, вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Extend*** (Удлинить) или щелчком мыши по пиктограмме ***Extend*** (Удлинить) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Методика выполнения удлинения объектов мало отличается от подрезания. Разница только в том, что вместо режущей кромки задается *граничная кромка*. Удлинять командой ***Extend*** (Удлинить) можно отрезки, незамкнутые полилинии, дуги, лучи, эллиптические дуги. Граничными кромками могут служить отрезки, дуги, двумерные полилинии. Удлиняемые объекты выбираются, если указать на ту часть, которая должна удлиняться. Объекты нельзя выбирать рамкой.

В процессе выполнения команды ***Extend*** (Удлинить)используются те же приглашения, что и для ***Trim*** (Обрезать). Первое приглашение ***Select boundary edges*** касается выбора объектов, которые будут использованы в качестве граничной кромки. Для задания способа интерпретации граничных кромок предлагается использовать такие же опции, как и при выполнении подрезания.

- ***Project*** (Проекция). Эта опция позволяет определить, каким образом ***AutoCAD*** будет проектировать граничную кромку при выполнении операции на трехмерной модели:
  - ***None*** (Никакой) – граничная кромка не проектируется, она должна явно (физически) пересекать продолжение корректируемого объекта;
  - ***UCS*** (ПСК) – кромка проектируется на координатную плоскость ***XY*** текущей пользовательской системы координат. Фактически при этом в качестве режущей кромки используется плоскость, нормальная к плоскости ***XY*** текущей ПСК;
  - ***View*** (Вид) – граничная кромка и удлиняемый объект проектируются на плоскость экрана в текущем виде.
- ***Edge*** (Кромка) определяет режим поиска пересечения:
  - ***Extend*** (Удлинить) – выполняет удлинение объекта до воображаемой продолженной границы;
  - ***No Extend*** (Не удлинять) – удлинение объектов до границы без её удлинения.

Выполнить упражнение № 66.

Удлинить отрезки до границы дуги	***№ 66***
Extend Падающее меню ***Modify*** → ***Extend*** Current settings: Projection=UCS, Edge=None Select boundary edges ... Select objects: указать граничную кромку, выбрав объект A Select objects: Enter Select object to extend or shift-select to trim or [Project/Edge/Undo]: указать точку B Select object to extend or shift-select to trim or [Project/Edge/Undo]: указать точку C Select object to extend or shift-select to trim or [Project/Edge/Undo]: указать тоску D Select object to extend or shift-select to trim or [Project/Edge/Undo]: <ENTER>	
	

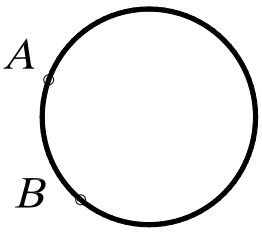
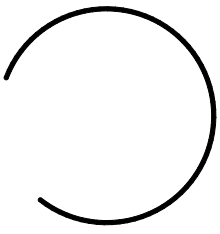
Если задано несколько граничных кромок, то объект удлиняется до тех пор, пока не достигнет первой граничной кромки. Этот объект можно выбрать вновь, чтобы удлинить его до следующей граничной кромки.

18.12. РАЗБИЕНИЕ ОБЪЕКТОВ НА ЧАСТИ

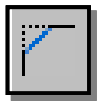
– Команда ***Break*** (Разорвать) – осуществляет разрыв отрезка, полилинии, дуги, окружности, эллипса, сплайна, прямой. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Break*** (Разорвать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Break*** (Разорвать) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Для разбиения объекта на части можно выбрать объект в первой точке разрыва, а затем указать вторую точку разрыва.

Выполнить упражнение № 67.

Расчленить и удалить часть окружности	***№ 67***
Break Падающее меню ***Modify*** → ***Break*** Select object: указать точку разрыва A Specify second break point or [First point]: указать точку разрыва B	
	

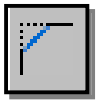
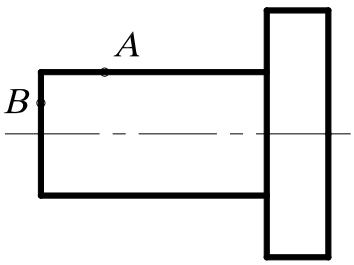
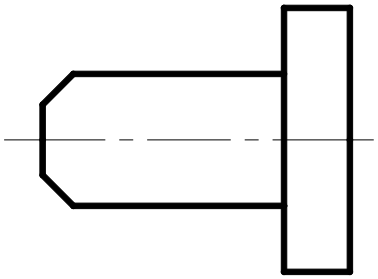
18.13. ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФАСОК

 – Команда ***Chamfer*** (Фаска) – снимает фаску с угла, образованного полилинией, лучами или пересечением двух отрезков. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Chamfer*** (Фаска) или щелчком мыши по пиктограмме ***Chamfer*** (Фаска) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

Эта команда может использоваться и для редактирования трехмерных тел. Если создается фаска, она определяется либо двумя катетами, либо одним катетом и углом фаски по отношению к одной из кромок.

Процесс создания фаски состоит из двух шагов. Сначала задаются параметры фаски. Это могут быть либо два катета, либо один катет и угол фаски. После ввода значений ***AutoCAD*** завершит команду ***Chamfer*** (Фаска). После этого нужно снова запустить эту команду и выбрать два отрезка, представляющие кромки, между которыми создается фаска. ***AutoCAD*** создаст фаску, используя полученную на предыдущем этапе информацию.

Выполнить упражнения № 68.

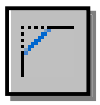
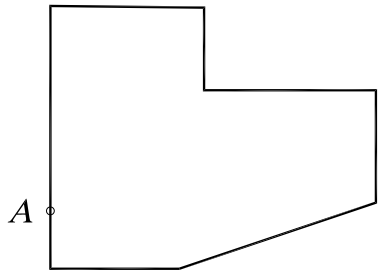
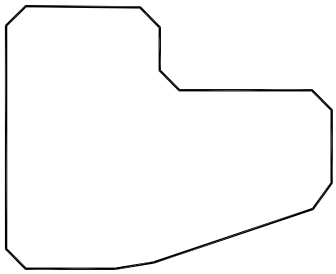
Построить фаски объекта	***№ 68***
 ***Chamfer*** Падающее меню ***Modify*** → ***Chamfer*** (TRIM mode) Current chamfer Dist1 = 0.0000, Dist2 = 0.0000 Select first line or [Polyline/Distance/Angle/Trim/Method/mUltiple]: D режим задания фаски по двум катетам Specify first chamfer distance <0.0000>: 7 длина одного катета Specify second chamfer distance <7.0000>: Enter <по умолчанию> длина второго катета Select first line or [Polyline/Distance/Angle/Trim/Method/mUltiple]: указать отрезок A Select second line: указать отрезок B Аналогично построить фаску с другой стороны.	
	

Ниже описаны опции команды ***Chamfer*** (Фаска).

- ***Select first line*** (Выберите первую кромку). Указать первую из двух кромок. В плоских чертежах ею является линия, а в трехмерных моделях – ребро тела. После этого последует приглашение выбрать вторую кромку.
- ***Polyline*** (Полилиния). При выборе этой опции, которая доступна только в том случае, если выбранным объектом является полилиния, на всех углах между последовательными сегментами будет вычерчена линия фаски. Построенные вдоль полилинии фаски становятся её новыми сегментами, даже если их длина равна нулю. Пример нанесения фасок на полилинию будет представлен ниже.
- ***Distance*** (Катет). Эта опция используется для формирования фаски по значениям длин двух катетов. В этом случае задается сначала длина одного катета, а затем другого.
- ***Angle*** (Угол). Позволяет задать длину одного катета и угла скоса между фаской и линией кромки.

- ***Trim*** (Обрезать). Позволяет задать режим обработки двух объектов, то есть разрешает обрезать ненужные линии или нет, до снятия фаски. Если нужно обрезать, то первая линия отсекает на величину первого расстояния, вторая – на величину второго. Если расстояние равно 0, то происходит подгонка в одну точку. По умолчанию соединяемые фаской объекты обрезаются.
- ***Method*** (Метод) – позволяет выбрать один из методов задания размеров фасок: либо двумя расстояниями, либо расстоянием и углом.

Выполнить упражнения № 69.

Вычертить фаски на углах сегментов полилинии	***№ 69***
 ***Chamfer*** Падающее меню ***Modify*** → ***Chamfer*** (TRIM mode) Current chamfer Dist1 = 5.0000, Dist2 = 5.0000 Select first line or [Polyline/Distance/Angle/Trim/Method/mUltiple]: P режим полилинии Select 2D polyline: указать на полилинию в любой точке (например, в точке A) 7 lines were chamfered	
	

18.14. ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕНИЙ УГЛОВ

– Команда ***Fillet*** (Сопряжение) – скругляет или сопрягает объекты дугой заданного радиуса. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Fillet*** (Сопряжение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Fillet*** (Сопряжение) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

С помощью этой команды можно сопрягать объекты следующих типов: линия, полилиния, луч, конструкционная линия, которые на чертеже имеют вид прямых, причем сопрягаемые линии, которых могут быть и параллельными. Допускается сопрягать и криволинейные объекты типов дуга, окружность и эллипс.

Процесс сопряжения состоит из двух этапов. Сначала определяется радиус сопрягающей дуги. В качестве такового используется радиус последнего выполненного сопряжения. Если необходимо переназначить величину радиуса, выбирают опцию ***Radius*** и вводят новое значение. Затем выбирают два сопрягаемых отрезка. ***AutoCAD*** выполнит сопряжение отрезков в соответствии с имеющейся информацией.

Команда имеет четыре основанные опции.

- ***Select first object*** (выберите первый объект). Эта опция позволяет указать первый объект сопряжения, если выполняется редактирование плоских объектов, либо трёхмерное ребро, если выполняется плавное сопряжение на трёхмерной модели. После выбора первого объекта сопряжения выбирается второе. При работе с трехмерными моделями можно выбрать несколько ребер, которые будут сглажены поверхностью одного радиуса. В этом случае имеется еще три опции:

  - ***Select an edge*** (Выберите ребро). Эта опция позволяет выбрать дополнительно рабра трехмерной модели до тех пор, пока не будет нажата клавиша ***Enter***.

- ***Chain*** (Цепочка). Эта опция позволяет указать непрерывную последовательность ребер на одной грани, которые будут одинаково сглажены.
-***Radius*** (Радиус) – задание радиуса.

- ***Polyline*** (Полилиния). При выборе этой опции, которая доступна только в том случае, если выбранным объектом является полилиния, все углы между последовательными сегментами будут сопряжены дугами одного радиуса.
- ***Radius*** (Радиус). Эта опция позволяет задать значение радиуса. Изменение радиуса действует только на выполняемые после этого сопряжения, оставляя неизменными существующие.
- ***Trim*** (Обрезать). Позволяет задать режим обработки двух объектов, то есть разрешает обрезать ненужные линии или нет, до выполнения сопряжения. По умолчанию сопрягаемые объекты обрезаются.

Выполнить упражнения № 70 - 72.

Построить сопряжение отрезков ***№ 70***

Fillet Падающее меню ***Modify → Fillet***

Current settings: Mode = TRIM, Radius = 0.0000

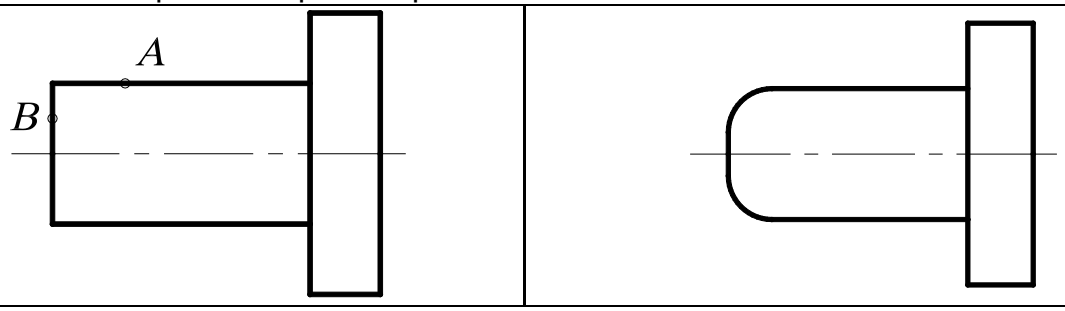
Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: R задать значение радиуса

Specify fillet radius <0.0000>: 10 радиус скругления

Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: указать на отрезок в точке A

Select second object: указать на отрезок в точке B

Аналогично построить второе сопряжение.



Построить сопряжения на углах сегментов полилинии ***№ 71***

Fillet Падающее меню ***Modify → Fillet***

Current settings: Mode = TRIM, Radius = 0.0000

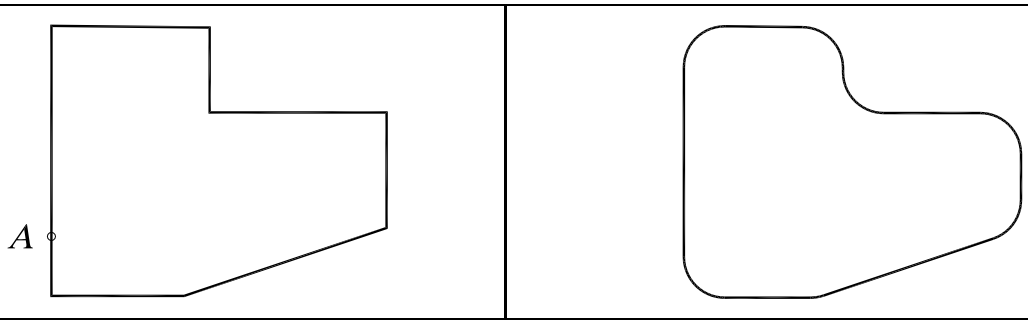
Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: R задать значение радиуса

Specify fillet radius <0.0000>: 10 радиус скругления

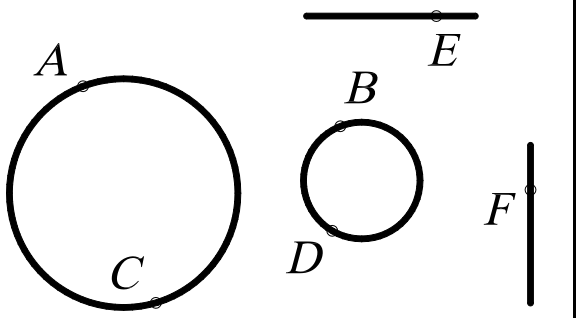
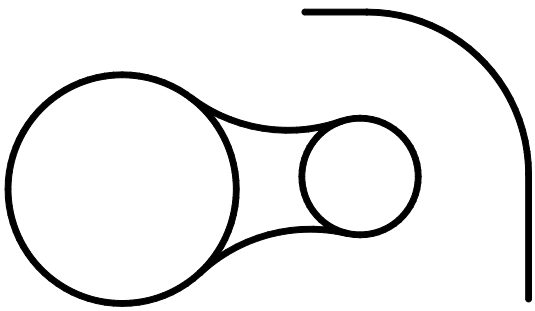
Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: P режим полилинии

Select 2D polyline: указать на полилинию в любой точке (например, в точке A)

7 lines were filleted



Замечание. Если два отрезка параллельны, то между их концами вычерчивается полукруг, при этом радиус сопряжения автоматически устанавливается равным половине расстояния между отрезками.

Построить сопряжения заданных объектов	***№ 72***
Fillet Падающее меню ***Modify → Fillet*** Current settings: Mode = TRIM, Radius = 10.0000 Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: R задать значение радиуса Specify fillet radius <10.0000>: 30 радиус скругления Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: указать точку A (или C) Select second object: указать точку B (или D) FILLET Current settings: Mode = TRIM, Radius = 30.0000 Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: указать точку E Select second object: указать точку F.	
	

Замечание. Если радиус сопряжения задан нулевым, то система просто соединяет два непараллельных отрезка.

19. РЕДАКТИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МАРКЕРОВ GRIPS («РУЧКИ»)

При выделении объекта на поле чертежа на нем появляются маркеры ***Grips*** (Ручки) – характерные точки объекта (маленькие синие квадраты), обычно определяемые с помощью режима объектной привязки. Использование ручек позволяет минимизировать обращения к меню. Редактирование при включенном режиме ручек выполняется с помощью графического курсора.

Средство редактирования объектов ***Grips*** объединяет наиболее часто используемые команды редактирования: ***Stretch*** (Растянуть), ***Move*** (Перемещение), ***Rotate*** (Повернуть), ***Scale*** (Масштаб), ***Mirror*** (Зеркало). По умолчанию вначале активизируется команда ***Stretch*** (Растянуть).

Первое действие при работе со средством редактирования ***Grips***.

Выбирают объекты, воспользовавшись средствами выбора объектов до ввода команды: предполагаемой рамкой или явным указанием объектов. Система отметит маркеры ***Grips*** выбранных объектов маленькими синими квадратами. Если какой-либо объект выбран ошибочно, нажимают клавишу ***Shift*** и дважды щелкают на этом объекте мышью, чтобы отменить выбор и маркеры. Если весь набор выбран неудачно, нажимают дважды клавишу ***Esc***.

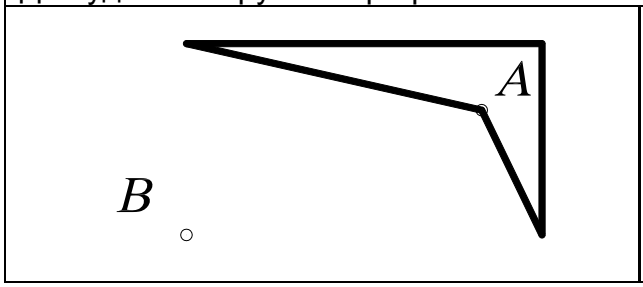
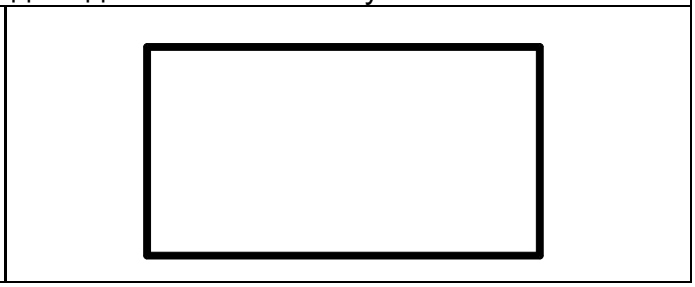
Второе действие при работе со средством редактирования ***Grips***.

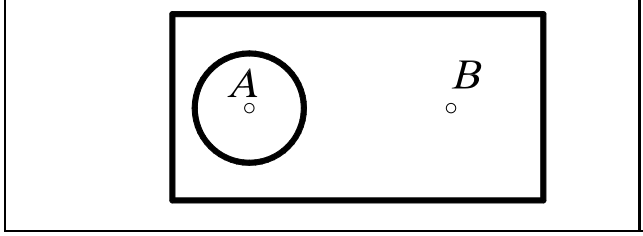
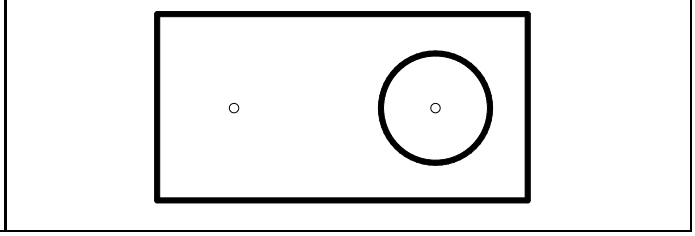
Активизируют режим редактирования, явно указав графическим курсором один из маркеров ***Grips***. Система отметит активный маркер ***Grips*** маленьким красным квадратом. Чтобы вернуть этот маркер в первоначальное состояние, щелкают на нем мышью. Если не-

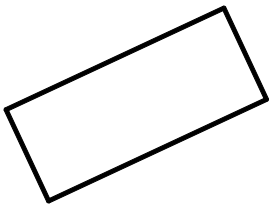
обходимо активизировать несколько маркеров ***Grips***, то в ходе их набора нажимают и удерживают клавишу ***Shift***. После отпускания клавиши ***Shift*** следует выбрать из набора активных маркеров ***Grips*** один, который будет рассматриваться системой как базовый. Если какой-либо маркер ***Grips*** из набора выбран ошибочно, то для его отмены нужно щелкнуть на нем мышью, удерживая нажатой клавишу ***Shift***. Точка, соответствующая выбранному маркеру ***Grips***, рассматривается системой в качестве базовой. После выбора маркера по умолчанию запускается команда ***Stretch*** (Растянуть).

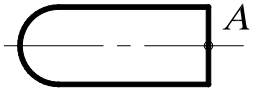
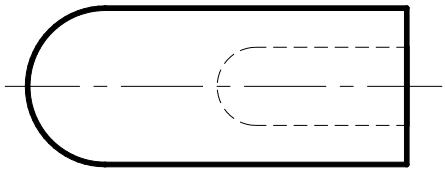
Для выбора остальных команд режима можно воспользоваться контекстным меню, вызываемым при нажатии правой кнопки мыши, последовательным нажатием клавиши ***Enter*** или непосредственным вводом с клавиатуры в командную строку начальной буквы команды.

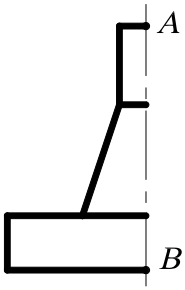
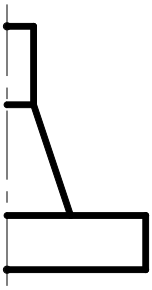
Выполнить упражнения № 73 – 77 (вначале постройте исходный элемент, показанный в левой части упражнения).

Растянуть объект с помощью Grips (Ручки)	***№ 73***
Command: указать на контур объекта в произвольной точке. Из появившихся ручек выбрать ту, за которую следует тянуть (точку А) ** STRETCH ** Specify stretch point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: указать новое положение редактируемой вершины – точку В (при необходимости задать её координатами). Для удаления ручек с графического поля дважды нажать клавишу Esc.	
	

Переместить объект с помощью Grips (Ручки)	***№ 74***
Command: указать на контур объекта в произвольной точке. Из появившихся ручек выбрать базовую, например точку А ** STRETCH ** Specify stretch point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: Мо или Enter режим перемещения ** MOVE ** Specify move point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: указать новое положение центра окружности – точку В (при необходимости задать её координатами). Для удаления ручек с графического поля дважды нажать клавишу Esc.	
	

Повернуть объект с помощью Grips (Ручки)	*№ 75*
Command: указать на контур объекта в произвольной точке. Из появившихся ручек выбрать базовую (центр поворота), например точку А ** STRETCH ** Specify stretch point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: Ro режим поворота ** ROTATE ** Specify rotation angle or [Base point/Copy/Undo/Reference/eXit]: 25 угол Для удаления ручек с графического поля дважды нажать клавишу Esc.	
	

Масштабировать объект с помощью Grips (Ручки)	*№ 76*
Command: выбрать объект Из появившихся ручек выбрать базовую, например точку А ** STRETCH ** Specify stretch point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: Sc режим масштабирования ** SCALE ** Specify scale factor or [Base point/Copy/Undo/Reference/eXit]: 2 коэффициент Для удаления ручек с графического поля дважды нажать клавишу Esc.	
	

Зеркально отобразить объект с помощью Grips (Ручки)	*№ 77*
Command: выбрать объект Из появившихся ручек выбрать базовую, например точку А ** STRETCH ** Specify stretch point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: Mi режим симметрии ** MIRROR ** Specify second point or [Base point/Copy/Undo/eXit]: указать точку В Для удаления ручек с графического поля дважды нажать клавишу Esc.	
	

20. ДИСПЕТЧЕР СВОЙСТВ ОБЪЕКТОВ

Диспетчер свойств объектов ***Object Property Manager*** – это единый инструмент, управляющий всеми объектами рисунка. В диалоговом окне ***Property*** (Свойства), представленном на рис. 150, возможен просмотр и изменение практически всех свойств рисунка. Диалоговое окно загружается командой ***PROPERTIES*** (Окно свойств) либо из падающего меню ***Modify*** (Редактировать)→ ***Properties*** (Свойства), либо щелчком мыши по пиктограмме ***Properties*** (Свойства) стандартной панели инструментов.

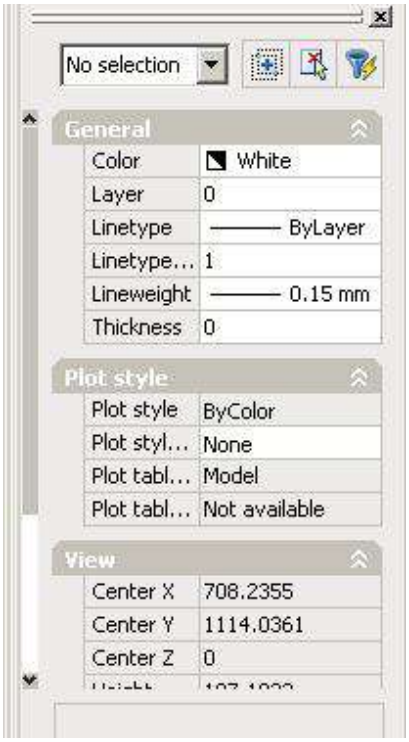


Рис. 150.

Диспетчер свойств объектов ***Object Property Manager*** позволяет выбирать объекты по их типу, предоставляя возможность редактировать свойства для каждого объекта. Если выбран один объект, отображается диалоговое окно со всеми доступными свойствами, характеризующими этот объект (слой, цвет, толщина линии, тип линии, высота текста и т. п.). При выборе нескольких объектов отображается окно с параметрами, которые характеризуют общие свойства этих объектов. Если не выбран ни один объект, диалоговое окно отображает общие характеристики чертежа.

Предусмотрены следующие способы изменения значений параметров:

- ввести новое значение параметра с помощью клавиатуры;
- явно указать новые координаты точки на экране монитора;
- выбрать новое значение параметра из раскрывающегося списка;
- выбрать новое значение параметра в диалоговом окне.

Диалоговое окно загружается командой ***PROPERTIES*** (Окно свойств), содержит две вкладки: раскрывающийся список выбранных объектов и три кнопки.

- Раскрывающийся список, расположенный в верхней части окна, содержит перечень выбранных объектов.
- Кнопка ***Toggle value of PICKADD Sysvar*** разрешает (на кнопке символ +) или запрещает (на кнопке символ 1) добавлять объекты в набор для редактирования.
- Кнопка ***Select Obje***ct позволяет явно указать объекты, свойства которых необходимо редактировать.
- Кнопка ***Quick Select*** открывает диалоговое окно с тем же именем, с помощью которого можно быстро выбрать объекты для редактирования.

При редактировании свойств объектов происходит их динамическое обновление.

21. ПАНЕЛЬ ИНСТРУМЕНТОВ *Dimension* *(Измерение)*

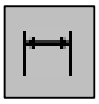
В ***AutoCAD*** используются размеры, которые можно разделить на три основные группы – линейные, радиальные и угловые. Линейные размеры делятся на горизонтальные, вертикальные, параллельные, повернутые, координатные, базовые и размерные цепи. Изображение размера: все линии, стрелки, дуги и элементы текста, составляющие размер, будут рас-

сматриваться как один размерный примитив. Команды простановки размеров находятся в падающем меню ***Dimension*** (Размеры) или на одноименной панели инструментов (рис. 151).

Рис. 151.

21.1. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗМЕРЫ

AutoCAD позволяет проставлять линейные размеры, отличающиеся углом, под которым проводится размерная линия.



– Команда ***Dimliner*** (Размер линейный) – позволяет создавать горизонтальный, вертикальный или повернутый размеры. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Linear*** (Линейный) или щелчком мыши по пиктограмме ***Linear Dimension*** (Линейный размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры). Используется для определения размеров отрезков прямых линий и прямолинейных сегментов полилиний или блоков; команду можно применить для нанесения линейного размера окружности или дуги.

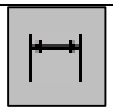
Для выбора точек начала выносных линий рекомендуется пользоваться режимами объектной привязки.

Опции команды ***Dimliner*** (Размер линейный):

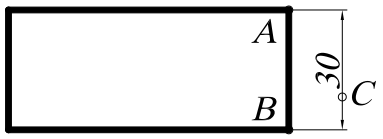
- ***Mtext*** (Многострочный текст) – позволяет редактировать размерный текст с помощью редактора многострочного текста. Можно полностью изменить текст или сохранить измеренное значение с помощью угловых скобок < > и добавить, если необходимо, текст до и после скобок. Для определения диаметра окружности к размерному числу присоединяется символьная последовательность %%c, а для простановки угла в градусах - %%d.
- ***Text*** (Текст) – позволяет редактировать размерный текст с помощью редактора однострочного текста.
- ***Angle***(Угол) – позволяет задать угол поворота размерного текста.
- ***Horizontal*** (Горизонтальный) – задает горизонтальную ориентацию размера, отмеряет расстояние между двумя точками по оси ***x***.
- ***Vertical*** (Вертикальный) – задает вертикальную ориентацию размера, отмеряет расстояние между двумя точками по оси ***y***.
- ***Rotated*** (Повернутый) – осуществляет поворот размерной и выносных линий, отмеряет расстояние между двумя точками вдоль заданного направления в текущей ПСК (пользовательской системы координат).

Выполнить упражнения № 78 - 80.

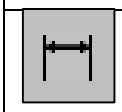
Проставить вертикальный размер	*№ 78*



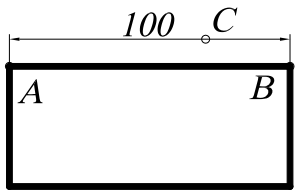
Dimliner Падающее меню ***Dimension → Liner***
Specify first extension line origin or <select object>: указать точку A
Specify second extension line origin: указать точку B
Specify dimension line location or
[Mtext/Text/Angle/Horizontal/Vertical/Rotated]: указать точку C
Dimension text = 30



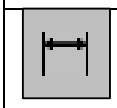
Проставить горизонтальный размер с изменением размерного текста	*№ 79*



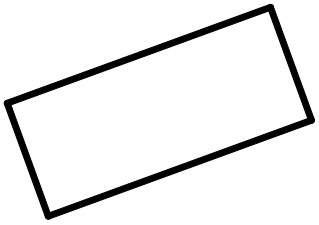
Dimliner Падающее меню ***Dimension → Liner***
Specify first extension line origin or <select object>: указать точку A
Specify second extension line origin: указать точку B
Specify dimension line location or
[Mtext/Text/Angle/Horizontal/Vertical/Rotated]: T режим однострочного текста
Enter dimension text <70>: 100 ввести новый размерный текст
Specify dimension line location or
[Mtext/Text/Angle/Horizontal/Vertical/Rotated]: указать точку C
Dimension text = 70

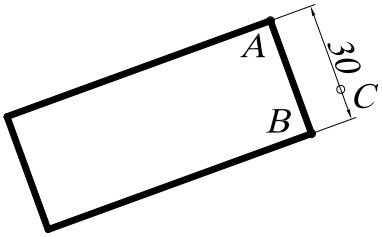


Проставить повернутый размер	*№ 80*



Dimliner Падающее меню ***Dimension → Liner***
Specify first extension line origin or <select object>: указать точку A
Specify second extension line origin: указать точку B
Specify dimension line location or
[Mtext/Text/Angle/Horizontal/Vertical/Rotated]: R режим повернутого размера
Specify angle of dimension line <0>: 20 угол поворота
Specify dimension line location or
[Mtext/Text/Angle/Horizontal/Vertical/Rotated]: указать точку C
Dimension text = 30



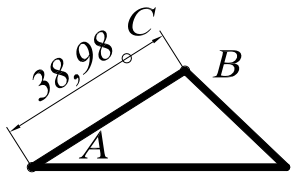


21.2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ

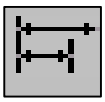
– Команда ***Dimaligned*** (Размер параллельный) – позволяет вычерчивать линейный размер, размерная линия которого параллельна отрезку, проведенному через начальные точки выносных линий. Создается подобно горизонтальным, вертикальным и повернутым размерам. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Aligned*** (Параллельный) или щелчком мыши по пиктограмме ***Aligned Dimension*** (Параллельный размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

При автоматическом размещении выносных линий для окружности началом первой выносной линии будет точка, указанная при выборе окружности. После задания объекта пользователю предоставляется возможность выбора опций команды ***Mtext***, ***Text***, ***Angle***, позволяющих редактировать размерный текст.

Выполнить упражнение № 81.

Проставить параллельный размер	***№ 81***
Dimaligned Падающее меню ***Dimension → Aligned*** Specify first extension line origin or <select object>: указать точку A Specify second extension line origin: указать точку B Specify dimension line location or [Mtext/Text/Angle]: указать точку C Dimension text = 38.98	
	

21.3. БАЗОВЫЕ РАЗМЕРЫ



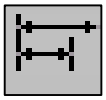
– Команда ***Dimbasline*** (Размер базовый) позволяет вычерчивать несколько размерных линий от одной выносной линии, которая принимается за базовую. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Basline*** (Базовый) или щелчком мыши по пиктограмме ***Basline Dimension*** (Базовый размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

Замечания:

1. Команда ***Dimbasline*** (Размер базовый) может применяться только после выполнения хотя бы одной из команд ***Dimliner*** (Размер линейный), ***Dimordinate*** (Размер координатный) или ***Dimangular*** (Размер угловой).
2. Базовой выносной линией является первая выносная линия предшествующей команды ***Dimbasline*** (Размер базовый).
3. Каждая новая размерная линия автоматически смещается относительно предыдущей на величину, задаваемую системной переменной DIMDLI (в командной строке с клавиатуры вводят DIMDLI и новую величину этой переменной: Enter new value for DIMDLI <6.0000>: 10). Длина базовой выносной линии при этом также увеличивается.

Выполнить упражнение № 82. Перед построением базового размера должен быть нанесен хотя бы один линейный, координатный или угловой размер.

Проставить базовые размеры	*№ 82*



Dimbaseline Падающее меню ***Dimension → Baseline***

Select base dimension: указать точку A

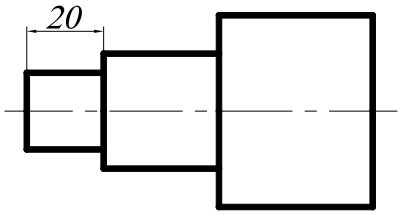
Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: указать точку B

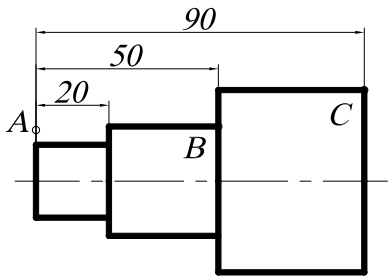
Dimension text = 50

Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: указать точку C

Dimension text = 90

Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: Enter



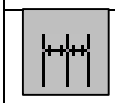


21.4. РАЗМЕРНАЯ ЦЕПЬ

– Команда ***Dimcontinue*** (Размерная цепь) позволяет вычерчивать цепочки размеров, используя вторую выносную линию предыдущего размера как первую выносную линию текущего размера. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Continue*** (Цепь) или щелчком мыши по пиктограмме ***Continue Dimension*** (Размерная цепь) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

Выполнить упражнение № 83. Перед построением размерной цепи должен быть нанесен хотя бы один линейный, координатный или угловой размер.

Проставить размерную цепь	*№ 83*



Dimcontinue Падающее меню ***Dimension → Continue***

Select continued dimension: указать точку A

Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: указать точку B

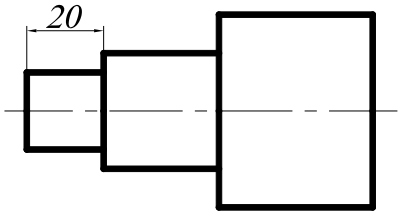
Dimension text = 30

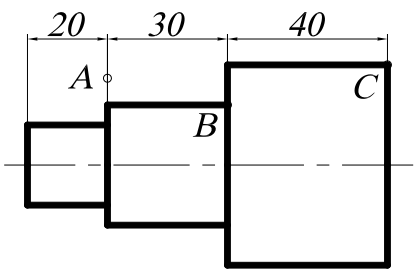
Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: указать точку C

Dimension text = 40

Specify a second extension line origin or [Undo/Select] <Select>: Enter

Select continued dimension: Enter



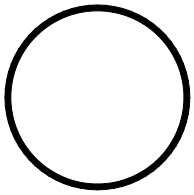
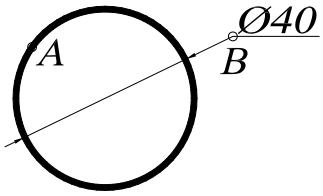


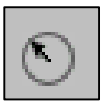
21.5. РАДИАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ

– Команда ***Dimdiameter*** (Размер диаметра) позволяет вычерчивать размерные линии для обозначения размера диаметров дуг или окружностей. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Diameter*** (Диаметр) или щелчком мыши по пиктограмме ***Diameter*** (Диаметр) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

При выполнении этой команды выносные линии не проводятся. Если размерный текст не изменялся, то по умолчанию размерному числу предшествует знак диаметра окружности. Нельзя изменить направление отрезка, который продолжает размерную линию диаметра за пределами окружности.

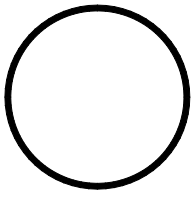
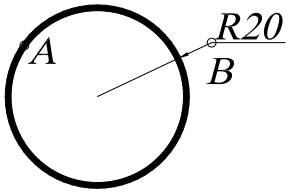
Выполнить упражнение № 84.

Проставить размер диаметра	***№ 84***
Dimdiameter Падающее меню ***Dimension → Diameter*** Select arc or circle: указать точку A Dimension text = 40 Specify dimension line location or [Mtext/Text/Angle]: указать точку B	
	



– Команда ***Dimradius*** (Размер радиуса) позволяет вычерчивать размерные линии для обозначения размера радиуса дуг или окружностей. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Radius*** (Радиус) или щелчком мыши по пиктограмме ***Radius*** (Радиус) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры). При простановке радиуса текст по умолчанию начинается с символа ***R***.

Выполнить упражнение № 85.

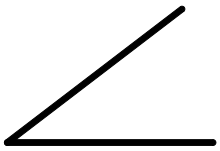
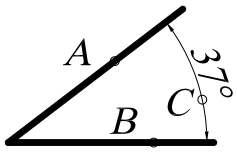
Проставить размер радиуса	***№ 85***
Dimradius Падающее меню ***Dimension → Radius*** Select arc or circle: указать точку A Dimension text = 20 Specify dimension line location or [Mtext/Text/Angle]: указать точку B	
	

21.6. УГЛОВЫЕ РАЗМЕРЫ

– Команда ***Dimangular*** (Размер угловой) позволяет вычерчивать размерную линию (дугу окружности) для обозначения угла между двумя непараллельными линиями, набором из трёх точек, дуги или окружности. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Angular*** (Угловой) или щелчком мыши по пиктограмме ***Angular Dimension*** (Угловой размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

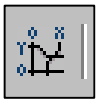
Если на первый запрос команды нажать клавишу ***Enter***, то угловой размер строится по трем точкам. При простановке углового размера текст по умолчанию завершается знаком «°».

Выполнить упражнение № 86.

Проставить угловой размер	***№ 86***
Dimangular Падающее меню ***Dimension*** → ***Angular*** Select arc, circle, line, or <specify vertex>: указать точку A Select second line: указать точку B Specify dimension arc line location or [Mtext/Text/Angle]: указать точку C Dimension text = 37	
	

Опции команды позволяют изменять размерный текст и угол наклона размерного текста. Если угол образован двумя непараллельными прямыми, размерная дуга стягивает угол между ними. Если размерная линия указана вне пределов линий, угол между которыми обозначается, то автоматически вычерчиваются выносные линии.

21.7. КООРДИНАТНЫЕ РАЗМЕРЫ



– Команда ***Dimordinate*** (Размер координатный) позволяет вычерчивать размер, показывающий расстояние от начала координат до объекта вдоль оси ***x*** или ***y***. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Ordinate*** (Координатный) или щелчком мыши по пиктограмме ***Ordinate Dimension*** (Координатный размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

Координатный размер состоит из значения координаты ***x*** или ***y*** и выноски. Координатный размер по ***x*** – это расстояние от начала координат до объекта вдоль оси ***x***, а координатный размер по ***y*** – это расстояние вдоль оси ***y***. Если указана точка, ***AutoCAD*** автоматически определяет, по какой оси проставлять координатный размер. Текст координатного размера располагается вдоль выноски, независимо от ориентации текста, заданной текущим размерным стилем. Опции команды позволяют изменять размерный текст и угол наклона размерного текста.

21.8. ВЫНОСКИ И ПОЯСНИТЕЛЬНЫЕ НАДПИСИ НА ЧЕРТЕЖЕ

– Команда ***QLeader*** (Быстрая Выноска) обеспечивает вычерчивание линии-выноски и вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Leader*** (Выноска) или щелчком мыши по пиктограмме ***Quick Leader*** (Быстрая выноска) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

Если на первый запрос команды нажать клавишу ***Enter***, то система открывает диалоговое окно ***Leader Settings*** для настройки параметров линии-выноски (рис. 152). Это диалоговое окно содержит три вкладки. Вкладка ***Annotation*** позволяет управлять содержанием аннотации, добавляемой к линии выноски: это может быть многострочный текст, допуск формы и расположения поверхностей, блок или ничего.

Вкладка ***Leader & Arrow*** позволяет управлять внешним видом линии выноски и формой стрелки указателя линии выноски. Кнопка выбора ***Straight*** устанавливает линию выноски в виде ломаной линии с прямолинейными сегментами, а кнопка ***Spline*** – в виде гладкой кривой (сплайна).

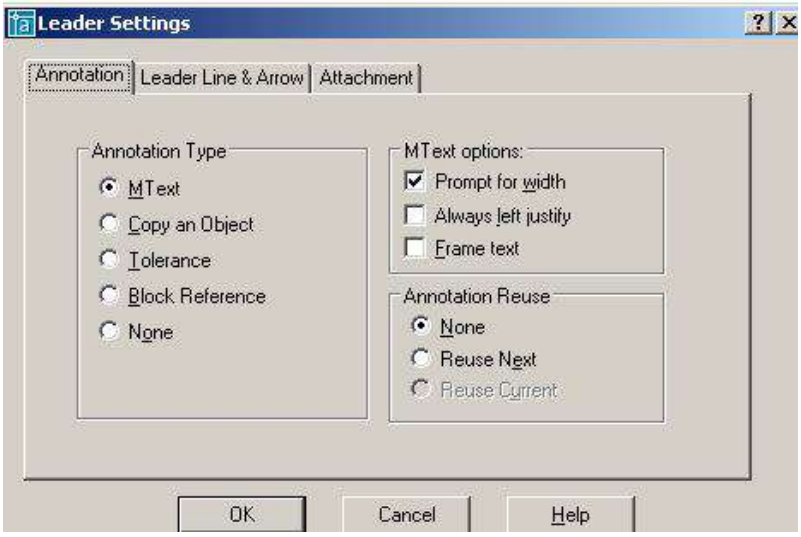
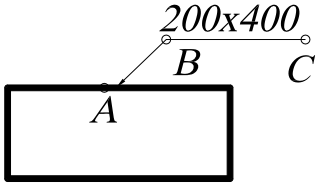


Рис.152.

Вкладка ***Attachment*** позволяет управлять положением полки линии выноски относительно поясняющей надписи. По умолчанию предлагается компоновка, когда полка линии выноски располагается в середине нижней строки многострочного текста. Предлагаемые способы выравнивания многострочного текста:

- ***Top of Top Line*** – по верху верхней строки;
- ***Middle of Top Line*** – по середине верхней строки;
- ***Middle of Multilane Text*** – по середине текста;
- ***Middle of Bottom Line*** – по середине нижней строки;
- ***Bottom of Bottom Line*** – по низу нижней строки;
- Флажок ***Underline Bottom Line*** отменяет все способы расположения надписи и разрешает ее подчеркивание полкой линии выноски.

Выполнить упражнение № 87.

Проставить размеры детали прямоугольного сечения на полке линии-выноски	***№ 87***
Qleader Падающее меню ***Dimension → Leader*** Specify first leader point, or [Settings] <Settings>: указать точку A Specify next point: указать точку B Specify next point: указать точку C Specify text width <6>: Enter Enter first line of annotation text <Mtext>: 200x400 Enter next line of annotation text: Enter	
	

21.9. БЫСТРОЕ НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ

– Команда ***QDim*** (Быстрый Размер) используется для одновременного быстрого нанесения группы размеров и вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Разме-

ры) → ***Quick Dimension*** (Быстрый размер) или щелчком мыши по пиктограмме ***Quick Dimension*** (Быстрый размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

Команда ***QDim*** (БРазмер) запрашивает лишь контуры, на которые необходимо проставить размеры с указанием опции типа проставляемых размеров:

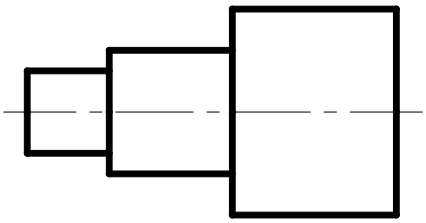
- ***Continuous*** (***C***) – используется, если необходимо для выбранных объектов нанести группу размеров в виде размерной цепочки;
- ***Staggered*** (***S***) – используется, если необходимо для выбранных объектов нанести группу параллельных или концентрических размеров;
- ***Baseline*** (***B***) - используется, если необходимо для выбранных объектов нанести группу размеров от одной базы;
- ***Ordinate*** (***O***) - используется, если необходимо для выбранных объектов нанести группу координатных размеров;
- ***Radius*** (***R***) - используется, если необходимо для выбранных объектов (дуг или окружностей) нанести размер радиуса;
- ***Diameter*** (***D***) – используется, если необходимо для выбранных объектов (дуг или окружностей) нанести размер диаметра;
- ***DatumPoint*** (***P***) – используется, если необходимо изменить базовую точку при нанесении группы базовых или координатных размеров;
- ***Edit*** (***E***) – используется, если необходимо редактировать набор характерных точек в выбранной группе объектов; разрешено удалять (***remove***) или добавлять (***Add***) точки в набор.

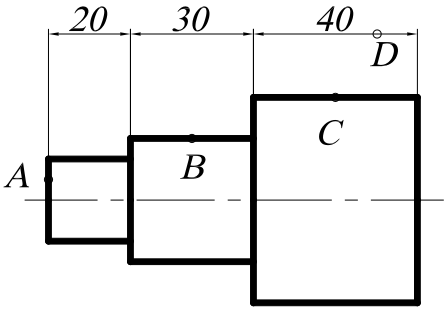
Выполнить упражнение № 88.

Быстрое нанесение размеров	***№ 88***

Qdim Падающее меню ***Dimension → Quick Dimension***

Associative dimension priority = Endpoint
Select geometry to dimension: указать точку A
Select geometry to dimension: указать точку B
Select geometry to dimension: указать точку C
Select geometry to dimension: Enter
Specify dimension line position, or
[Continuous/Staggered/Baseline/Ordinate/Radius/Diameter/datumPoint/Edit/seTtings
] <Continuous>: указать точку D





21.10. НАНЕСЕНИЕ МЕТОК ЦЕНТРА ОКРУЖНОСТИ ИЛИ ДУГИ

– Команда ***Dimcenter*** (Центральная метка) используется для нанесения меток центра выбранной дуги или окружности и вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Dimension center*** (Центральная метка) или щелчком мыши по пиктограмме ***Dimension center*** (Центральная метка) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

В ответ на запрос команды указать графическим курсором объект, для которого необходимо нанести метку.

21.11. РЕДАКТИРОВАНИЕ РАЗМЕРНЫХ СТИЛЕЙ

– Команда ***Dimstyle*** (Размерный стиль) обеспечивает работу с размерными стилями с помощью диалогового окна ***Dimension Style Manager*** (Диспетчер разменных стилей), представленного на рис. 153. Вызывается из падающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Style…*** (Стиль…) или щелчком мыши по пиктограмме ***Dimension Style*** (Размерный стиль) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры).

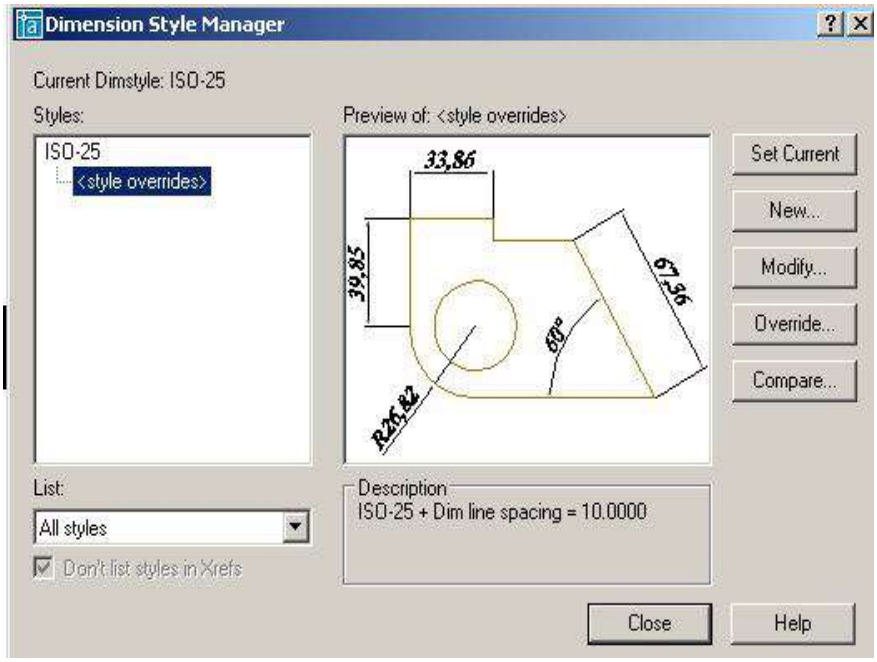


Рис. 153.

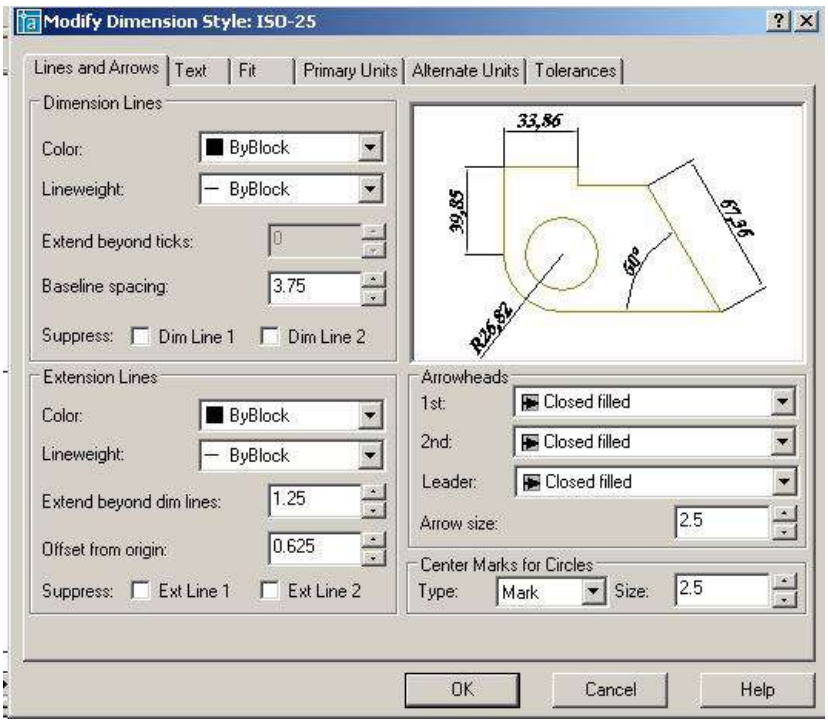


Рис. 154.

Изменение размерного блока происходит при редактировании (модифицировании) текущего размерного стиля или при замене текущего размерного стиля на новый размерный стиль.

Чтобы модифицировать текущий размерный стиль, необходимо:

- открыть диалоговое окно ***Dimension Style Manager*** (Диспетчер разменных стилей);
- щелкнуть в открывшемся диалоговом окне на кнопке ***Modify*** (Редактировать);
- заменить значения размерных переменных на новые, используя соответствующие вкладки диалогового окна ***Modify Dimension Style*** (Редактирование размерного стиля), представленного на рис. 154;
- щелкнуть на кнопке ОК;
- закрыть диалоговое окно ***Dimension Style Manager***.

После закрытия диалогового окна ***AutoCAD*** автоматически обновит на чертеже размерные блоки, использующие текущий стиль, в соответствии с новыми значениями размерных переменных.

Диалоговое окно ***Modify Dimension Style*** (Редактирование размерного стиля) содержит следующие вкладки.

1. ***Lines and Arrows*** (Линии и стрелки) – настройка параметров размерных, выносных, осевых линий и стрелок, содержит четыре поля настроек:

- Настройка размерных линий ***Dimension Lines*** – ***Color*** (цвет линий), ***Lineweight*** (толщина линий), ***Extend beyond ticks*** (величина выступа размерной линии за выносные линии (в случае, когда вместо стрелок используются засечки), ***Base spacing*** (расстояние между размерными линиями при простановке размеров от одной базы), ***Suppress*** (подавление первой (***Dim Line 1***) или второй (***Dim Line 1***) частей размерной линии.
- Настройка выносных линий ***Extension Lines*** – ***Color*** (цвет линий), ***Lineweight*** (толщина линий), ***Extend beyond dim lines*** (величина выступа выносных линий за размерную линию), ***Offset from origin*** (отступ начала выносной линии от объекта), ***Suppress*** (подавление первой (***Ext Line 1***) или второй (***Ext Line 1***) выносной линии.
- Настройка размерных стрелок ***Arrowheads*** – ***1 st*** (вид первой стрелки), ***2 nd*** (вид второй стрелки), ***Leader*** (вид стрелки для линии-выноски), ***Arrowsize*** (размер стрелки).
- Настройка маркеров для центра окружности или дуги ***Center Marcs for Circles*** – ***Type*** (тип маркера), ***Size*** (размер).

2. ***Text*** (Текст) – настройка размещения и формата размерных надписей содержит три поля настроек:

- Настройка внешнего вида текста ***Text Appearance*** – ***Text style*** (стиль текста), ***Text color*** (цвет текста), ***Text height*** (высота текста), ***Fraction height scale*** (определение масштаба чисел дробной части относительно размера основного текста при отображении простых дробей***), Draw frame around text*** (отрисовка рамки вокруг размерного текста).
- Расположение размерного текста относительно размерной линии ***Text Placement*** – ***Vertical*** (расположение текста при вертикальной ориентации размерной линии: ***Centered*** – центрирует текст относительно размерной линии, разрывая его; ***Above*** – размещает текст над размерной линией; ***Outside*** – размещает текст под размерной линией; ***JIS*** – располагает текст в соответствии с Японским индустриальным стандартом). ***Horizontal*** (расположение текста при горизонтальной ориентации размерной линии: ***Centered*** – центрирует текст относительно размерной линии; ***1nd Extention Line*** – размещает текст около первой выносной линии; ***2nd Extention Line*** – размещает текст около второй выносной линии; ***Over 1st Extention Line*** – размещает текст над первой выносной линией; ***Over 2nd Extention Line*** – размещает текст над второй выносной линией). ***Offset from dim line*** – расстояние между текстом и размерной линией.
- Ориентация текста ***Text Alingment*** – ***Horizontal*** (располагается вертикально), ***Alingment with dimension line*** (текст располагается параллельно размерной линии), ***ISO Standart*** (текст располагается параллельно размерной линии, когда он находится между выносными линиями, и горизонтально, когда он находится вне выносных линий).

3. Fit (Выравнивание) – настройка характера размещения стрелок и размерных надписей в стесненных местах чертежа. При нанесении размеров достаточно часто встречаются ситуации, когда не удается разместить размерный текст на обычном месте, поэтому в стиле должно быть определено поведение системы в подобных ситуациях.

- Расположение текста и стрелок при недостатке места для размещения их внутри выносных линий ***Fit Option*** (Вписывать) – ***Either the text or the arrows, whichever fits best*** (автоматически определяется, что лучше разместить внутри выносных линий – текст или стрелки), ***Arrows*** (внутри располагаются стрелки), ***Text*** (внутри располагается текст), ***Both text and arrows*** (внутри располагаются как текст, так и стрелки), ***Always keep text between ext lines*** (всегда размещает текст между выносными линиями), ***Sup-***

press arrows if they don't fit inside the extension lines (подавляет стрелки, если они не вписываются внутрь выносных линий).

- Расположение текста, когда он не может разместиться в месте, предусмотренном по умолчанию ***Text Placement*** (Размещение текста) – ***Beside the dimension line*** (около выносной линии), ***Over the dimension line, with a leader*** (на выноске, выше размерной линии), ***Over the dimension line, without a leader*** (выше размерной линии, без выноски).
- Масштаб для размерных элементов (***Scale for Dimension Features***) – ***Use overall scale off*** (использовать общий масштабный коэффициент для всех размерных элементов), ***Scale dimensions to layout (paperspace)*** (в пространстве листа масштабировать элементы в соответствии с масштабом чертежа в текущем видовом экране.
- Дополнительная настройка ***Fine Tuning*** – ***Place text manually when dimensioning*** (при простановке размеров местоположение текста определяется вручную), ***Always draw dim line between ext lines*** (всегда чертить размерную линию между выносными линиями, даже когда стрелки располагаются снаружи от выносных линий).

4. Вкладка ***Primary Units*** (Основные единицы) – настройка формата основных единиц для размеров, соответствующих линейным и угловым величинам.

- Линейные размеры (***Linear Dimensions***) – ***Unit format*** (единицы измерения), ***Precision*** (точность размерного стиля), ***Fraction format*** (формат дробной части при использовании дробей), ***Decimal separator*** (формат разделителя целой и десятичной части числа), ***Round off*** (округление размерных чисел (1 – округление до целых), ***Prefix*** (префикс, который будет отображаться перед размерным текстом), ***Suffix*** (суффикс, который будет отображаться после размерного текста).
- Масштабы (***Measurement Scale***) – ***Scale factor*** (масштаб значения размерного числа), ***Apply to layout dimensions only*** (масштаб учитывать только в пространстве листа).
- Подавление нуля (***Zero Suppression***) – ***Leading*** (подавление нуля перед запятой), ***Trailing*** (подавление последних нулей в десятичной части).

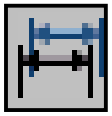
Настройка единиц угловых размеров ***Angular Dimensions*** (в правой части диалогового окна) производится аналогично.

5. Вкладка ***Alternate Units*** (Альтернативные единицы) – параметры настройки в этой вкладке используются в том случае, если будет включен режим простановки размеров альтернативных единиц, то есть если используют метрическую систему и британскую на одном чертеже.

6. Вкладка ***Tolerances*** (Допуски) – настройка параметров формата представления допусков на чертеже.

Для замены текущего размерного стиля на новый размерный стиль необходимо:

- открыть диалоговое окно ***Dimension Style Manager***;
- выбрать нужный стиль в списке ***Styles***;
- сделать новый стиль текущим, щелкнув на кнопке ***Set Current***;
- закрыть диалоговое окно ***Dimension Style Manager***.



После закрытия диалогового окна все существующие на чертеже размерные блоки не изменятся, а новые будут вычерчиваться в соответствии с новым размерным стилем. Если необходимо заменить стиль существующих размерных блоков на установленный размерный стиль, следует воспользоваться командой выпадающего меню ***Dimension*** (Размеры) → ***Update*** (Обновить) или щелчком мыши по пиктограмме ***Dimension Update*** (Обновить размер) панели инструментов ***Dimension*** (Размеры). Затем ввести в командную строку ***all*** и нажать клавишу ***Enter*** или воспользоваться секущей рамкой выбора и с её помощью выбрать все объекты размеров на чертеже. Когда все объекты размеров на экране выделены, нажать клавишу ***Enter***. Тем самым выполнение команды завершится.

22. ЗУМИРОВАНИЕ

В ***AutoCAD*** изменение масштаба выполняется всевозможными модификациями команды ***ZOOM*** (Покажи) из панели инструментов ***Zoom*** (рис. 155).

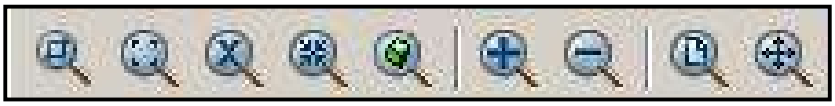


Рис. 155.

Выполнение этой команды производит тот же эффект, что и настройка объектива с переменным фокусным расстоянием, который используется в теле- и кинокамерах. При зуммировании размеры рисунка остаются прежними, изменяется лишь размер его части, видимой в графической области. Команды ***Zoom*** могут вызываться из падающего меню ***View*** (Вид) → ***ZOOM*** (Покажи) стандартной панели инструментов. Ниже приводится описание каждой команды.

– ***Zoom Realtime*** (Зумирование в реальном времени) – увеличение или уменьшение видимого размера объекта на текущем видовом экране;

– ***Zoom Previous*** (Показать Предыдущий) – возврат к показу предыдущего вида;

– ***Zoom Window*** (Показать Рамка –указание области отображения с использованием рамки. Для этого следует задать два противоположных угла прямоугольной рамки.;

– ***Zoom Dinamic*** – динамическое задание области отображения. Отображает видимую часть чертежа в рамке, представляющего текущий вид. При нажатии клавиши ***Enter*** изображение, заключенное в видовом экране, выводится на видовой экран.

– ***Zoom Scale*** (Показать масштаб) – задание масштабного коэффициента. Используется, если изображение требуется уменьшить или увеличить на точно заданную величину. При этом необходимо задать коэффициент экранного увеличения.

– ***Zoom Center*** (Показать центр) – задание области изображения путем ввода точки центра и высоты в единицах рисунка;

– ***Zoom Object*** (Показать объект) – задание области отображения путем выбора объекта или группы объектов;

– ***Zoom In*** (Увеличить) – увеличение изображения;

– ***Zoom Out*** (Уменьшить) – уменьшение изображения;

– ***Zoom All*** (Показать все) – отображение всей области чертежа или области внутри границ, если заданы границы. Позволяет увидеть на экране весь чертёж;

– ***Zoom Extents*** (Показать границы) – отображение области, которая содержит все примитивы чертежа.

23. ПАНОРАМИРОВАНИЕ

– ***Pan Realtime*** (Панорамирование в реальном времени) – перемещение изображения на текущем видовом экране в режиме реального времени. При перемещении курсора по видовому экрану происходит динамическое перемещение изображения. Для активизации команды можно щелкнуть мышью по кнопке ***Pan Realtime*** (Панорамирование в реальном времени) стандартной панели инструментов либо выбрать команду из падающего меню ***View*** (Вид) → ***Pan*** (Панорамировать) → ***Real Time*** (В реальном времени).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Создать шаблон чертежа формата А4 и А3 с основной надписью (рис. 156).

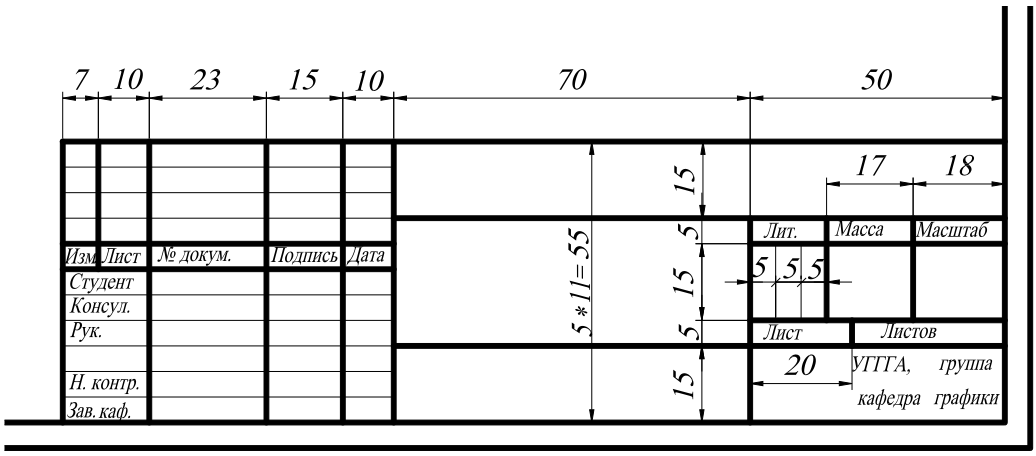


Рис. 156.

2. Выполнить чертёж детали (прил. 1) на формате А3 в масштабе 1:1.

3. По двум заданным изображениям детали (прил. 2) построить проекционный чертеж в трех проекциях. Формат А3, масштаб 1:1. Применить необходимые разрезы и сечения (в соответствии с ГОСТ 2.305 – 68). Нанести размеры. Заполнить основную надпись.

4. По двум заданным изображениям детали (прил. 3) построить проекционный чертеж в трех проекциях. Формат А3, масштаб 1:1. Применить необходимые разрезы и сечения (в соответствии с ГОСТ 2.305 – 68). Нанести размеры. Заполнить основную надпись.

5. По двум заданным изображениям детали (прил. 4) построить проекционный чертеж в трех проекциях. Формат А3, масштаб 1:1. Применить необходимые разрезы и сечения (в соответствии с ГОСТ 2.305 – 68). Нанести размеры. Заполнить основную надпись.

Глава 3
ТРЁХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Система ***AutoCAD*** включает в себя достаточно широкий спектр средств трёхмерного моделирования. Они позволяют работать как с простейшими примитивами, так и со сложными поверхностями и твердыми телами. Основные типы пространственных моделей, используемых в ***AutoCAD***, можно условно разделить на три группы:

- каркасные;
- модели поверхностей;
- твердотельные.

Каркасная модель – это совокупность отрезков и кривых, определяющих ребра фигуры. В каркасном моделировании используются трехмерные отрезки, сплайны и полилинии, которые позволяют в общих чертах определить конфигурацию изделия – построить его каркас. Построение каркасных моделей в ***AutoCAD*** рассматривается как этап вспомогательных построений для трёхмерного проектирования более высокого уровня.

Поверхностная модель – это совокупность поверхностей, ограничивающих и определяющих трехмерный объект в пространстве. Моделирование поверхностей применяется для детальной отработки внешнего облика изделия. Создаваемые при этом объекты характеризуются лишь конфигурацией своей поверхности и поэтому не пригодны для решения таких задач, как определение инерционно-массовых характеристик изделия или получение изображений для оформления чертежей. Область применения данного вида моделирования – дизайн, решение задач компоновки сложных изделий и др. В данном случае можно создавать линейчатые поверхности, поверхности Кунса, поверхности Безье.

Твердотельное моделирование является основным видом трехмерного проектирования изделий машиностроения. Создаваемые твердотельные модели воспринимаются системой как некие единые объекты, имеющие определенный объем. Твердотельное моделирование позволяет решать не только компоновочные задачи, но и определять инерционно-массовые характеристики, а также получать с пространственного объекта необходимые виды, разрезы и сечения для оформления рабочей документации.

В данном пособии рассматривается построение каркасных моделей и твердотельных. Кроме создания вышеперечисленных трехмерных моделей рассматриваются средства их редактирования, средства просмотра объемного изображения и визуализации.

2. ЗАДАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ КООРДИНАТ

Задание координат точек при работе в трехмерном пространстве может производиться с помощью клавиатуры или с помощью графического курсора. При этом необходимо дополнительно указывать координату, определяющую положение точки вдоль оси ***Z***. Точка может быть задана:

- *абсолютными координатами (прямоугольные, цилиндрические, сферические);*
- *относительными координатами (прямоугольные, цилиндрические, сферические)*.

Цилиндрические и сферические координаты подобны полярным координатам в двумерном пространстве.

1. Ввод значений *абсолютных координат* в системе ***AutoCAD*** может осуществляться в следующих форматах:

- *Прямоугольные (декартовы) координаты*: **…point: x, y, z**.

В случае использования такого формата необходимо на запрос системы о местоположении точки ввести с клавиатуры численное значение координаты ***x***, затем через запятую – значение координат ***y*** и ***z***, а также направление (+ или -).

- *Цилиндрические координаты:* **…point: ρ < φ, z**.
  Эти координаты измеряются от точки начала текущей системы координат. При использовании данных координат на запрос о местоположении точки следует ввести длину вектора (расстояние от начала координат до точки), специальный символ < (знак «меньше»), угол поворота в плоскости ***XY***, а затем через запятую – координату точки по оси ***Z***. За положительное направление отсчета угла поворота вектора в плоскости ***XY*** принято вращение против часовой стрелки от положительного направления оси ***X***.
- *Сферические координаты:* **…point: ρ < φ < ψ**.
  Эти координаты измеряются от точки начала текущей системы координат. При использовании данных координат на запрос о местоположении точки следует ввести длину вектора (расстояние от начала координат до точки), а далее через специальные символы < (знак «меньше»), угол поворота в плоскости ***XY***, а затем угол наклона вектора относительно плоскости ***XY***.

2. Относительные координаты не ссылаются на точку начала системы отсчёта. *Относительные координаты* – это смещение по осям ***X***, ***Y*** и **Z** от предыдущей введённой точки.

- *Прямоугольные координаты*: **…point: @Δx,Δy**.

Для ввода относительных прямоугольных координат точек необходимо сначала ввести специальный символ **@**, который вводится нажатием комбинации клавиш ***SHIFT+2***, а затем приращение по оси абсцисс ***x***, запятую, приращение по оси ординат ***y*** и приращение по оси ***z***.

- *Цилиндрические координаты*: **…point: @ρ<φ, Δ z**.
- *Сферические координаты*: **…point: @ρ < φ < ψ**.

Особенностью задания координат точек с помощью графического курсора при работе в трёхмерном пространстве является то, что по умолчанию все указываемые точки воспринимаются системой как лежащие в плоскости ***XY*** текущей системы координат. Поэтому при указании точек подобным образом следует использовать объектную привязку или соответствующим образом изменять систему координат.

Некоторые типы объектов, например окружности и плоские полилинии, могут создаваться только в плоскостях, параллельных плоскости ***XY*** текущей системы координат. При этом положение плоскости, в которой расположен такой объект, вдоль оси ***Z*** определяется положением первой указанной точки. Так, например, если при создании плоской полилинии в ответ на первый запрос была указана точка с координатой ***Z***, равной 20, то и все остальные точки полилинии будут иметь ту же координату вдоль оси ***Z*** независимо от способа ввода координат и использования режима объектной привязки.

3. ЗАДАНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При создании двумерных объектов пользователь, как правило, работает в одной плоскости проекций – ***XY***, и ему зачастую бывает достаточно использовать одну, устанавливаемую по умолчанию, пользовательскую систему координат. Построение трехмерных объектов требует работы и с другими плоскостями проекций. Если учесть, что курсор в ***AutoCAD*** может перемещаться только в плоскости ***XY*** и ей параллельной, то становится понятно, что создание трехмерных моделей при использовании только одной системы координат является трудоемким.

В ***AutoCAD*** существуют две основные системы координат – мировая система координат ***Word Coordinate System WCS*** (МСК) и пользовательская система координат ***User Coordinate System UCS*** (ПСК). Ось ***X*** мировой системы координат направлена горизонтально, ось ***Y*** – вертикально, а ось ***Z*** – проходит перпендикулярно плоскости ***XY***. Основное отличие миро-

вой системы координат ***WCS*** (МСК) от пользовательской системы координат ***UCS*** (ПСК) заключается в том, что мировая система координат может быть только одна, и она неподвижна. В ***AutoCAD*** можно определять и использовать неограниченное количество пользовательских систем координат ***UCS*** (ПСК).

Вызвать команду ***UCS*** (ПСК) или варианты её исполнения можно из командной строки или из падающего меню ***Tools*** (Сервис). Наиболее удобным представляется вызов команды ***UCS*** (ПСК) из стандартной или плавающей панели инструментов (рис. 157).

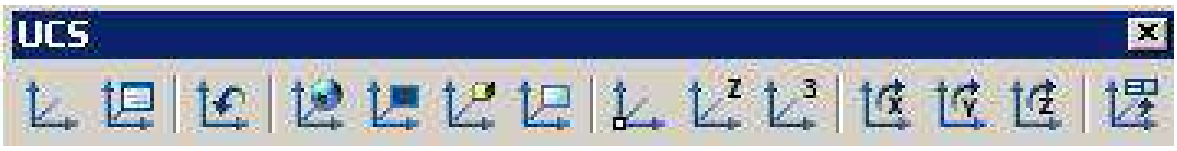


Рис. 157.

- Команда ***UCS*** (ПСК) – определение новой пользовательской системы координат. Вызов команды ***USK*** (ПСК);

- ***Display UCS Dialog*** (Диалоговое окно ПСК) – управление имеющимися пользовательскими системами координат из диалогового окна ***UCS*** (рис. 158).

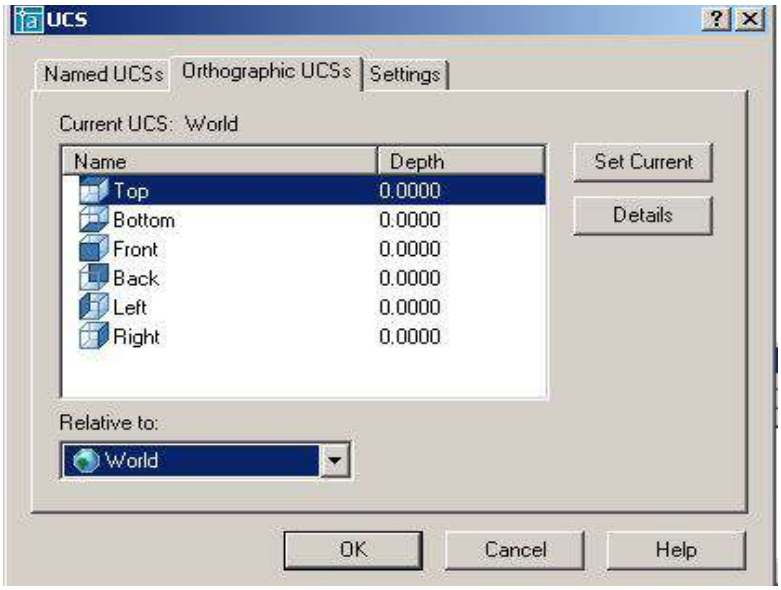


Рис. 158.

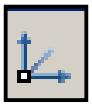
- ***UCS Previous*** (Предыдущая ПСК) – восстановление предыдущей ПСК. При этом сохраняется десять последних определенных ПСК.

- ***Word UCS*** (МСК) – переход в мировую систему координат;

- ***Object UCS*** (ПСК объект) – выравнивание системы координат по существующему объекту, то есть совмещение плоскости ***XY*** новой системы координат с плоскостью существующего двумерного объекта;

- ***Face UCS*** (ПСК на грани) – создание новой ПСК путем указания грани;

- ***View UCS*** (ПСК вид) – создание новой ПСК параллельно текущему виду поворотом вокруг начальной точки ПСК, иначе говоря, параллельно экрану;



- ***Origin UCS*** (ПСК Начало) – создание новой ПСК заданием нового начала координат;

- ***ZAxis Vector UCS*** (ПСК Zось) – создание новой ПСК заданием нового начала координат и точки, определяющей положительное направление оси ***Z***;

- ***3Point UCS*** (ПСК 3 точки) – создание новой ПСК по 3 точкам, последовательно определяющим новое начало координат и направление осей ***X*** и ***Y***;

- ***XAxis Rotate UCS*** (ПСК повернуть вокруг оси ***X***) – создание новой ПСК поворотом текущей ПСК вокруг оси ***X***;

- ***YAxis Rotate UCS*** (ПСК повернуть вокруг оси ***Y***) – создание новой ПСК поворотом текущей ПСК вокруг оси ***Y***;

- ***ZAxis Rotate UCS*** (ПСК повернуть вокруг оси ***Z***) – создание новой ПСК поворотом текущей ПСК вокруг оси ***Z***;

- ***Apply UCS*** (Применить ПСК) – применение текущей ПСК к выбранному видовому экрану.

При создании пользовательской системы координат направление её координатных осей удобно определять по правилу правой руки: большой палец показывает направление положительных значений по оси ***X***, указательный – по оси ***Y***, средний по оси ***Z*** (рис. 159). Для определения положительного направления угла поворота следует большой палец правой руки направить в положительном направлении координатной оси, вокруг которой осуществляется вращение. Тогда согнутые пальцы покажут положительное направление угла поворота системы координат (рис. 160).

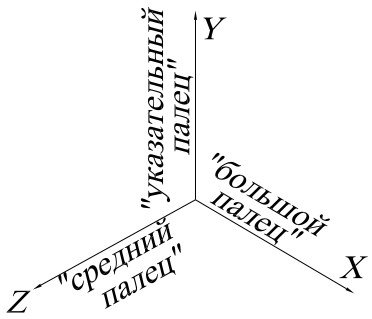


Рис. 159.

Изменение текущей ПСК не влияет на изображение чертежа на экране, если не включена системная переменная ***UCSFOLLOW***. Если ***UCSFOLLOW*** имеет значение 1, то при определении новой ПСК на экране изображается вид в плане новой ПСК.

Выполнить упражнения № 89, 90.

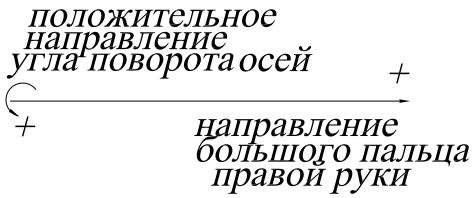
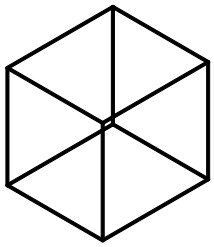
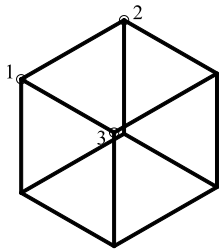
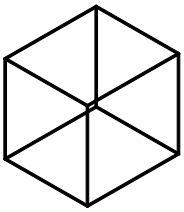
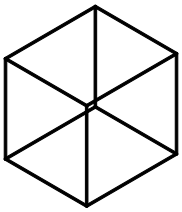


Рис. 160.

Задать пользовательскую систему координат тремя точками № 89
3Point UCS Падающее меню ***Tools → New UCS→ 3 Point*** Current ucs name: *WORLD* Enter an option [New/Move/□rthographic/Prev/Restore/Save/Del/Apply/?/World] <World>: _3 режим задания ПСК по трём точкам Specify new origin point <0,0,0>: указать центр ПСК – точку 1 Specify point on positive portion of X-axis <0,0>: указать точку 2 (направление оси 0X) Specify point on positive-Y portion of the UCS XY plane <0,0>: указать точку 3 (направление оси 0Y)
 

Задать пользовательскую систему координат тремя точками № 90
View UCS Падающее меню ***Tools → New UCS→ View*** Current ucs name: *WORLD* Enter an option [New/Move/□rthographic/Prev/Restore/Save/Del/Apply/?/World] <World>: _v режим, параллельный плоскости текущего вида (в этом режиме можно выполнять любые надписи, как и в двумерном моделировании).
 

4. ПРОСТРАНСТВО МОДЕЛИ И ПРОСТРАНСТВО ЛИСТА

На нижней полке рамки графической зоны находятся корешки вкладок ***Model*** (Модель) и ***Layout*** (Компоновка). Последних может быть несколько, причем каждой очередной присваивается возрастающий номер. На вкладке ***Model*** (Модель) выполняется вся творческая часть работы конструктора. На вкладках ***Layout*** (Компоновка) компонуется представление разработанной модели на виртуальном листе чертежа в виде плоского рисунка, причем одна модель может быть представлена несколькими компоновками на разных вкладках. Переключаясь со вкладки ***Model*** (Модель) на вкладку ***Layout*** (Компоновка), пользователь фактически переходит из трехмерного пространства модели в двухмерное пространство листа, на котором представлена эта модель.

После перехода на очередную вкладку ***Layout*** (Компоновка) можно приступать к компоновке чертеже из элементов модели, созданных в пространстве модели. Компоновка выполняется активизацией команд контекстного меню, которое активизируется щелчком правой кнопки мыши на корешке вкладки ***Layout*** (Компоновка).

Переключаться между пространствами модели и листа можно также с помощью кнопки ***MODEL/PAPER*** (МОДЕЛЬ/ЛИСТ) в строке состояния.

5. ВИДОВЫЕ ЭКРАНЫ

Видовой экран (***Viewport***) – это участок графического экрана, на котором отображается часть пространства модели чертежа. Существует два типа видовых экранов – неперекрывающиеся и перекрывающиеся. Неперекрывающиеся видовые экраны располагаются на экране монитора подобно кафельным плиткам на стене. Они полностью заполняют графическую зону и не могут накладываться друг на друга. На плоттер неперекрывающиеся видовые экраны могут выводиться только по одному. Перекрывающиеся видовые экраны могут располагаться на экране и перемещаться по нему произвольным образом. Эти экраны могут накладываться друг на друга и печататься одновременно.

5.1. СОЗДАНИЕ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ВИДОВЫХ ЭКРАНОВ

Графическую область в пространстве модели можно разбить на несколько неперекрывающихся видовых экранов. В процессе рисования все изменения, производимые на одном видовом экране, отражаются на остальных. Переключиться с одного видового экрана на другой можно в любой момент, даже в ходе выполнения команды. Границы активного видового экрана выделяются более толстой линией. Активизировать видовые экраны по очереди можно, нажав комбинацию клавиш <Ctrl+R> или щелкнув мышью на поле видового экрана.

Для создания видовых экранов используется команда ***VPORTS*** (ВЭКРАН), вызывающая диалоговое окно ***Viewports*** (Видовые экраны), показанное на рис. 161. С помощью этой команды графический экран разделяется на несколько неперекрывающихся видовых экранов, каждый из которых может содержать собственный вид чертежа.

- Команда ***VPORTS*** (ВЭКРАН) вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***Viewports*** (Видовые экраны) → ***New Viewports…***(Новые Видовые экраны…) или щелчком мыши по пиктограмме ***Display Viewports Dialog*** (Диалоговое окно видовых экранов) в стандартной или плавающей панели инструментов ***Viewports*** (Видовые экраны).

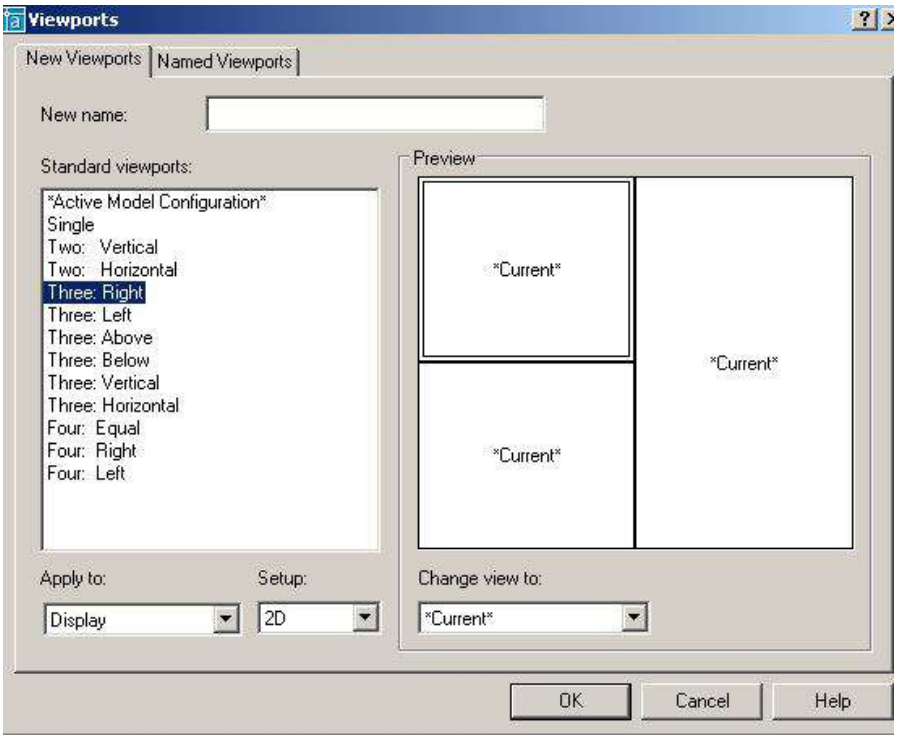
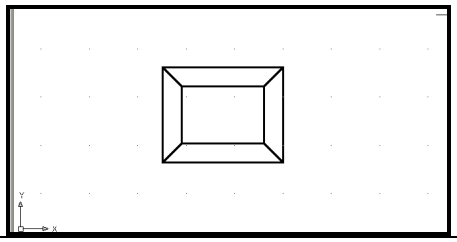
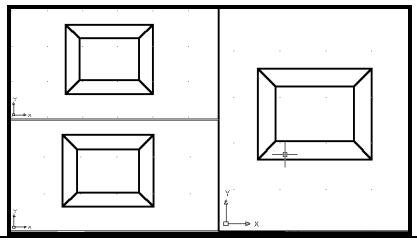


Рис. 161.

Выполнить упражнение № 91.

Создать три видовых экрана	*№ 91*
VPORTS Падающее меню ***View → Viewports → New Viewports…*** Enter an option [Save/Restore/Delete/Join/SIngle/?/2/3/4] <3>: _3 Enter a configuration option [Horizontal/Vertical/Above/Below/Left/Right] <Right>: Enter Regenerating model.	
	

6. УСТАНОВКА ВИДОВ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При построении трехмерной модели приходится работать более чем с одним видом объекта. Возможно, что изображение объекта будет достаточно информативным на одном виде и нечитаемым – на другом. В любом случае при работе с трехмерными объектами следует установить несколько видовых экранов, например, один – с видом в плане, другой – с видом слева, а третий – с аксонометрическим видом.

Установка направления взгляда производится в начале работы с моделью или в процессе создания модели. ***AutoCAD*** позволяет взглянуть на модель из любой точки пространства, даже изнутри изображаемого объекта. Установку нового вида в пространстве модели можно произвести с помощью команд:

1. ***VPOINT*** (Точка зрения) – позволяет вводить из командной строки точку зрения или угол поворота вида.
2. ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) – отображает диалоговое окно ***Viewpoint Presets*** (Задание точки зрения).
3. ***PLAN*** (План) – отображает вид в плане пользовательской или мировой системы координат.
4. ***DVIEW*** (Динамический вид) – определяет параллельную проекцию или перспективные виды.
5. ***3DORBIT*** (3-Орбита) – интерактивное отображение видов.

6.1. УСТАНОВКА НАПРАВЛЕНИЯ ВЗГЛЯДА

Команда ***VPOINT*** (Точка зрения) позволяет задать направление взгляда при определении вида и вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D View*** (3М Виды) → ***VPOINT*** (Точка зрения) или вводом в командную строку слова ***VPOINT*** с клавиатуры.

В ответ на команду система сообщает справочную информацию:

Current view direction: VIEWDIR=1.0000,-1.0000,1.0000

Specify a view point or [Rotate] <display compass and tripod>:

Возможные ответы:

- задать направление взгляда при определении вида, указав на графическом экране произвольную точку;
- нажать клавишу ***Enter***. На экране появляются компас и тройка осей, представляющие проекцию глобуса на плоскости. Центральная точка компаса совпадает с Северным

полюсом (0, 0, 1), внутренняя окружность – с экватором (n, n, 0), а внешняя – с Южным полюсом (0, 0, -1). Угол направления взгляда определяется указанием точки внутри компаса, а угол между направлением взгляда и плоскостью ***XY*** – ее расстоянием от центра компаса. В соответствии с точкой зрения на компасе изменяется ориентация тройки осей. Передвигая с помощью мыши перекрестие внутри окружностей и контролируя получившийся вид по тройке осей системы координат, можно получить требуемый вид.

- ***Rotate*** (Поворот) используется, если необходимо задать направление взгляда при определении вида путем указания.

Удобно также использовать плавающую панель инструментов ***View*** (Вид), содержащую ряд кнопок с типовыми видами объекта (рис. 162).

Рис. 162.

— ***Named View*** (Именованные виды) – создание и сохранение видов;

— ***Top View*** (Вид сверху) – установка точки зрения сверху (план, горизонтальная проекция);

— ***Bottom View*** (Вид снизу) – установка точки зрения снизу;

— ***Left View*** (Вид слева) – установка точки зрения слева (профильная проекция);

— ***Right View*** (Вид справа) – установка точки зрения справа;

— ***Front View*** (Вид спереди) – установка точки зрения спереди (фронтальная проекция);

— ***Back View*** (Вид сзади) – установка точки зрения сзади;

— ***SW Isometric View*** (ЮЗ изометрия) – установка юго-западного изометрического вида;

— ***SE Isometric View*** (ЮВ изометрия) – установка юго-восточного изометрического вида;

— ***NE Isometric View*** (СВ изометрия) – установка северо-восточного изометрического вида;

— ***NW Isometric View*** (СЗ изометрия) – установка северо-западного изометрического вида;

— ***Camera*** (Камера) – включение и установка положения камеры и цели.

Выполнить упражнение № 92.

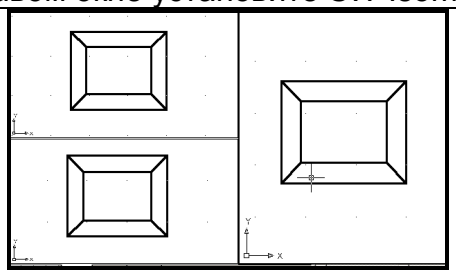
Установить направление взгляда в трёх видовых окнах ***№ 92***

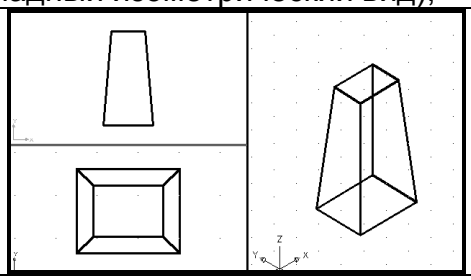
Падающее меню ***View → 3D Views***

В верхнем левом видовом окне установить Front (Вид спереди), вначале активизируйте это окно щелчком мыши на поле окна

В нижнем левом видовом окне установить Top (Вид сверху), сделав это окно активным.

В правом окне установите SW Isometric (Юго-западный изометрический вид),





6.2. ЗАДАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВЗГЛЯДА С ПОМОЩЬЮ ДИАЛОГОВОГО ОКНА

Команда ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) позволяет задать направление взгляда при определении вида и вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D View*** (3М Виды) → ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) или вводом в командную строку слова ***DDVPOINT*** с клавиатуры.

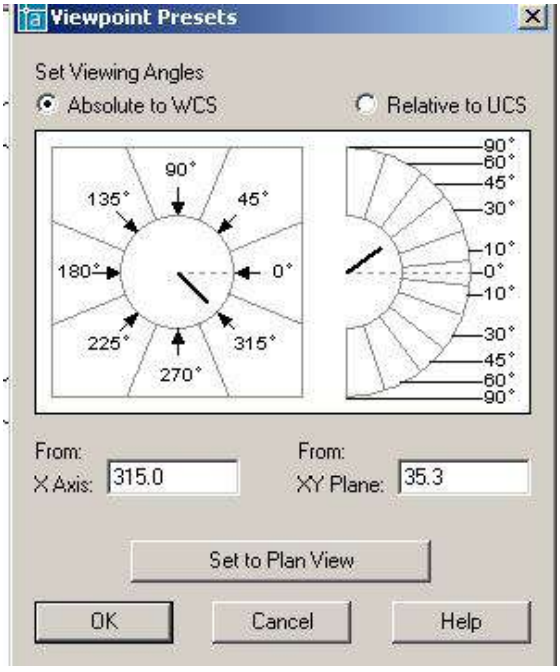


Рис. 163.

В ответ на команду система открывает диалоговое окно ***Viewpoint Presets*** (Задание точки зрения), представленное на рис. 163. Окно содержит следующие элементы управления: две кнопки выбора, графическое поле, два поля ввода и кнопку ***Set to Plan View***.

- Кнопка выбора ***Absolute to WCS*** устанавливает режим указания направления взгляда относительно мировой системы координат.
- Кнопка выбора ***Relative to UCS*** устанавливает режим указания направления взгляда относительно текущей системы координат.
- Графическое поле позволяет задать направление взгляда при помощи графического курсора.
- Поле ввода ***X axis*** позволяет задать числовое значение угла в плоскости ***XY*** между направлением взгляда и осью ***X***.

- Поле ввода ***XY Plane*** позволяет задать числовое значение угла между направлением взгляда и плоскостью ***XY***.
- Кнопка ***Set to Plan View*** задает направление взгляда, перпендикулярное плоскости ***XY*** текущей системы координат.

Команда ***DVIEW*** (Динамический вид). Установить направление взгляда можно с помощью команды ***DVIEW*** (Динамический вид), предназначенной для получения динамических трехмерных и перспективных видов. Эта команда используется также для зуммирования, панорамирования и вращения видов. Кроме того, с её помощью можно удалять с экрана объекты, расположенные перед секущей плоскостью или позади нее, а также скрытые линии – при динамическом просмотре объектов. Команда действует по принципу камеры, направленной в сторону цели. Линия между камерой и целью – это линия взгляда или направление взгляда. Имеется возможность при моделировании изменять фокусное расстояние «объектива» камеры от широкоугольного до телеобъектива. После выполнения команды чертеж полностью регенерируется.

6.3. УСТАНОВКА ПЛАНА ИЗОБРАЖЕНИЯ

PLAN (План) – позволяет получить ортогональную проекцию объектов на плоскость ***XY*** текущей, мировой или пользовательской систем координат. Пользоваться этой командой в пространстве листа недопустимо.

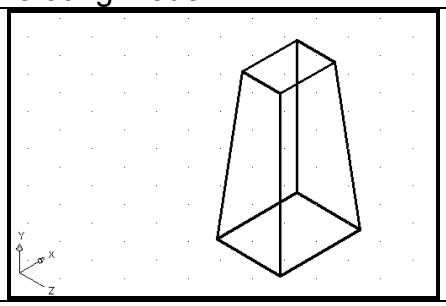
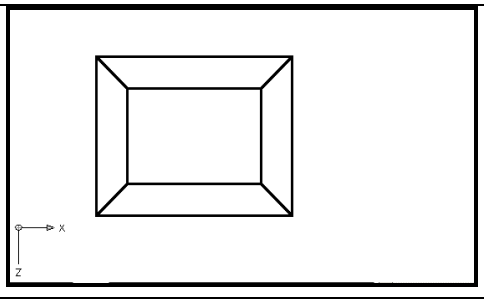
Команда ***PLAN*** (План) → ***Plan View*** (Вид в плане) соответственно пункты ***Current UCS*** (Текущая ПСК), ***World UCS*** (МСК) или ***Names UCS*** (По имени).

Опции команды:

- ***Current UCS*** (Текущая ПСК) – создает изображение текущей ПСК в плане на текущем видовом экране. Используется по умолчанию;
- ***UCS*** (ПСК) – переключает в план предварительно сохраненной ПСК и регенерирует изображение. ***AutoCAD*** запрашивает имя требуемой ПСК;
- ***World*** (Мир) – создает изображение в плане мировой системы координат.

Команда ***PLAN*** (План) изменяет направление взгляда и отключает перспективу, но не меняет текущей ПСК. Все координаты, вводимые или отображаемые после запуска этой команды, берутся относительно текущей ПСК.

Выполнить упражнения № 93.

Установить вид в плане	***№ 93***
Plan Падающее меню ***View → 3D Views → Plan View → World UCS*** Enter an option [Current ucs/Ucs/World] <Current>: _w Regenerating model.	
	

6.4. УСТАНОВКА ОРТОГОНАЛЬНЫХ И АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВИДОВ

Для установки ортогональных и аксонометрических видов служит закладка ***Orthographic & Isometric Views*** (Ортогональные и изометрические виды) диалогового окна ***View*** (Вид), показанного на рис. 164. Это диалоговое окно вызывается вводом в командную строку слова ***VIEW*** с клавиатуры или из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D View…*** (3М Виды…). Кроме этого, можно щелкнуть на пиктограмме ***Named Views*** (Именованные виды) плавающей панели инструментов ***View*** (Вид), представленной на рис. 162.

Ортогональный вид, помещаемый на видовой экран, базируется по умолчанию на мировой системе координат. Однако пользователь может установить в качестве базовой любую из имеющихся в диалоговом окне именованных пользовательских систем координат (ПСК). После выбора одной из ПСК необходимо сделать эту систему текущей, то есть нажать кнопку ***Set Current***, в подтверждении, что выбранная ПСК является текущей, рядом с её названием появляется маркер. Нажатием кнопки ***OK AutoCAD*** выводит на экран выбранную пользовательскую систему координат.

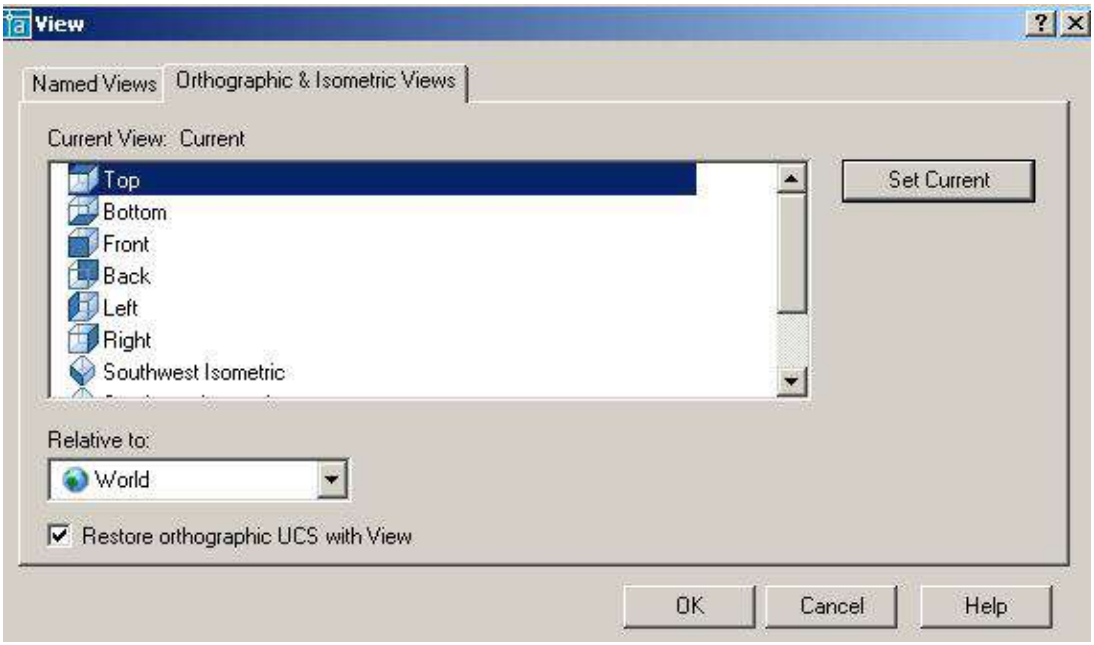
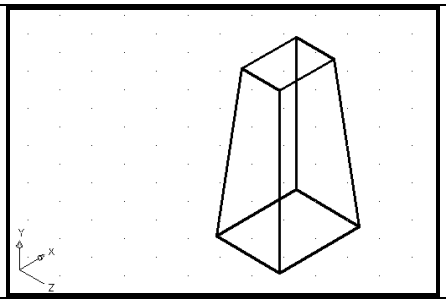


Рис. 164.

6.5. ИНТЕРАКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОЧКОЙ ВЗГЛЯДА

Команда ***3DORBIT*** (3-орбита) позволяет задать направление взгляда при определении вида и параметры отображения. Вид модели в это время управляется с помощью устройства указания, то есть изменение направления взгляда при определении вида производится путем перемещения мыши при нажатой левой кнопке. С орбиты могут рассматриваться как вся модель, так и её отдельные части. Команда вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D Orbit*** (3М Орбита) или щелчком мыши по пиктограмме ***3D Orbit*** (3М Орбита) стандартной панели инструментов, или щелчком мыши по пиктограмме ***3D Orbit*** (3М Орбита) плавающей панели инструментов ***3D Orbit***, или вводом в командную строку слова ***3DORBIT*** с клавиатуры. Для завершения работы с командой необходимо нажать клавишу ***Enter***.

Выполнить упражнение № 94.

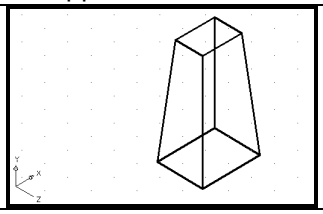
Установить точку зрения	***№ 94***
3D Orbit Падающее меню ***View → 3D Orbit*** Удерживая нажатой левую кнопку мыши, установить желаемую точку зрения Для выхода из команды нажать Enter.	
	

6.6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВРАЩЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Команда ***3DCORBIT*** (3МД Орбита) позволяет просматривать вращающееся изображение объектов в режиме реального времени. Команда вызывается вводом в командную строку слова ***3DCORBIT*** с клавиатуры или щелчком мыши по пиктограмме ***3D Continuous Orbit*** (3МД Орбита) плавающей панели инструментов ***3D Orbit***. Для завершения работы с командой необходимо нажать клавишу ***Enter***.

Вращение изображения объектов задается путем перемещения курсора по графическому полю экрана при нажатой левой кнопке мыши. При этом направление вращения определяется направлением перемещения курсора, а скорость вращения – скоростью перемещения курсора. Вращение изображения начинается после того, как будет отпущена левая кнопка мыши.

Выполнить упражнение № 95.

Установить точку зрения	***№ 95***
3DC Orbit Удерживая нажатой левую кнопку мыши, задать вращательный момент детали и отпустить кнопку. Для фиксации точки зрения сделать щелчок мышью. Для выхода из команды нажать Enter.	
	

7. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАРКАСОВ

Элементарными трехмерными объектами системы ***AutoCAD*****,** предназначенными, прежде всего для каркасного моделирования, являются отрезки, сплайны и полилинии. Первые два типа объектов создаются при помощи тех же команд ***LINE*** и ***SPLINE***, которые используются при плоском черчении. Особенностью при их использовании в трёхмерном пространстве является то, что при задании координат точек следует указывать и координату по оси ***Z*** (при плоском черчении эта координата опускается). При указании точек графическим курсором следует пользоваться объектной привязкой, так как в противном случае система воспринимает указанные точки как лежащие на плоскости ***XY*** текущей системы координат. Трех-

мерные полилинии создаются при помощи специальной команды ***3DPOLY***. Эта команда позволяет создавать полилинию, состоящую только из прямолинейных сегментов, поэтому для создания сглаженных линий используют команду ***REDIT*** (Редактирование трехмерных полилиний).

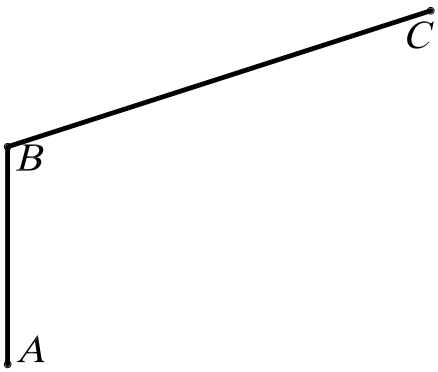
7.1. ТРЕХМЕРНАЯ ПОЛИЛИНИЯ

Команда ***3DPOLY*** (3М ПЛиния) – построение трехмерной полилинии – вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***3Dpoly*** (3М ПЛиния), щелчком мыши по пиктограмме ***3Dpoly*** (3М ПЛиния) панели инструментов ***Draw*** (Рисовать) или вводом в командную строку слова ***3DPOLY*** с клавиатуры

Опции команды:

- ***Undo*** (Отмена) – используется для отмены создания последнего отрезка;
- ***Close*** (Замкнуть) – используется для замыкания построенной полилинии и завершения работы с командой.

Выполнить упражнение № 96.

Построить трехмерную полилинию	***№ 96***
3D Polyline Падающее меню ***Draw*** → ***3D Polyline*** Specify start point of polyline: 100,100,0 Specify endpoint of line or [Undo]: @0,0,80 Specify endpoint of line or [Undo]: @90,90,50 Specify endpoint of line or [Close/Undo]:	
	

7.2. СРЕДСТВА РЕДАКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ПОЛИЛИНИИ

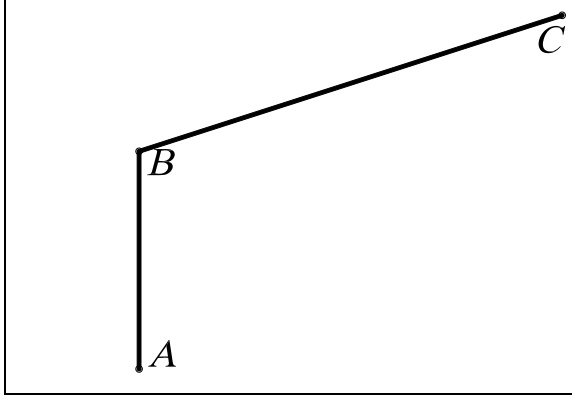
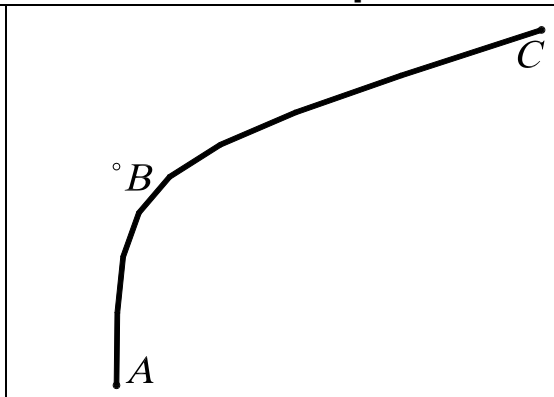
- ***PEDIT*** (Изменить полилинию) позволяет редактировать трехмерные полилинии и вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Object*** (Объект) →***Polyline*** (Полилиния), щелчком мыши по пиктограмме ***Pedit*** (Изменить полилинию) панели инструментов ***Modify II*** (Редактировать II) или вводом в командную строку слова ***PEDIT*** с клавиатуры.

Опции команды:

- ***Multiple*** (Много) – используется, если необходимо одинаковым образом отредактировать несколько полилиний; в этом случае система потребует указать эти полилинии;

- ***Close*** (Замкнуть) – используется, если необходимо замкнуть полилинию, при этом система добавляет сегмент, соединяющий начальную и конечную точки полилинии; если выбранная полилиния замкнута, то в списке параметров вариант ***Close*** заменяется вариантом ***Open***;
- ***Open*** (Разомкнуть) – используется, если необходимо разомкнуть полилинию, при этом система удаляет сегмент, соединяющий конечную и начальную точки;
- ***Edit vertex*** (Редактировать вершину) – используется для редактирования вершин полилинии. Дальнейшая работа в режиме редактирования вершин производится так же, как и в случае редактирования плоской полилинии;
- ***Spline curve*** (Сгладить) – используется для преобразования полилинии в гладкую с использованием аппарата B-сплайнов, при этом данная кривая в общем случае не приходит через вершины исходной полилинии;
- ***Decurve*** (Отменить сглаживание) – используется для отмены преобразования полилинии в гладкую кривую;
- ***Undo*** (Отменить) – используется для отмены последнего изменения.

Выполнить упражнение № 97

Сгладить трехмерную полилинию	***№ 97***
	PEDIT Падающее меню ***Modify → Object→ Polyline*** Enter an option [Close/Edit vertex/Spline curve/Decurve/Undo]: s режим сглаживания полилинии Enter an option [Close/Edit vertex/Spline curve/Decurve/Undo]: Enter
	

8. ТВЕРДОТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Команды построения твердотельных объектов (примитивов) запускаются из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела) или из плавающей панели инструментов ***Solids*** (Тела), представленной на рис. 165.

Рис. 165.

При создании твердотельных примитивов используется три основных способа:

1. Стандартные библиотечные тела: ***Box*** (Ящик), ***Wedge*** (Клин), ***Cone*** (Конус), ***Cylinder*** (Цилиндр), ***Sphere*** (Шар), ***Torus*** (Тор). Задание количества изолиний при создании стандартных (библиотечных) тел вращения выполняется системной переменной ***ISOLINES*** (по умолчанию количество изолиний равно четырем). Для увеличения количества в командную строку вводится слово ***ISOLINES*** с клавиатуры, а затем нужное количество.

2. Тела пользователя (примитивы заданной формы) создаются путем выдавливания, осуществляемого командой ***Extrude*** (Выдавить), или вращения – командой ***Revolve*** (Вращать) – двумерного объекта (плоского контура) ***Region***.

3. Тела, созданные комбинированием нескольких тел, с использованием команд ***Union*** (Объединение), ***Subtract*** (Вычитание), ***Intersect*** (Пересечение), которые запускаются из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) или из плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел).

9. СТАНДАРТНЫЕ ТЕЛА

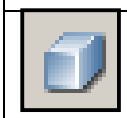
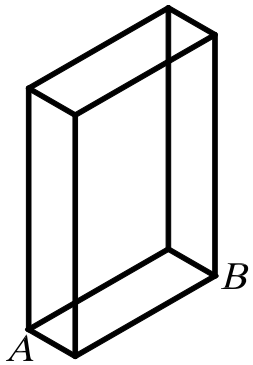
9.1. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

– Команда ***Box*** (Ящик) – формирование твердотельного параллелепипеда (ящика, куба) с ребрами, параллельными осям текущей системы координат, то есть основание параллелепипеда всегда параллельно плоскости ***XY*** текущей ПСК. Команда ***Box*** (Ящик) вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела) → ***Box*** (Ящик) или щелчком мыши по пиктограмме ***Box*** (Ящик) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды:

- ***Center*** (Центр) – определяет параллелепипед с помощью указания его центральной точки;
- ***Cube*** (Куб) – создает куб, то есть параллелепипед, у которого все ребра равны;
- ***Length*** (Длина) – создает параллелепипед с заданными длиной (по оси X), шириной (по оси Y) и высотой (по оси Z) текущей системы координат.

Выполнить упражнение № 98.

Построить параллелепипед	***№ 98***
 ***Box*** Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Box*** Specify corner of box or [CEnter] <0,0,0>: 100,100 указать первый угол A основания параллелепипеда Specify corner or [Cube/Length]: 120,160 указать второй угол B основания параллелепипеда Specify height: 90 высота параллелепипеда	
	

9.2. КЛИН

– Команда ***Wedge*** (Клин) – построение прямой призмы («клина») с основанием в виде прямоугольного треугольника, параллельным плоскости ***XY*** текущей системы координат. Команда ***Wedge*** (Клин) вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Wedge*** (Клин) или щелчком мыши по пиктограмме ***Wedge*** (Клин) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

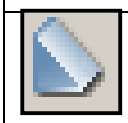
Основание клина всегда параллельно плоскости ***XY*** текущей системы координат, при этом наклонная грань располагается напротив первого указанного угла основания. Высота клина может быть как положительной, так и отрицательной.

Опции команды:

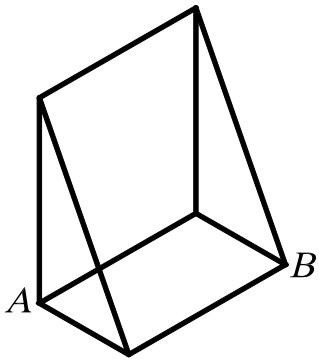
- ***CEnter*** (Центр клина) – точка пересечения диагоналей наклонной грани клина;
- ***Cube*** (Куб) – используется для построения призмы, вписанной в куб;
- ***Length*** (Длина) – используется для задания длин сторон нижней грани клина.

Выполнить упражнение № 99.

Построить клин (призму)	***№ 99***



Wedge Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Wedge***
Specify first corner of wedge or [Center] <0,0,0>: 150,130 указать точку A
Specify corner or [Cube/Length]: 190,200 указать точку B
Specify height: 80 высота.

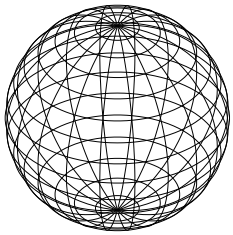


9.3. СФЕРА

– Команда ***Sphere*** (Сфера) – построение твердотельного шара (сферы), вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Sphere*** (Сфера) или щелчком мыши по пиктограмме ***Sphere*** (Сфера) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Сфера задается центром и радиусом (или диаметром), то есть при необходимости задания сферы центром и диаметром в командную строку ввести ***D*** (***Diameter)***. Ось вращения шара параллельна оси ***Z*** текущей системы координат.

Выполнить упражнение № 100. Перед построением сферы, для улучшения наглядности изображения, увеличить число изолиний. Для этого в командную строку вводится слово ISOLINES с клавиатуры, а затем нужное количество: Enter new value for ISOLINES <4>: 20.

Построить сферу	*№ 100*
	Sphere Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Sphere*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Specify center of sphere <0,0,0>: 100,100,70 указать центр сферы Specify radius of sphere or [Diameter]: 50 величина радиуса
	

9.4. КОНУС

– Команда ***Cone*** (Конус) – построение твердотельного конуса, вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Cone*** (Конус) или щелчком мыши по пиктограмме ***Cone*** (Конус) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды:

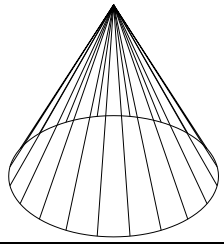
- ***Eliptical*** (Эллиптический) – используется для построения эллиптического конуса;
- ***Axis endpoint*** (Конечная точка оси) – создает эллиптическое основание конуса, для чего нужно указать точками длину одной оси и половину другой оси, как при построении эллипса. Выбор этой опции осуществляется автоматически при указании координат точки;
- ***Center*** (Центр) – позволяет задать эллиптическое основание конуса, для чего следует указать координаты его центральной точки и значение радиуса по каждой из осей эллипса;
- ***Apex*** (Вершина) – определяет высоту и ориентацию конуса, для этого нужно любым известным способом задать положение вершины конуса;
- ***Height*** (Высота) – устанавливает только высоту конуса, но не ориентацию. Ориентация определяется знаком, стоящим перед значением высоты: при знаке «+» высота откладывается в сторону положительного значения оси ***Z***, при знаке «-» - в сторону отрицательного значения оси ***Z***, то есть строится нижняя или верхняя полупола конуса;
- ***Center point*** (Центральная точка) – создает круговое основание;
- ***Radius*** (Радиус) – позволяет задать круговое основание конуса, для чего нужно ввести центр и радиус основания;
- ***Diameter*** (Диаметр) – используется, если необходимо задать диаметр основания конуса.

Выполнить упражнения № 101, 102.

Перед построением конуса, для улучшения наглядности изображения, увеличить число изолиний. Для этого в командную строку вводится слово ISOLINES с клавиатуры, а затем нужное количество: Enter new value for ISOLINES <4>: 20.

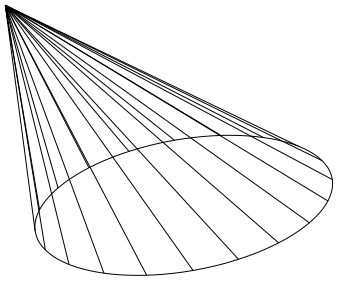
Построить круговой конус	*№ 101*

Cone Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Cone***
Current wire frame density: ISOLINES=20
Specify center point for base of cone or [Elliptical] <0,0,0>: 100,100 центр основания
Specify radius for base of cone or [Diameter]: 45 радиус основания
Specify height of cone or [Apex]: 90 высота



Построить эллиптический конус	*№ 102*

Cone Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Cone***
Current wire frame density: ISOLINES=20
Specify center point for base of cone or [Elliptical] <0,0,0>: E
режим эллиптического конуса
Specify axis endpoint of ellipse for base of cone or [Center]: 100,100 указать первую точку первой оси эллипса (основания).
Specify second axis endpoint of ellipse for base of cone: 190,200 указать вторую точку первой оси эллипса (основания).
Specify length of other axis for base of cone: 30 указать длину половины второй оси эллипса (основания).
Specify height of cone or [Apex]: A режим для задания вершины конуса
Specify apex point: 110,100,90 координаты вершины конуса

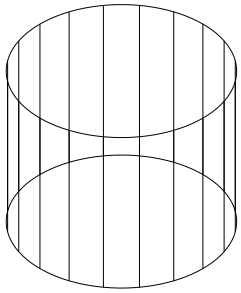


9.5. ЦИЛИНДР

– Команда ***Cylinder*** (Цилиндр) – построение твердотельного цилиндра, вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Cylinder*** (Цилиндр) или щелчком мыши по пиктограмме ***Cylinder*** (Цилиндр) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды ***Cylinder*** (Цилиндр) аналогичны опциям команды ***Cone*** (Конус). Ось цилиндра параллельна оси ***Z*** текущей системы координат. В данной команде опция ***Apex*** (Вершина) называется ***Center of other end*** (центр другого основания).

Выполнить упражнение № 103.

Построить цилиндр	***№ 103***
Cylinder Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Cylinder*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Specify center point for base of cylinder or [Elliptical] <0,0,0>: 100,100 центр основания Specify radius for base of cylinder or [Diameter]: 50 радиус основания Specify height of cylinder or [Center of other end]: 80 высота	
	

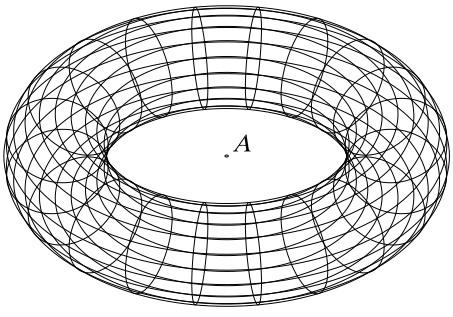
9.6. ТОР

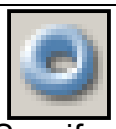
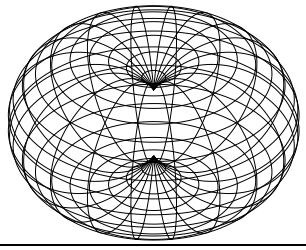
– Команда ***Torus*** (Тор) – построение твердотельного тора, вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Torus*** (Тор) или щелчком мыши по пиктограмме ***Torus*** (Тор) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

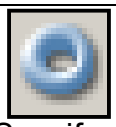
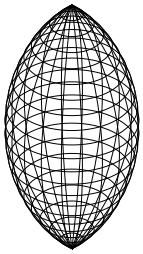
Тор (круговое кольцо) или открытый тор образуется при вращении окружности вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но не проходящей через ее центр. У открытого тора различают внутреннюю часть – глобоид и внешнюю. Если окружность пересекает ось тора, то дуга окружности описывает поверхность, напоминающую форму мяча для регби, которая называется закрытым тором. У закрытого тора различают: тор-«яблоко» и тор-«веретено».

Для построения тора необходимо ввести значения двух радиусов: радиуса образующей окружности-трубы (***Tube***) и радиуса, определяющего расстояние от центра тора до центра образующей окружности-трубы (***Tube***).

Выполнить упражнения № 104 - 106.

Построить открытый тор	***№ 104***
Torus Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Torus*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Specify center of torus <0,0,0>: 100,100,60 указать центр тора – точка А Specify radius of torus or [Diameter]: 100 указать радиус тора Specify radius of tube or [Diameter]: 30 указать радиус образующей окружности-трубы	
	

Построить тор-«яблоко»	*№ 105*
 ***Torus*** Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Torus*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Specify center of torus <0,0,0>: 100,100,60 указать центр тора Specify radius of torus or [Diameter]: 60 указать радиус тора Specify radius of tube or [Diameter]: 70 указать радиус образующей окружности-трубы	
	

Построить тор-«веретено»	*№ 106*
 ***Torus*** Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Torus*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Specify center of torus <0,0,0>: 100,100,60 указать центр тора Specify radius of torus or [Diameter]: -60 указать радиус тора Specify radius of tube or [Diameter]: 90 указать радиус образующей окружности-трубы	
	

Радиус тора можно задавать отрицательным значением, но тогда значение радиуса образующей окружности должно быть положительным и превосходить абсолютное значение радиуса тора, то есть в этом случае получается закрытый тор. Данное условие необходимо соблюдать, чтобы не получить в итоге пустое тело (тело без объема).

10. ТЕЛА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

10.1. ВЫДАВЛЕННОЕ ТЕЛО

– Команда ***Extrude*** (Выдавить) – позволяет создавать твердотельные объекты путем «выдавливания» плоского контура (добавляя высоту). Вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Extrude*** (Выдавить) или щелчком мыши по пиктограмме ***Extrude*** (Выдавить) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опция команды:

- ***Path*** (Траектория) – используется для «выдавливания» объекта вдоль направляющей траектории.
- ***Taper angle*** (Угол конусности) – используется для задания угла конусности создаваемого тела, то есть угла между направлением выдавливания и образующими боковых поверхностей тела.

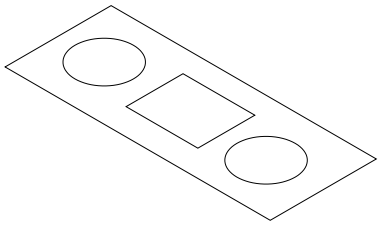
Исходными объектами для «выдавливания» могут являться плоские грани (примитивы ***3D Faces***), замкнутые полилинии, многоугольники, окружности, эллипсы, замкнутые сплайны, кольца и области (***Region***). «Выдавливание» объекта происходит перпендикулярно плос-

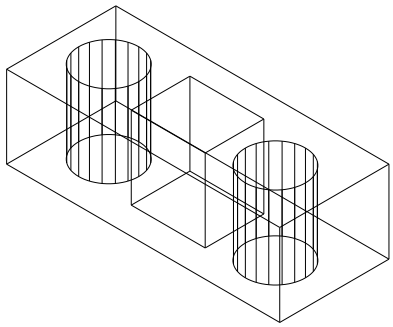
кости ***XY*** текущей системы координат. Объектами-направляющими, вдоль которых может производиться «выдавливание», могут служить отрезки, окружности, дуги окружностей, эллипсы, дуги эллипсов, полилинии или сплайны. При «выдавливании» контура вдоль направляющей угол его наклона относительно направляющей остается постоянным. При создании твердых тел исходные контуры удаляются.

Выполнить упражнения № 107 – 110. Перед выполнением упражнений создайте плоские контуры типа ***Region*** или ***Pline***, ***3D Polyline***.

Построить выдавленное тело ***№ 107***

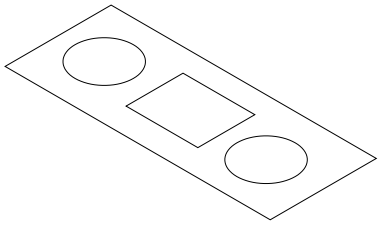
Extrude Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Extrude***
Current wire frame density: ISOLINES=20
Select objects: Specify opposite corner: выбрать все объекты рамкой
Select objects: Enter
Specify height of extrusion or [Path]: 60 высота
Specify angle of taper for extrusion <0>: Enter угол конусности равен нулю.

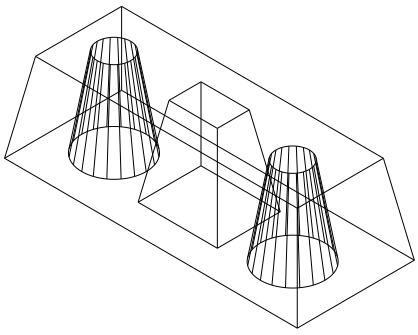




Построить выдавленное тело, имеющее угол конусности ***№ 108***

Extrude Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Extrude***
Current wire frame density: ISOLINES=20
Select objects: Specify opposite corner: выбрать все объекты рамкой
Select objects: Enter
Specify height of extrusion or [Path]: 60 высота
Specify angle of taper for extrusion <0>: 10 угол конусности.





Значение угла конусности «выдавливаемого» тела должно лежать в пределах от -90^0 до $+90^0$, причем это значение не должно задавать создание самопересекающегося тела.

Построить выдавленное тело вдоль траектории полилинии ***№ 109***

Extrude Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Extrude***

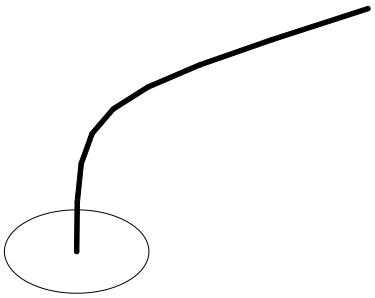
Current wire frame density: ISOLINES=20

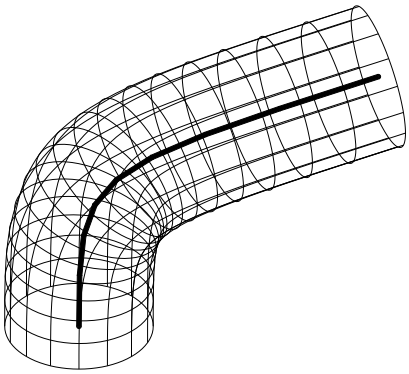
Select objects: указать на окружность

Select objects: Enter

Specify height of extrusion or [Path]: P выдавить по траектории

Select extrusion path or [Taper angle]: указать на полилинию





Построить выдавленное тело, имеющее угол конусности, вдоль траектории полилинии ***№ 110***

Extrude Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Extrude***

Current wire frame density: ISOLINES=20

Select objects: указать на окружность

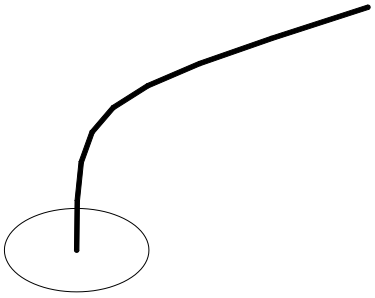
Select objects: Enter

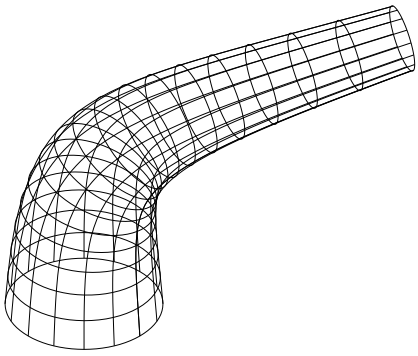
Specify height of extrusion or [Path]: P выдавить по траектории

Select extrusion path or [Taper angle]: T задать угол конусности

Specify angle of taper for extrusion <0>: 5 значение угла конусности

Select extrusion path: указать на полилинию.





10.2. ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ

– Команда ***Revolve*** (Вращать) – позволяет создавать твердотельные объекты путем вращения плоского контура. Вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Revolve*** (Вращать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Revolve*** (Вращать) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

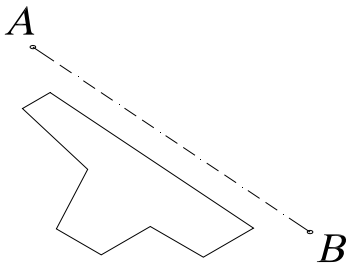
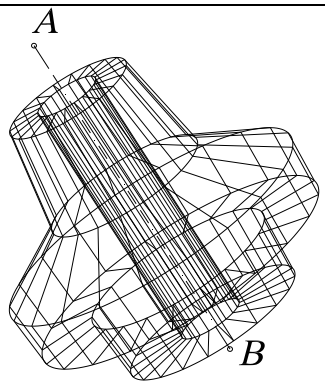
Исходными объектами для вращения могут служить замкнутые полилинии, многоугольники, окружности, эллипсы, замкнутые сплайны, кольца и области (***Region***). Объектами, задающими направление оси вращения, могут служить отрезки и плоские полилинии. В

последнем случае за ось вращения принимается линия, проходящая через начальную и конечную точки полилинии. При создании твердых тел вращения исходные контуры удаляются.

Опции команды:

- ***Object*** (Объект) – используется для задания оси, определяемой некоторым объектом, то есть необходимо указать объект, который определяет ось вращения;
- ***X (axis)*** (X ось) – используется для задания оси вращения, совпадающей с осью X текущей системы координат;
- ***Y (axis)*** (Y ось) – используется для задания оси вращения, совпадающей с осью Y текущей системы координат.

Выполнить упражнение № 111.

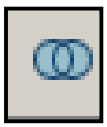
Построить тело вращения	***№ 111***
Revolve Падающее меню ***Draw → Solids → Revolve*** Current wire frame density: ISOLINES=20 Select objects: указать плоский контур Select objects: Enter Specify start point for axis of revolution or define axis by [Object/X (axis)/Y (axis)]: указать точку A на оси вращения Specify endpoint of axis: указать точку B на оси вращения Specify angle of revolution <360>: Enter угол поворота контура на 360^0. Установить точку зрения командой 3D Orbit.	
	

11. ТЕЛА, СОЗДАННЫЕ КОМБИНИРОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

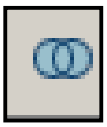
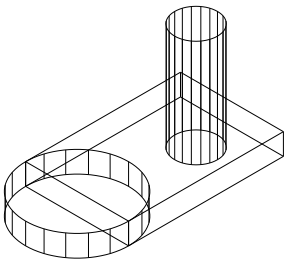
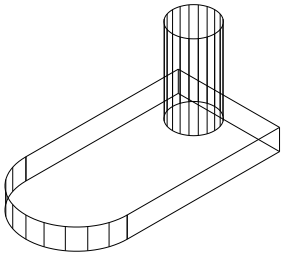
Для создания тел из базовых твердотельных примитивов в ***AutoCAD*** имеются команды, осуществляющие операции теории множеств:

1. ***Union*** (Объединение) – создает сложный твердотельный объект путем объединения нескольких объектов;
2. ***Subtract*** (Вычитание) – позволяет создать новые область или твердотельный объект путем исключения (вычитания) аналогичных объектов. Например, эту команду можно использовать для получения сквозных цилиндрических отверстий в деталях путем вычитания цилиндров;
3. ***Intersect*** (Пересечение) – позволяет создать новый твердотельный объект, который является общей частью всех указанных объектов.

11.1. ОБЪЕДИНЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

 – Команда ***Union*** (Объединение) вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) → ***Union*** (Объединение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Union*** (Объединение) плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел).

Выполнить упражнение № 112.

Построить тело путем объединения заданных тел	***№ 112***
 ***Union*** Падающее меню ***Modify → Solids Editing → Union*** Select objects: указать точку на одном цилиндре Select objects: указать точку на втором цилиндре Select objects: указать точку на параллелепипеде Select objects: Enter	
	

Если указанные пользователем твердотельные объекты не пересекаются и не касаются друг друга, то система выполнит формальное объединение этих тел. При этом вновь созданный объект будет восприниматься системой как единое целое, хотя в физическом смысле такой объект будет являться набором отдельных невзаимосвязанных тел.

11.2. ВЫЧИТАНИЕ ОБЪЕКТОВ

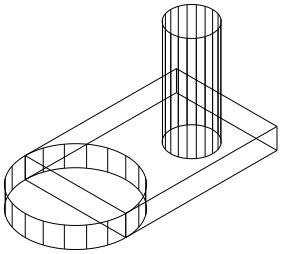
– Команда ***Subtract*** (Вычитание) вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) → ***Subtract*** (Вычитание) или щелчком мыши по пиктограмме ***Subtract*** (Вычитание) плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел).

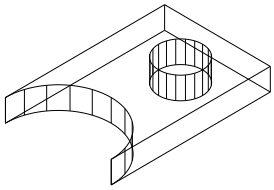
Вычитаемые объекты после выполнения команды удаляются. Если исходное и вычитаемое тела не пересекаются, то в результате выполнения команды ***Subtract*** (Вычитание) будет просто удалено вычитаемое тело. Необходимо помнить, что после завершения указания исходных объектов, из которых необходимо исключить другие объекты, нужно нажать клавишу ***Enter***.

Выполнить упражнение № 113.

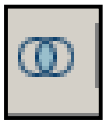
Построить тело путем вычитания заданных тел	*№ 113*

Subtract Падающее меню ***Modify*** → ***Solids Editing*** → ***Subtract***
Select solids and regions to subtract from ..
Select objects: указать точку на параллелепипеде
Select objects: Enter
Select solids and regions to subtract ..
Select objects: указать один цилиндр
Select objects: указать второй цилиндр
Select objects: Enter





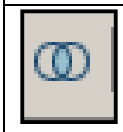
11.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ОБЪЕКТОВ



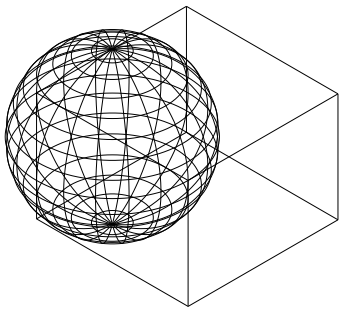
– Команда ***Intersect*** (Пересечение) вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) → ***Intersect*** (Пересечение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Intersect*** (Пересечение) плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел).

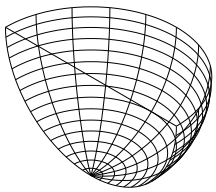
Выполнить упражнение № 114.

Построить тело путем пересечения заданных тел	*№ 114*



Intersect
Падающее меню ***Modify*** → ***Solids Editing*** → ***Intersect***
Select objects: выбрать сферу, указав на её любую точку
Select objects: выбрать параллелепипед, указав на любую его точку
Select objects: Enter





Все исходные тела, на основе которых создается новый объект, удаляются. Если исходные тела не пересекаются, то в результате выполнения команды ***Intersect*** (Пересечение) эти тела будут просто удалены.

12. ОБЩИЕ СРЕДСТВА РЕДАКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Для редактирования любых трехмерных объектов могут применяться такие универсальные команды, как ***Properties*** (Свойства), ***Copy*** (Копировать), ***Erase*** (Удалить), ***Explode*** (Взорвать), ***Move*** (Переместить), ***OOPS*** (Восстанавливает уничтоженные командой ***Erase*** объекты), ***Redo*** (Отменяет действие одной предыдущей команды: ***Undo*** или ***U***), ***Scale*** (Масштабировать), ***Undo*** (Отменяет действие нескольких команд), а также средство редактирования ***Grips*** («Ручки»). Работа со всеми этими средствами ведется так же, как и при плоском черчении. Кроме того, существуют команды редактирования только в трехмерном пространстве, например, команды поворота, создания массива объектов, зеркальное отображение, снятие фаски, скругления, которые имеют рад особенностей в трехмерном моделировании. Ниже рассматриваются эти команды.

12.1. ПОВОРОТ ВОКРУГ ОСИ

В двумерном пространстве команда ***Rotate*** (Повернуть) производит поворот объекта вокруг указанной точки, при этом направление поворота определяется текущей пользовательской системой координат.

При использовании этой команды применительно к трехмерным объектам производится их поворот относительно оси, проходящей через заданную точку и перпендикулярной плоскости ***XY*** текущей системы координат. Ось поворота может определяться следующими способами: указанием двух точек, объекта, одной из осей координат (***X***, ***Y***, ***Z***), текущего направления взгляда.

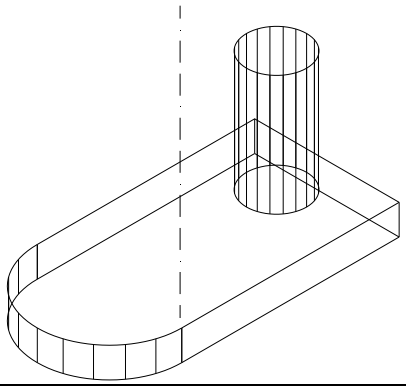
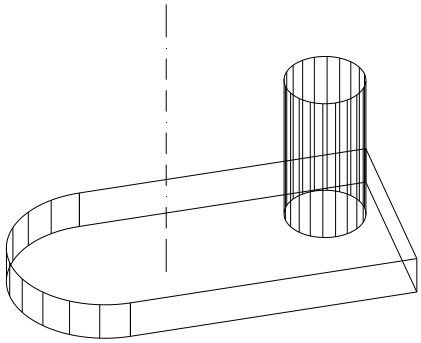
Команда ***Rotate3D*** (Повернуть-3М) поворачивает объекты относительно произвольно направленной оси. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***3D Operation*** (3М операции) → ***Rotate3D*** (Повернуть-3М) или вводом в командную строку слова ***Rotate3D*** с клавиатуры.

Опции команды:

- ***Object*** (Объект) – поворот вокруг выбранного объекта. Такими объектами могут быть отрезок, окружность, дуга или сегмент двумерной полилинии;
- ***Last*** (Последняя) – поворот вокруг оси, использовавшейся в предыдущей команде поворота;
- ***View*** (Вид) – поворот вокруг оси, выровненной вдоль направления вида текущего видового экрана и проходящей через заданною точку, то есть ось перпендикулярна плоскости экрана;
- ***Xaxis*** (X ось), ***Yaxis*** (Y ось), ***Zaxis*** (Z ось) – поворот вокруг оси, выровненной вдоль направления соответственно осей ***X***, ***Y***, ***Z*** и проходящей через заданную точку;
- ***2point*** (2 точки) – поворот вокруг оси, проходящей через две заданные точки;
- ***Reference*** (Относительно) – используется для задания относительного угла поворота.

Для определения положительного направления вращения следует ориентировать большой палец правой руки в положительном направлении оси и согнуть остальные пальцы. Положительное направление вращения будет совпадать с направлением, указываемым согнутыми пальцами. Если ось задается двумя точками, то вторая точка указывает положительное направление оси.

Выполнить упражнение № 115.

Повернуть тело вокруг оси	***№ 115***
Rotate3D Падающее меню ***Modify → 3D Operation → Rotate3D*** Current positive angle: ANGDIR=counterclockwise ANGBASE=0 Select objects: выбрать объект, который нужно повернуть Select objects: Enter Specify first point on axis or define axis by [Object/Last/View/Xaxis/Yaxis/Zaxis/2points]: указать верхнюю точку на оси (начало оси) Specify second point on axis: указать нижнюю точку на оси (направление «+» оси) Specify rotation angle or [Reference]: 30 угол положительный, так как положительное направление оси вниз, а положительный угол определяется по правилу правой руки.	
	

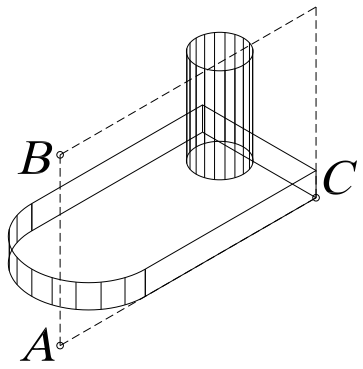
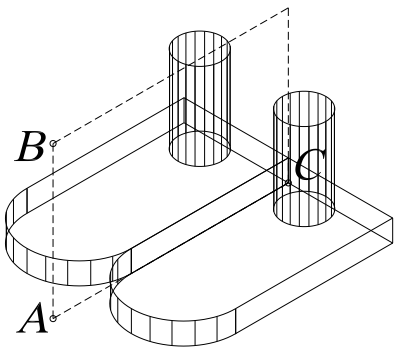
12.2. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ (ПЛОСКОСТНАЯ СИММЕТРИЯ)

Команда ***Mirror3D*** (Повернуть-3М) позволяет создать зеркальную копию объектов относительно произвольно расположенной плоскости. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***3D Operation*** (3М операции) → ***Mirror3D*** (Повернуть-3М) или вводом в командную строку слова ***Mirror3D*** с клавиатуры.

Опции команды:

- ***Object*** (Объект) – отображение относительно выбранного плоского объекта. Такими объектами могут быть отрезок, окружность, дуга или сегмент двумерной полилинии;
- ***Last*** (Последняя) – отображение относительно плоскости, использовавшейся в предыдущей команде поворота;
- ***Zaxis*** (Z ось) – отображение относительно плоскости, заданной двумя точками, первая из которых лежит на плоскости, а вторая определяет вектор нормали к этой плоскости;
- ***View*** (Вид) – отображение относительно плоскости, выровненной с плоскостью видового экрана, то есть параллельной плоскости экрана;
- ***XY*** (XY), ***YZ*** (YZ), ***ZX*** (ZX) – отображение относительно плоскости, параллельной плоскости соответственно ***XY***, ***YZ*** или ***ZX*** текущей системы координат и проходящей через заданную точку;
- ***3point*** (3 точки) – отображение относительно плоскости, проходящей через три заданные точки.

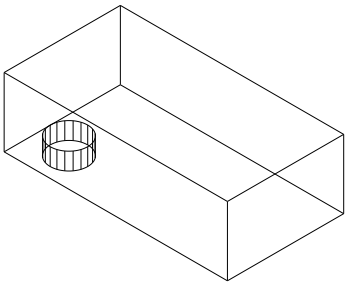
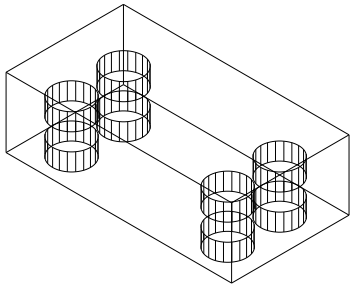
Выполнить упражнение № 116.

Построить плоскостную симметрию объекта	***№ 116***
Mirror3D Падающее меню ***Modify → 3D Operation → Mirror3D*** Select objects: выбрать объект Select objects: Enter Specify first point of mirror plane (3 points) or [Object/Last/Zaxis/View/XY/YZ/ZX/3points] <3points>: указать точку A Specify second point on mirror plane: указать точку B Specify third point on mirror plane: указать точку C Delete source objects? [Yes/No] <N>: не удалять исходный объект, если нужно удалить, то выбрать <Y>.	
	

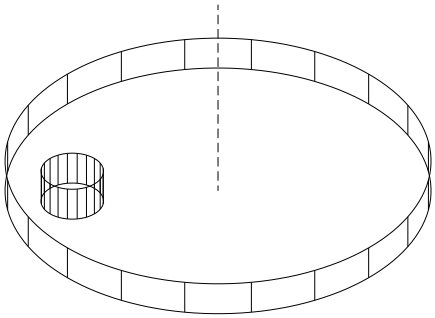
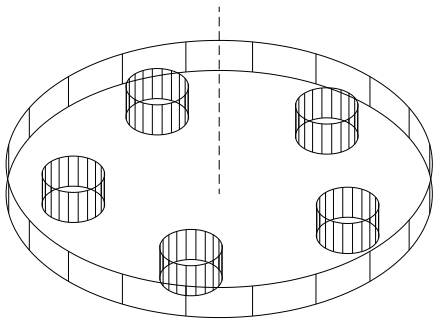
12.3. РАЗМНОЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫМ МАССИВОМ

Команда ***3DAarray*** (3М Массив) создает в пространстве копии объектов в виде прямоугольного или полярного массива. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) **→** ***3D Operation*** (3М операции) **→** ***3DAarray*** (3М Массив) или вводом в командную строку слова ***3DAarray*** с клавиатуры.

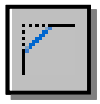
Выполнить упражнения № 117, 118.

Создать прямоугольный массив	***№ 117***
3DAarray Падающее меню ***Modify → 3D Operation → 3DAarray*** Select objects: указать объект для массива – цилиндрическое отверстие Select objects: Enter Enter the type of array [Rectangular/Polar] <R>: прямоугольный массив Enter the number of rows (---) <1>: 2 ввести число рядов (вдоль оси Y) Enter the number of columns (|||) <1>: 2 ввести число столбцов (вдоль оси X) Enter the number of levels (...) <1>: 2 ввести число уровней (вдоль оси Z) Specify the distance between rows (---): 30 расстояние между рядами Specify the distance between columns (|||): 90 расстояние между столбцами Specify the distance between levels (...): 20 расстояние между уровнями	
	

Команда ***3DAarray*** (3М Массив) отличается от аналогичной команды, применяемой в двухмерном моделировании, тем, что при создании прямоугольного массива объектов, кроме количества столбцов и строк, запрашивается количество уровней (задается вдоль оси ***Z*** от плоскости ***XY***), а при создании кругового (полярного) массива вместо центра вращения используется ось вращения, начальная и конечная точки которой задаются в ответ на запросы команды.

Создать полярный массив	***№ 118***
3DAarray Падающее меню ***Modify → 3D Operation → 3DAarray*** Select objects: указать объект для массива – цилиндрическое отверстие Select objects: Enter Enter the type of array [Rectangular/Polar] <R>:P полярный массив Enter the number of items in the array: 5 число элементов массива Specify the angle to fill (+=ccw, -=cw) <360>: задать угол для построения Rotate arrayed objects? [Yes/No] <Y>: поворачивать элементы массива вокруг оси Specify center point of array: указать первую точку, лежащую на оси массива Specify second point on axis of rotation: указать вторую точку, лежащую на оси массива	
	

12.4. ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФАСОК ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ



— Команда ***Chamfer*** (Фаска) позволяет создавать фаску (скошенную часть кромки) на пересечениях граней твердого тела, как и в двумерном пространстве. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Chamfer*** (Фаска) или щелчком мыши по пиктограмме ***Chamfer*** (Фаска) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

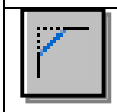
Опции команды:

- ***OK (current)*** (Да (текущая)) – используется для задания в качестве базовой текущей гран тела (при выборе, подсвеченной на графическом экране);
- ***Next*** (Следующая) – используется для выбора в качестве текущей соседней грани тела;
- ***Loop*** (Петля) – используется для задания создания фасок по всем ребрам базовой грани;
- ***Edge*** (Ребро) – используется для возврата в режим указания отдельных ребер.

При создании фасок между гранями твердых тел опции, предлагаемые системой в первом запросе, не используются (они применяются в двумерном моделировании).

Выполнить упражнения № 119, 120. При выполнении упражнения № 119 создать тело, используя команду ***Subtract*** (Вычитание).

Снять фаску с ребра параллелепипеда ***№ 119***



Chamfer Падающее меню ***Modify → Chamfer***

(NOTRIM mode) Current chamfer Dist1 = 10.0000, Dist2 = 10.0000

Select first line or [Polyline/Distance/Angle/Trim/Method/mUltiple]: указать точку A

Base surface selection... для выбора базовой поверхности

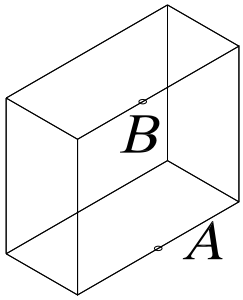
Enter surface selection option [Next/OK (current)] <OK>: Enter

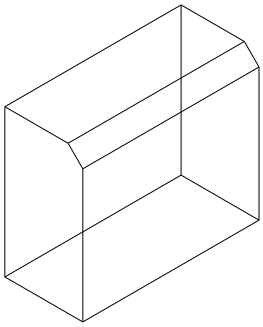
Specify base surface chamfer distance <10.0000>: 5 размер фаски на базовой поверхности

Specify other surface chamfer distance <10.0000>: 5 размер фаски на другой поверхности

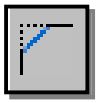
Select an edge or [Loop]: указать верхнюю границу ребра – точку B

Select an edge or [Loop]: Enter





Снять фаску с ребра трехмерного тела ***№ 120***



Chamfer Падающее меню ***Modify → Chamfer***

(TRIM mode) Current chamfer Dist1 = 40.0000, Dist2 = 40.0000

Select first line or [Polyline/Distance/Angle/Trim/Method/mUltiple]: указать точку A верхней грани объекта

Base surface selection...

Enter surface selection option [Next/OK (current)] <OK>: N режим выбора соседней грани (если на графическом экране при выборе подсвечивается другая грань)

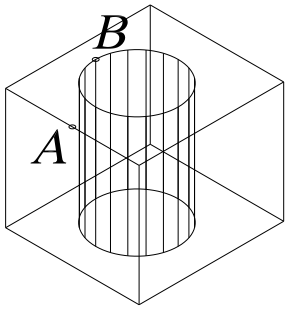
Enter surface selection option [Next/OK (current)] <OK>: Enter

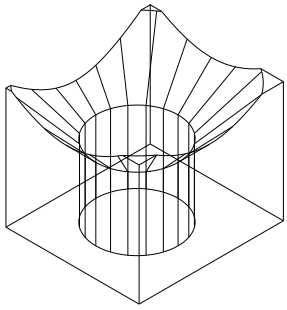
Specify base surface chamfer distance <40.0000>: 20 размер фаски на базовой поверхности

Specify other surface chamfer distance <40.0000>: 20 размер фаски на другой поверхности

Select an edge or [Loop]: указать верхнюю границу ребра – точку B

Select an edge or [Loop]: Enter





12.5. ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕНИЙ ГРАНЕЙ

— Команда ***Fillet*** (Сопряжение) – скругляет или сопрягает объекты дугой заданного радиуса. Вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактирование) → ***Fillet*** (Сопряжение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Fillet*** (Сопряжение) панели инструментов ***Modify*** (Редактирование).

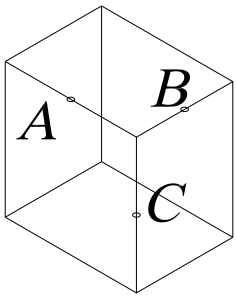
Опции команды ***Fillet*** (Сопряжение):

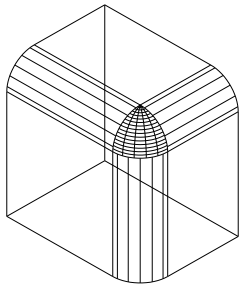
- ***Chain*** (Цепь) – используется для задания скруглений ребер, образующих цепочку;
- ***Edge*** (Ребро) – используется для возврата в режим указания отдельных ребер;
- ***Radius*** (Радиус) – используется для задания нового радиуса скругления.

Выполнить упражнения № 121, 122.

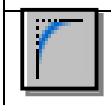
Построить сопряжения граней трехмерного тела ***№ 121***

Fillet Падающее меню ***Modify*** → ***Fillet***
Current settings: Mode = TRIM, Radius = 0.0000
Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: указать верхнее скругляемое ребро – точка A
Enter fillet radius: 10 радиус скругления
Select an edge or [Chain/Radius]: указать скругляемое ребро – точка B
Select an edge or [Chain/Radius]: указать скругляемое ребро – точка C
Select an edge or [Chain/Radius]: Enter
3 edge(s) selected for fillet.

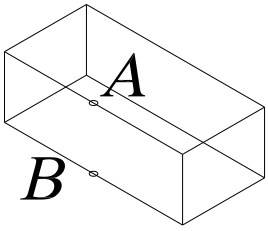


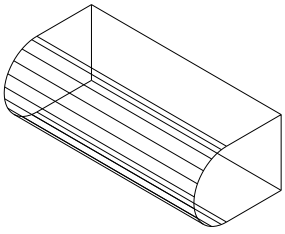


Построить сопряжение грани трехмерного тела ***№ 122***



Fillet Падающее меню ***Modify*** → ***Fillet***
Current settings: Mode = TRIM, Radius = 10.0000
Select first object or [Polyline/Radius/Trim/mUltiple]: указать верхнее ребро (точка A)
Enter fillet radius <10.0000>: 10 радиус скругления
Select an edge or [Chain/Radius]: указать верхнее ребро (точка B)
Select an edge or [Chain/Radius]: Enter





При создании скруглений ребер твердых тел опции, предлагаемые системой в первом запросе, не используются (они применяются в двумерном моделировании).

12.6. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

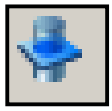
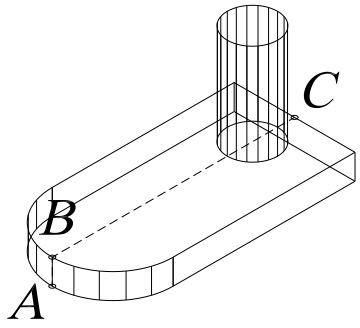
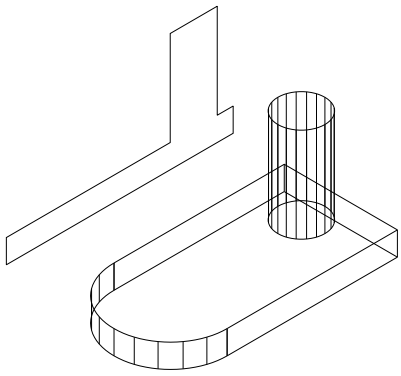
– Команда ***Section*** (Сечение) – позволяет построить сечения (в виде замкнутых областей) твердотельных объектов. Вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Section*** (Сечение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Section*** (Сечение) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды:

- ***Object*** (Объект) – используется для задания секущей плоскости, совпавшей с плоскостью объекта. Такими объектами могут быть отрезок, окружность, дуга или сегмент двумерной полилинии;
- ***Zaxis*** (Z ось) – используется для задания секущей плоскости, заданной двумя точками, первая из которых лежит на плоскости, а вторая определяет вектор нормали к этой плоскости;
- ***View*** (Вид) – используется для задания секущей плоскости, выровненной с плоскостью видового экрана, то есть параллельной плоскости экрана;
- ***XY*** (XY), ***YZ*** (YZ), ***ZX*** (ZX) – используется для задания секущей плоскости, параллельной плоскости соответственно ***XY***, ***YZ*** или ***ZX*** текущей системы координат и проходящей через заданную точку;
- ***3point*** (3 точки) – сечение относительно плоскости, проходящей через три заданные точки.

В результате выполнения команды создаются объекты типа ***Region***. При применении к этим объектам команды ***Explode*** они разбиваются на отдельные линии, дуги или окружности.

Выполнить упражнение № 123.

Построить сечение трехмерного тела	***№ 123***
 ***Section*** Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Section*** Select objects: указать объект Select objects: Enter Specify first point on Section plane by [Object/Zaxis/View/XY/YZ/ZX/3points] <3points>: указать точку A Specify second point on plane: указать точку B Specify third point on plane: указать точку C Переместить полученное сечение.	
	

12.7. ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕЗОВ

– Команда ***Slice*** (Разрез) – позволяет разрезать набор тел плоскостью и при необходимости удалить отсеченные части объектов. Вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Slice*** (Разрез) или щелчком мыши по пиктограмме

Slice (Разрез) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды:

- ***Object*** (Объект) – используется для задания секущей плоскости, совпавшей с плоскостью объекта. Такими объектами могут быть отрезок, окружность, дуга или сегмент двумерной полилинии;
- ***Zaxis*** (Z ось) – используется для задания секущей плоскости, заданной двумя точками, первая из которых лежит на плоскости, а вторая определяет вектор нормали к этой плоскости;
- ***View*** (Вид) – используется для задания секущей плоскости, выровненной с плоскостью видового экрана, то есть параллельной плоскости экрана;
- ***XY*** (XY), ***YZ*** (YZ), ***ZX*** (ZX) – используется для задания секущей плоскости, параллельной плоскости соответственно ***XY***, ***YZ*** или ***ZX*** текущей системы координат и проходящей через заданную точку;
- ***3point*** (3 точки) – разрез относительно плоскости, проходящей через три заданные точки;
- ***keep Both sides*** (сохранить Обе стороны) – оставляет обе части разрезанного тела.

Выполнить упражнение № 124.

Построить разрез трехмерного тела ***№ 124***

Slice Падающее меню ***Draw*** → ***Solids*** → ***Slice***

Select objects: указать объект

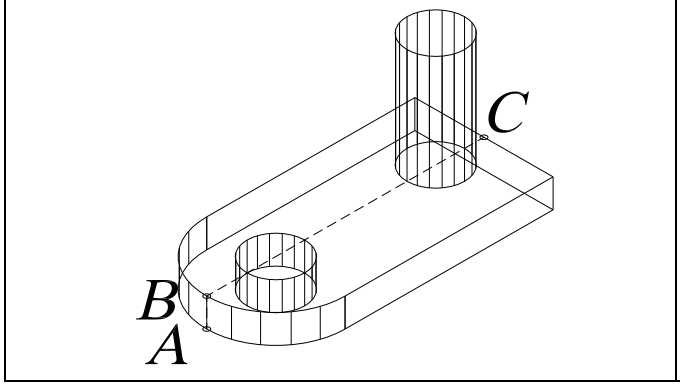
Select objects: Enter

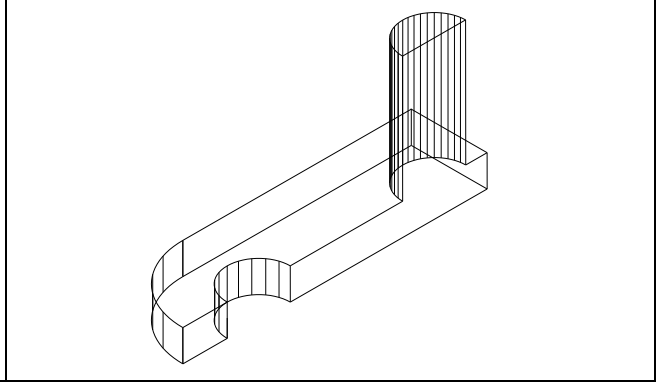
Specify first point on slicing plane by [Object/Zaxis/View/XY/YZ/ZX/3points] <3points>: указать точку A

Specify second point on plane: указать точку B

Specify third point on plane: указать точку C

Specify a point on desired side of the plane or [keep Both sides]: указать курсором точку той части тела, которую надо оставить.





13. РЕДАКТИРОВАНИЕ ГРАНЕЙ, РЕБЕР, ТЕЛ

Команда ***Solidedit*** (Редактирование твердотельных объектов) используется для выполнения следующих возможных действий: выдавливание, перенос, поворот, смещение, изменение формы тела путем наклона, удаление, копирование, изменение цвета. Команды вызываются из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Editing*** (Редактирование тел) или щелчком мыши по пиктограммам плавающей панели инструментов ***Solids Editing*** (Редактирование тел).

При вызове команды на первый запрос необходимо ввести опцию редактирования тел:

- ***Face*** (Грань) – используется для перехода в режим редактирования граней твердого тела;
- ***Edge*** (Ребро) – используется для перехода в режим редактирования ребер твердого тела;
- ***Body*** (Тело) – используется для редактирования общих свойств тела;
- ***Undo*** (Отменить) – используется для отмены последнего результата редактирования;
- ***eXit*** (Выход) – используется для завершения работы с командой.

13.1. РЕЖИМ РЕДАКТИРОВАНИЯ ГРАНЕЙ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

На первый запрос команды ***Solids Editing*** (Редактирование тел) в режиме редактирования ***Face*** (Грань), которая вызываются из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Editing*** (Редактирование тел) или щелчком мыши по пиктограммам плавающей панели инструментов ***Solids Editing*** (Редактирование тел), необходимо выбрать одну из следующих опций данной команды:

- ***Extrude*** (Выдавить) – используется для изменения формы тела путем «выдавливания» одной из граней;
- ***Move*** (Переместить) – используется для изменения формы тела путем переноса его граней;
- ***Rotate*** (Поворот) – используется для изменения формы тела путем поворота его граней;
- ***Offset*** (Сместить) – используется для изменения формы тела путем эквидистантного смещения его граней на определенное расстояние;
- ***Taper*** (Сузить) – используется для изменения формы тела путем наклона его граней;
- ***Delete*** (Удалить) – используется для изменения формы тела путем удаления его отдельных граней;
- ***Copy*** (Копировать) – используется для создания поверхности, повторяющей конфигурацию граней тела;
- ***coLor*** (или ***L***) (Цвет) – используется для изменения цвета граней тела;
- ***Undo*** (Отменить) – используется для отмены последней операции редактирования граней;
- ***eXit*** (или ***X***) (Выход) – используется для возврата к первому запросу системы при вызове команды ***Solidedit*** (Редактирование твердотельных объектов).

Выполнить упражнения № 125- 132.

Выдавить грань трехмерного тела ***№ 125***

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing → Extrude faces***

Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1

Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face режим граней

Enter a face editing option

[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _extrude

Select faces or [Undo/Remove]: указать точку A (R используется для исключения грани из набора выбранных граней)

Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter

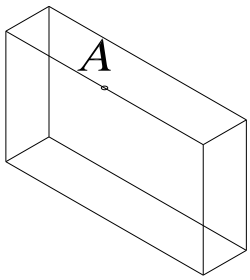
Specify height of extrusion or [Path]: 20 высота выдавливания

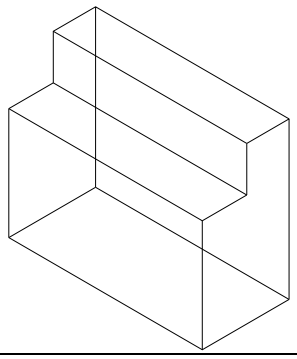
Specify angle of taper for extrusion <0>: угол

Enter a face editing option

[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Enter

Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: Esc





Выдавить грань трехмерного тела ***№ 126***

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing → Extrude faces***

Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1

Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face режим граней

Enter a face editing option

[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _extrude

Select faces or [Undo/Remove]: указать точку A на передней грани параллелепипеда

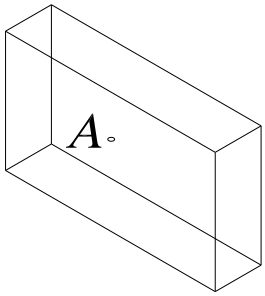
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter

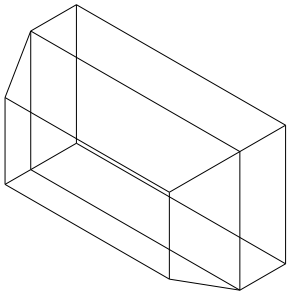
Specify height of extrusion or [Path]: 20 высота выдавливания

Specify angle of taper for extrusion <0>: 25 угол

Enter a face editing option

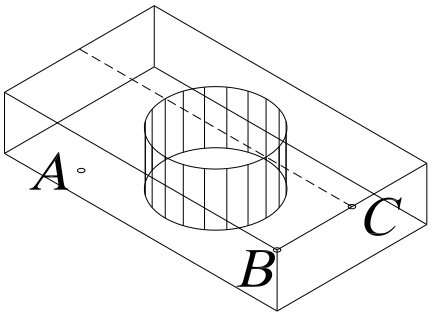
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc

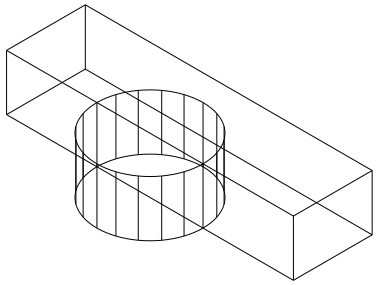




Переместить грань трехмерного тела	*№ 127*

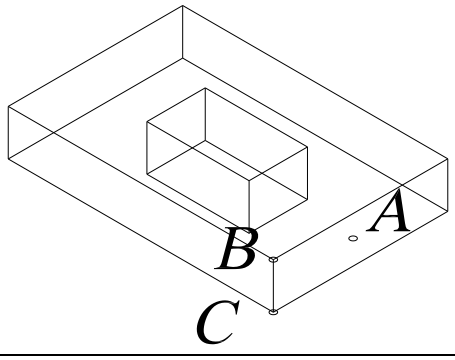
Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing→ Move faces***
Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face грань
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _move
Select faces or [Undo/Remove]: указать боковую грань (точка A)
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Specify a base point or displacement: указать точку B
Specify a second point of displacement: указать точку C
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc

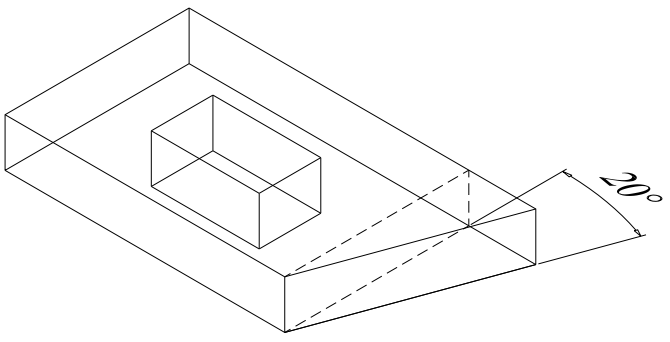




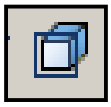
Повернуть грань трехмерного тела	*№ 128*

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing→ Rotate faces***
Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _rotate
Select faces or [Undo/Remove]: указать боковую грань (точка A)
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Specify an axis point or [Axis by object/View/Xaxis/Yaxis/Zaxis] <2points>: точка B
Specify the second point on the rotation axis: точка C на оси поворота
Specify a rotation angle or [Reference]: 20 угол поворота
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc



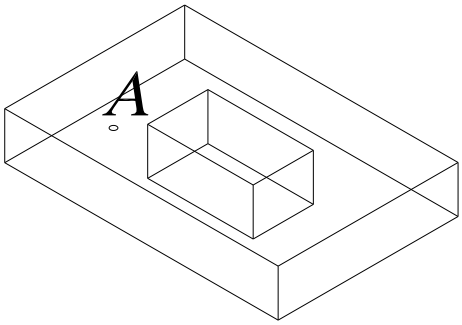


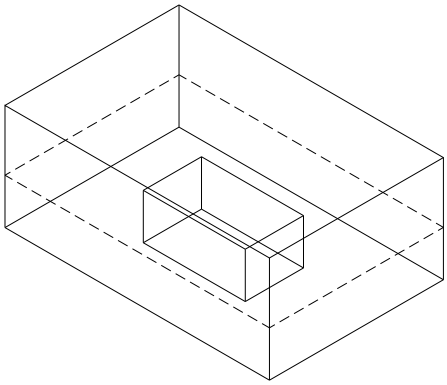
Сместить грань трехмерного тела *№ 129*



Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing → Offset faces***

Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _offset
Select faces or [Undo/Remove]: указать верхнюю грань (точка A)
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Specify the offset distance: 20 величина смещения
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc

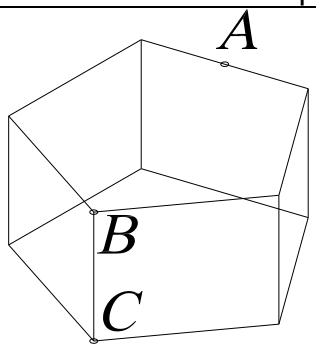


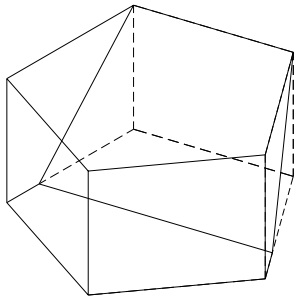


Наклонить грань трехмерного тела *№ 130*

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing → Taper faces***

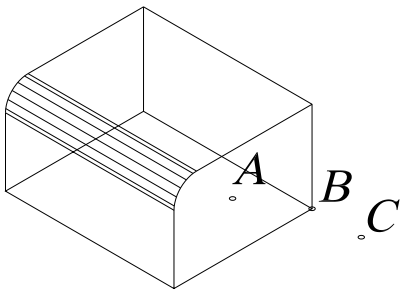
Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _taper
Select faces or [Undo/Remove]: указать точку A
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Specify the base point: указать базовую точку B
Specify another point along the axis of tapering: указать точку C на оси
Specify the taper angle: 40 угол наклона грани
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc

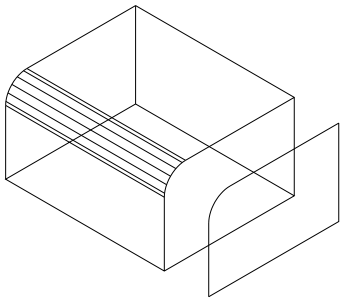




Скопировать грань трехмерного тела	*№ 131*

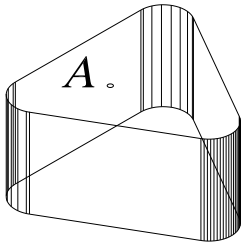
Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing→ Copy faces***
Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _copy
Select faces or [Undo/Remove]: указать боковую грань (точка A)
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Specify a base point or displacement: указать базовую точку B
Specify a second point of displacement: указать точку C
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc

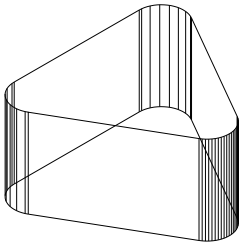




Изменить цвет грани трехмерного тела	*№ 132*

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing→ CoLor faces***
Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _face
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: _color
Select faces or [Undo/Remove]: указать верхнюю грань (точка A)
Select faces or [Undo/Remove/ALL]: Enter
Enter a face editing option
[Extrude/Move/Rotate/Offset/Taper/Delete/Copy/coLor/Undo/eXit] <eXit>: Esc





13.2. РЕЖИМ РЕДАКТИРОВАНИЯ РЕБЕР ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

На первый запрос команды ***Solids Editing*** (Редактирование тел) в режиме редактирования ***Edge*** (Ребро), которая вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Editing*** (Редактирование тел) или щелчком мыши по пиктограммам плавающей панели инструментов ***Solids Editing*** (Редактирование тел), необходимо выбрать одну из следующих опций данной команды:

- ***Copy*** (Копировать) – используется для создания объектов, повторяющих конфигурацию ребер тела (дальнейшие действия аналогичны выполнению команды ***Copy*** в двумерном пространстве);

- ***coLor*** (или ***L***) (Цвет) – используется для изменения цвета ребер тела;
- ***Undo*** (Отменить) – используется для отмены последней операции редактирования ребер;
- ***eXit*** (или ***X***) (Выход) – используется для возврата к первому запросу системы при вызове команды ***Solids Editing*** (Редактирование тел).

13.3. РЕЖИМ РЕДАКТИРОВАНИЯ ОБЩИХ СВОЙСТВ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

На первый запрос команды ***Solids Editing*** (Редактирование тел) в режиме редактирования ***Body*** (Тело), которая вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Editing*** (Редактирование тел) или щелчком мыши по пиктограммам плавающей панели инструментов ***Solids Editing*** (Редактирование тел), необходимо выбрать одну из следующих опций данной команды:

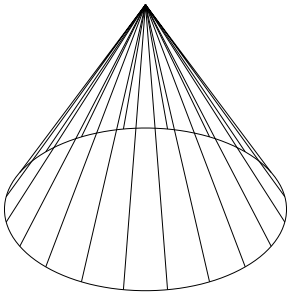
- ***Imprint*** (Вписать 0 – используется для построения линий пересечения тела с другими объектами (Yes (Да) – используется, если после построения линии пересечения объект, которому эта линия соответствует, должен быть удален; No (Нет) – используется, если удалять объект не надо);
- ***seParate solids*** (или ***P***) (Разделить) – используется для разделения на самостоятельные тела объектов, которые воспринимаются системой как единые тела, но физически ими на являются (например, тела, полученные в результате действия команды ***Subtract*** (Вычитание) или ***Union*** (Объединение);
- ***Shell*** (Оболочка) – используется для формирования твердотельной оболочки на основе указанного тела, то есть создает эквидистантные поверхности;
- ***cLean*** (или ***L***) (Очистить) – используется для удаления с поверхности тела, указанного пользователем, всех линий пересечения этого тела с другими объектами;
- ***Check*** (Проверить) – используется для перевода твердотельного объекта, указанного пользователем, в формат ***ACIS***, имеющий более широкие возможности по вычислению формы тел сложной конфигурации;
- ***Undo*** (Отменить) – используется для отмены последней операции редактирования свойств тела;
- ***eXit*** (или ***X***) (Выход) – используется для возврата к первому запросу системы при вызове команды ***Solids Editing*** (Редактирование тел).

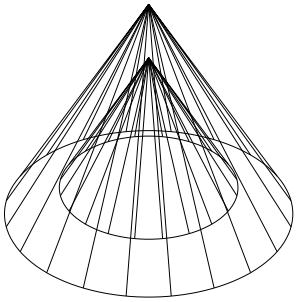
Выполнить упражнение № 133.

Создать оболочку трехмерного тела	*№ 133*

Solidedit П. м. ***Modify → Solids Editing→ Shall***

Solids editing automatic checking: SOLIDCHECK=1
Enter a solids editing option [Face/Edge/Body/Undo/eXit] <eXit>: _body
Enter a body editing option
[Imprint/seParate solids/Shell/cLean/Check/Undo/eXit] <eXit>: _shell
Select a 3D solid: указать тело (указать на теле произвольную точку)
Remove faces or [Undo/Add/ALL]: Enter
Enter the shell offset distance: 10 толщина оболочки
Enter a body editing option
[Imprint/seParate solids/Shell/cLean/Check/Undo/eXit] <eXit>: Esc





14. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим построение на примере создания трехмерной модели детали, чертеж которой представлен на рис. 166. Ниже описана лишь одна из возможных последовательностей моделирования данного изделия.

1. Создать новый рисунок с помощью команды ***NEW*** (НОВЫЙ), вызываемой из падающего меню ***File*** (Файл)→***New***…(Новый…), или щелчком по пиктограмме ***New*** (Новый) стандартной панели инструментов.

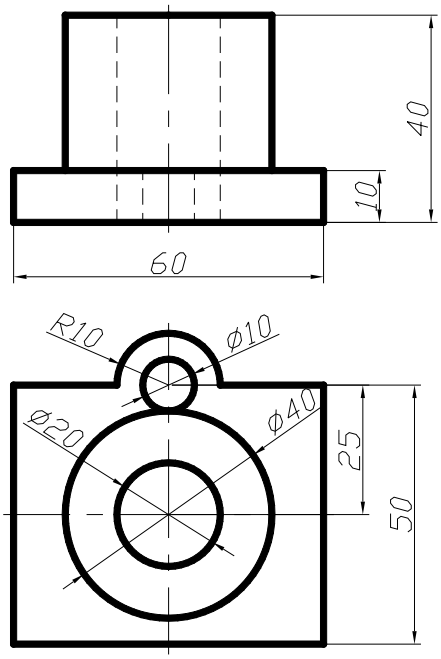


Рис. 166.

2. Для вызова мастера подготовки в диалоговом окне ***Create New Drawing*** (Создание нового рисунка) выбрать пиктограмму ***Use a Wizard*** (Вызов мастера). Далее в списке ***Select a Wizard:*** (Выберите Мастера:) выбрать ***Quick Setup*** (Быстрая подготовка).

3. В диалоговом окне ***Quick Setup*** (Быстрая подготовка) при определении области черчения ***Area*** (Площадь) установить размеры чертежа 210x297 (формат А4).

4. Щелчком мыши на кнопке ***GRID*** (Сетка) в строке состояния (или клавишей ***F7***) включить отображение сетки на графическом экране.

5. Отобразить всю область чертежа на экране командой ***Zoom*** (Показать), вызываемой из падающего меню ***View*** (Вид)→ ***Zoom*** (Показать)→***All*** (Все), или щелчком по пиктограмме ***Zoom All*** (Показать все) стандартной панели инструментов.

6. Сохранить рисунок с помощью команды

QSAVE (БСОХРАНИТЬ), вызываемой из падающего меню ***File*** (Файл)→***Save*** (Сохранить) или щелчком мыши по пиктограмме ***Save*** (Сохранить) стандартной панели инструментов.

7. Установить значение системной переменной ***ISOLINES***, равное 10, что соответствует количеству образующих линий, отображаемых на кривых поверхностях.
8. Создать три видовых экрана с помощью команды ***VPORTS*** (ВЭКРАН), которая вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***Viewports*** (Видовые экраны) → ***New Viewports…***(Новые Видовые экраны…) или щелчком мыши по пиктограмме ***Display Viewports Dialog*** (Диалоговое окно видовых экранов) в стандартной или плавающей панели инструментов ***Viewports*** (Видовые экраны), см. упражнение № 90.
9. Установить направление взгляда в трех видовых экранах, см. упражнение 91. Команда ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) позволяет задать направление взгляда при определении вида и вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D View*** (3М Виды) → ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) или вводом в командную строку слова ***DDVPOINT*** с клавиатуры.
10. С помощью команд ***Pline*** (Полилиния) и ***Circle*** (Окружность) создать горизонтальную проекцию детали.
11. Используя команду ***Extrude*** (Выдавить), которая вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела)→ ***Extrude*** (Выдавить) или щелчком мыши по пиктограмме ***Extrude*** (Выдавить) панели инструментов ***Solids*** (Тела), «выдавить» полученную горизонтальную проекцию на соответствующие величины.
12. Выполнить логические преобразования. Объединить параллелепипед и внешний большой цилиндр с помощью команды ***Union*** (Объединение), которая вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) → ***Union*** (Объединение) или щелчком мыши по пиктограмме ***Union*** (Объединение) плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел). Затем из полученного тела вычесть внутренний большой и маленький цилиндры с помощью команды ***Subtract*** (Вычитание). Команда ***Subtract*** (Вычитание) вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редактировать) → ***Solids Edition*** (Правка тел) → ***Subtract*** (Вычитание) или щелчком мыши по пиктограмме ***Subtract*** (Вычитание) плавающей панели инструментов ***Solids Edition*** (Правка тел).
13. Подавить невидимые линии командой ***HIDE*** (СКРЫТЬ), вызываемой из падающего меню ***View*** (Вид)→***Hide*** (Скрыть линии) или щелчком мыши по пиктограмме ***Hide*** (Скрыть линии) плавающей панели инструментов ***Render*** (Тонировать).
14. Перейти из пространства модели в пространство листа щелчком мыши по закладке ***Layout 1*** (Лист 1).
15. В диалоговом окне ***Page Setup*** (Параметры листа)→***Layout*** (Лист), задать параметры листа (210x297) и устройства печати.
16. Удалить имеющийся вид на листе, щелкнув на границе видового экрана и нажав клавишу ***Delete*** (Удалить).
17. Вставить в рисунок рамку формата А4 (при условии, что эта заготовка (блок) уже существует). Вставка осуществляется командой ***INSERT*** (ВСТАВИТЬ), вызываемой из падающего меню ***Insert*** (Вставка)→***Block***… (Блок…) или по пиктограмме ***Insert Block*** (Вставить блок) панели инструментов ***Draw*** (Рисование).

Для получения блока, которым можно воспользоваться при создании любых чертежей в ***AutoCAD***, применяется команда ***WBLOCK*** (ПБЛОК). Она загружает окно ***White Block*** (Запись блока на диск), показанное на рис. 167, в котором следует указать блок или объект, записываемый в отдельный файл. Описание блока сохраняется в отдельном рисунке.

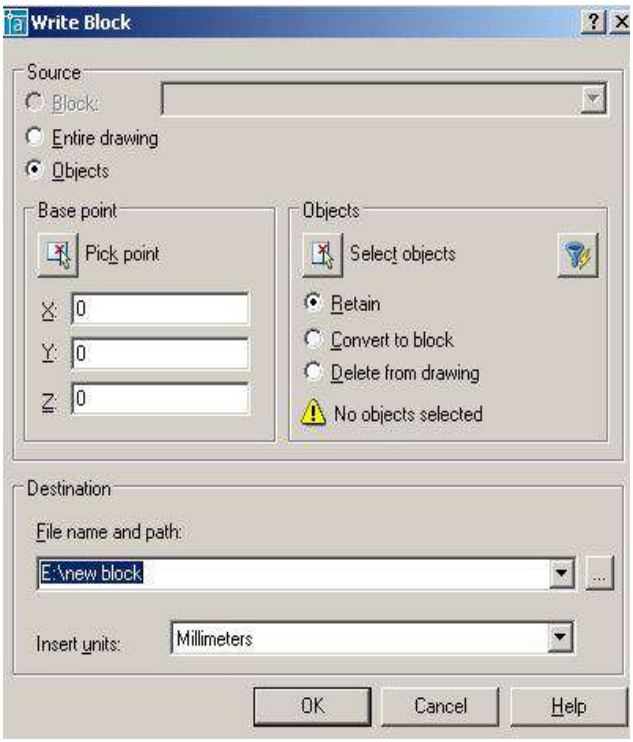


Рис. 167.

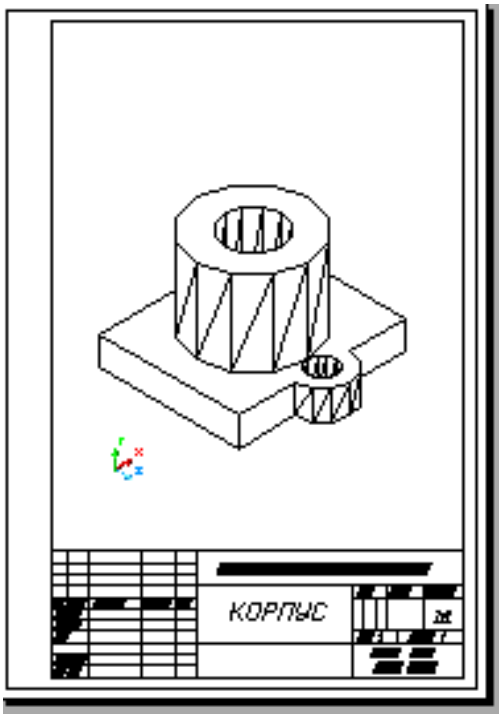


Рис. 168.

18. Создать на листе видовой экран с помощью команды ***VPORTS*** (ВЭКРАН), которая вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***Viewports*** (Видовые экраны) → ***Single*** (1 Вид), а затем указать мышью на графическом экране первый угол видового экрана и второй угол видового экрана.

19. Установить изометрический вид, для чего нужно «войти» в пространство модели (щелкнув два раза клавишей внутри полученной рамки). Затем отредактировать вид, используя команду ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения), которая вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) → ***3D View*** (3М Виды) → ***DDVPOINT*** (Диалоговое окно точки зрения) или вводом в командную строку слова ***DDVPOINT*** с клавиатуры.

20. Удалить рамку видового экрана, для этого необходимо выделить рамку, щелкнув клавишей на ней, и «заморозить» слой ***VPORTS*** (этот слой автоматически создается при работе с видовыми окнами).

21. В пространстве листа заполнить основную надпись. Для выхода в пространство листа нужно щелкнуть два раза клавишей за пределами видового окна. Чертеж, полученный в результате работы, приведен на рис. 168.

15. ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ ВИДОВЫЕ ЭКРАНЫ. СОЗДАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Команда ***SOLVIEW*** (Настройка вида) автоматизирует процесс создания *перекрывающихся видовых экранов* и ортогональных проекций – проекций на взаимно перпендикулярные плоскости. Команда вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела) → ***Setup*** (Настройка) → ***View*** (Вид) или щелчком мыши по пиктограмме ***Setup view*** (Настройка вида) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

Опции команды:

- ***UCS*** (ПСК – пользовательская система координат) – создает вид, параллельный плоскости ***XY*** пользовательской системы координат, которую требуется указать в последующем запросе.

- ***Ortho*** (Ортогональный) – создает вид, перпендикулярный существующему виду, то есть создает ортогональные проекции;
- ***Auxiliary*** (Вспомогательный) – создает дополнительный наклонный вид относительно существующего вида, то есть получаемый на плоскости, непараллельный основным плоскостям проекций;
- ***Section*** (Сечение) – служит для формирования разрезов.

Для каждого создаваемого командой ***SOLVIEW*** (Настройка вида) видового экрана автоматически создается несколько новых слоев. Эти слои имеют имя, совпадающее с именем видового экрана, к которому добавляются расширения, состоящие из трех букв:

- ***DIM*** – слой для размеров;
- ***HAT*** – слой штриховки (только при построении разрезов);
- ***HID*** – слой невидимых линий;
- ***VIS*** – слой видимых линий.

Эти слои можно использовать только для работы с видами, созданными системой ***AutoCAD***. Помимо указанных слоев команда ***SOLVIEW*** (Настройка вида) создает слой VPORTS, на котором размещается общая информация о всех видовых экранах, созданных командой, например, рамки, ограничивающие видовые экраны (если этот слой заморозить, то рамки станут невидимыми).

Замечания:

- Задачи моделирования, такие, как создание и редактирование геометрических объектов, обычно выполняются на вкладке графического поля экрана ***Model*** (Модель). Задачи оформления чертежа, такие, как создание и размещение проекций, проведение осей симметрии, нанесение условных обозначений, выполняются на вкладке графического поля экрана ***Layout*** (Лист). Размеры обычно проставляются на вкладке ***Model*** (Модель).
- На вкладке ***Layout*** (Лист) можно работать как в пространстве модели, так и в пространстве листа. Для того чтобы сделать текущим пространство модели, необходимо поместить курсор мыши в нужный видовой экран и дважды щелкнуть левой клавишей. Для перехода в пространство листа надо переместить указатель за границы видовых экранов и дважды щелкнуть левой клавишей мыши. Можно также переключаться из пространства модели в пространство листа при помощи кнопки в строке состояния.

После созданных плавающих видовых экранов выполняется команда ***SOLDRAW*** (Настройка рисования), которая формирует плоские изображения видов и разрезов в плавающих видовых экранах. При этом строятся видимые и невидимые линии, создающие очерки и ребра тела, а в разрезах выполняется штриховка по установленному шаблону. Команда вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисование) → ***Solids*** (Тела) → ***Setup*** (Подготовка) → ***Drawing*** (Построение) или через командную строку. В ответ на последовательность запросов ***Select object:*** следует указать рамки всех видовых экранов.

ПРИМЕР. Построить твердотельную модель и создать на основании построенной твердотельной модели детали (рис. 166) следующие проекции: фронтальный вид, горизонтальный и профильный разрез.

Создается твердотельная модель (описание построения см. в предыдущем параграфе). Затем используют следующий алгоритм.

1. Установить пользовательскую систему координат (ПСК) параллельно главному виду детали. Для этого необходимо воспользоваться командой ***UCS*** (ПСК), вызвав её из падающего меню ***Tools*** (Сервис) → ***New UCS*** (Новая ПСК) → ***3 Point*** (3 Точки) или из стандартной панели инструментов ***UCS*** (ПСК).

2. Перейти из пространства модели в пространство листа щелчком мыши по закладке ***Layout 1*** (Лист 1).
3. В диалоговом окне ***Page Setup*** (Параметры листа) → ***Layout*** (Лист), задать параметры листа (210x297) и устройства печати.
4. Удалить имеющийся вид на листе, щелкнув на границе видового экрана и нажав клавишу ***Delete*** (Удалить).
5. Вставить в рисунок рамку формата А4 (при условии, что эта заготовка (блок) уже существует). Вставка осуществляется командой ***INSERT*** (ВСТАВИТЬ), вызываемой из падающего меню ***Insert*** (Вставка) → ***Block***… (Блок…) или по пиктограмме ***Insert Block*** (Вставить блок) панели инструментов ***Draw*** (Рисование).
6. Создать на чертеже видовые экраны со следующими видами: видом спереди, видом сверху и профильным разрезом, используя команду ***SOLVIEW*** (Настройка вида), которая вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисовать) → ***Solids*** (Тела) → ***Setup*** (Настройка) → ***View*** (Вид) или щелчком мыши по пиктограмме ***Setup view*** (Настройка вида) панели инструментов ***Solids*** (Тела).

1) *Получение главного вида – фронтальной проекции детали:*

Enter an option [Ucs/Ortho/Auxiliary/Section]: U
Enter an option [Named/World/?/Current] <Current>: Enter
Enter view scale <1>: указать масштаб
Specify view center: указать центр вида, подбирая последовательными щелчками наиболее удачное его расположение
Specify view center <specify viewport>: Enter
Specify first corner of viewport: указать первый угол видового экрана
Specify opposite corner of viewport: указать второй угол видового экрана
Enter view name: Front – ввести имя формируемого вида

2) *Получение вида сверху – горизонтальной проекции детали:*

Enter an option [Ucs/Ortho/Auxiliary/Section]: O ортогональный режим
Specify side of viewport to project: указать верхнюю границу видового экрана главного вида
Specify view center: указать центр вида, подбирая последовательными щелчками наиболее удачное его расположение
Specify view center <specify viewport>: Enter
Specify first corner of viewport: указать первый угол видового экрана
Specify opposite corner of viewport: указать второй угол видового экрана
Enter view name: Top – ввести имя формируемого вида

3) *Получение профильного разреза:*

Enter an option [Ucs/Ortho/Auxiliary/Section]: S – сечение
Specify first point of cutting plane: _cen – указать на горизонтальной проекции первую точку режущей плоскости при помощи объектной привязки – центр окружности
Specify second point of cutting plane: @0,0,60 – указать на главном виде вторую точку режущей плоскости при помощи относительных координат
Specify side to view from: указать на виде сверху сторону, которая остается на изображении.
Enter view scale <1>: Enter
Specify view center: указать центр вида
Specify view center <specify viewport>: Enter
Specify first corner of viewport: указать первый угол видового экрана
Specify opposite corner of viewport: указать второй угол видового экрана
Enter view name: Section – ввести имя формируемого вида
Enter an option [Ucs/Ortho/Auxiliary/Section]: Enter – завершить работу.

В результате получается изображение, представленное на рис. 169.

7. Выполняют команду ***SOLDRAW*** (Настройка рисования) для формирования в каждом видовом экране плоских изображений. При этом на разрез наносится штриховка (по образцу ***Angle***); все невидимые линии в каждом видовом экране помещаются на слои с суффиксом ***HID*** (<имя>-***HID***), а видимые – на слои с суффиксом ***VIS***. Вызывается из падающего меню ***Draw*** (Рисование) → ***Solids*** (Тела) → ***Setup*** (Подготовка) → ***Drawing*** (Построение) или через командную строку.

1. Меняют шаблон штриховки. Для этого переходят в пространство модели, выделяют видовой экран «разрез», затем щелчком левой клавиши мыши выделяют штриховку и вызывают контекстное меню щелчком правой клавиши мыши. В контекстном меню выбирают команду ***HATCHEDIT*** (Редактирование штриховки) и в раскрывшемся диалоговом окне выбирают шаблон штриховки ***ANSI31***.
2. Удаляют невидимые линии на всех проекциях, кроме вида спереди. Для этого «замораживают» соответствующие слои.
3. В пространстве листа наносят оси симметрии.
4. Удаляют рамки видовых экранов, для чего «замораживают» слой ***VPORTS***.
5. На слоях ***VIS*** устанавливают толщину 0,3 мм.
6. В пространстве модели «размораживают и устанавливают текущим слой видового экрана, содержащего вид спереди, с суффиксом DIM, и проставляют необходимые размеры.
7. В пространстве листа заполняют основную надпись. Чертеж, полученный в результате работы, приведен на рис. 170.

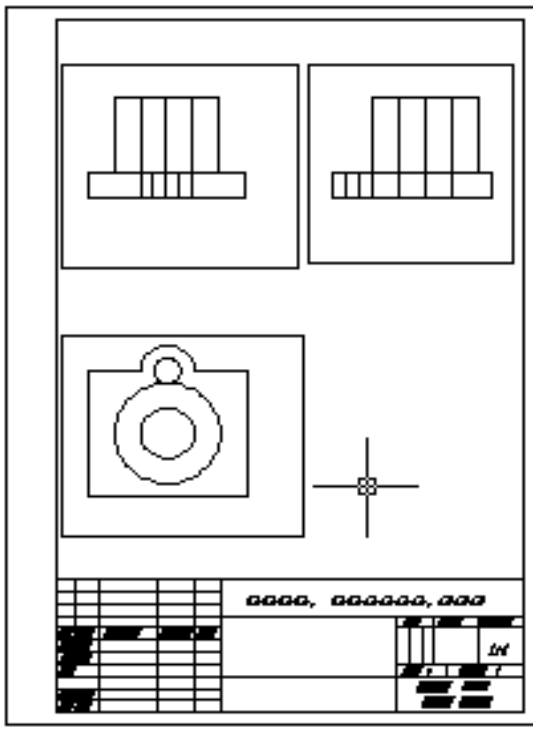


Рис. 169.

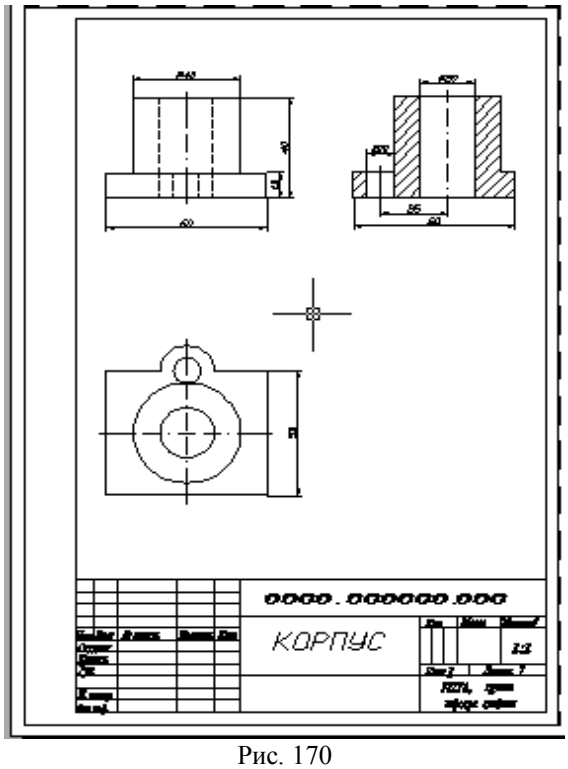


Рис. 170

16. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРЁХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

В процессе создания трёхмерной модели какого-либо изделия пользователь имеет дело с *каркасным* представлением модели. Все грани моделируемого объекта прозрачны, а потому на экране отображаются как видимые, так и невидимые ребра и изолинии криволинейных поверхностей. Программа ***AutoCAD*** предоставляет в распоряжение пользователя разнообразные средства, позволяющие получить изображение трёхмерного объекта, близкое к ре-

альному. По степени сложности выполняемого преобразования и соответственно по качеству результата получаемые с помощью этих средств представления объекта на экране можно разделить на три группы:

- изображения со *скрытием невидимых линий и поверхностей* (***HIDE***);
- раскрашенные изображения *с нанесением теней* (***SHADE***);
- тонированные изображения с учетом характеристик материала, из которого «создан» объект, характеристик источников освещения и их расположения (***RENDER***).

16.1. УДАЛЕНИЕ НЕВИДИМЫХ ЛИНИЙ

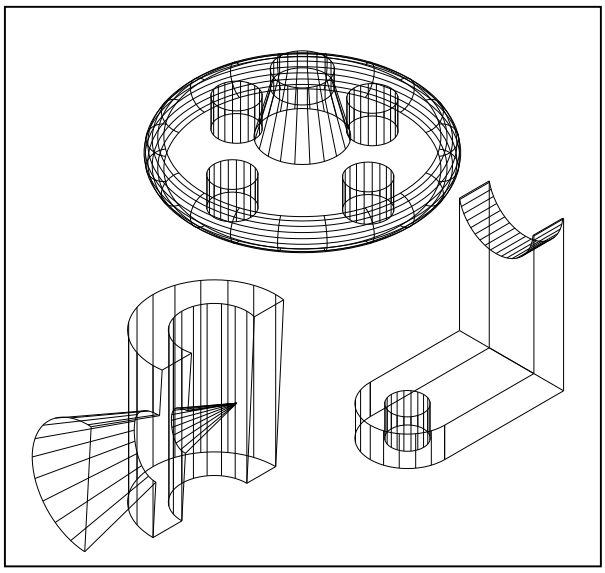
Сложные трёхмерные объекты часто оказываются перегруженными множеством линий, что затрудняет чтение и просмотр результатов выполнения какой-либо команды. Команда ***HIDE*** (СКРЫТЬ) позволяет подавить скрытые (невидимые с данной точки зрения) линии. Команда ***HIDE*** (СКРЫТЬ) вызывается из падающего меню ***View*** (Вид) ⇒ ***Hide*** (Скрыть) или щелчком мыши по пиктограмме ***Hide*** (Скрыть) плавающей панели инструментов ***RENDER*** (ТОНИРОВАТЬ).

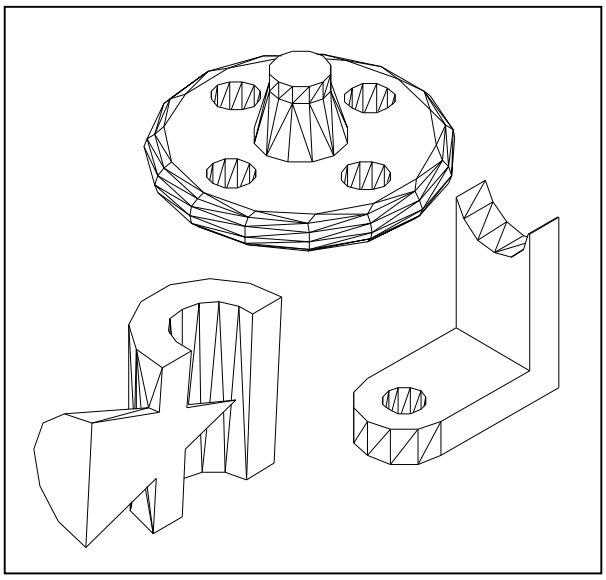
Выполнить упражнение № 134.

Удалить невидимые линии ***№ 134***

HIDE

Падающее меню ***VIEW → HIDE***





16.2. РАСКРАШИВАНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Раскрашивание – это упрощённая версия тонирования в ***AutoCAD***. Раскрашивание используется, когда необходимо быстро получить наглядное представление модели, особенно включающей пространственные объекты с поверхностями. При этом предусматривается наличие одного источника света, который автоматически размещается позади камеры. Для выполнения раскрашивания выберите в меню ***View*** (Вид) ⇒ ***Shade*** (Раскрашивание) или введите в командную строку команду ***SHADEMODE***. Ниже перечислены опции этой команды.

- ***2D wireframe*** (2М каркас). Отображение объектов в привычной каркасной модели без всякого раскрашивания;
- ***3D wireframe*** (3М каркас). Отображение объектов в виде каркасной модели, но вместе с трёхмерной пиктограммой ПСК;
- ***Hidden*** (Срыть). Эквивалентна выполнению команды **HIDE**;
- ***Flat Shaded*** (Без тени).Формирование «плоской» без полутонов заливки областей, ограниченных контурами граней. При этом не учитывается ориентация граней, а соответственно и изменение вследствие этого их освещённости;
- ***Gouraud shaded*** (Гуро). Формирование сглаженного полутонового перехода между поразному ориентированными гранями. В результате создаётся реалистичное представление объекта, подчёркивающее его криволинейную пространственную форму;
- ***Flat Shaded, Edges On*** (Без тени с кромками). Комбинация плоской заливки с каркасным представлением ребер. Именно этот вариант рекомендуется устанавливать при выполнении редактирования раскрашенных объектов;
- ***Gouraud shaded, Edges On*** (Гуро с кромками). Комбинация раскрашивания по методу Гуро с выводом каркасного представления рёбер. Этот вариант также рекомендуется устанавливать при выполнении редактирования раскрашенных объектов.

16.3. ТОНИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТРЁХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Панель инструментов RENDER (Тонировать) (рис.171).

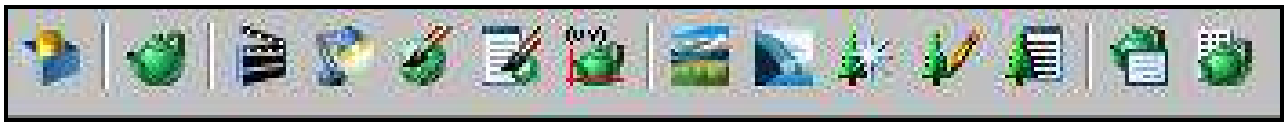
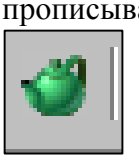


Рис. 171.

Плавность тонированных тел с криволинейными поверхностями регулирует системная переменная ***FACETRES***. Она связана с точностью аппроксимации, заданной в команде ***VIEWRES*** (НАСТРВИД). Если значение системной переменной ***FACETRES*** равно 1, степень аппроксимации криволинейных поверхностей тел равна степени аппроксимации окружностей, дуг и эллипсов. Если этой переменной присвоить значение 2, точность аппроксимации для тел будет вдвое выше, чем для окружностей, дуг и эллипсов и т. д. Значение ***FACETRES*** по умолчанию равно 0.5. Диапазон допустимых значений – от 0.01 до 10. Для изменения значения ***FACETRES*** в командной строке прописывается слово ***FACETRES***↵ / прописывается числовое значение от 0.01 до 10.



Диалоговое окно ***RENDER*** (Тонировать) загружается командой ***RENDER*** (Тонировать), которая вызывается из падающего меню Падающее меню ***View*** (Вид)⇒ ***Render…*** (Тонировать…) ⇒ ***Render*** (Тонировать) или щелчком мыши по пиктограмме ***Render*** (Тонировать) одноимённой панели инструментов.

Вывод тонированного изображения определяется в области ***Destination*** (Место назначения), для чего нужно выбрать одно из трёх значений раскрывающегося списка:

- ***Viewport*** (Видовой экран) – вывод изображения в видовой экран;
- ***Render Window*** (Окно) – отдельное окно ***Render***;
- ***File*** (Файл) – в файл.

Программа ***AutoCAD*** предоставляет в распоряжение пользователя три вида тонирования:

- ***Render*** (Упрощенное) - тонирование без добавления источников света, присвоения материалов и определения сцен. Данный режим предоставляет наименьшие возможности на-

стройки и моделирования различных эффектов визуализации, но позволяет быстрее всего получить результаты;

- ***Photo Real*** (Фотореалистичное) – более реалистичное тонирование с возможностью отображения растровых и прозрачных материалов, а также моделировать различные эффекты при отображении теней;
- ***Photo Raytrace*** (Трассировка луча) – ещё более реалистичное тонирование, основанное на алгоритме обратной трассировки световых лучей для регенерации отражения, преломления и точного определения освещённости.

Загрузка системы тонирования происходит автоматически при первом запуске команды тонирования: ***RENDER*** (Тонировать), ***SCENE*** (СЦЕНА), ***LIGHT*** (СВЕТ), ***RMAT*** (МАТЕРИАЛ), ***MATLIB*** (Библиотека Материалов), ***BACKGROUND*** (ФОН) и др.

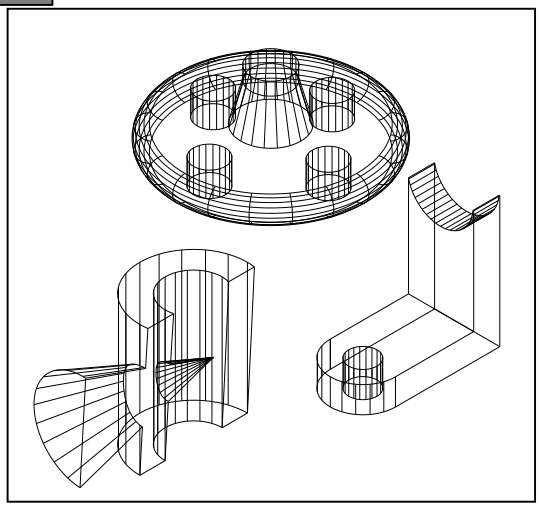
Выполнить упражнение № 135.

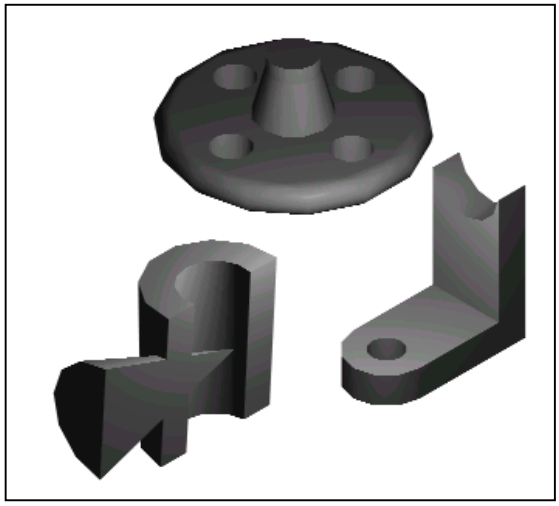
Тонировать объекты ***№ 135***

RENDER

Падающее меню ***VIEW → RENDER → RENDER***

В диалоговом окне Render нажать кнопку Render





16.4. ВКЛЮЧЕНИЕ ФОНА В ИЗОБРАЖЕНИЕ СЦЕНЫ

В ***AutoCAD*** имеется несколько функций для добавления фона в создаваемую сцену. В качестве фона можно выбрать изображение неба, добавить элементы ландшафта и др., вызываемой командой ***BACKGROUND*** (ФОН).

Команда ***BACKGROUND*** (ФОН) загружается из падающего меню ***View*** (Вид)⇒***Render…***(Тонировать…)⇒***Background*** (Фон) или щелчком мыши по пиктограмме ***Render*** (Тонировать) одноимённой панели инструментов. Существуют четыре типа фона, которые выбираются соответствующими переключениями:

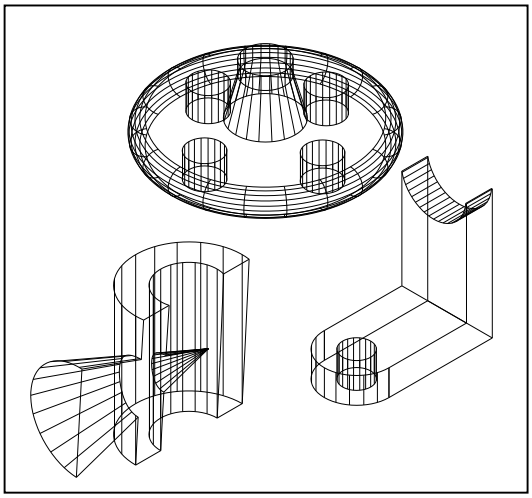
- ***Solid*** (Сплошной) – сплошной одноцветный фон, выбранный из палитры цветов;
- ***Gradient*** (Переход). Фон содержит до трёх цветов, плавно переходящих друг в друга;
- ***Image*** (Изображение) – фон в виде растровой картинки. Эту картинку можно изменять по размеру и положению, а также можно размножить по прямоугольной сетке, заполняя весь фон;
- ***Merge*** (Слияние). Позволяет использовать в качестве фона текущее изображение на экране ***AutoCAD***. Это имеет смысл в том случае, когда тонирование выполняется только по отношению к части экрана. В результате формируется совмещённое изображение тонированного объекта и нетонированного фона.

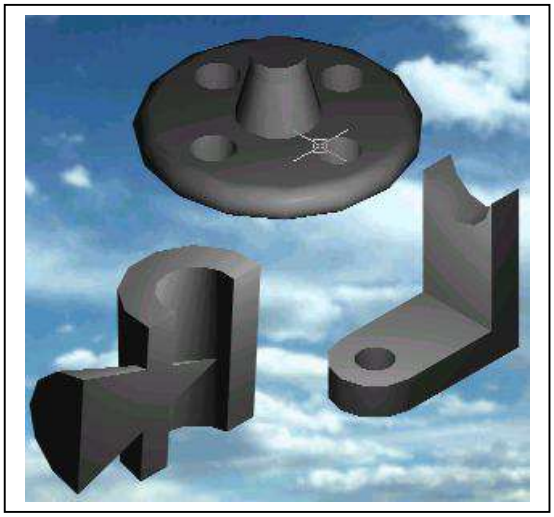
Выполнить упражнение № 136.

Тонировать объекты с установкой тона ***№ 136***

BACKGROUND

Падающее меню ***VIEW → RENDER → BACKGROUND***
В диалоговом окне BACKGROUND установить режим Image.
В области Image в поле Name ввести имя файла sky.tga
или найти другой файл, нажав кнопку Find File (Найти файл)
В диалоговом окне Render нажать кнопку Render

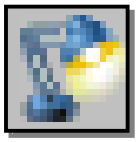




16.5. НАСТРОЙКА ОСВЕЩЕНИЯ

При настройке процесса тонирования по умолчанию ***AutoCAD*** использует один источник света позади камеры. Однако это редко бывает достаточно. В ***AutoCAD*** имеется четыре вида источника света: рассеянный свет (***Ambient light***) и направленные источники света трёх типов:

- ***Point light*** (Точечный источник) – это аналог обычной электрической лампочки. Свет проходит из определённой точки в пространстве модели и распространяется по всем направлениям. Точечный свет рассеивается, то есть его интенсивность уменьшается по мере удаления от источника;
- ***Distance light*** (Удалённый источник) – соответствует солнечному освещению. Источник расположен очень далеко, поэтому световой поток предполагается параллельным, и не учитывается спад интенсивности;
- ***Spotlight*** (Прожектор) – отличается от точечного источника света тем, что создаёт направленный световой поток. Поэтому для прожектора указывается не только его расположение, но и положение целевой точки – два набора координат вместо одного. Кроме того, прожектор имеет более яркий центр вместо одного.



Формирование новых и модификация уже созданных источников света осуществляются командой ***LIGHT*** (СВЕТ), вызываемой из падающего меню ***View*** (Вид)⇒***Render*** (Тонировать)⇒***Light*** (Свет) или щелчком мыши по пиктограмме ***Render*** (Тонировать) одноимённой панели инструментов. При этом загружается диалоговое окно ***Lights*** (Источники света) (рис. 172).

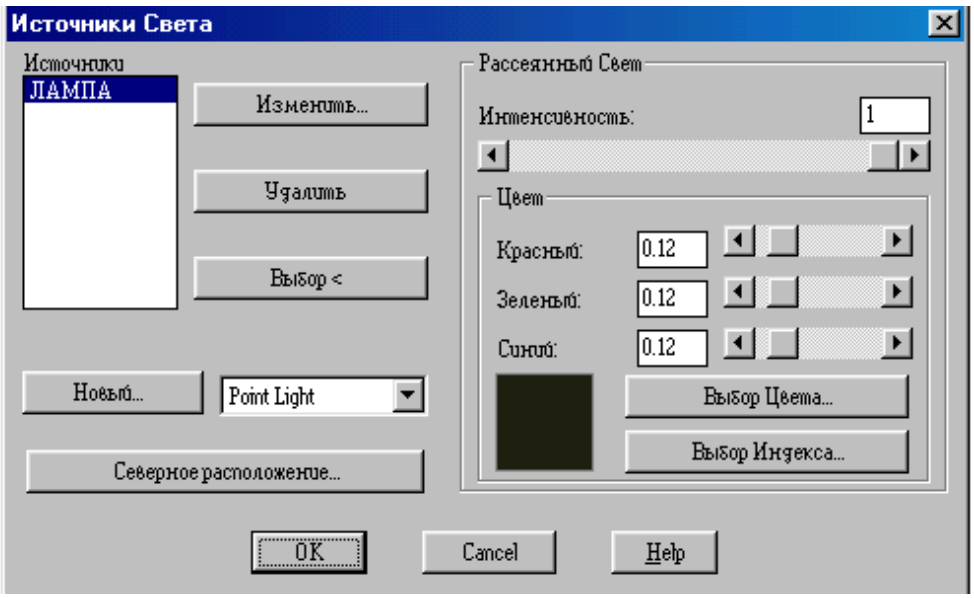


Рис. 172.

Выполнить упражнение № 137.

Создание точечного источника света ***№ 137***

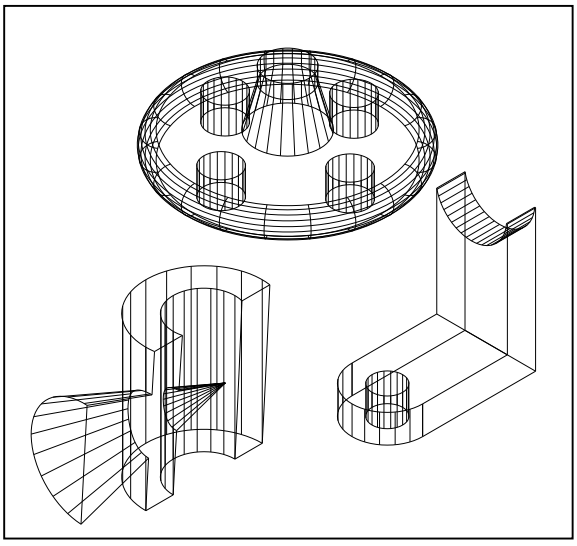
LIGHT Падающее меню ***VIEW → RENDER → LIGHT***

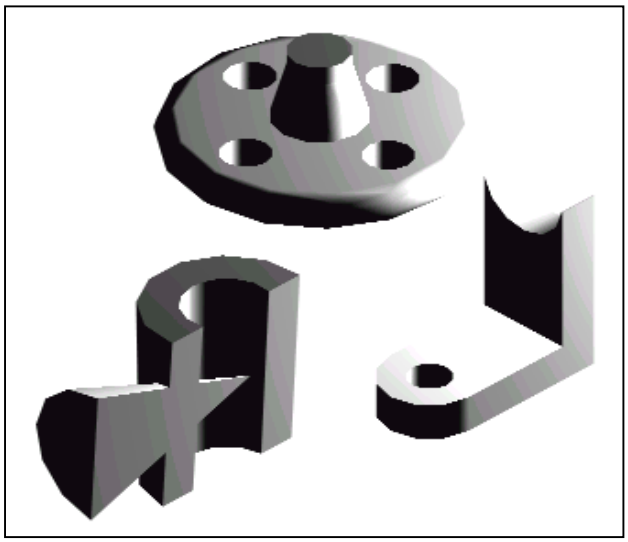
В диалоговом окне Lights (Источники света) выбрать Point Light и нажать кнопку New (Новый).

В поле Name диалогового окна New Point Light ввести имя источника света (можно создать несколько источников) и нажать кнопку Показать/Изменить, ОК (на экране появятся точечные объекты, показывающие нахождение созданных источников света).

Курсором мыши можно изменить местонахождение источников света, ОК

В диалоговом окне Render нажать кнопку Render





16.6. ТЕНИ

Свет от источников позволяет создавать тень только в режимах визуализации ***Photo Real*** (Фотореалистичное) и ***Photo Raytrace*** (Трассировка луча) и отключается при тонировании флажком-выключателем ***Shadows*** (С тенями). В режиме ***Render*** (Упрощенное) свет проходит сквозь поверхности, не создавая теней.

Тени бывают трёх типов: объёмные, карты теней и тени трассировки луча. Настройка типа тени осуществляется в диалоговом окне источника света любого типа, например, в диалоговом окне ***New Point Light*** (Новый точечный источник света). Для этого необходимо в области ***Shadows:*** (Тени:) установить флажок ***Shadows On*** (Включить) и щелкнуть по кнопке ***Shadows Options…***(Параметры теней…). В раскрывшемся окне ***Shadows Options…***(Параметры теней…) включенный флажок ***Shadows Volumes/Raytrace*** (Объёмные тени/Тени трассировки луча) устанавливает тени для режима ***Photo Real*** (Фотореалистичное) и режима ***Photo Raytrace*** (Трассировка луча).

16.7. РАБОТА С МАТЕРИАЛАМИ

В ***AutoCAD*** под материалами понимаются оптические свойства отдельного объекта модели – цвет, шероховатость, текстура поверхности, способность к поглощению и отражению света.

Команда **RMAT** (Материал) вызывается из падающего меню ***View*** (Вид)⇒***Render*** (Тонировать)⇒***Materials…***(Материал…) или щелчком мыши по пиктограмме ***Render*** (Тонировать) одноимённой панели инструментов. При этом загружается диалоговое окно ***Materials*** (Материалы) (рис. 173).

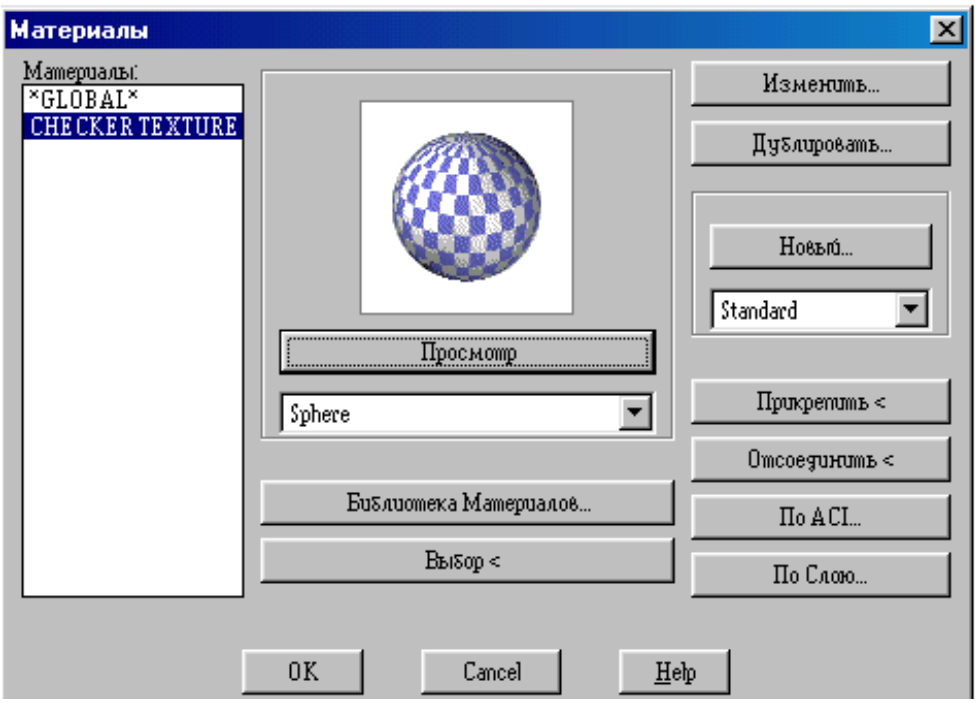


Рис. 173.

Выполнить упражнение № 138.

Тонировать объекты с установкой материала № 138

RMAT Падающее меню ***VIEW → RENDER → MATERIALS***

В диалоговом окне MATERIALS (Материалы) выбрать кнопку Materials Library (Библиотека материалов).

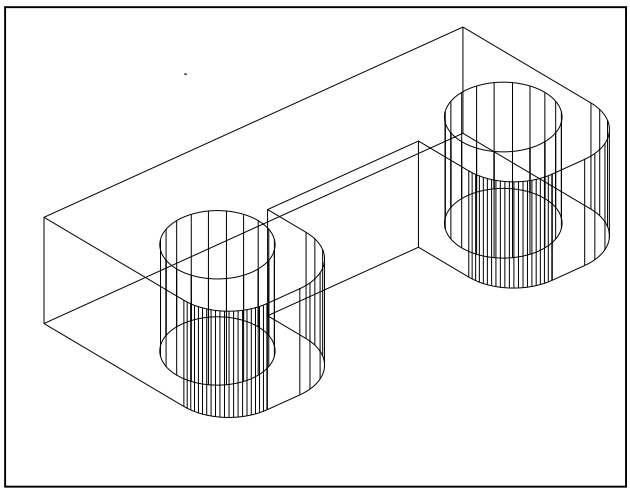
В диалоговом окне Materials Library (Библиотека материалов) в области Current Library (Текущая библиотека) подобрать материал:CHECER TEXTURE, просматривая его в окне Preview.

Импортировать материал в область Current Drawing (Текущий рисунок), нажав кнопку <-Import.

В диалоговом окне MATERIALS выбрать кнопку Attach< (Присвоить).

Выбрать объект.

В диалоговом окне Render нажать кнопку Render



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Построить твердотельную модель заданной детали (прил. 5).

2. Построить твердотельную модель заданной детали, согласно своему варианту (прил. 6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компьютерная графика – дисциплина, обучающая методам изображения предметов и общим правилам черчения с применением компьютерных технологий.

Скорость, точность и легкость, с которыми создаются модели проектируемых изделий, широкие возможности их преобразования и редактирования, различные способы получения плоских изображений этих изделий (видов, разрезов, сечений), ассоциативно связанных с моделями, - все это обеспечивает огромную экономию времени по сравнению с «ручным» черчением. Но при этом не следует забывать о законах формирования геометрических моделей, теория которых излагается в начертательной геометрии.

Многообразие систем информационных технологий требует от специалиста умения применять свои знания при решении конкретной задачи, компонентами которых являются: умение осознать, формулировать и творчески решать задачи; умение ориентироваться в многообразии программных продуктов, существующих на сегодняшний день; чётко представлять возможности и характеристики того или иного пакета прикладных программ; умение выбрать наиболее оптимальный путь из предложенных для решения конкретной задачи; умение быстро перестраиваться при смене программного обеспечения.

Как показывает анализ действий специалистов на предприятиях различного профиля, можно быть прекрасным программистом, владеющим средствами вычислительной техники и совершенно не представляющим, как формируется модель изделия. И наоборот, можно быть специалистом в своей предметной области и не учитывать специфических особенностей использования вычислительной техники и программных средств.

Однако геометрическая теория моделирования позволяет объединить знания для раскрытия возможностей применения определённых алгоритмов и взаимодействия их с различными пакетами прикладных программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ЕСКД. ГОСТ 2.305-68. Изображения – виды, разрезы сечения. М.: Гос. ком. стандартов СССР, 1984.

ЕСКД. ГОСТ 2.305-68. Нанесение размеров и предельных отклонений на чертежах. М.: Гос. ком. стандартов СССР, 1984.

Романычева Э. Т., Соколова Т. Ю. Компьютерная технология инженерной графики в среде AutoCAD 2000: Учебное пособие. М.: ДМК Пресс, 2001. 656 с.

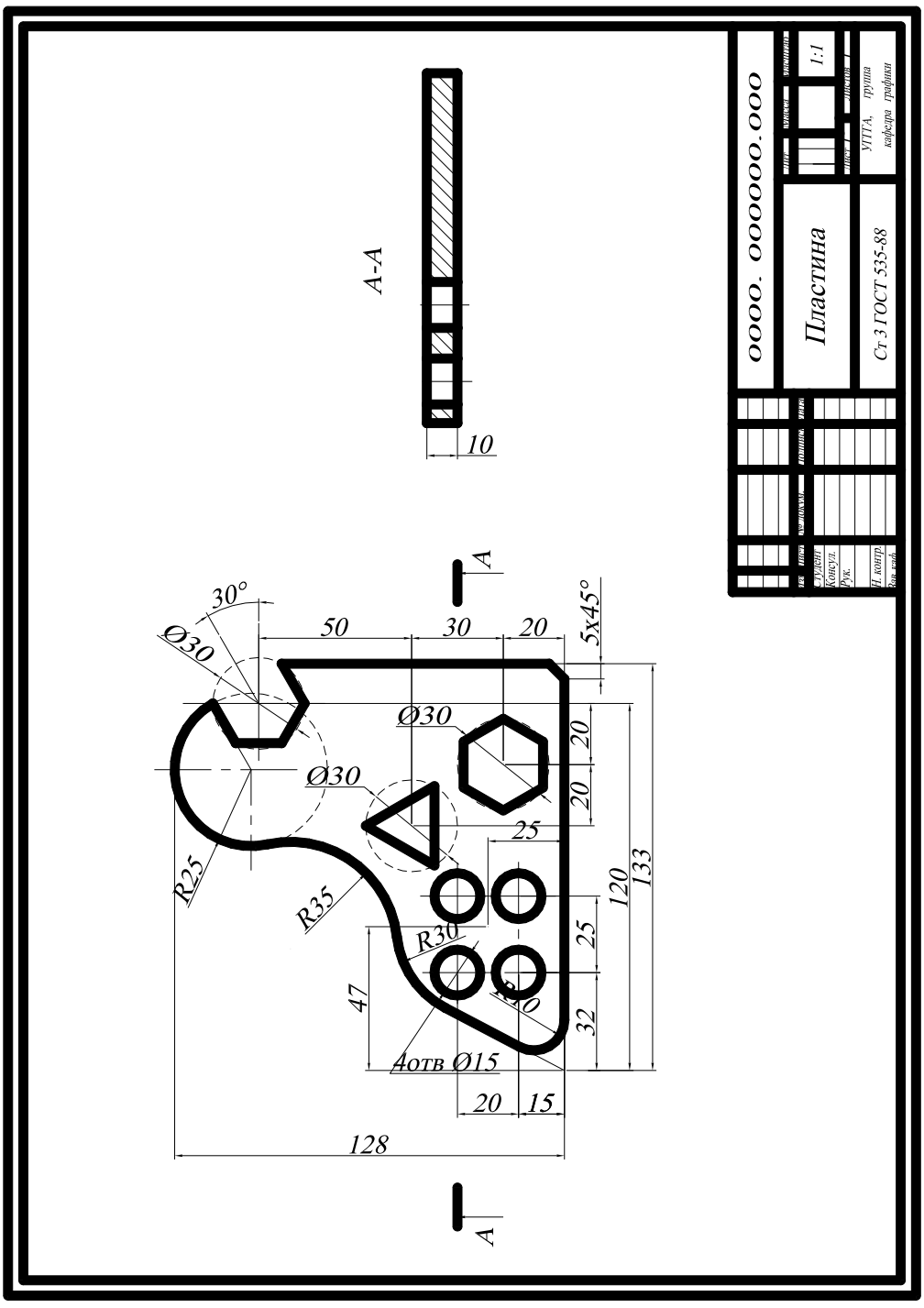
Шангина Е.И. Инженерная графика. Теория и приложения: Учебно-методическое пособие (допущено УМО РФ в области горного дела). – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2005. – 256 с., ил.

Федоренков А. П., Басов К. А., Кимаев А. М. AutoCAD 2000: Практический курс. М.: Издательство «ДЕСС», 2000. 528 с., ил.

ПРИЛОЖЕНИЯ

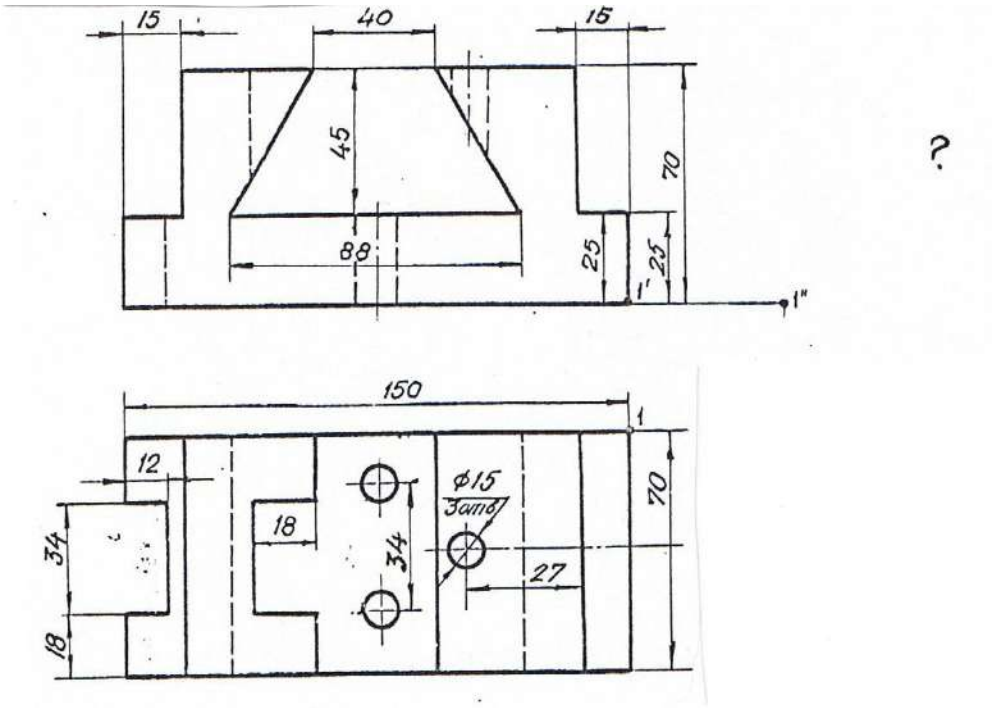
Приложение 1

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОЧЕГО ЧЕРТЕЖА ДЕТАЛИ

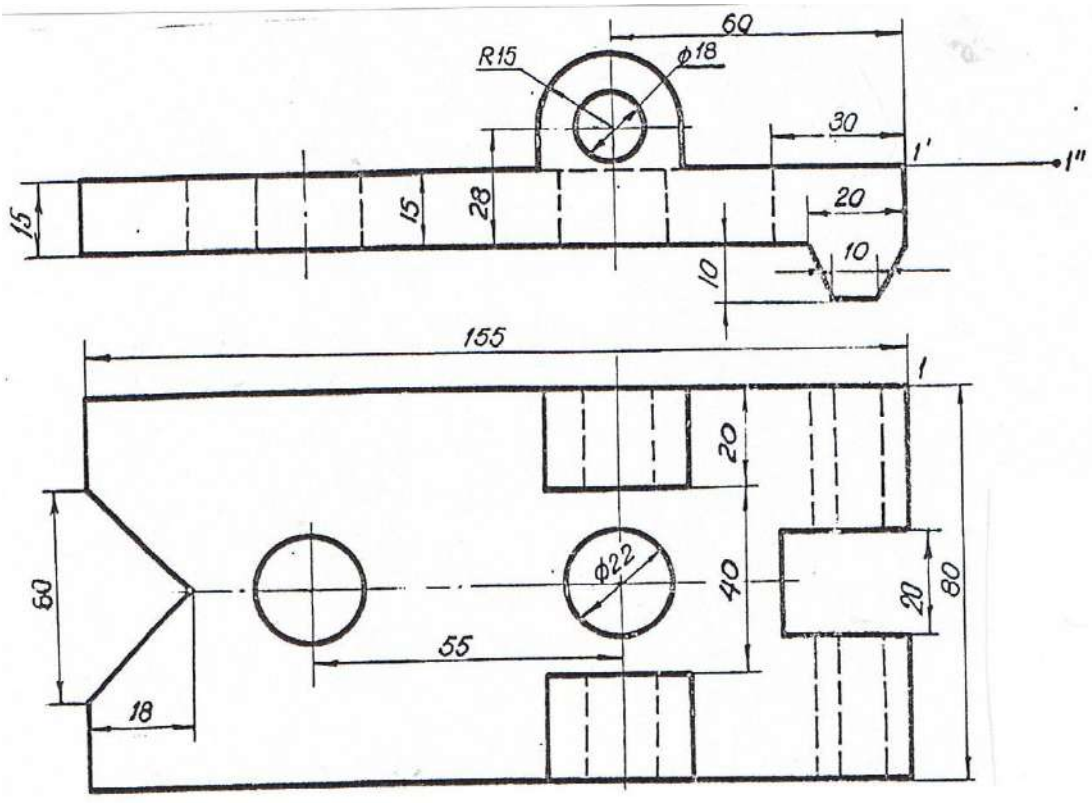


Приложение 2

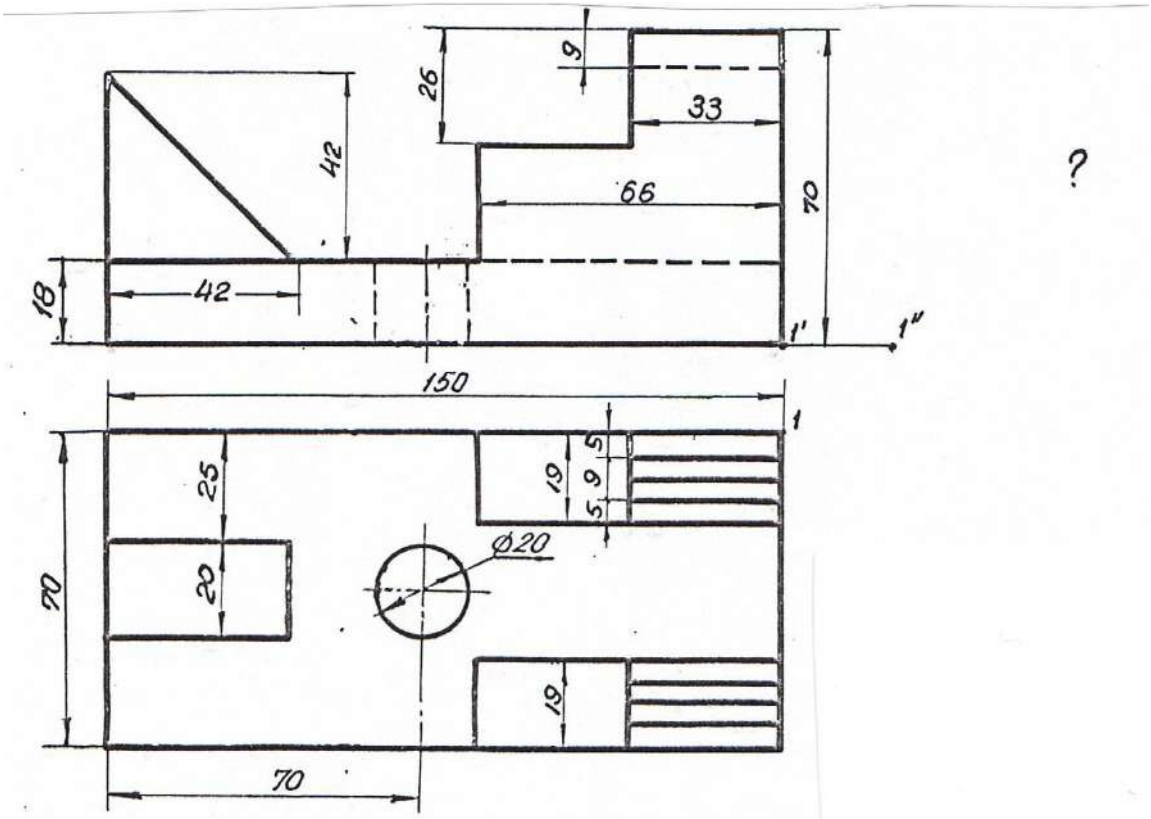
ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 1



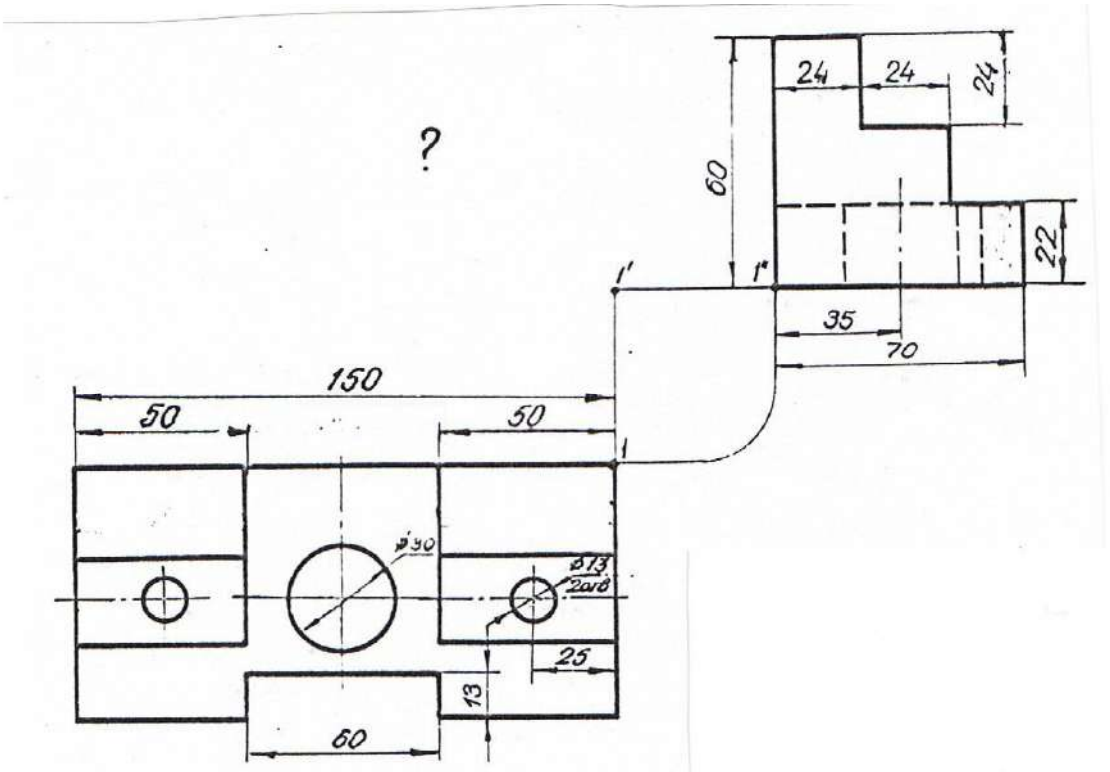
Вариант 1. Вычертить призму в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать фронтальный разрез и половину профильного разреза.



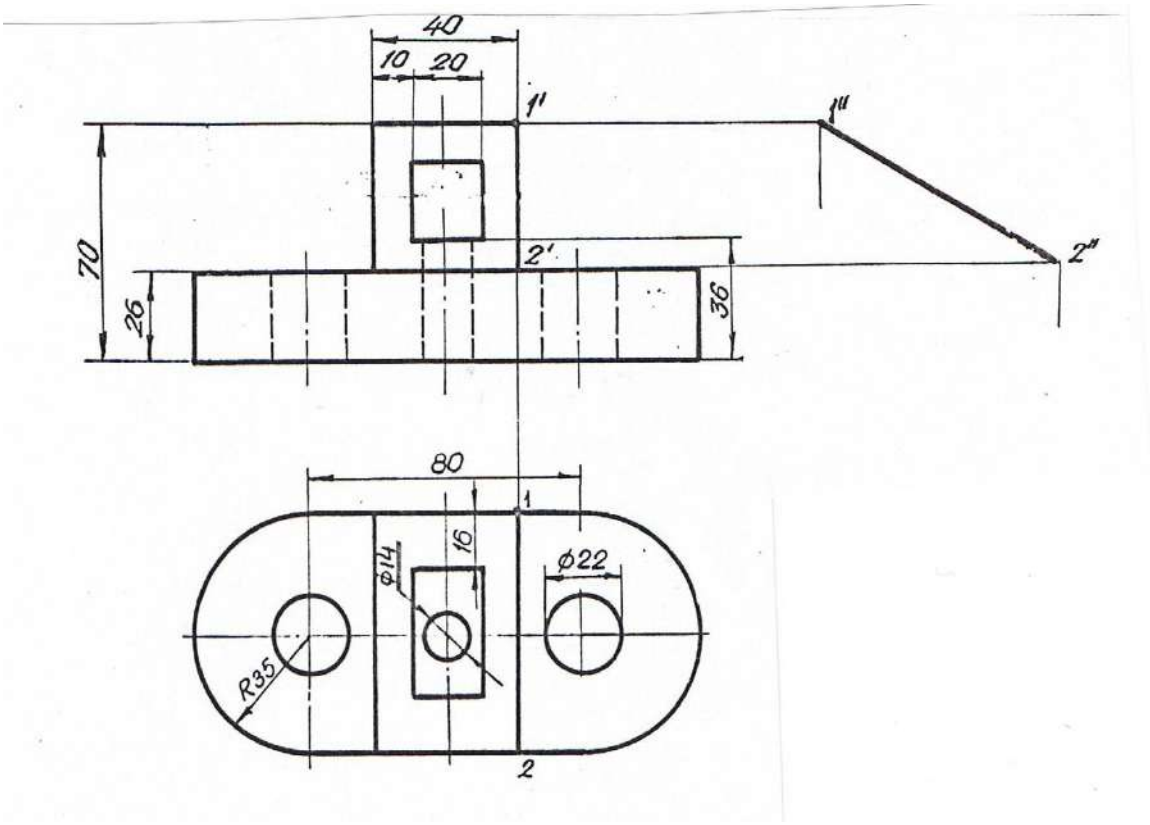
Вариант 2. Вычертить накладку в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Выполнить фронтальный и профильный разрезы.



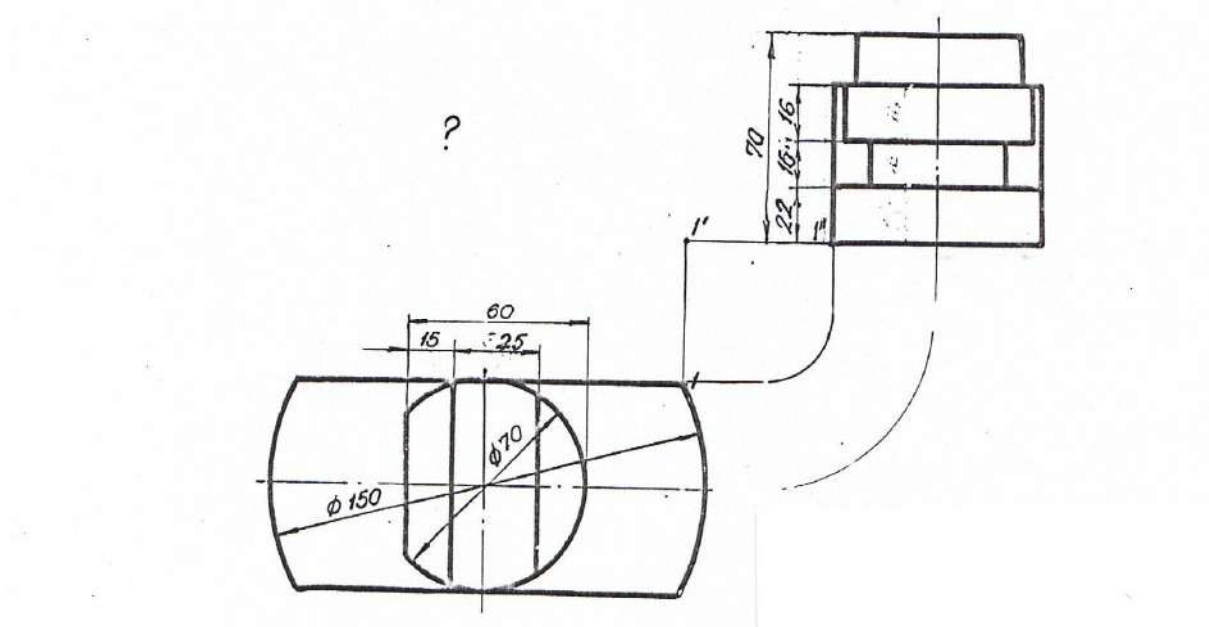
Вариант 3. Вычертить ограничитель в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Выполнить половину профильного разреза



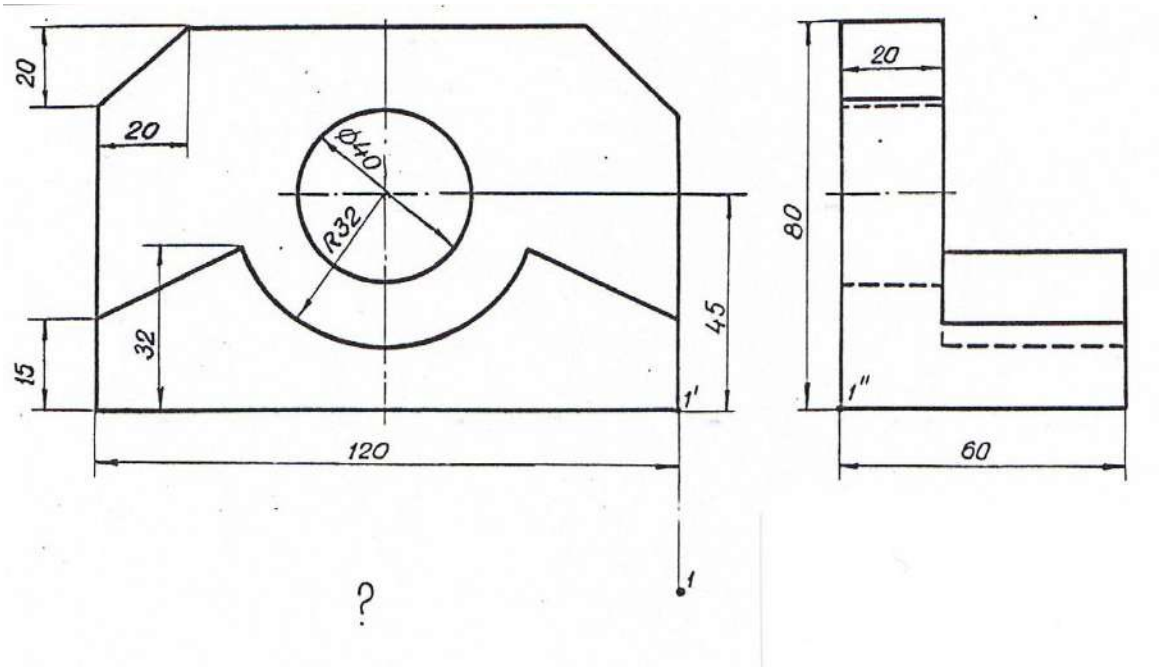
Вариант 4. Вычертить подкладку в масштабе 1:1 и достроить вид спереди.
Сделать фронтальный и профильный разрезы.



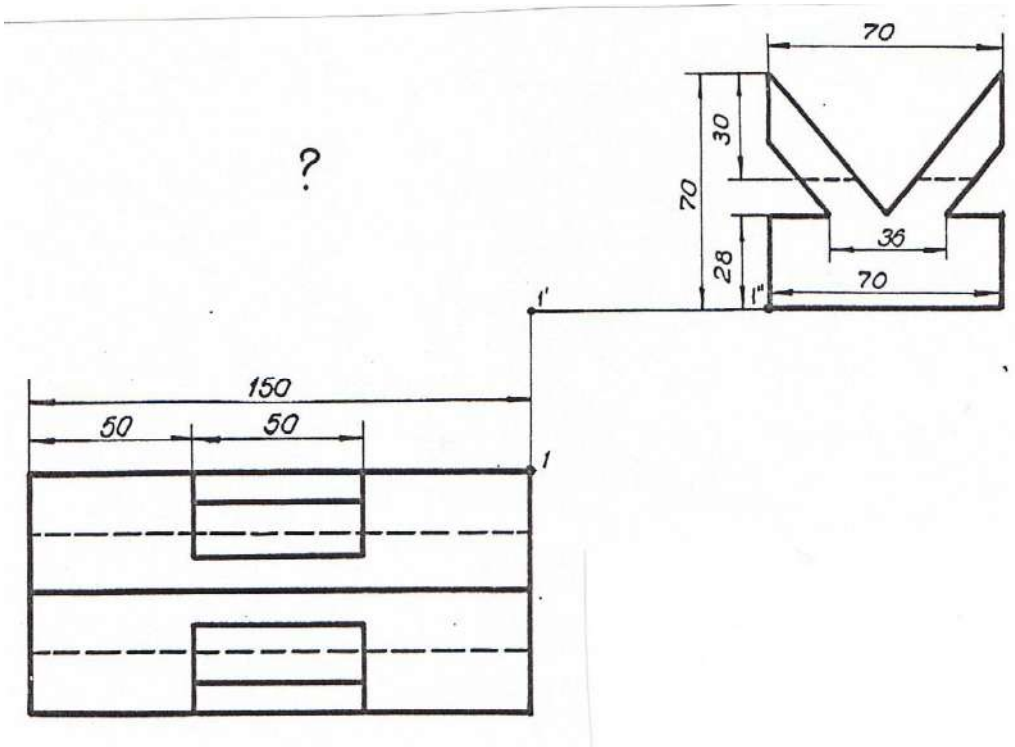
Вариант 5. Вычертить упор в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Выполнить фронтальный и профильный разрезы.



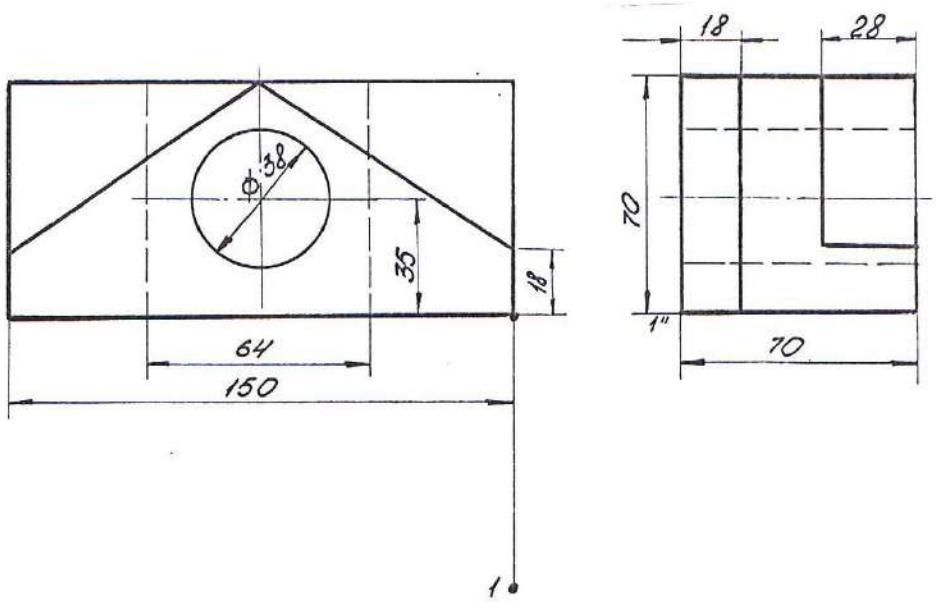
Вариант 6. Вычертить подставку в масштабе 1:1 и достроить вид спереди.



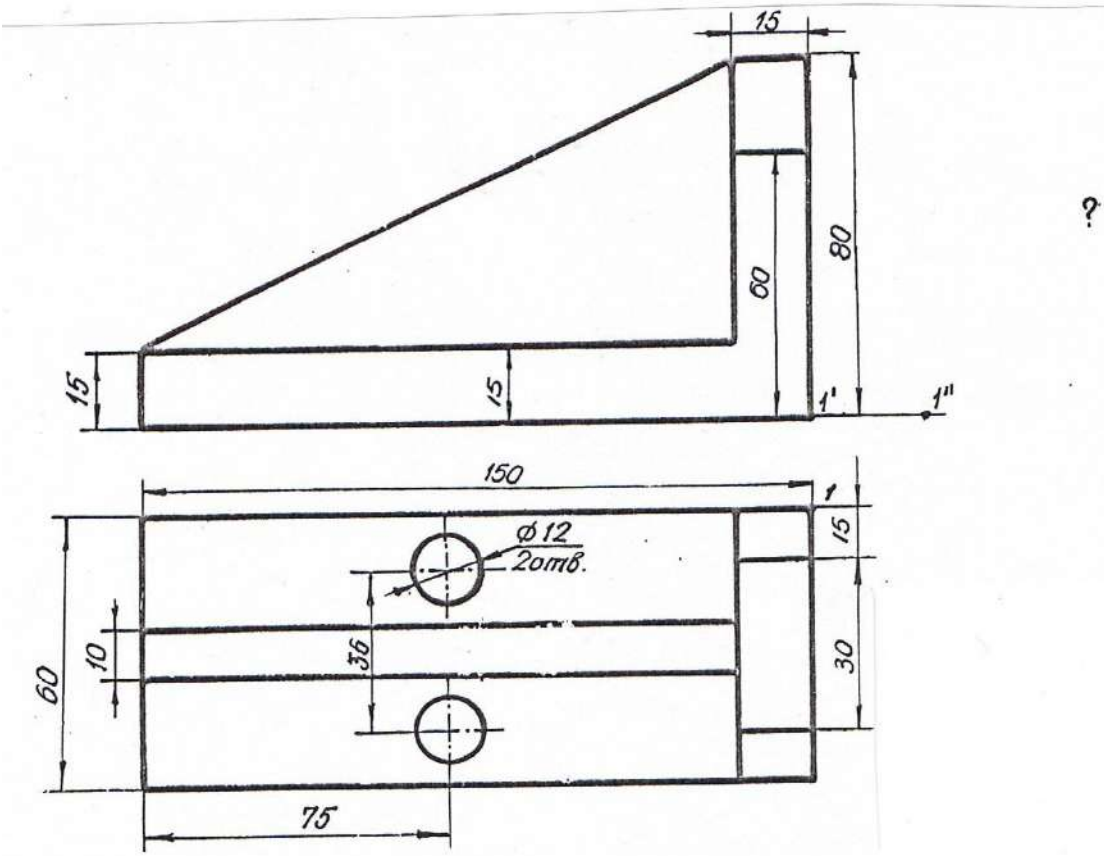
Вариант 7. Вычертить кулачок в масштабе 1:1 и достроить вид сверху.



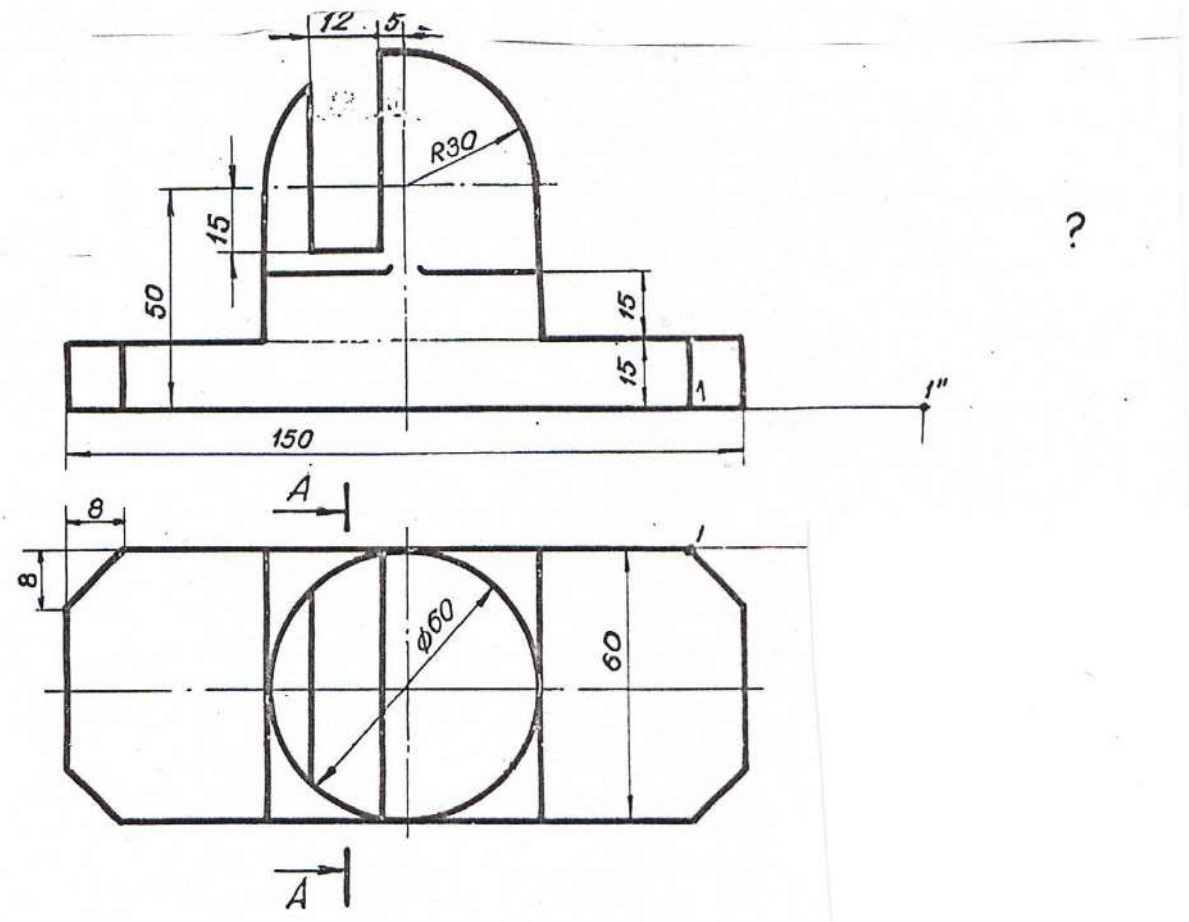
Вариант 8. Вычертить призму в масштабе 1:1 и достроить главный вид.



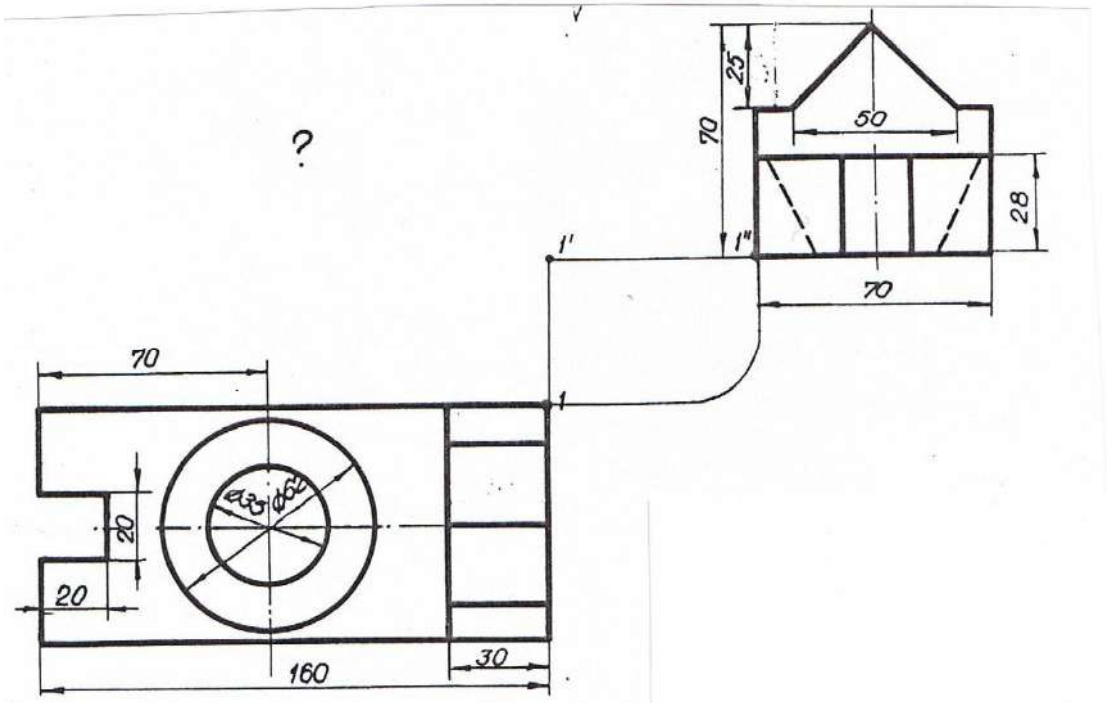
Вариант 9. Вычертить вкладыш в масштабе 1:1 и достроить вид сверху.
Выполнить горизонтальный разрез.



Вариант 10. Вычертить угольник в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать профильный разрез.



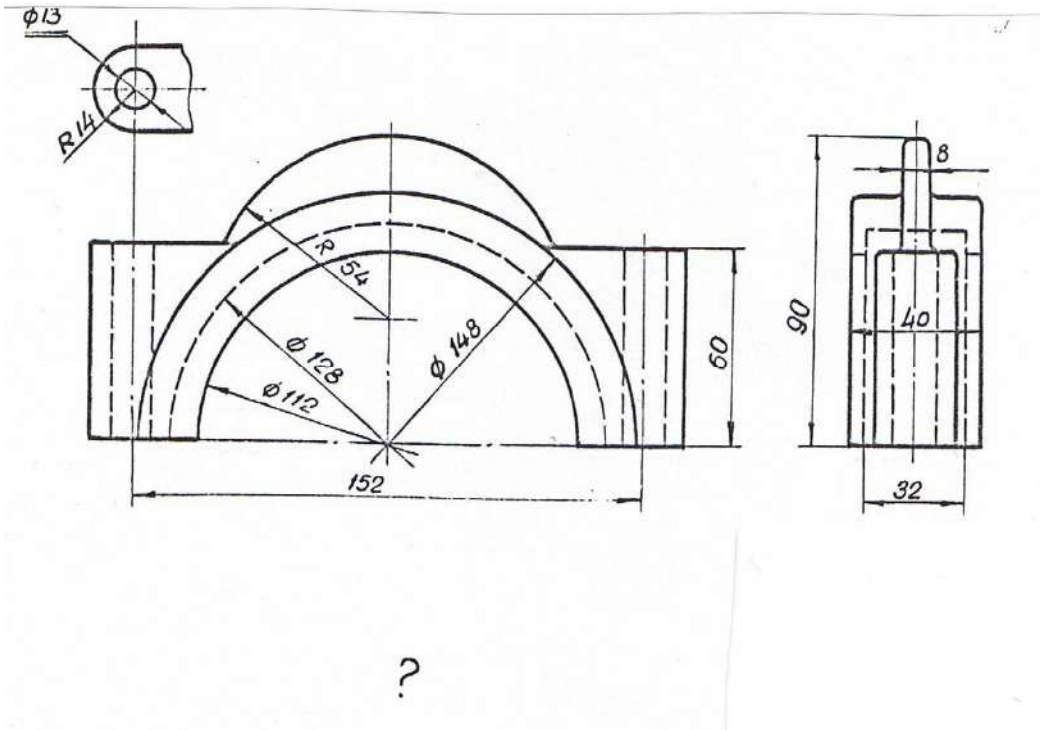
Вариант 11. Вычертить подставку в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Выполнить половину разреза А-А.



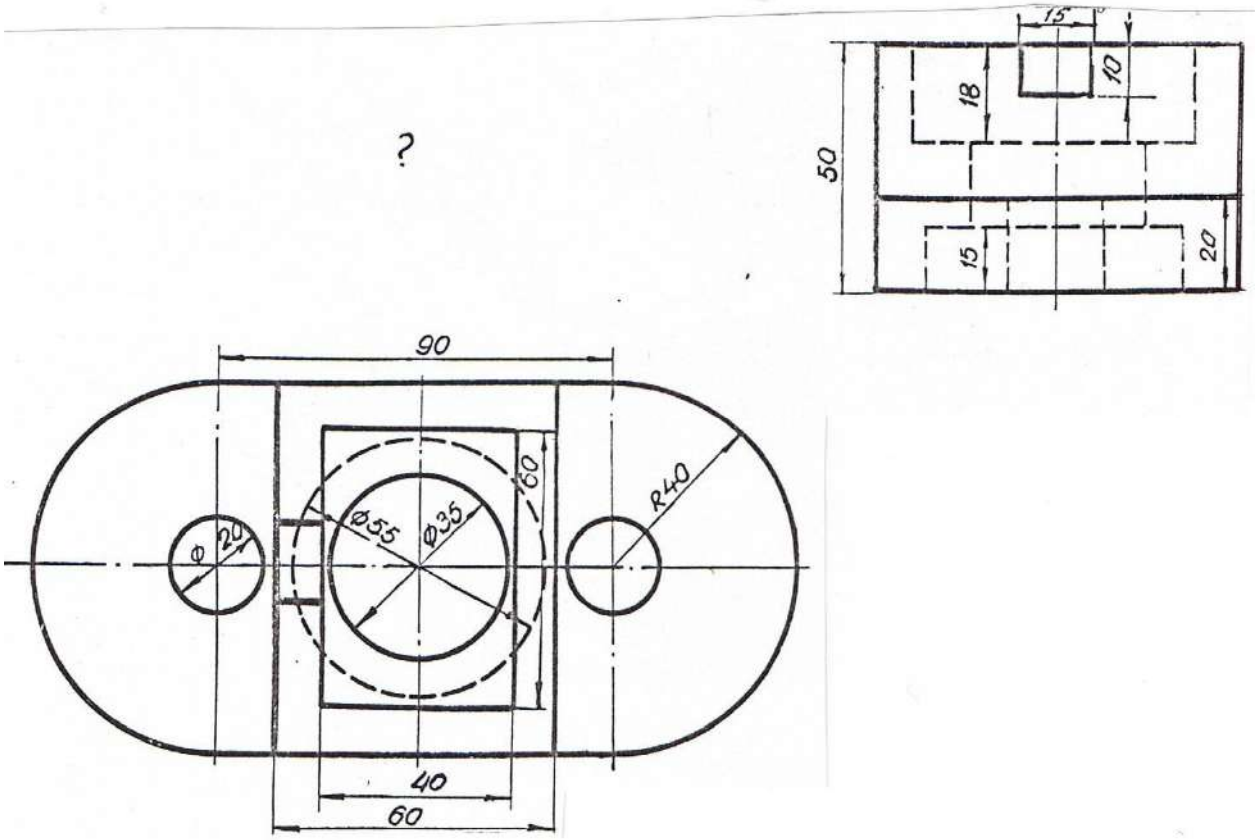
Вариант 12. Вычертить упор в масштабе 1:1 и достроить вид спереди.
Сделать половину профильного разреза.

Приложение 3

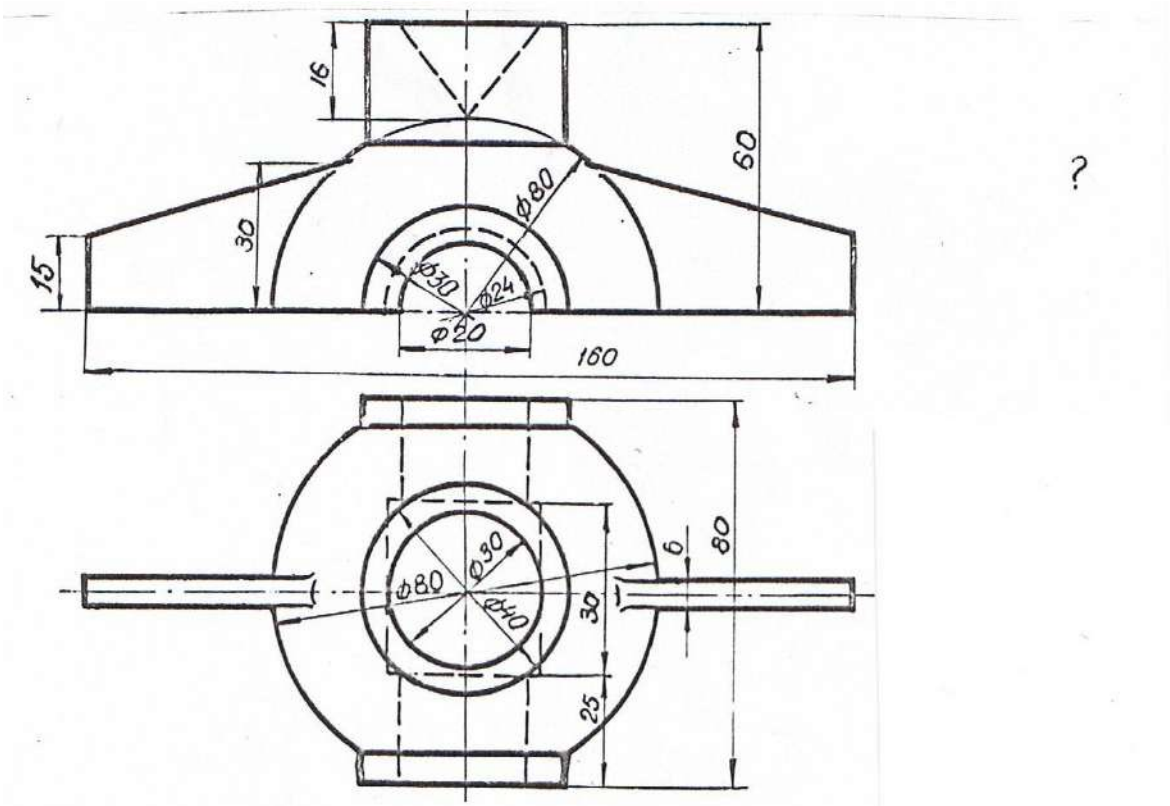
ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 2



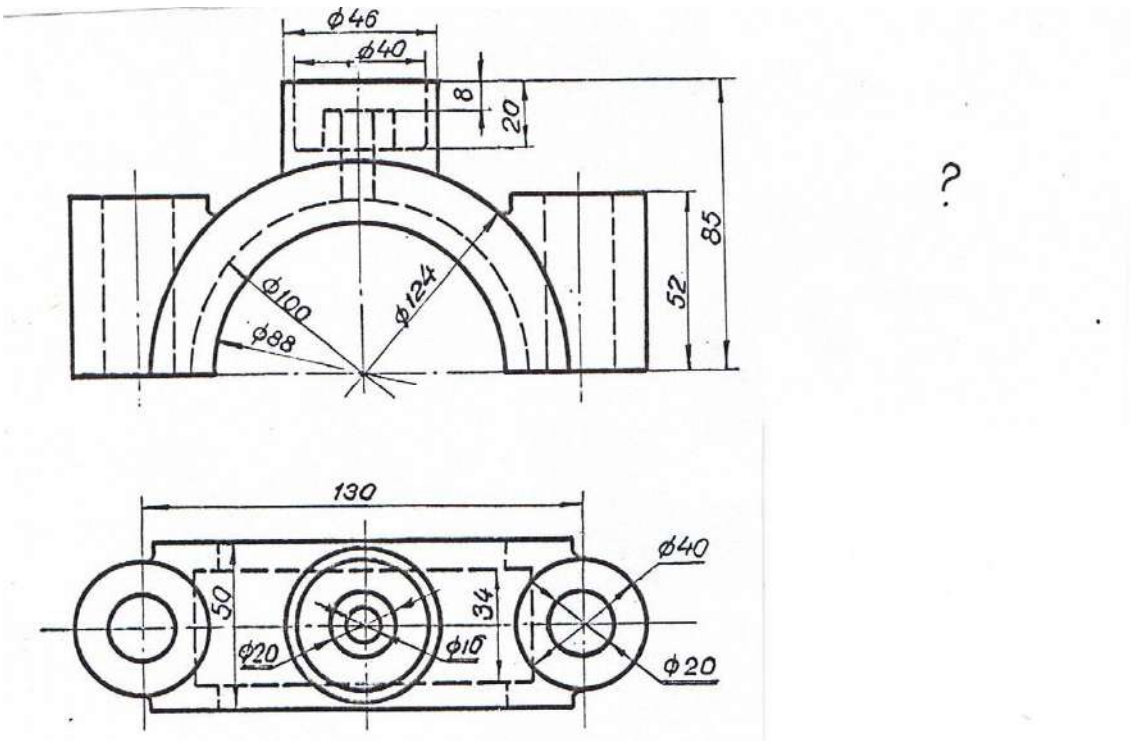
Вариант 1. Вычертить корпус бугеля в масштабе 1:1, достроить вид сверху, сделать половину фронтального и половину профильного разрезов.



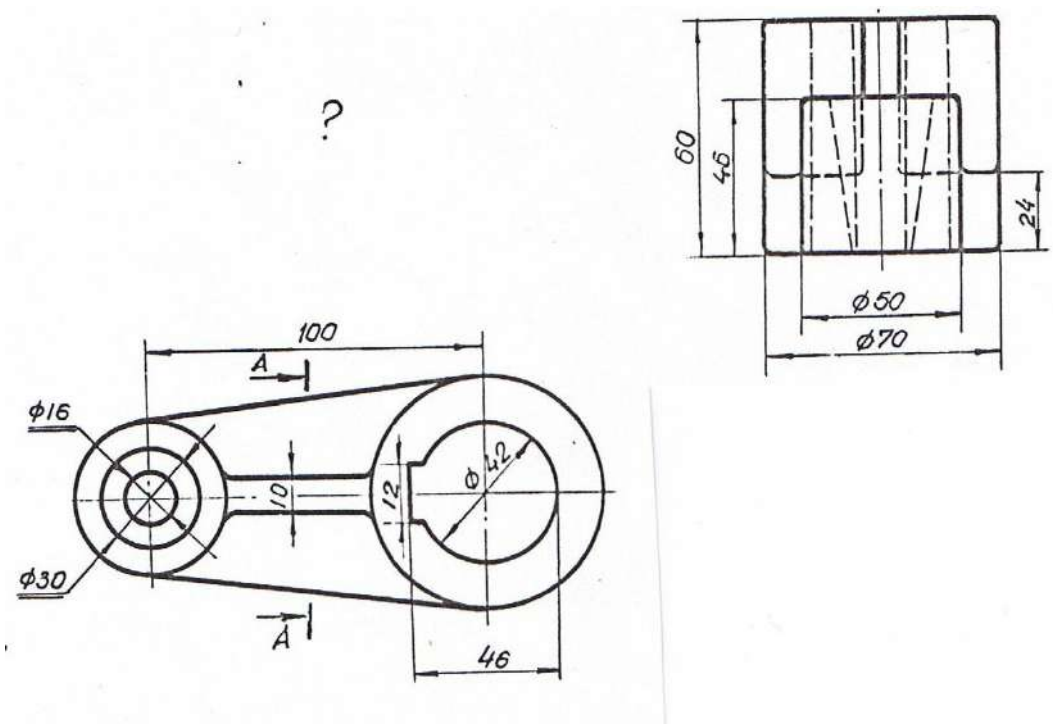
Вариант 2. Вычертить плиту в масштабе 1:1 и достроить вид спереди. Сделать фронтальный и половину профильного разрезов.



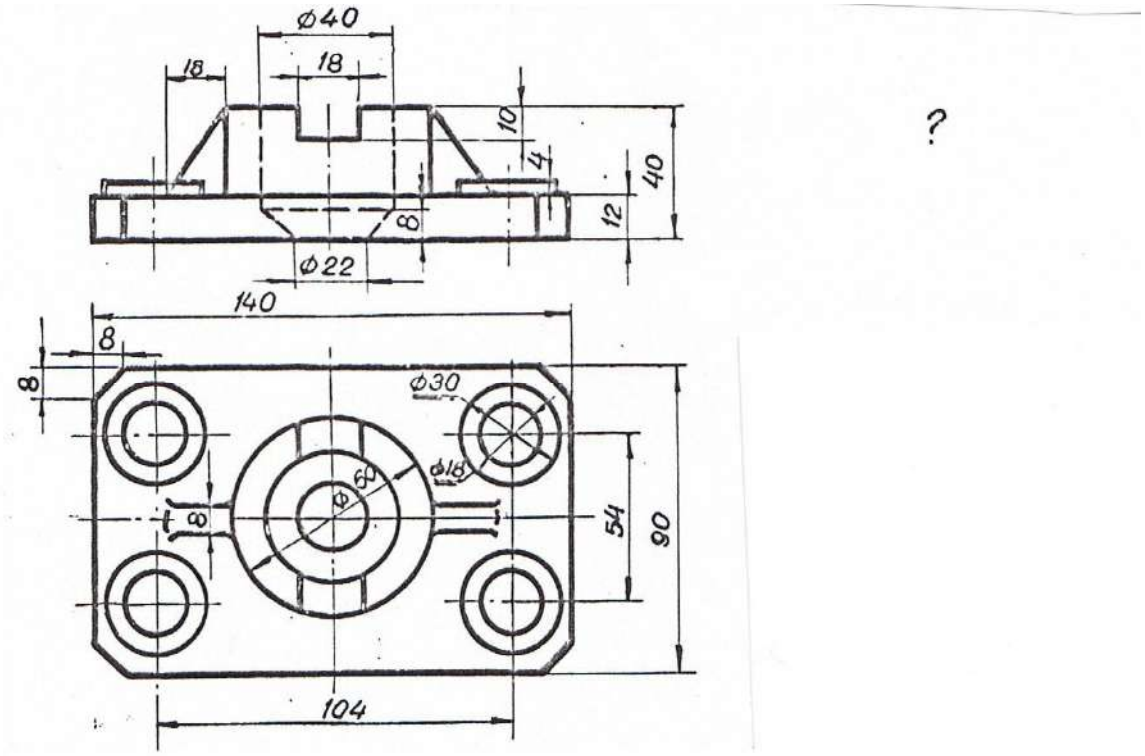
Вариант 3. Вычертить крышку в масштабе 1:1, достроить вид слева.
Сделать половину фронтального и половину профильного разрезов.



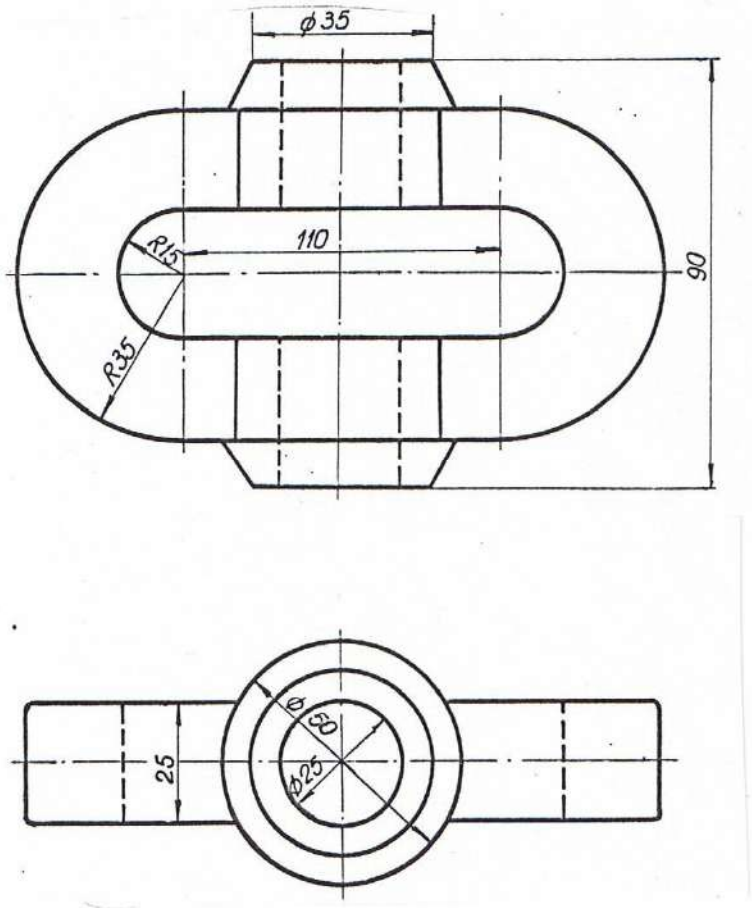
Вариант 4.Вычертить крышку подшипника в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать половину фронтального и половину профильного разрезов.



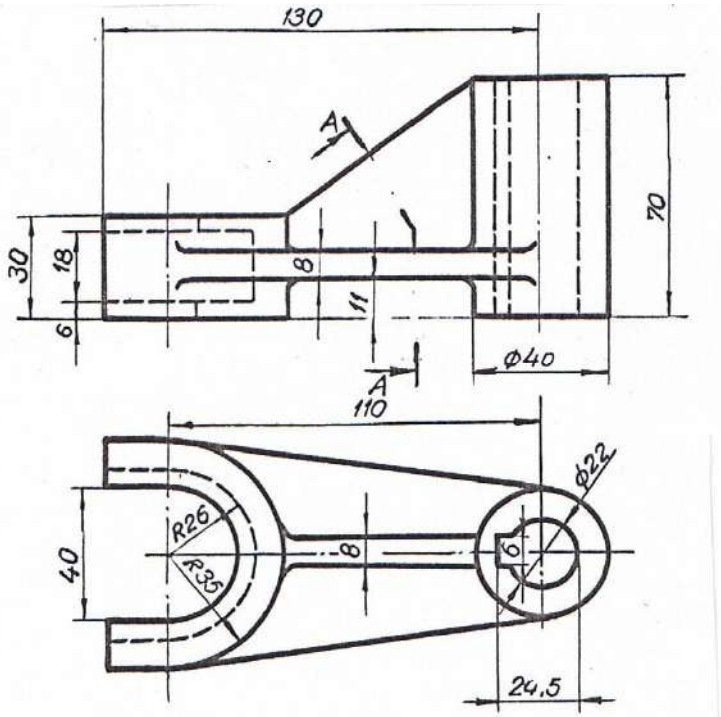
Вариант 5. Вычертить шатун в масштабе 1:1 и достроить вид спереди.
Сделать фронтальный разрез и сечение А-А.



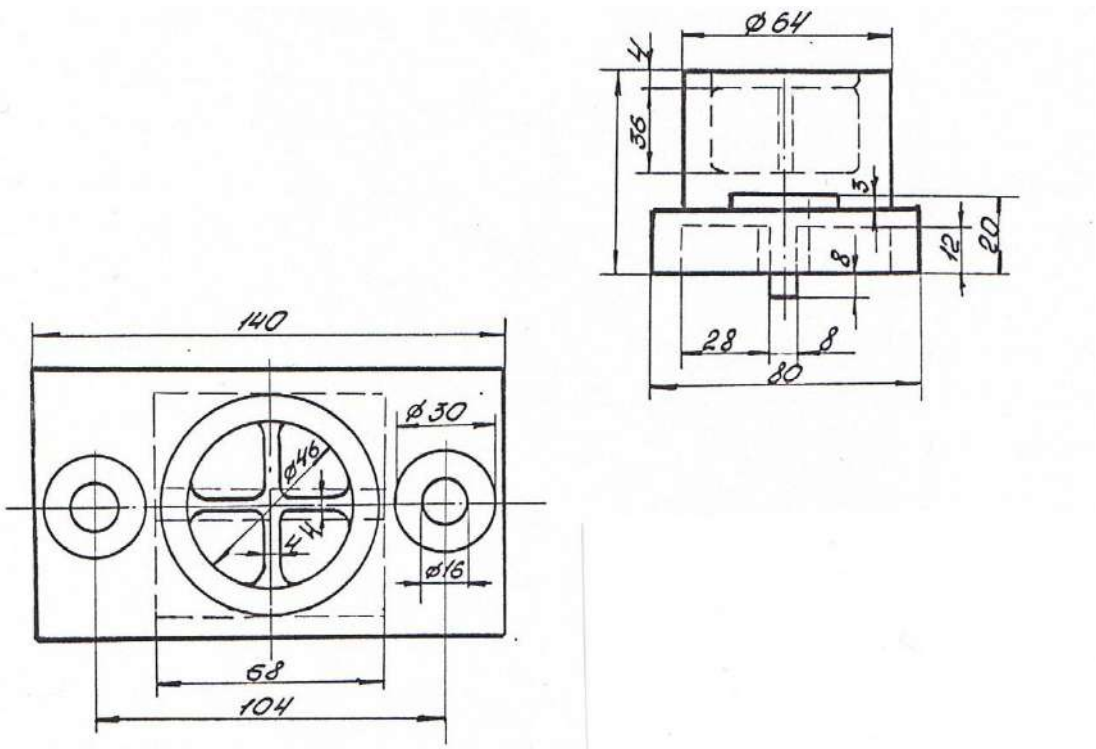
Вариант 6. Вычертить плиту в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать ступенчатый фронтальный разрез и половину профильного разреза.



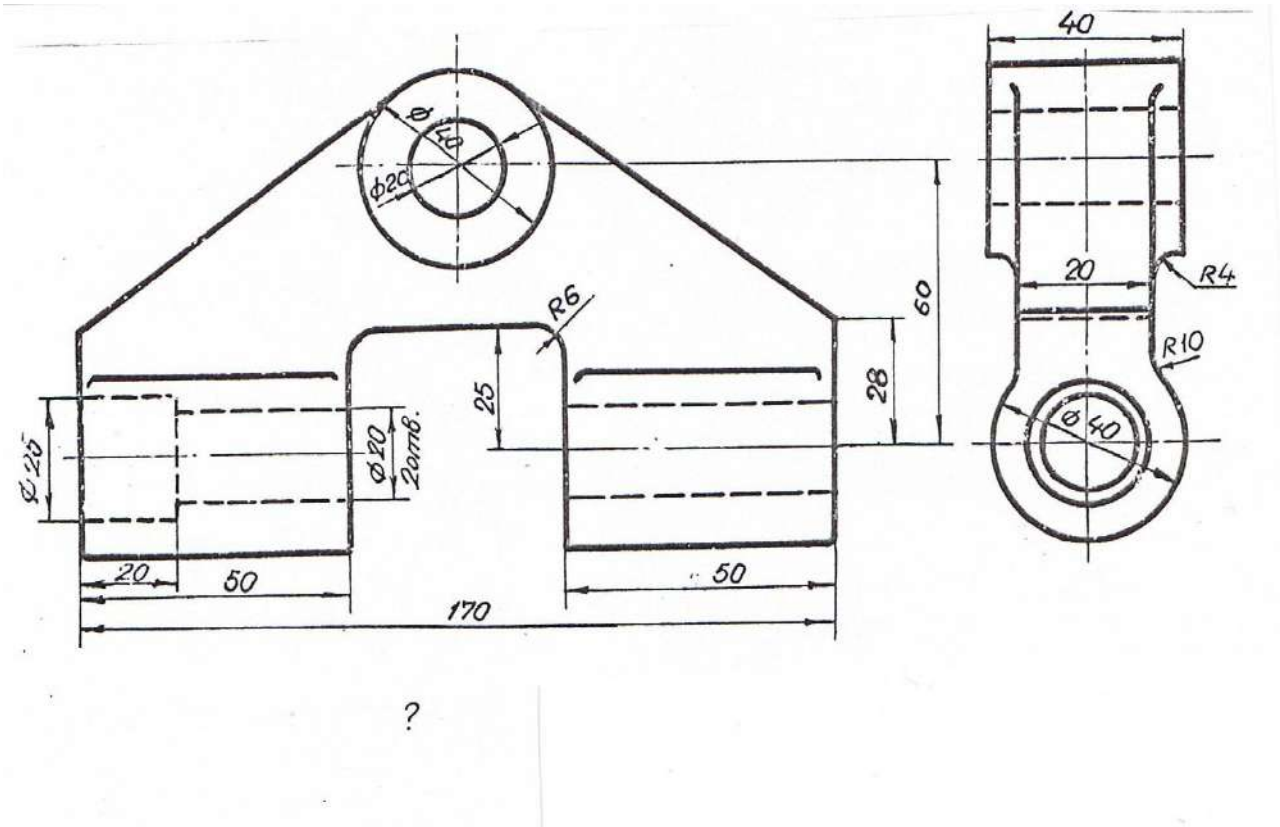
Вариант 7. Вычертить петлю в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать половину профильного и половину горизонтального разрезов.



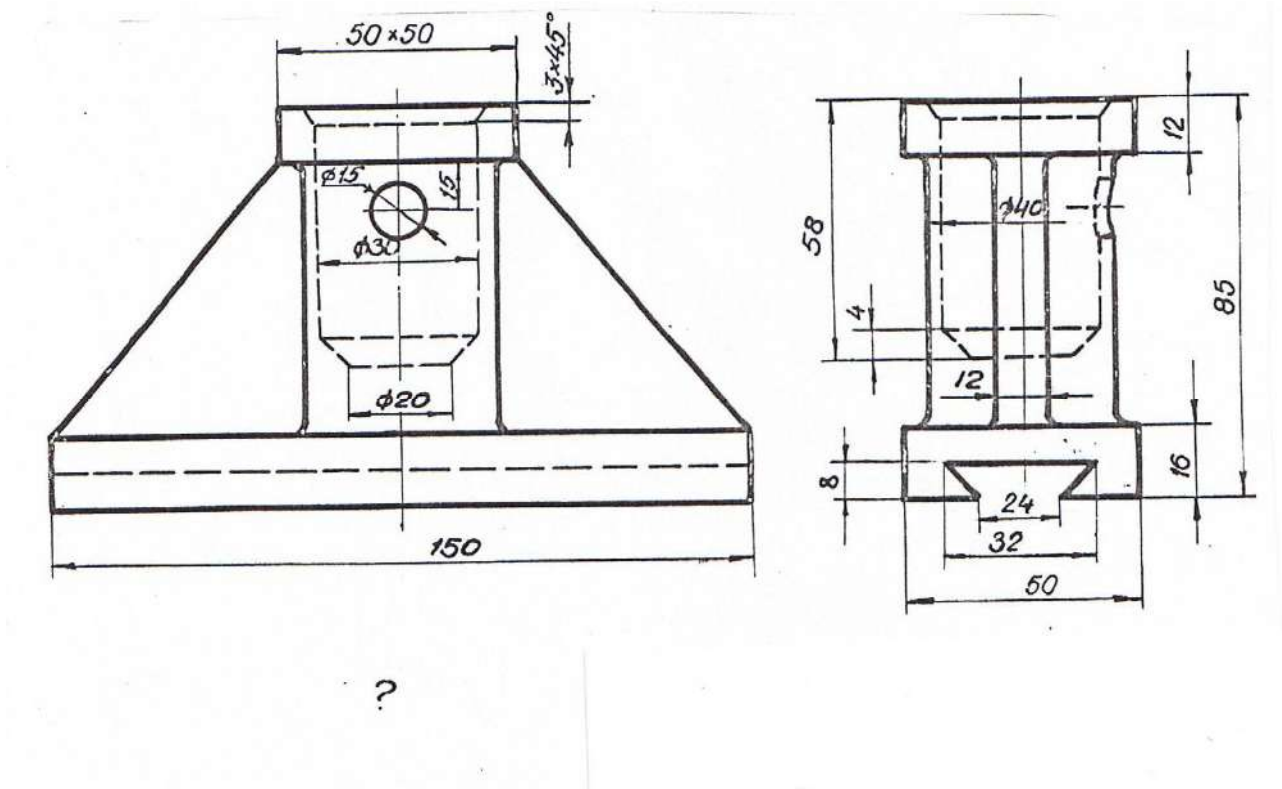
Вариант 8. Вычертить вилку в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать фронтальный разрез и сечение А-А.



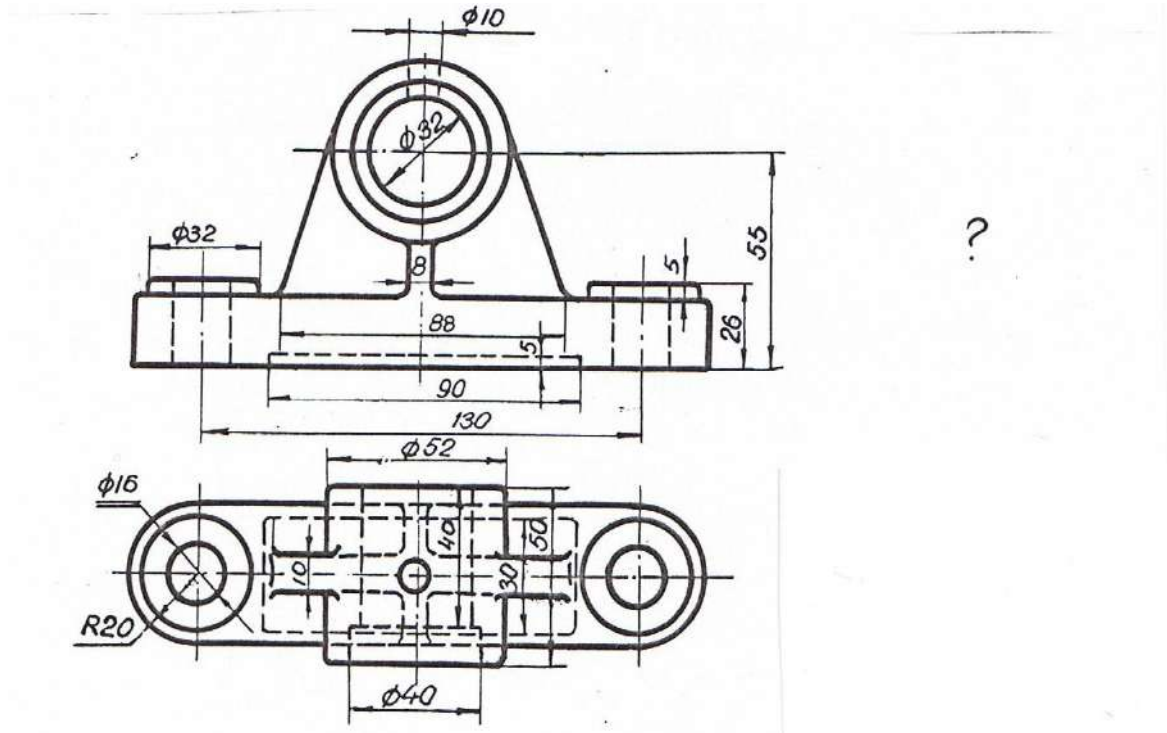
Вариант 9. Вычертить подпятник в масштабе 1:1 и достроить вид спереди.
Сделать половину фронтального и половину профильного разрезов.



Вариант 10. Вычертить шарнир в масштабе 1:1 и достроить вид сверху.
Сделать профильный разрез и местный разрез на виде спереди.



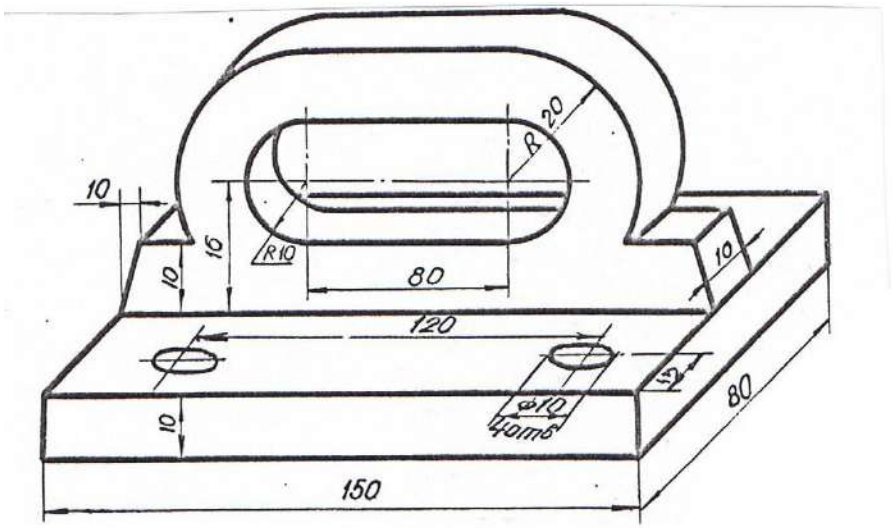
Вариант 11. Вычертить подставку в масштабе 1:1 и достроить вид сверху.
Сделать половину фронтального разреза и местный профильный.



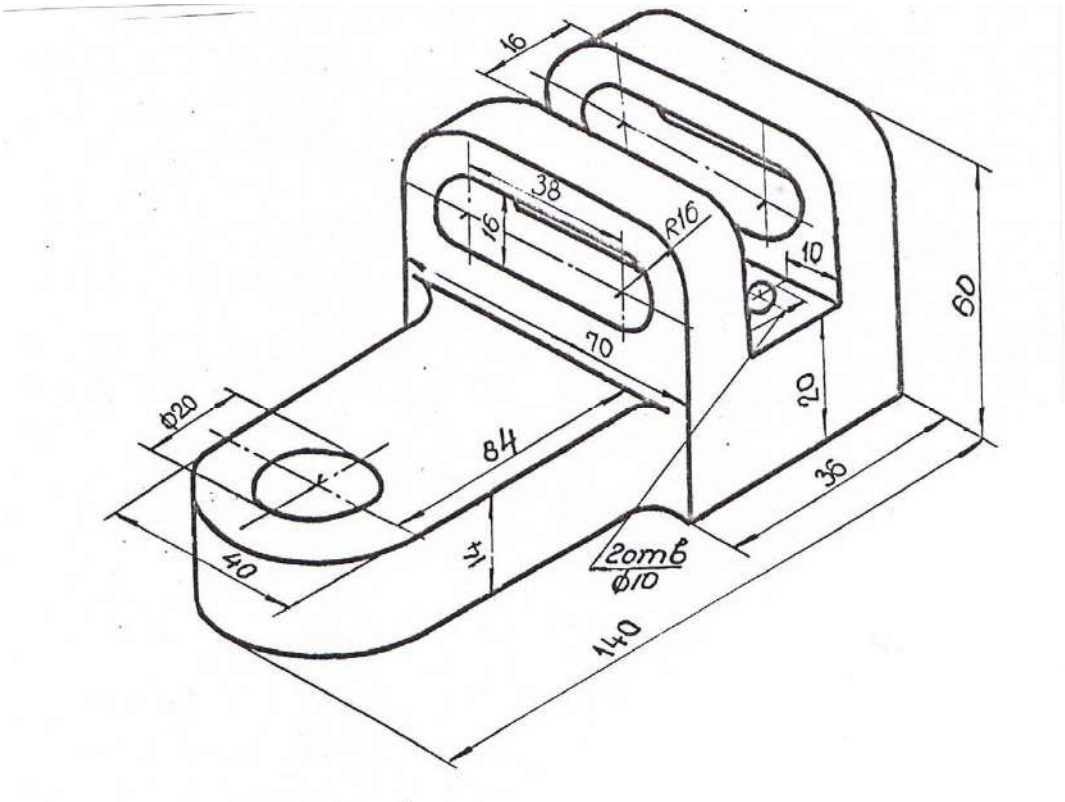
Вариант 12. Вычертить подшипник в масштабе 1:1 и достроить вид слева.
Сделать профильный разрез и местный разрез на виде спереди.

Приложение 4

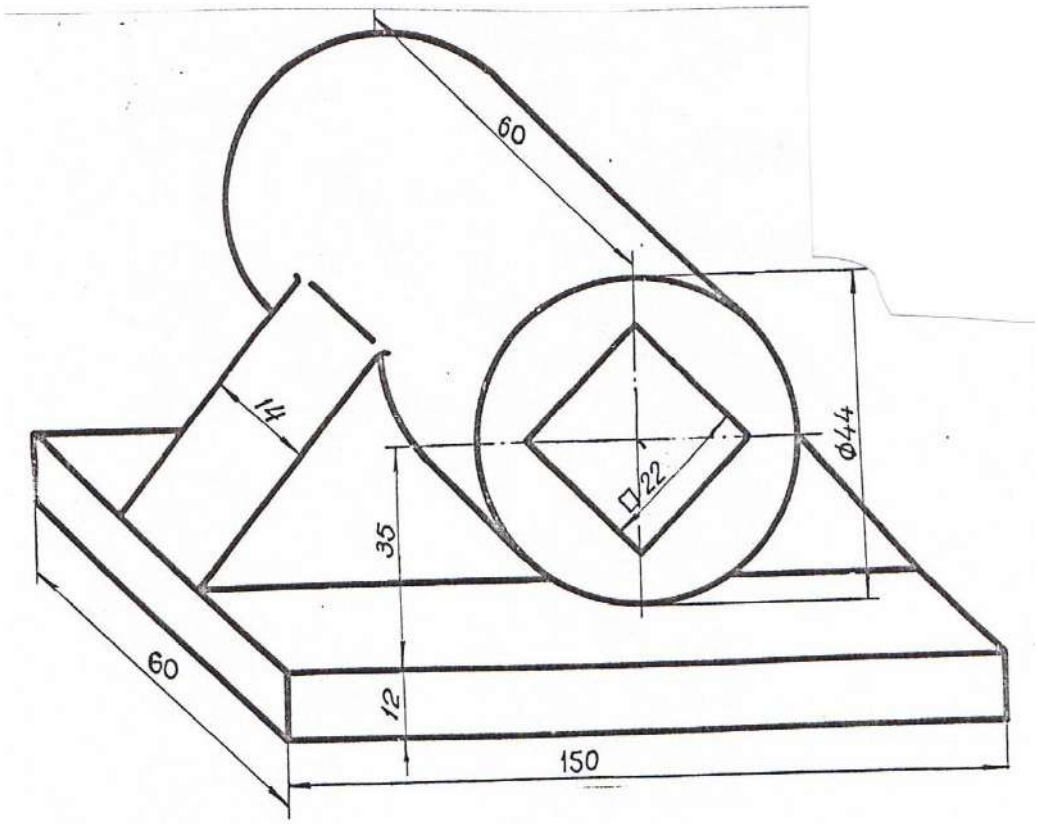
ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 3



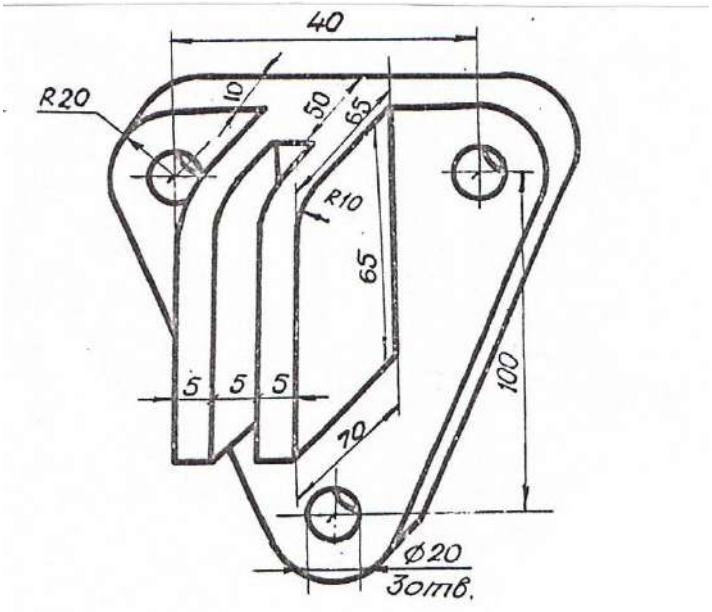
Вариант 1. Вычертить в трех ортогональных проекциях плиту в масштабе 1:1.
Сделать ступенчатый профильный разрез.



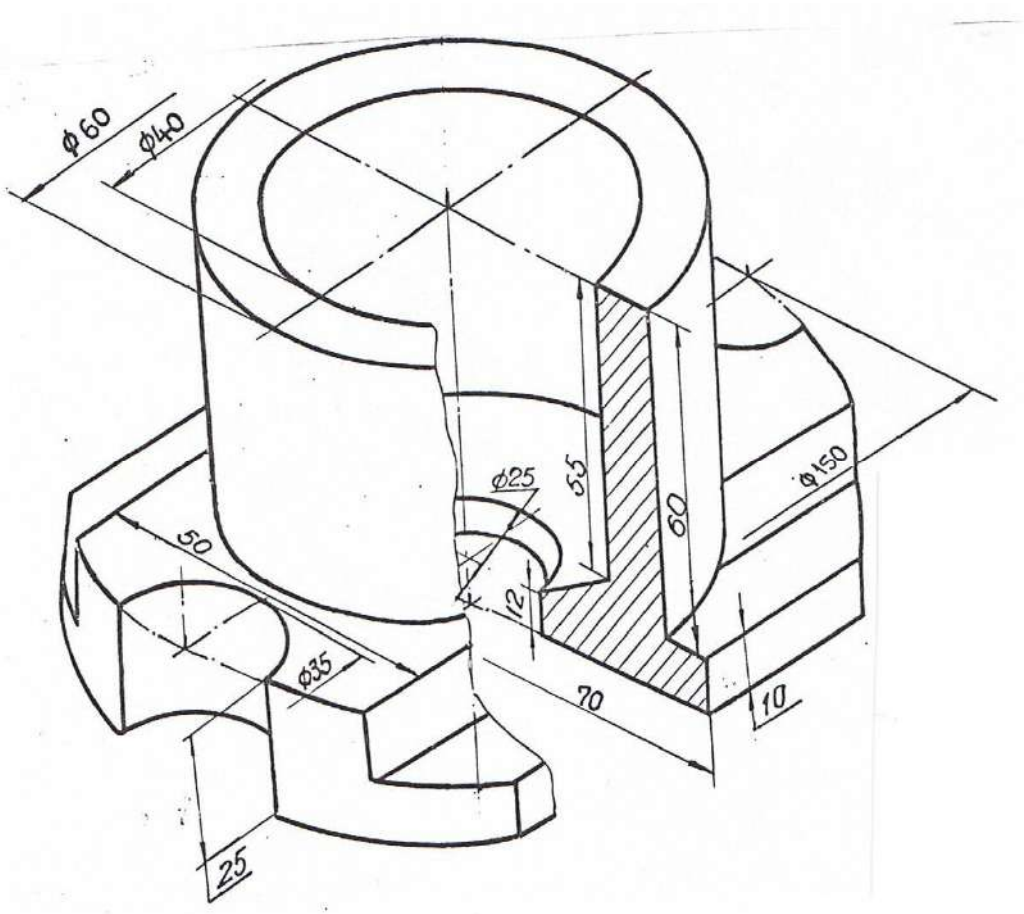
Вариант 2. Вычертить в трех ортогональных проекциях скобу в масштабе 1:1.
Сделать необходимые разрезы.



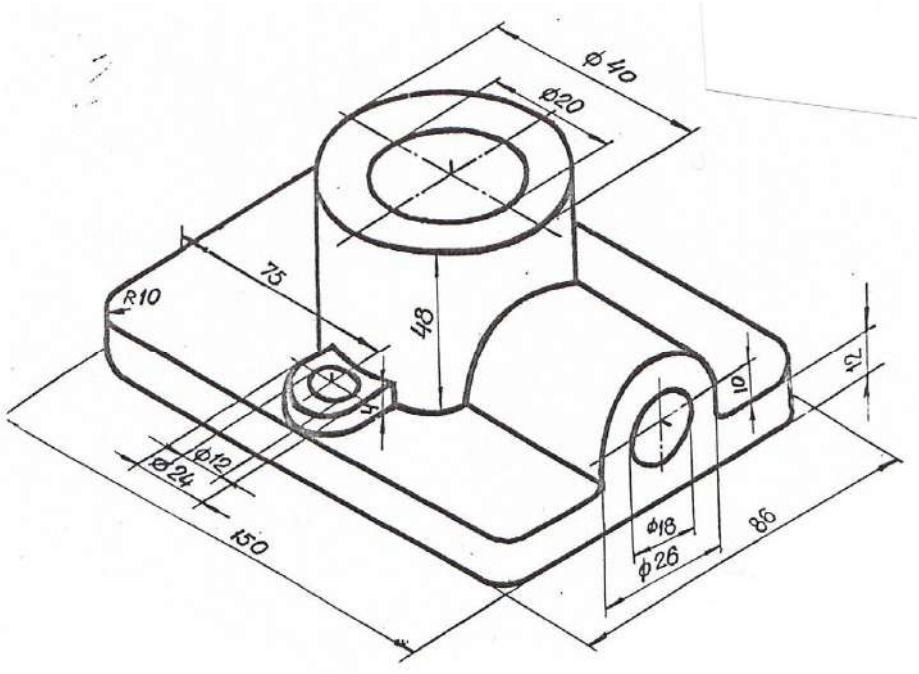
Вариант 3. Вычертить в трех ортогональных проекциях подставку в масштабе 1:1. Сделать необходимый разрез.



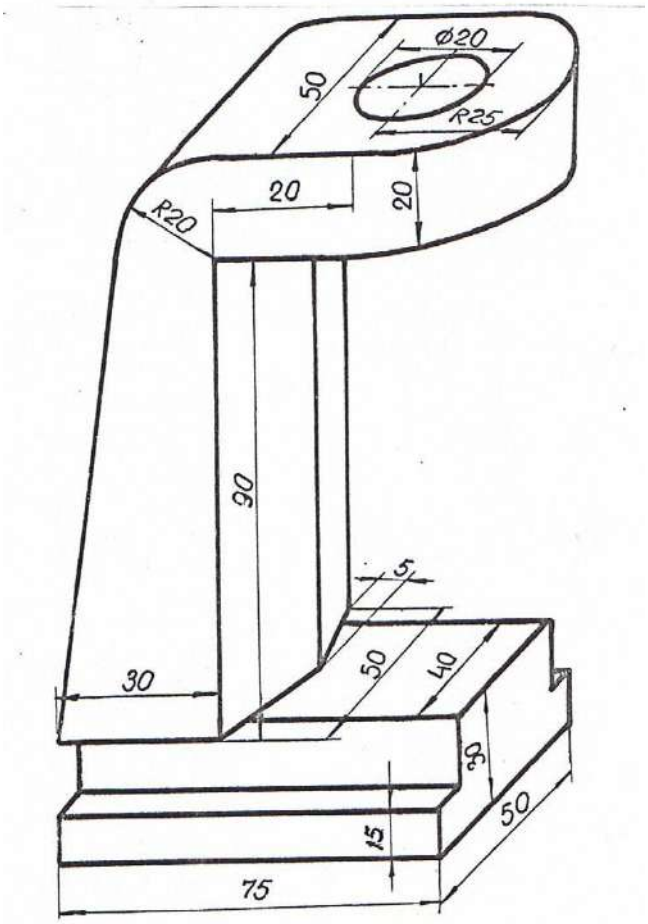
Вариант 4. Вычертить в трех ортогональных проекциях опору в масштабе 1:1. Сделать местные разрезы и горизонтальный разрез.



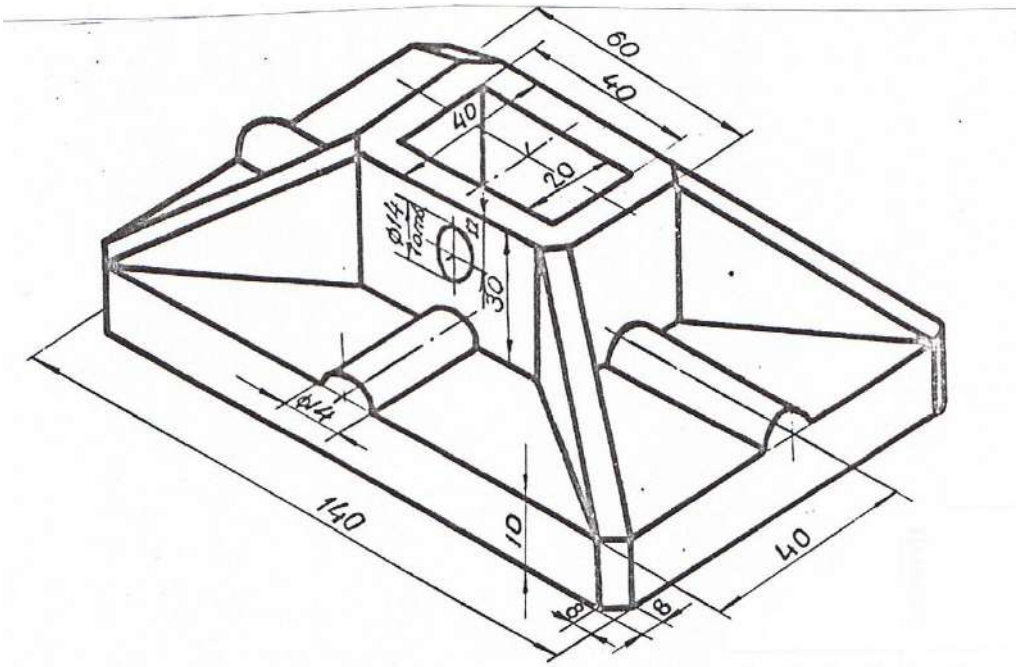
Вариант 5. Вычертить в трех ортогональных проекциях стакан в масштабе 1:1.
Сделать половину фронтального разреза.



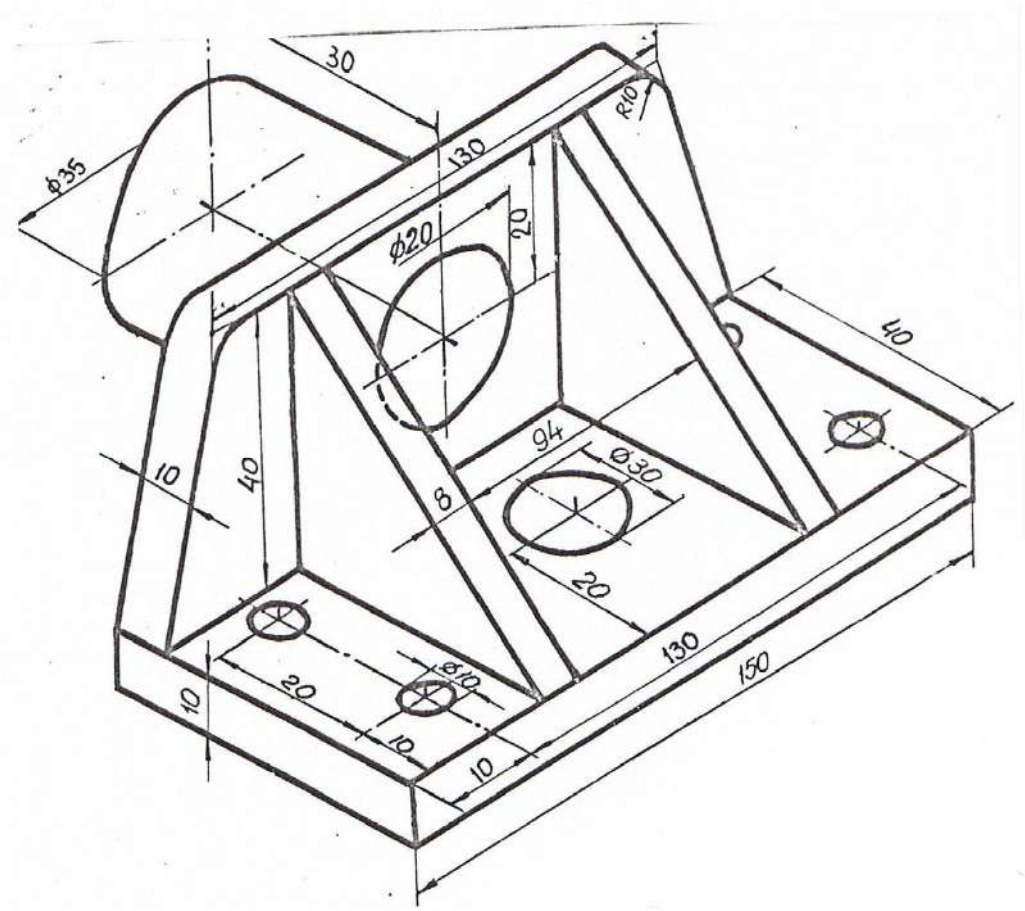
Вариант 6. Вычертить в трех ортогональных проекциях подставку в масштабе 1:1.
Сделать необходимые разрезы.
Примечание. Отверстия ∅20, ∅18 и ∅12 – сквозные.



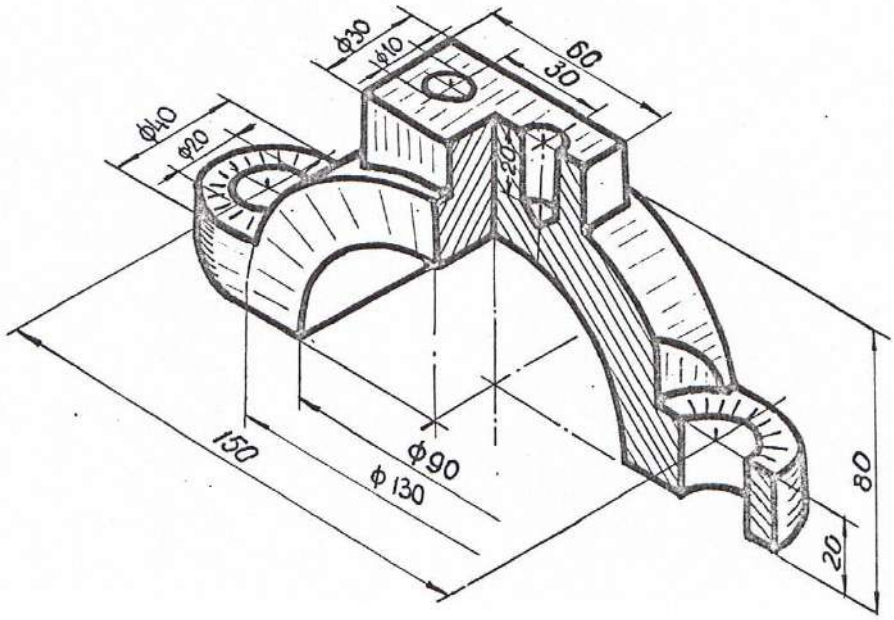
Вариант 7. Вычертить в трех ортогональных проекциях опору в масштабе 1:1.
Сделать необходимый местный разрез и горизонтальный до оси симметрии.



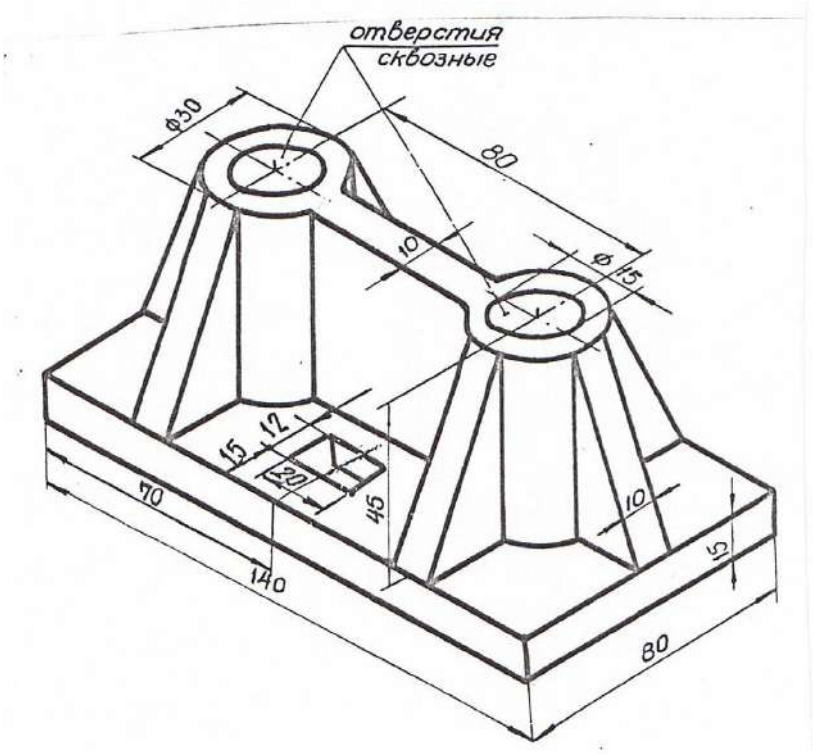
Вариант 8. Вычертить в трех ортогональных проекциях плиту в масштабе 1:1.
Сделать необходимые разрезы.



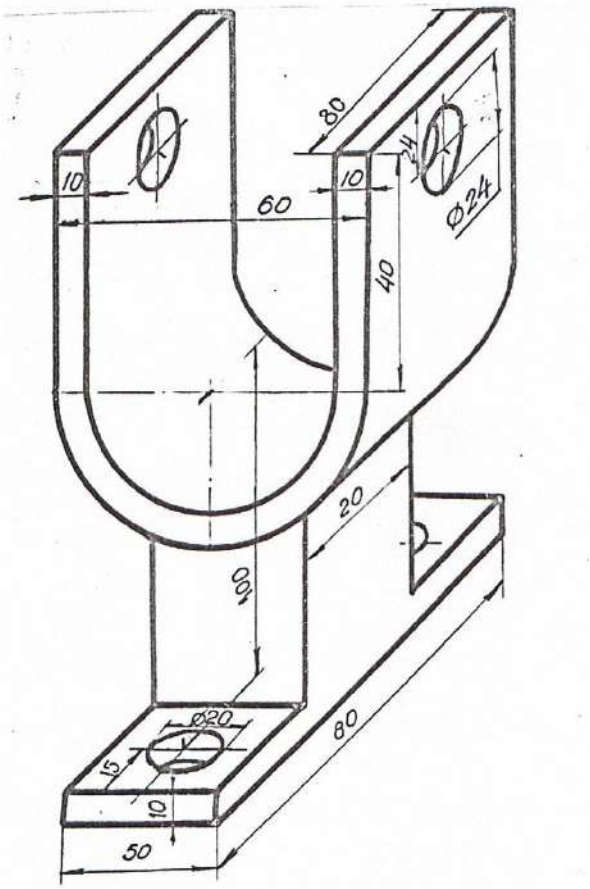
Вариант 9. Вычертить в трех ортогональных проекциях цапфу полую в масштабе 1:1. Сделать необходимые разрезы.



Вариант 10. Вычертить в трех ортогональных проекциях крышку шатуна в масштабе 1:1. Сделать необходимые разрезы.



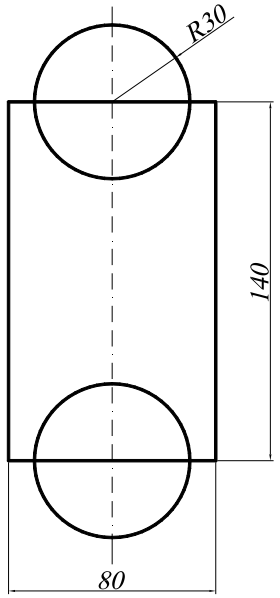
Вариант 11. Вычертить в трех ортогональных проекциях плиту в масштабе 1:1. Сделать необходимые разрезы.



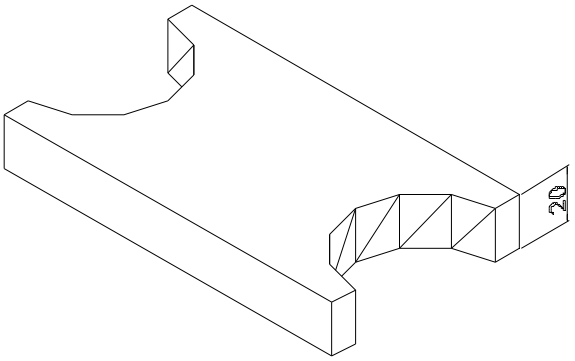
Вариант 12. Вычертить в трех ортогональных проекциях стойку в масштабе 1:1. Сделать необходимые разрезы.

Приложение 5

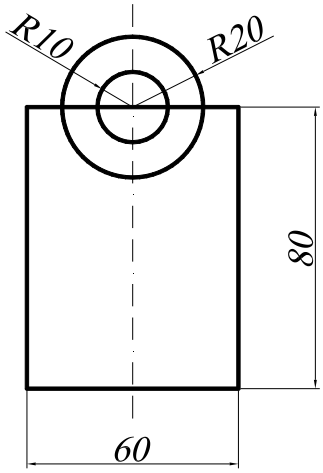
ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ



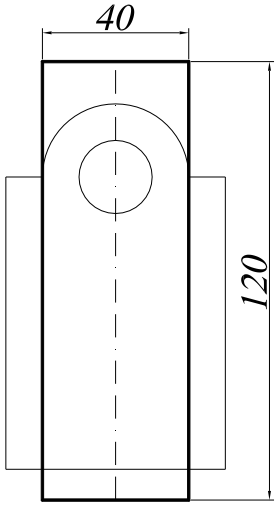
1. Создание области для основания командами ***Polyline*** (Полилиния) и ***Circle*** (Окружность).



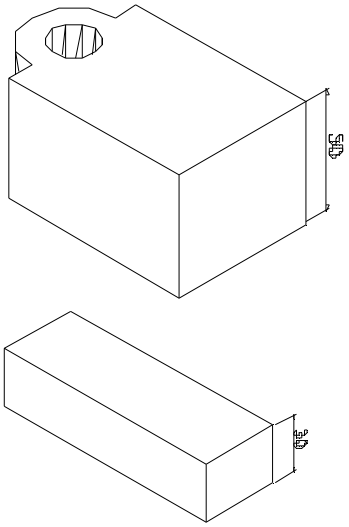
2. Командой ***Extrude*** (Выдавить) «выдавливаем» обе окружности и прямоугольник. Толщина выдавливания 20.
Командой ***Subtract*** (Вычитание) создаем тело путем вычитания цилиндров из параллелепипеда.
Командой ***Hide*** (Скрыть) подавляем невидимые линии.



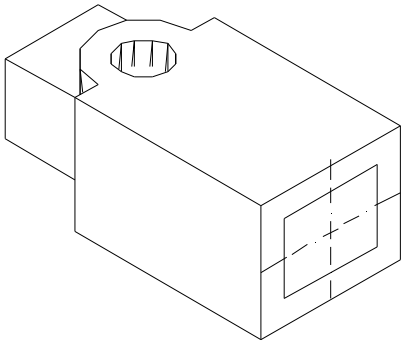
3. Создание области для «башни» командами ***Polyline*** (Полилиния) и ***Circle*** (Окружность).



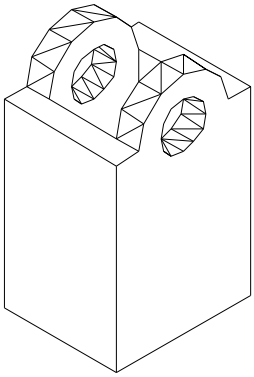
4. Создание области для выреза «башни» командой ***Polyline*** (Полилиния).

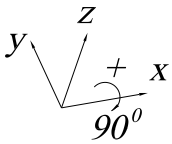


5. Командой ***Extrude*** (Выдавить) «выдавливаем» оба тела. Толщина выдавливания «башни»=50, толщина выдавливания «бруска»=30.
Командой ***Subtract*** (Вычитание) создаем тело «башни» путем вычитания цилиндра из построенного тела

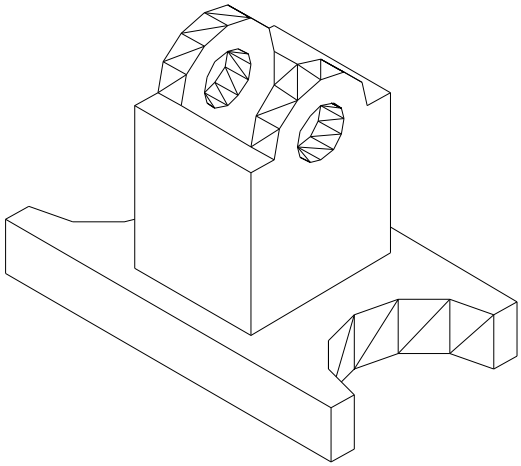


6. Командой ***Move*** (Перемещение) перемещаем «брусок» и центрируем относительно основания «башни».
Командой ***Subtract*** (Вычитание) создаем сквозное отверстие в теле «башни» путем вычитания поверхности «бруска» из тела «башни».





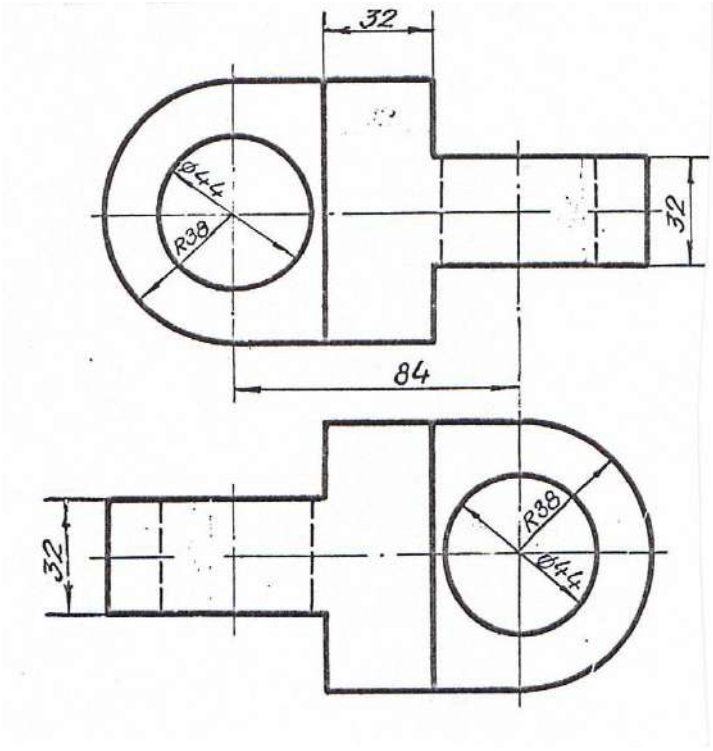
7. Поворачиваем башню относительно оси x на 90^0 (по правилу правой руки), используя команду ***Rotated 3D***, которая вызывается из падающего меню ***Modify*** (Редакировать)→ ***3D Operation*** (3М Операции) → ***Rotated 3D*** (3М Поворот).



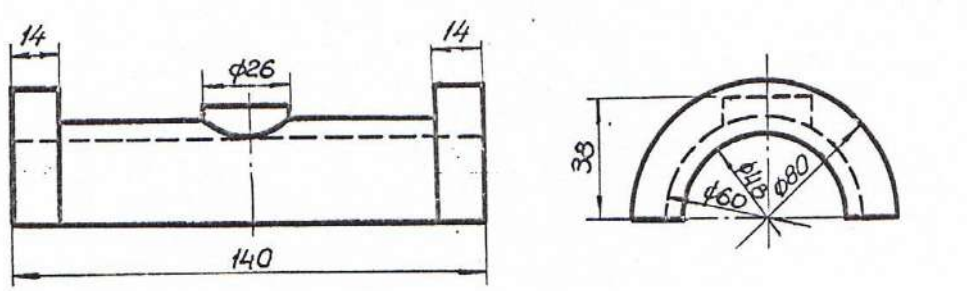
8. Командой ***Move*** (Перемещение) перемещаем «башню» и центрируем относительно построенного основания.
Командой ***Union*** (объединение) объединяем полученные тела.

Приложение 6

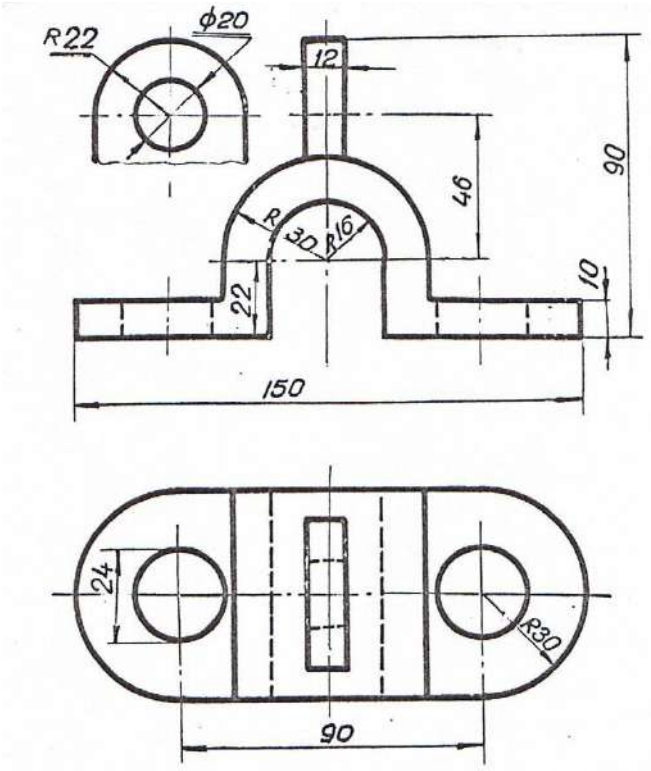
ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 4



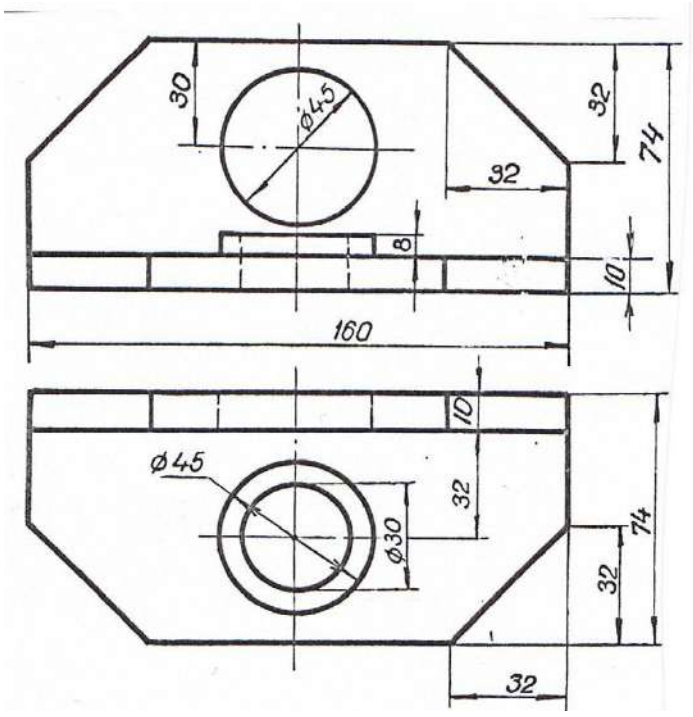
Вариант 1. Вычертить серьгу в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



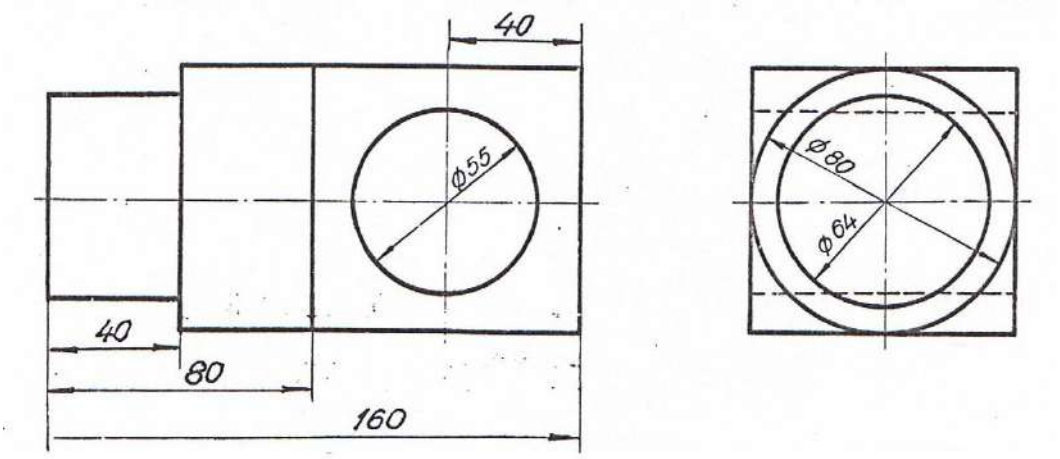
Вариант 2. Вычертить вкладыш подшипника в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



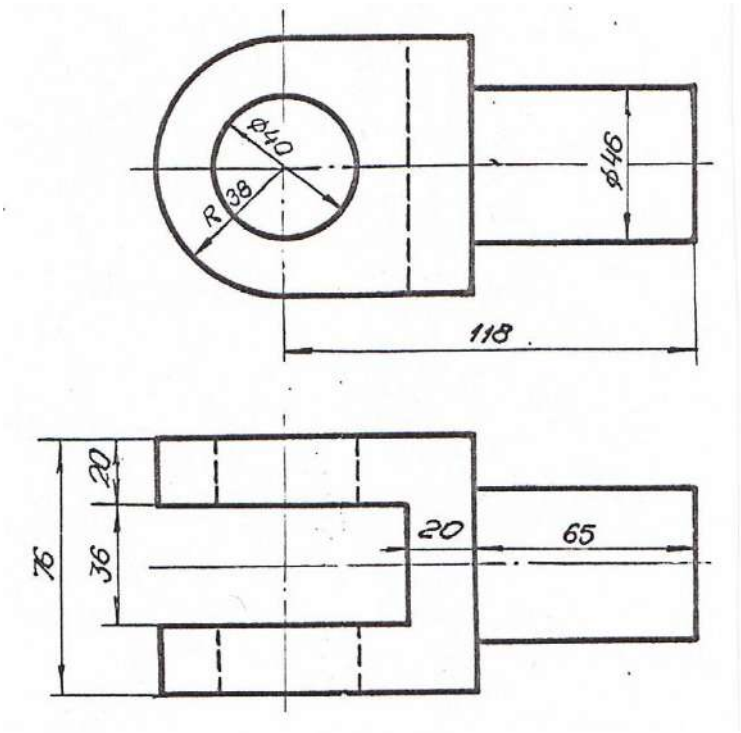
Вариант 3. Вычертить скобу в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



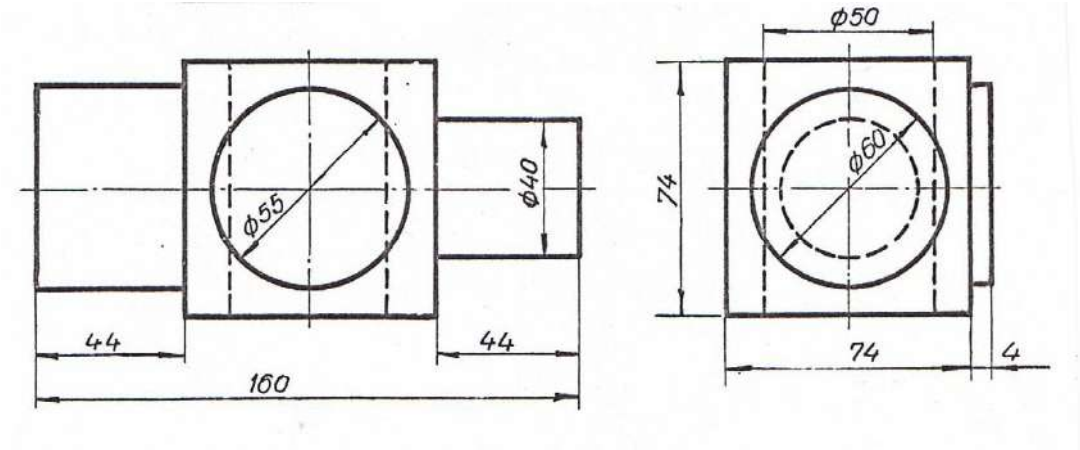
Вариант 4. Вычертить угольник в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



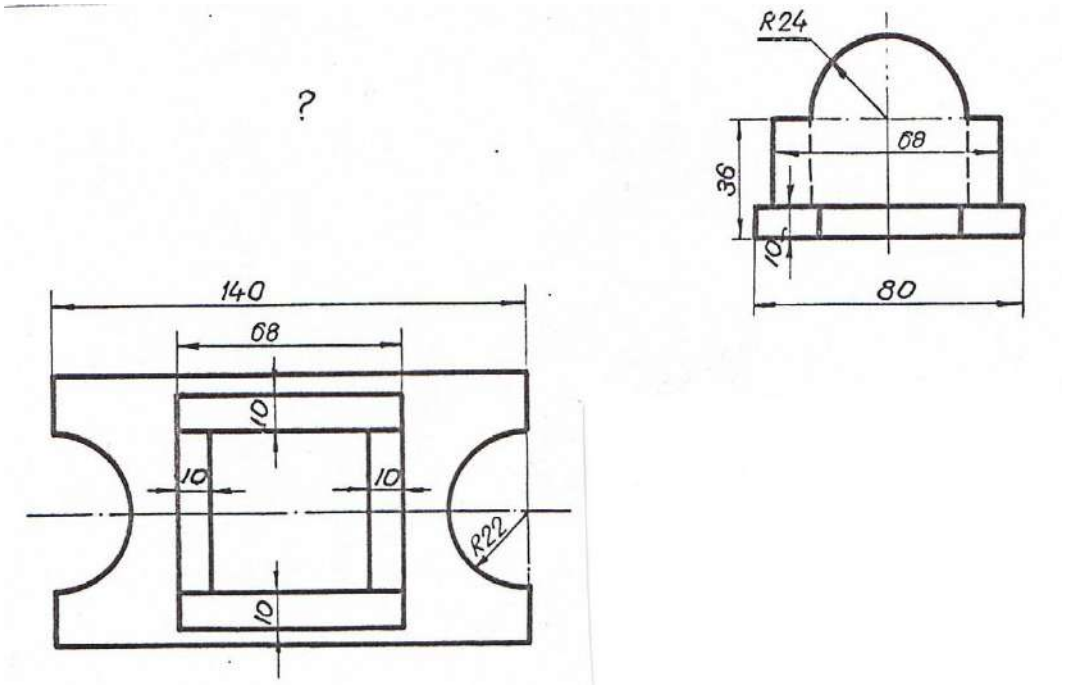
Вариант 5. Вычертить цапфу в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



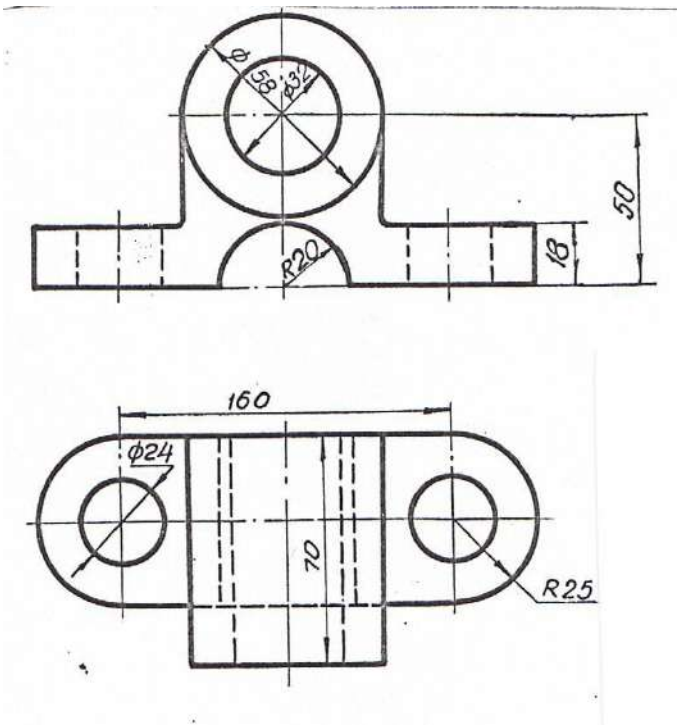
Вариант 6. Вычертить ушко в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



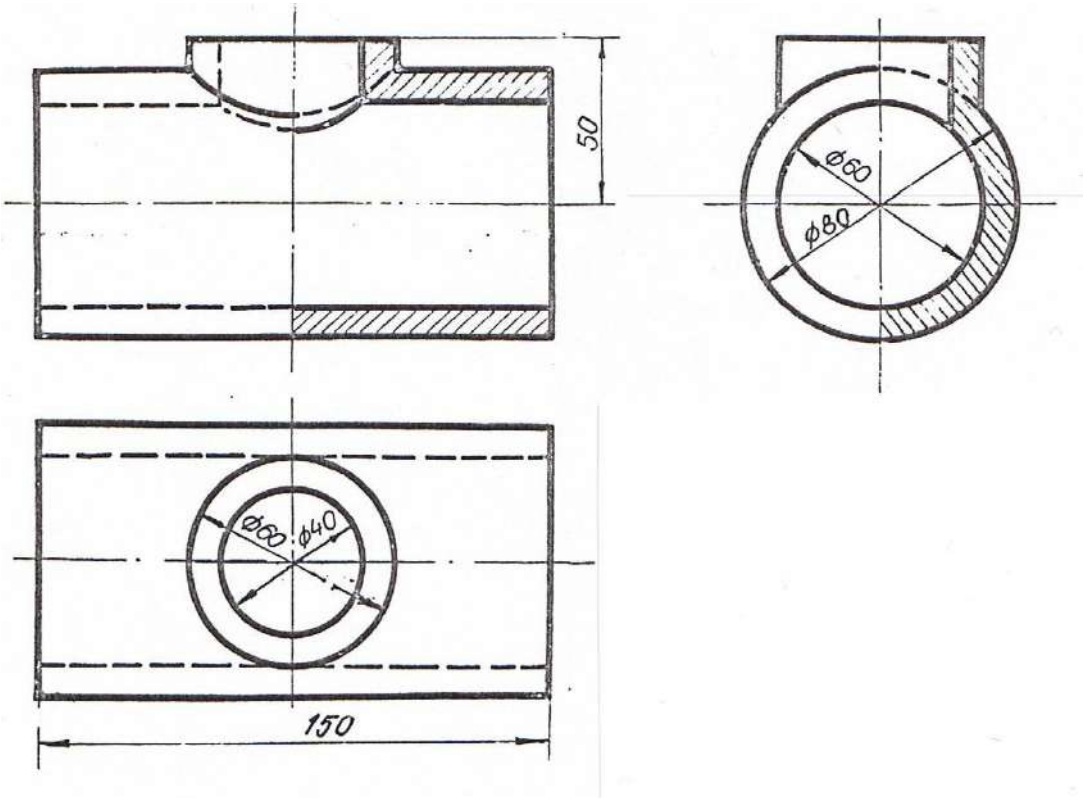
Вариант 7. Вычертить ось в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



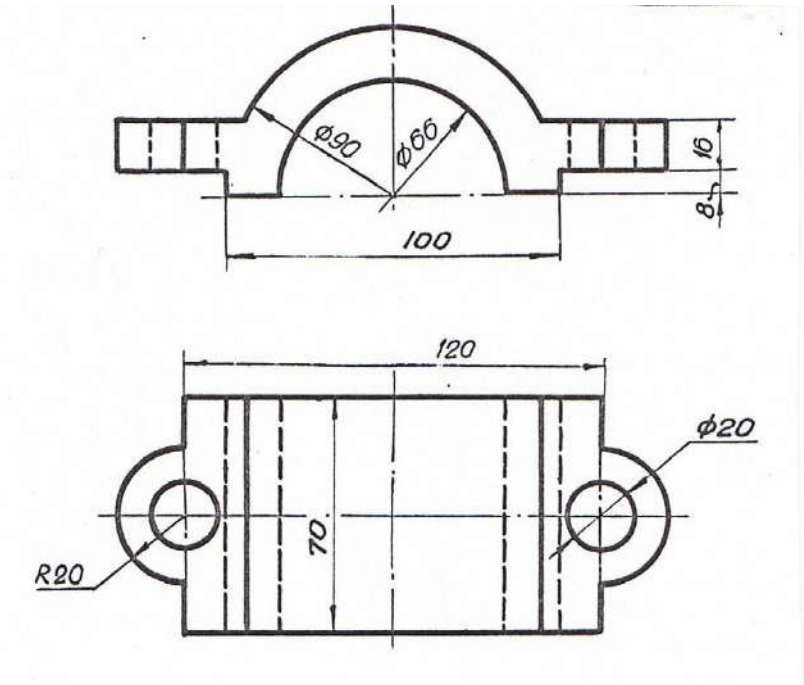
Вариант 8. Вычертить подставку в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



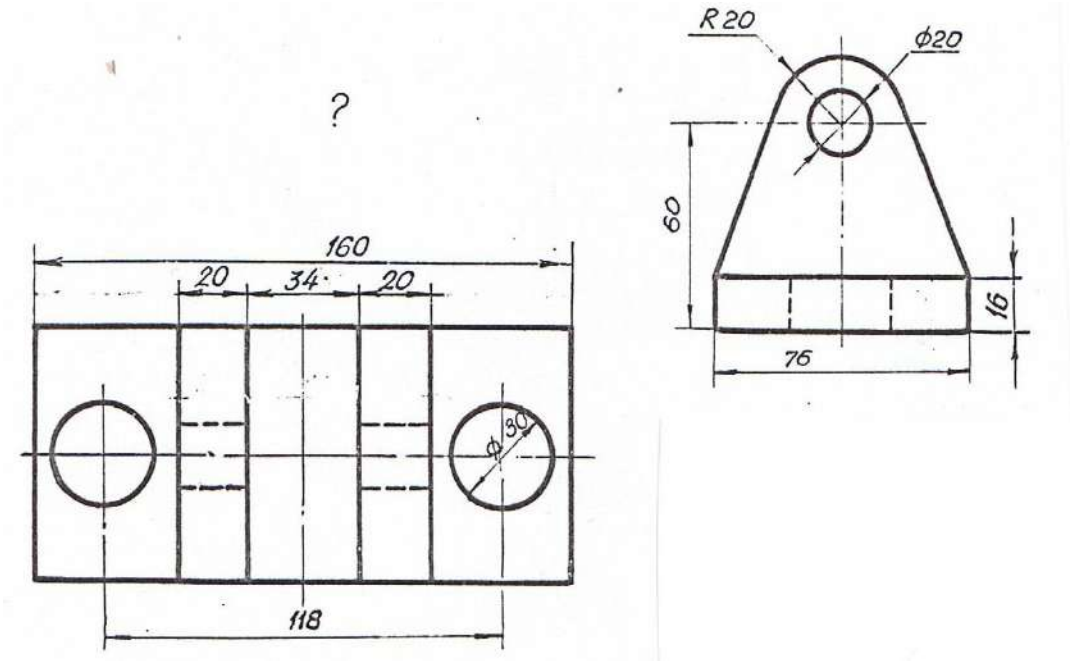
Вариант 9. Вычертить подшипник в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



Вариант 10. Вычертить тройник в изометрии по заданным трем видам в масштабе 1:1.



Вариант 11. Вычертить крышку подшипника в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.



Вариант 12. Вычертить опору в изометрии по заданным двум видам в масштабе 1:1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие……... 3

Глава 1. **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ**……. 5

1. Множества…….. 5

1.1. Основные понятия теории множеств……..… 5

1.2. Отображения и преобразования…… 7

1.3. Теоретико-множественный подход к задачам на построение…… 10

1.4. Геометрические пространства и их размерность…… 11

1.5. Формирование пространства…… 13

1.6. Приёмы подсчёта параметров…… 14

1.7. Параметрический подход к решению задач начертательной геометрии…… 21

2. Системы координат…… 22

2.1. Прямоугольные декартовы координаты…… 22

2.2. Полярные координаты точки на плоскости……. 23

2.3. Цилиндрические координаты…… 23

2.4.Сферические координаты…… 24

Вопросы для самопроверки…….. 24

Глава 2. **КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**……. 25

1. Запуск системы *AutoCAD*…… 25

2. Вид рабочего окна *AutoCAD*……. 26

3. Падающее меню……. 26

4. Строка состояния…… 27

5. Ввод команд…… 28

6. Панели инструментов……. 28

7. Стандартная панель инструментов *(Standard Toolbar)*…….. 28
8. Панель инструментов Object Properties *(Свойства объекта)*…. 30
9. Графические примитивы…….…….. 32
10. Ввод координат точки…….…… 33
11. Панель инструментов *Draw* (Рисовать)…… 34
12. Построение геометрических примитивов…….. 34
12.1. Точка……. 35
12.2. Построение линий…… 35
12.2.1. Отрезок……. 35
12.2.2. Прямая и луч…… 37
12.2.3. Полилиния……. 38
12.2.4. Сплайн……... 41
12.3. Построение многоугольников…… 42
12.3.1. Многоугольник…… 42
12.3.2. Прямоугольник……. 43
12.4. Построение окружностей, эллипсов и их дуг…… 45
12.4.1. Окружность…… 45
12.4.2. Эллипс…… 49
12.4.3. Дуга окружности…… 50
13. Текстовые стили…… 52
13.1. Однострочный текст…… 53
13.2. Многострочный текст……. 57
14. Блок…… 58
14.1. Создание блоков……... 58
14.2. Вставка блока…… 59
15. Создание замкнутых объектов…….. 61
16. Штриховка……. 62
17. Панель инструментов *Object Snap* (Объектная привязка)…… 65
18. Панель инструментов *Modify* (Изменить или редактировать) 67
18.1. Удаление и восстановление объектов……. 68
18.2. Копирование объектов……. 69
18.3. Зеркальное отображение объектов…….. 70
18.4. Построение подобных примитивов……. 71
18.5. Размножение объектов массивом…….. 72

18.6. Перемещение объектов…… 76
18.7. Поворот объектов…… 77
18.8. Масштабирование объектов…… 78
18.9. Растягивание объектов……. 79
18.10. Подрезание объектов……. 80
18.11. Удлинение объектов…… 81
18.12. Разбиение объектов на части……. 82
18.13. Вычерчивание фасок…… 83
18.14. Построение сопряжений углов…….. 84
19. Редактирование с помощью маркеров *Grips* («Ручки»)…….. 86
20. Диспетчер свойств объектов……. 89
21. Панель инструментов *Dimension* (Измерение)…… 89
21.1. Линейные размеры…… 90
21.2. Параллельные размеры…… 92
21.3. Базовые размеры…….. 92
21.4. Размерная цепь……. 93
21.5. Радиальные размеры…… 94
21.6. Угловые размеры…… 94
21.7. Координатные размеры……. 95
21.8. Выноски и пояснительные надписи на чертеже…… 95
21.9. Быстрое нанесение размеров…….. 96
21.10. Нанесение меток центра окружности или дуги…….. 97
21.11. Редактирование размерных стилей…… 98
22. Зумирование…….. 101
23. Панорамирование……. 102
Вопросы для самопроверки…….. 102

Глава 3. **ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**……. 103

1. Общие сведения…….. 103
2. Задание трехмерных координат…….. 103
3. Задание пользовательской системы координат……. 104
4. Пространство модели и пространство листа……. 107
5. Видовые экраны…… 108

5.1. Создание неперекрывающихся видовых экранов……. 108
6. Установка видов на графическом поле……. 109
6.1. Установка направления взгляда…… 109
6.2. Задание направления взгляда с помощью диалогового окна 111
6.3. Установка плана изображения……... 112
6.4. Установка ортогональных и аксонометрических видов…… 113
6.5. Интерактивное управление точкой взгляда…… 113
6.6. Динамическое вращение трехмерной модели…… 114
7. Моделирование каркасов…… 114
7.1. Трехмерная полилиния…….. 115
7.2. Средства редактирования трехмерной полилинии……. 115
8. Твердотельное моделирование……. 116
9. Стандартные тела…… 117
9.1. Параллелепипед……. 117
9.2. Клин…… 118
9.3. Сфера…… 118
9.4. Конус…….. 119
9.5. Цилиндр……. 120
9.6. Тор…….. 121
10. Тела пользователя……. 122
10.1. Выдавленное тело…… 122
10.2. Тело вращения…… 124
11. Тела, созданные комбинированием нескольких тел……. 125
11.1. Объединение объектов…… 126
11.2. Вычитание объектов…….. 126
11.3. Пересечение объектов…….. 127
12. Общие средства редактирования трехмерных объектов…….. 128
12.1. Поворот вокруг оси……. 128
12.2. Зеркальное отображение относительно плоскости (плоскостная симметрия)……. 129
12.3. Размножение трехмерным массивом…….. 130
12.4. Вычерчивание фасок трехмерных тел…… 131
12.5. Построение сопряжений граней…….. 133
12.6. Построение сечений……. 134

12.7. Построение разрезов…… 134
13. Редактирование граней, ребер тел…… 135
13.1. Режим редактирования граней твердотельного объекта…. 136
13.2. Режим редактирования ребер твердотельного объекта……. 140
13.3. Режим редактирования общих свойств
твердотельного объекта……. 141
14. Пример построения трехмерной модели……. 142
15. Перекрывающиеся видовые экраны. Создание ортогональных проекций……... 144
16. Визуализация трехмерных моделей…… 147
16.1. Удаление невидимых линий…… 148
16.2. Раскрашивание трехмерной модели…….. 148
16.3. Тонирование изображений трехмерных объектов…….. 149
16.4. Включение фона в изображение сцены……. 150
16.5. Настройка освещения……. 151
16.6. Тени…… 152
16.7. Работа с материалами…….. 153
Вопросы для самопроверки…….. 154
Заключение…… 155
Список литературы……. 156
Приложения……. 157
Приложение 1. Пример выполнения рабочего чертежа детали…….. 157
Приложение 2. Задание для выполнения графической работы № 1…….. 158
Приложение 3. Задание для выполнения графической работы № 2…….. 164
Приложение 4. Задание для выполнения графической работы № 3…….. 170
Приложение 5. Пример построения твердотельной модели…… 176
Приложение 6. Задание для выполнения графической работы № 4…….. 178

Учебное издание

Шангина Елена Игоревна

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебное пособие

Редактор издательства Л. В. Устьянцева
Компьютерная верстка и графика автора

Подписано в печать 01.02.06. Формат 60x84-1/8. Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 23,75. Уч.-изд. л. 11,25. Тираж 200 экз. Заказ № .

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.

**Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»**

И. Б. Белоносова

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА.

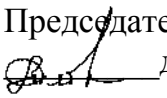
РЕЗЬБА

Методическое пособие
по теме «Условности машиностроительного черчения»
для студентов всех специальностей»

Екатеринбург – 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
инженерно-экономического
факультета
«27» декабря 2011 г.
Председатель комиссии

доц. И. А. Тяботов

И. Б. Белоносова

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА.

РЕЗЬБА

Методическое пособие
по теме «Условности машиностроительного черчения»
для студентов всех специальностей»

3-е издание, исправленное и дополненное

Издание УГГУ Екатеринбург, 2012
Б 43

Рецензенты: *Н. Н. Черемных*, д. т. н., проф. Уральского государственного лесотехнического университета,
Л. Г. Тимофеева, доцент Уральского государственного лесотехнического университета.

Пособие рассмотрено на заседании кафедры инженерной графики 06.07.2010 года (протокол №5) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Белоносова И. Б.

Б 43 ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА. РЕЗЬБА. Методическое пособие по теме «Условности машиностроительного черчения» для студентов всех специальностей. 3-е издание, исправленное и дополненное / И. Б. Белоносова; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012. – 38 с.

В методическом пособии содержатся исходные данные для индивидуальных заданий, примеры их выполнения, а также основные сведения о резьбах, применяемых в машиностроении, параметрах и технологических элементах резьб в соответствии с Государственными стандартами.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Белоносова И. Б., 1994, 2002, 2012
© Уральская государственная горно-геологическая академия 1994, 2002.
© Уральский государственный горный университет, 2012

Резьбовые соединения широко распространены в машиностроении. Они обладают такими достоинствами, как универсальность, высокая надежность, способность воспринимать большие нагрузки, удобство сборки и разборки, простота изготовления.

1. РЕЗЬБА. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ (ГОСТ 11708-82)

Р е з ь б а – поверхность, образованная при винтовом движении плоского контура по цилиндрической или конической поверхности.

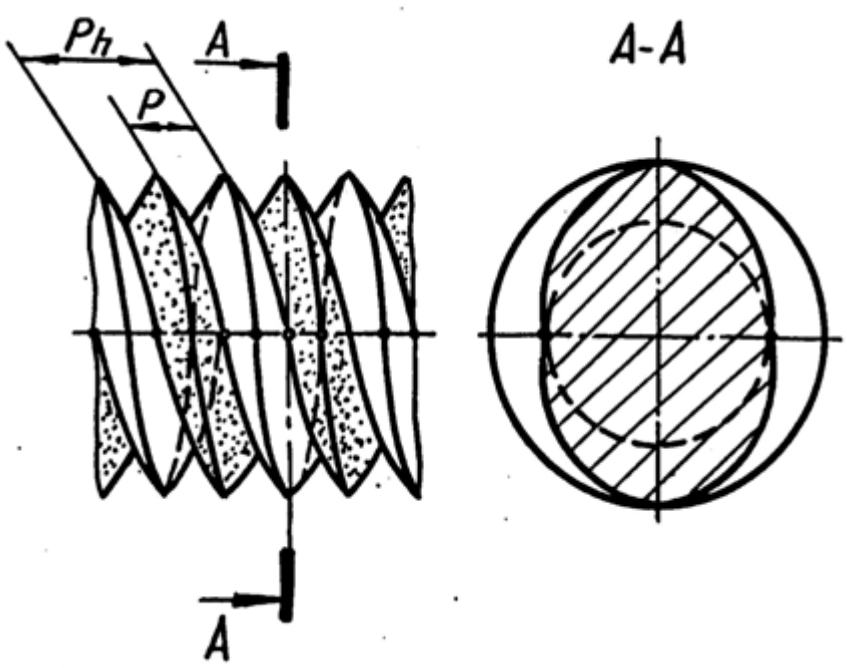


Рис. 1

Резьбы классифицируются по следующим признакам:

1. В зависимости от формы поверхности, на которой нарезана резьба, они подразделяются на цилиндрические и конические.

2. В зависимости от расположения резьбы на поверхности стержня или отверстия они подразделяются на внешние и внутренние.

3. В зависимости от формы профиля различают резьбы треугольного, прямоугольного, круглого и других профилей.

4. По эксплуатационному назначению резьбы делятся на крепежные (метрические, дюймовые), крепежно-уплотнительные (трубные, конические), ходовые (трапецеидальные, упорные, прямоугольные, круглые), специальные и др.

5. В зависимости от направления винтовой поверхности различают правые и левые резьбы.

6. По числу заходов резьбы подразделяются на однозаходные и многозаходные (двух-трехзаходные) и др.

Все резьбы разделяют на следующие группы:

- стандартизованные – резьбы с установленными стандартами параметрами: профилем, шагом, диаметром;
- нестандартизованные или специальные – резьбы, параметры которых не соответствуют стандартизованным.

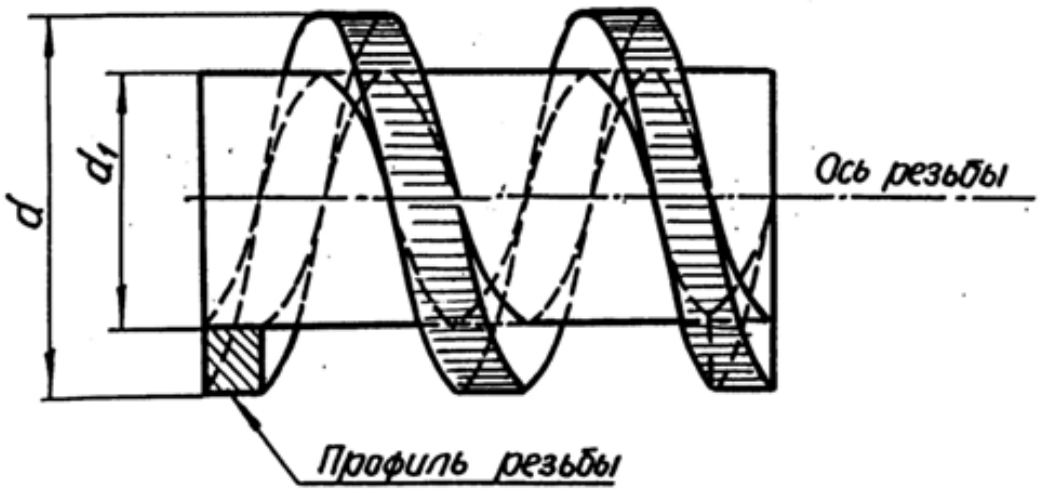


Рис. 2

Основные элементы и параметры резьб имеют следующие определения.

Ось резьбы – прямая, относительно которой происходит винтовое движение контура, образующего резьбу (рис. 2).

Профиль резьбы – контур сечения резьбы плоскостью, проходящей через ее ось. Резьбу называют по форме ее профиля: треугольной, прямоугольной, трапецеидальной и т. п.

Левая резьба – образована контуром, вращающимся против часовой стрелки и перемещающимся вдоль оси в направлении от наблюдателя. К обозначению левых резьб добавляется «*LH*».

Правая резьба – образована контуром, вращающимся по часовой стрелке и перемещающимся вдоль оси в направлении от наблюдателя.

Шаг резьбы (***P***) **–** расстояние между соседними одноименными боковыми сторонами профиля в направлении, параллельном оси резьбы (рис. 1).

Ход резьбы (***P*** $_h$) - расстояние между ближайшими одноименными и боковыми сторонами профиля, принадлежащими одной и той же винтовой поверхности, в направлении, параллельном оси резьбы.

Наружный диаметр резьбы (d – для болта, D – для гайки) – диаметр воображаемого цилиндра, описанного вокруг вершин наружной резьбы или впадин внутренней резьбы (рис. 2).

Внутренний диаметр резьбы (d_1 – для болта, D_1 – для гайки) – диаметр воображаемого цилиндра, описанного во впадины наружной резьбы или в вершины внутренней резьбы.

2. ТИПЫ РЕЗЬБ

В машино- и приборостроении применяются стандартные резьбы различных типов.

2.1. Метрическая резьба

Профиль метрической резьбы представляет собой равнобедренный треугольник с углом при вершине 60°. Вершины и впадины витков имеют срез, благодаря которому между вершинами витков болта и впадинами гайки оставляется некоторый зазор, который предотвращает заклинивание.

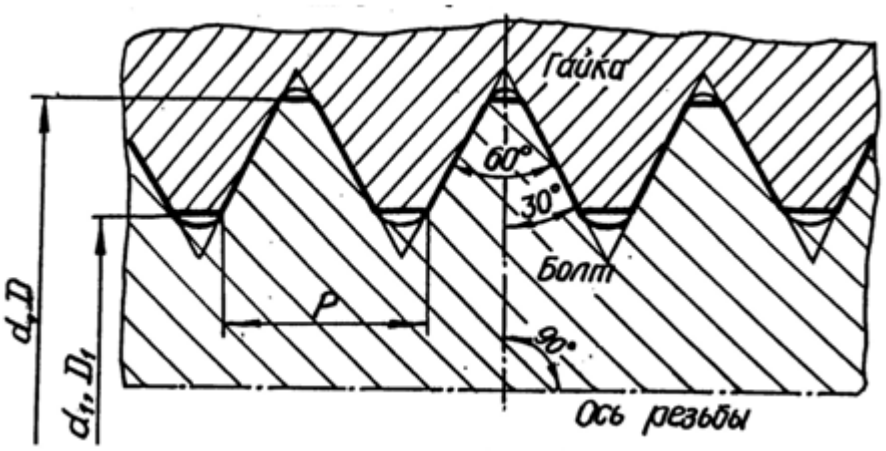


Рис. 3

Размеры метрической резьбы для диаметров от 1 до 600 мм установлены по ГОСТ 8724-81 и 9150-81. Диаметры резьб разделены на три ряда, а шаги на крупные и мелкие. Крупным называют наибольший из шагов для номинального размера диаметра резьбы. Метрические резьбы с крупным шагом установлены для диаметров от 1 до 63 мм; метрические резьбы с мелкими шагами - для диаметров от 1 до 600 мм.

Резьба с крупным шагом обозначается прописной буквой *М* и номинальным диаметром, например: *М*24, *М*36.

Резьба с мелким шагом обозначается прописной буквой *М*, номинальным диаметром и шагом, например: *М*24×2, *М*36×2.

Резьба левая обозначается буквами *LH*, например: *М*24 *LH*, *М*24×2*LH*.

Резьбы многозаходные обозначаются буквой *М*, номинальным диаметром, числовым значением хода и в скобках буквой *Р*, и числовым значением шага, например: трехзаходная резьба с шагом 2 мм *М*36×3(*Р*2), для левой резьбы *М*36×3(*Р*2)*LH*.

Согласно ГОСТ 16093-81 система допусков резьб общего назначения предусматривает допуски диаметров резьб, устанавливаемые степенями точности:

для наружного диаметра наружной резьбы (болта) – 4, 6, 8;

для внутреннего диаметра внутренней резьбы (гайки) – 4, 5, 6, 7, 8;

Положение полей допусков диаметров резьбы имеют следующие обозначения:

для резьбы болтов – *d*, *e*, *f*, *d*, *h*;

для резьбы гаек – *E*, *F*, *G*, *H*.

Примеры обозначения резьбы номинальным диаметром 20 мм с обозначением полей допусков:

*M*20-6*g* - с крупным шагом, наружная;

*M*20-6*H* - с крупным шагом, внутренняя;

*M*20×2-6*g* - с мелким шагом, внутренняя;

*M*20×2*LH*-6*g* - с мелким шагом, наружная, левая.

Посадка обозначается дробью: числитель – поле допуска внутренней резьбы, знаменатель - поле допуска наружной, например: *M*20×2*LH*-6*H*/6*g*.

Для покупных крепежных изделий рекомендуется применять следующие значения полей допуска: для гайки – 6*H*, 7*H* и для болта - 6*g*, 8*g*.

2.2. Трубная цилиндрическая резьба

Трубную цилиндрическую резьбу (ГОСТ 6357-81) применяют в трубопроводах, а также в соединениях внутренней цилиндрической резьбы с наружной конической резьбой.

Профилем трубной резьбы (рис. 4) является равнобедренный треугольник с углом при вершине 55° и закругленными вершинами и впадинами. Профили наружной и внутренней резьбы совпадают, что обеспечивает герметичность в соединениях этой резьбы.

Характерные особенности трубной цилиндрической резьбы:

- резьба имеет более мелкий шаг и меньшую высоту профиля по сравнению с дюймовой цилиндрической резьбой;

- фактический наружный диаметр резьбы большего его номинального значения примерно на двойную толщину стенок трубы;

- номинальный наружный диаметр резьбы условно принимают равным внутреннему диаметру трубы, на которой нарезается резьба (рис. 5).

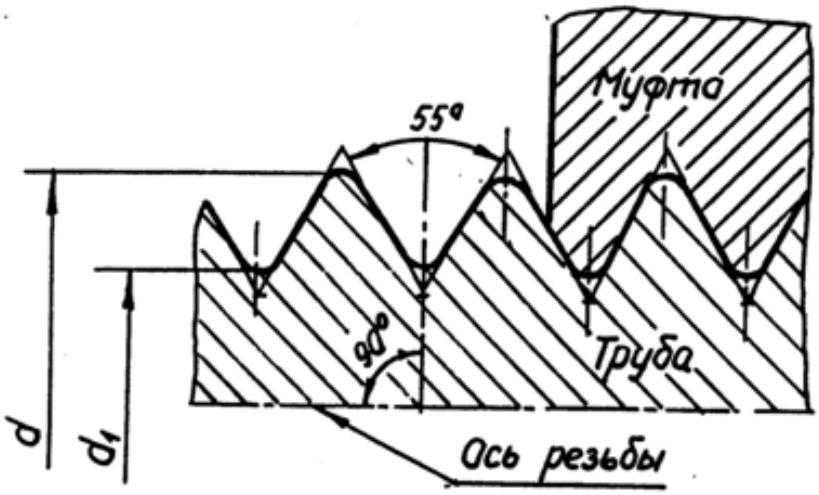


Рис. 4

Трубную резьбу условно обозначают в дюймах (1″ =25,4 мм), указывающих (приближенно) величину диаметра отверстия трубы, который называют диаметром условного прохода трубы и обозначают D_y.

Трубную цилиндрическую резьбу нарезают на трубах до 6″. Трубы свыше 6″ сваривают.

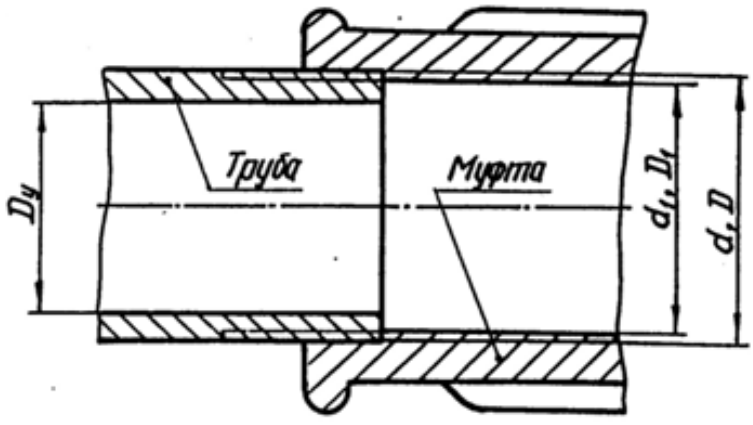


Рис. 5

Обозначение трубной цилиндрической резьбы по ГОСТ 6357-81 состоит из буквы G, номинального размера резьбы в дюймах и класса точности изготовления резьбы. Для трубной цилиндрической резьбы установлены два класса точности – А и В., например:

- резьба класса точности А: G1 – А;

- резьба левая (*LH*) класса точности *B*: *G*3*LH* – *B*;

- резьбовое соединение при классах точности внутренней резьбы *A*, наружной *B*: *G*3 – А/*B*.

2.3. Трапецеидальная резьба

Трапецеидальная резьба по ГОСТ 9484-81 служит для передачи движений и усилий. Трапецеидальная резьба применима для диаметров от 10 до 640 мм и может иметь шаги от 2 до 48 мм. Предусмотрено выполнение резьб одного и того же диаметра, но с различными шагами.

Трапецеидальная резьба имет профиль в виде равнобочной трепеции с углом между ее боковыми сторонами, равными 30° (рис. 6).

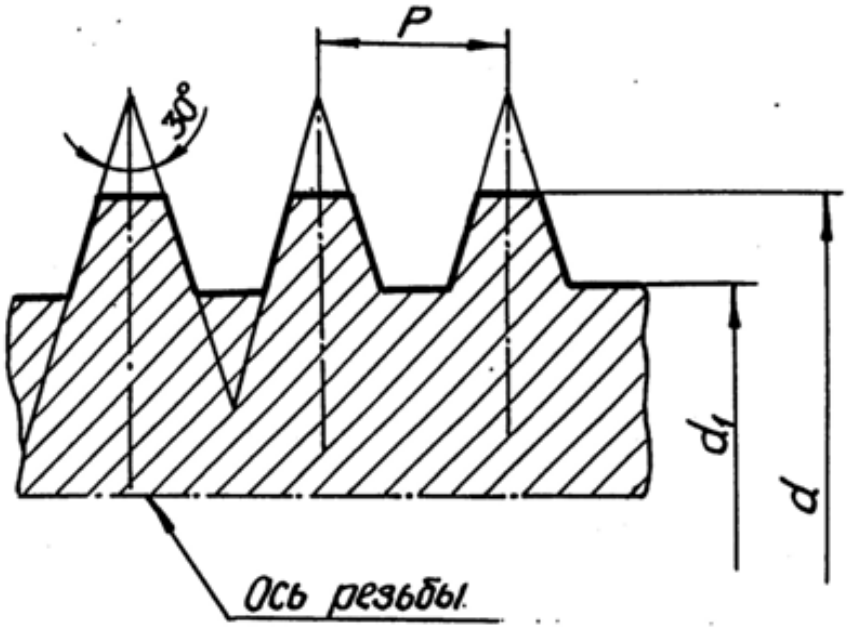


Рис. 6

Симметричный профиль резьбы позволяет применять ее для риверсивных винтовых механизмов. Одинаковые зазоры по наружному и внутреннему диаметрам создают благоприятные условия для смазывания. Трапецеидальная резьба может быть однозаходной и многозаходной, правой и левой.

Номинальные размеры трапецеидальной однозаходной резьбы устанавливает ГОСТ 24738-81.

Условное обозначение однозаходной трапецеидальной резьбы включает буквы *Tr*, номинальный диаметр и шаг, а также буквы *LH* для левой резьбы, например, *Tr*40×3*LH*.

Основные размеры и допуски резьбы трапецеидальной многозаходной устанавливает ГОСТ 24739-81.

Условное обозначение трапецеидальной многозаходной резьбы содержит буквы *Tr*, номинальный диаметр, числовое значение хода и в скобках буква Р с числовым значением шага, например, *Tr*20×4(P2)*LH*.

В производственных чертежах в обозначение резьбы обязательно включают обозначение поля допуска, состоящее из цифры, показывающей степень точности среднего диаметра резьбы и буквы латинского алфавита, обозначающей основное отклонение этого диаметра, например, *Tr*20×4(P2)*LH*-8*H*/8*e*.

2.4. Упорная резьба

Упорная резьба обладает высокой прочностью и высоким КПД. Она применяется в грузовых винтах для передачи больших усилий, действующих в одном направлении в мощных домкратах, прессах и т. д.

Профиль резьбы (рис. 7) представляет собой трапецию, одна сторона которой является рабочей стороной профиля, и ее положение определяется углом наклона 3°. Другая сторона трапеции (нерабочая сторона профиля) имеет угол наклона 30°.

Профиль и параметры упорной резьбы предусматривает ГОСТ 10177-82. Для упорной резьбы предусмотрены номинальные диаметры резьбы от 10 до

640 мм, резьба может выполняться с разными шагами при одном и том же диаметре.

На чертеже упорная резьбы обозначается буквой S, номинальным диаметром и шагом, например: резьба упорная левая, имеющая номинальный диаметр 80 мм и шаг 16 мм – *S*80×16 *LH*.

В прессостроении применяется также упорная резьба, профиль которой представляет собой неравнобочную трапецию с углом рабочей стороны 0° и нерабочей – 45°. Усиленная упорная резьба предусмотрена для диаметров от 80 до 2000 мм.

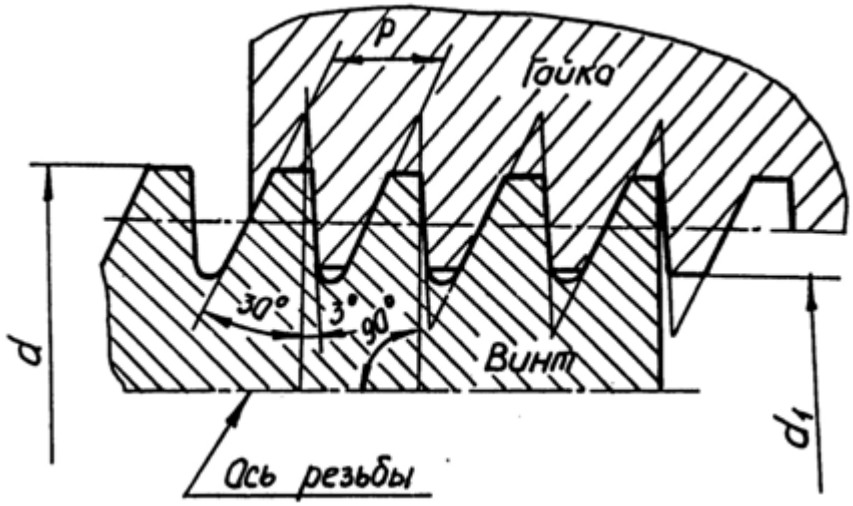


Рис. 7

2.5. Прямоугольная и квадратная резьбы

Прямоугольная и квадратная резьбы имеют высокий КПД и дают большой выигрыш в силе, поэтому они применяются для передачи осевых усилий в грузовых винтах и движения в ходовых винтах.

Прямоугольная и квадратная резьбы не стандартизованы, так как имеют следующие недостатки:

- в соединении (типа «болт – гайка») трудно устроить биение;

- они обладают прочностью меньшей, чем трапецеидальная резьба, так как основание витка у трапецеидальной резьбы при одном и том же шаге шире, чем у прямоугольной или квадратной резьб;

- их труднее изготовить, чем трапецеидальную.

В соответственных соединениях эти резьбы заменены трапецеидальными.

При изображении этих резьб обязательно указывают ее профиль и размеры (рис. 8). Диаметр резьбы предпочтительно выбирать из ряда номинальных диаметров метрической резьбы.

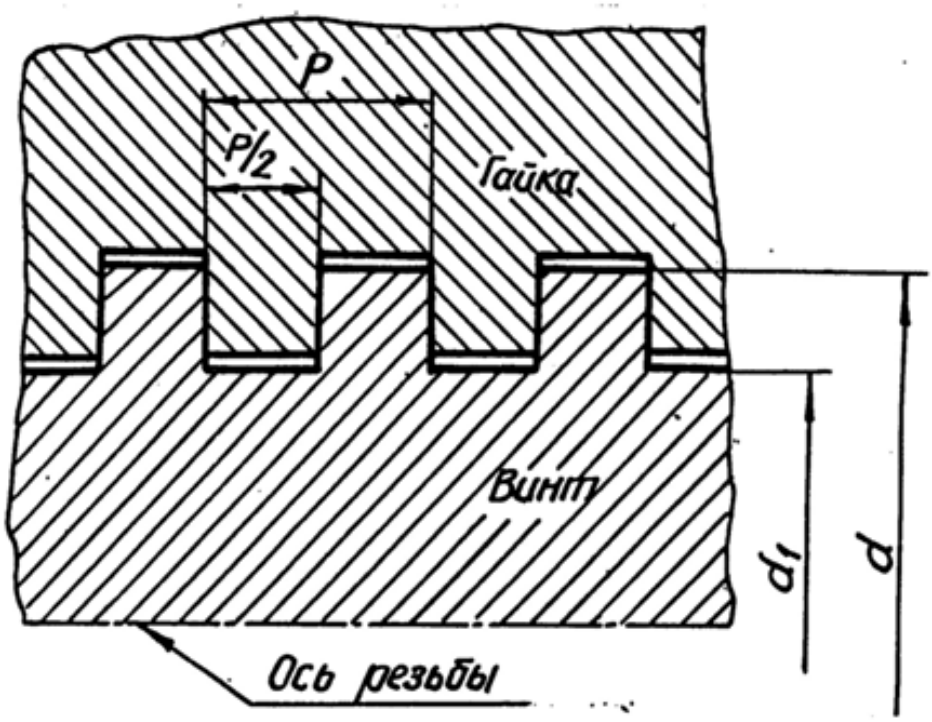


Рис.8

3. ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕЗЬБЫ

Все резьбы, независимо от их типа, изображаются на чертежах условно в соответствии с ГОСТ 2.311-68.

Основная условность заключается в проведении сплошной толстой линии вместо выступов резьбы и тонкой сплошной линии вместо впадин; витки резьбы не изображаются. Границу резьбы упрощенно изображают прямой, перпендикулярной к оси изображения; эта прямая, если она видимая, выполняется сплошной толстой линией.

3.1. Изображение наружной резьбы

Изображение резьбы содержит линии, соответствующие: оси резьбы, наружному и внутреннему диаметрам резьбы и границе резьбы. Резьбу на стержне изображают сплошными основными линиями по наружному диаметру резьбы и сплошными тонкими линиями – по внутреннему диаметру (рис. 9).

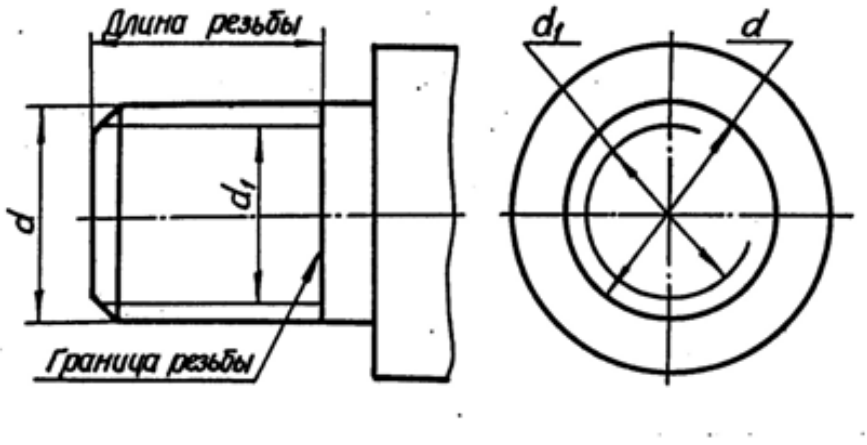


Рис.9

При изображении на плоскости, параллельной оси резьбы, тонкая линия должна пересекать границу фаски на конце стержня и доходить до сплошной линии, ограничивающей резьбу.

При изображении резьбы на плоскости, перпендикулярной к оси резьбы. тонкую линию окружности внутреннего диаметра резьбы проводят в виде дуги, примерно равной ¾ этой окружности. Разрыв окружности допускается делать в любом месте. Расстояние между сплошной и тонкой линиями обычно принимают равным не менее 0,8 мм и не более шага резьбы.

Не принято на этом виде показывать фаску, а также начинать и кончать тонкую линию на центровых (осевых линиях).

3.2. Изображение внутренней резьбы

Резьбу в отверстии изображают в плоскости разреза сплошными основными линиями по внутреннему диаметру резьбы и сплошными тонкими линиями – по наружному диаметру.

На виде, полученном проецированием на плоскость, перпендикулярную к оси резьбы, наружный диаметр резьбы изображают сплошной тонкой линией, приблизительно равной ¾ окружности, разомкнутой в любом месте.

Штриховку на разрезах и сечениях наносят до сплошных основных линий, соответствующих внутреннему диаметру резьбы в отверстии или наружному диаметру резьбы на стержне.

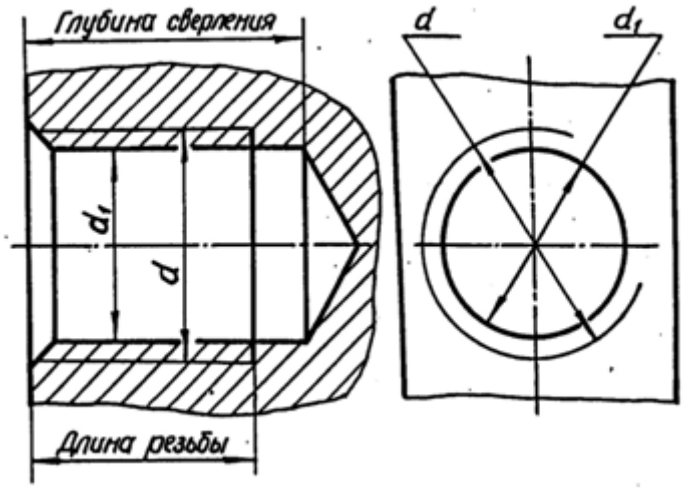


Рис. 10

3. 3. Изображение специальных резьб

При изображении резьб нестандартного профиля обязательно выявлять профиль резьбы либо с помощью местного разреза, либо – выносного элемента, указывая все необходимые размеры (наружный и внутренний диаметр резьбы, ширину впадины и шаг резьбы), а также и дополнительные данные: число заходов для многозаходной резьбы, направление для левой резьбы (рис. 11).

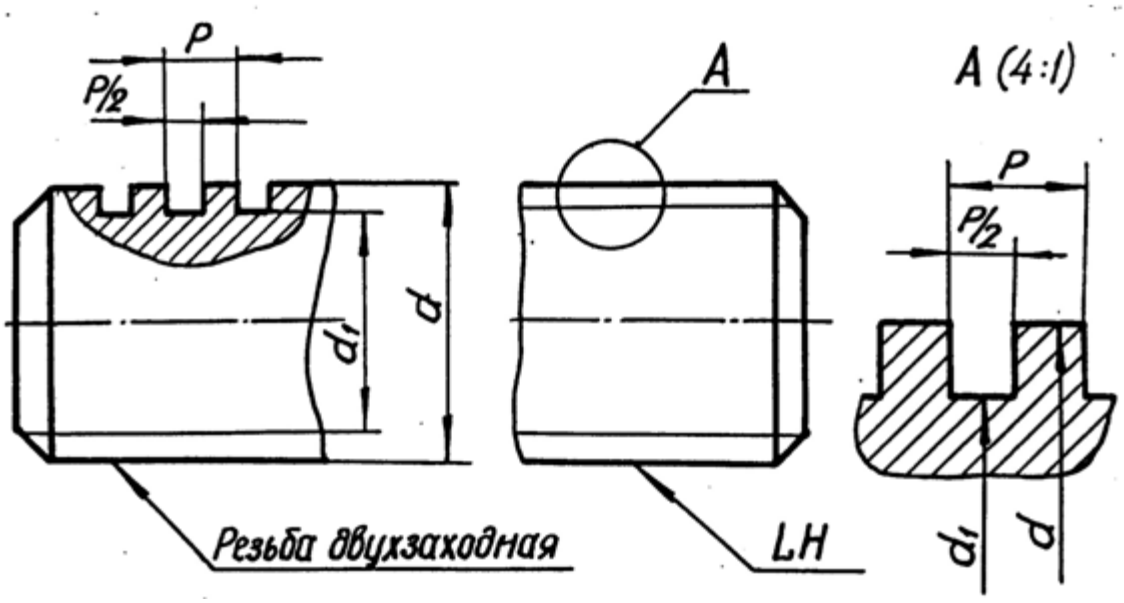


Рис. 11

3.4. Изображение резьбового соединения

На разрезах резьбового соединения наружный диаметр стержня изображают сплошной основной линией, а внутренний диаметр резьбы – сплошной тонкой линией. В отверстии показывают только ту часть резьбы, которая не закрыта резьбой стержня (рис. 12).

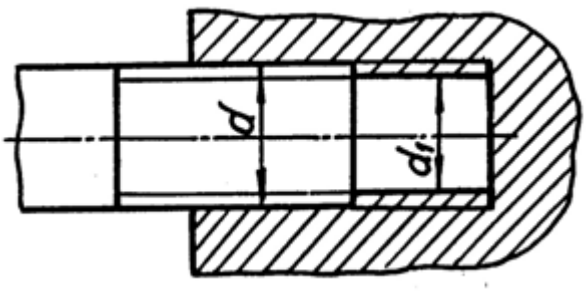
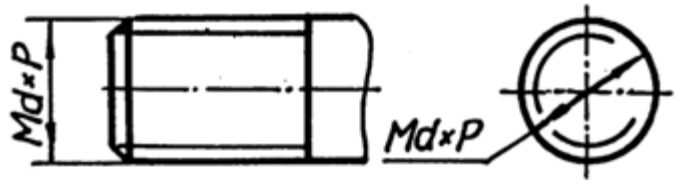
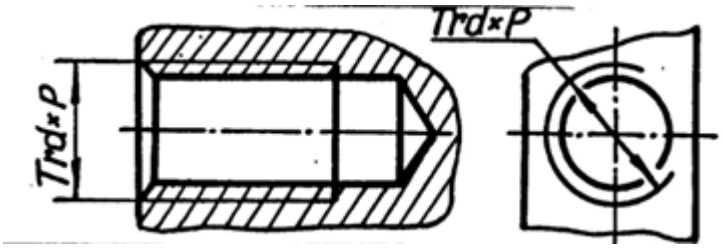
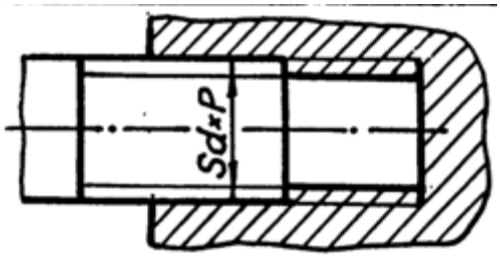
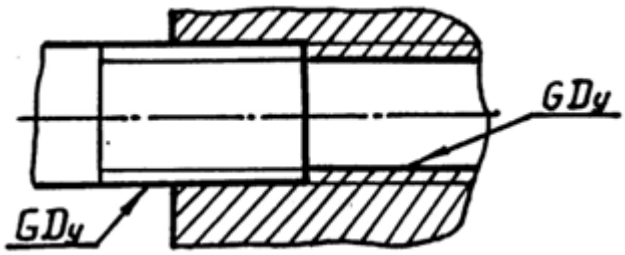


Рис. 12

4. ОБОЗНАЧЕНИЕ РЕЗЬБЫ НА ЧЕРТЕЖАХ

Обозначение стандартных резьб указывают по соответствующим нормативным документам. Условные обозначения резьб рассмотрены в гл. 2. Обозначение резьб на чертежах относят к ее наружному диаметру за исключением трубной и конической резьб, которые обозначают на линиях-выносках, оканчивающихся стрелкой. Стрелку проводят от контура резьбы (сплошной основной линии) (табл. 1).

Таблица 1

Типы резьб	Обозначение
Метрическая	
Трапецеидальная	
Упорная	
Трубная резьба цилиндрическая	

5. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕЗЬБЫ

В зависимости от условий и характера производства выполнение резьбы может осуществляться различными способами и инструментами. Для нарезания наружной резьбы применяется плашка, диаметр которой определяется диаметром и шагом резьбы. Метчик применяется для нарезания внутренней резьбы. Часто резьба нарезается на токарных или револьверных станках при помощи резца, заточенного в соответствии с профилем нарезаемой резьбы.

Резьбы имеют технологические элементы, связанные с выходом режущего инструмента из тела детали, к которым относятся: сбег, недорез, проточка и фаска. Технологические параметры резьбы зависят от угла заборной части резьбонарезающего инструмента и шага резьбы (параметры трубной цилиндрической резьбы зависят от диаметра условного прохода резьбы) и соответствуют ГОСТ 27148-86.

5.1. Сбег резьбы

Заборный участок плашки оставляет на стержне резьбу с постепенно уменьшающимся профилем. Длина участка неполноценной резьбы в конце резьбовой части детали, где глубина ее сходит на нет, называется сбегом резьбы. Сбег резьбы изображают сплошными тонкими линиями (рис. 13). Размер длины резьбы на стержне и в отверстии указывают, как правило, без сбега, но его учитывают при конструировании деталей.

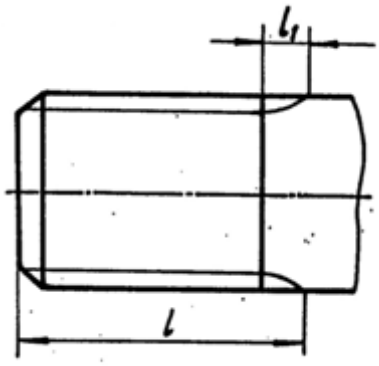


Рис. 13

5.2. Недовод резьбы

В случае, когда вырезаемая часть стержня ограничивается опорной поверхностью (буртиком, головкой, заплечником), при нарезании резьбы плашка во избежание поломки, обычно не доводится до упора в эту поверхность. Величина ненарезанной части детали между концом сбега резьбы и упорной поверхностью называется недоводом резьбы. Недовод зависит от шага резьбы; он не больше двух шагов, а для внутренней – не более трех шагов.

5.3. Недорез резьбы

Длина участка детали, состоящая из недовода и сбега при нарезании резьбы в упор называется недорезом (рис. 14).

Численные значения сбега и недовода резьбы стандартизованы ГОСТ 27148-86. Рекомендуется принимать длину участка недореза равной примерно трем шагам, но не более 0,5 d, где d – размер номинального диаметра резьбы.

5.2. Фаска

До нарезания резьбы на конце стержня и в начале отверстия выполняются фаски. Эти фаски представляют собой коническую поверхность, образующая которой составляет с осью резьбы угол 45°. Фаски упрощают процесс нарезания резьбы и облегчают соединение между собой резьбовых деталей.

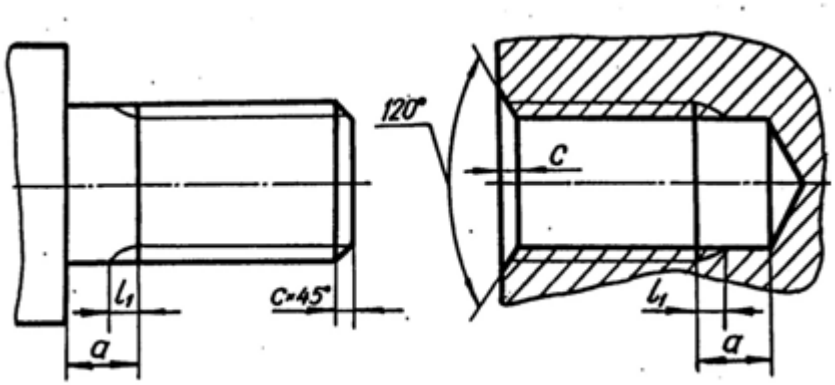


Рис. 14

5.5. Проточка

С целью облегчения процесса нарезания резьбы обычно выполняются наружные или внутренние проточки для выхода резьбонарезающего инструмента. Если на участке сбега резьбы заранее вытачивается канавка, то при нарезании резьбы режущая часть инструмента выйдет в нее, и резьба на всем протяжении имеет полный профиль. Проточки могут иметь прямоугольный или полукруглый профиль.

Диаметр наружной проточки выполняется несколько меньшим внутреннего диаметра резьбы, диаметр же внутренней проточки выполняется несколько большим наружного диаметра резьбы (рис. 15).

Форма и размеры наружных и внутренних проточек зависят от типа резьбы и ее шага и устанавливаются ГОСТ 27148-86.

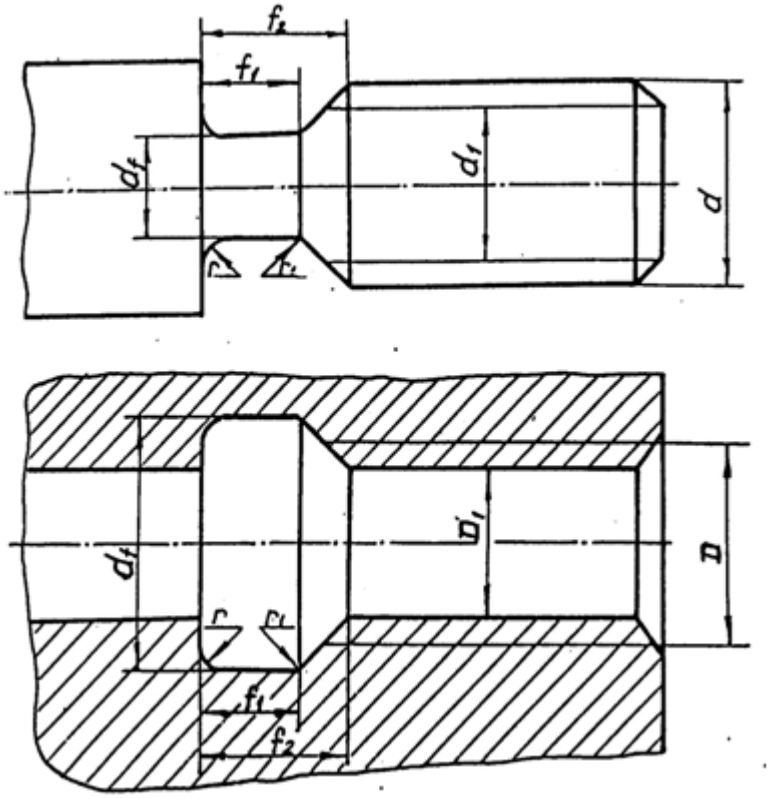


Рис. 15

6. ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «РЕЗЬБЫ»

6.1. Цель задания

Целью задания является изучение резьб, применяемых в машиностроении, условное изображение и обозначение резьбы и ее технологических элементов. При изучении резьбы и выполнении задания студент должен приобрести навыки общения с государственными стандартами по данной теме.

6. 2. Содержание задания

Задание выполняется карандашом на формате Ф3 в масштабе 1:1.

Вычертить вал в соответствии со своим вариантом, обозначив размеры технологических элементов резьб.

Выполнить сечение по шпоночному пазу.

Варианты заданий

Таблица 2

Номер варианта	Тип вала	Диаметр вала D_B	Левый конец вала			Правый конец вала		
			Тип резьбы	d	P	Тип резьбы	d	P
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	I	80	*M*	64	4,0	*S*	28	5,0
2	II	60	*Tr*	42	3,0	*M*	27	2,0
3	III	70	*M*	64	6,0	*Tr*	42	3,0
4	IV	26	*M*	24	3,0	*Tr*	40	3,0
5	I	60	*M*	42	4,0	*Tr*	48	3,0
6	II	63	*M*	30	3,5	*Tr*	44	3,0
7	III	71	*Tr*	50	3,0	*M*	27	3,0
8	IV	27	*M*	27	3,0	*Tr*	42	3,0
9	I	63	*M*	42	3,0	*S*	20	2,0
10	II	70	*Tr*	48	3,0	*M*	36	4,0
11	III	73	*M*	64	4,0	*Tr*	48	3,0

Продолжение табл. 2

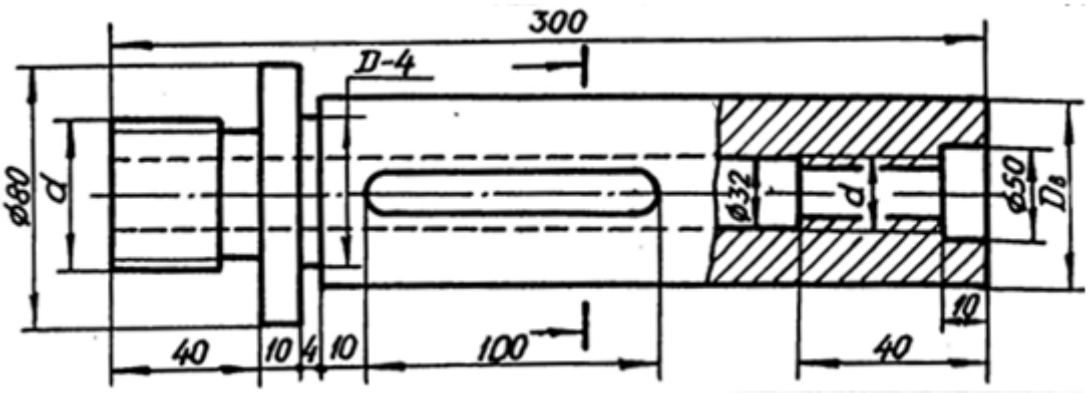
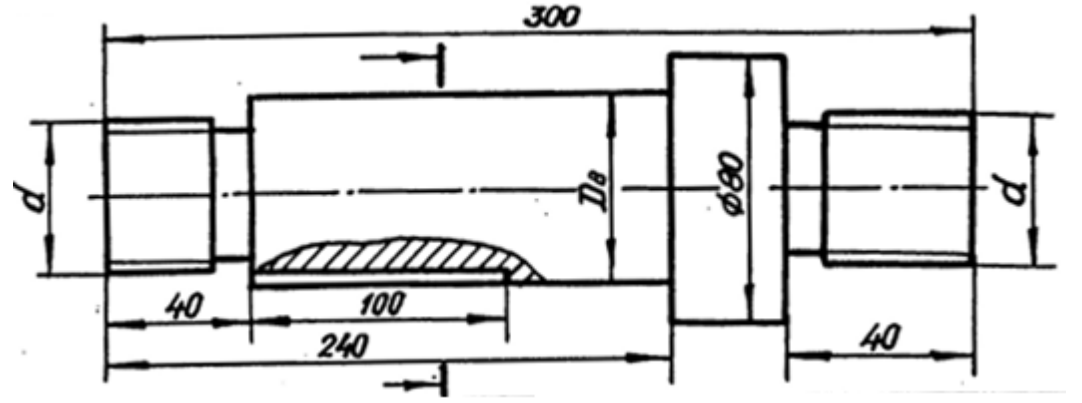
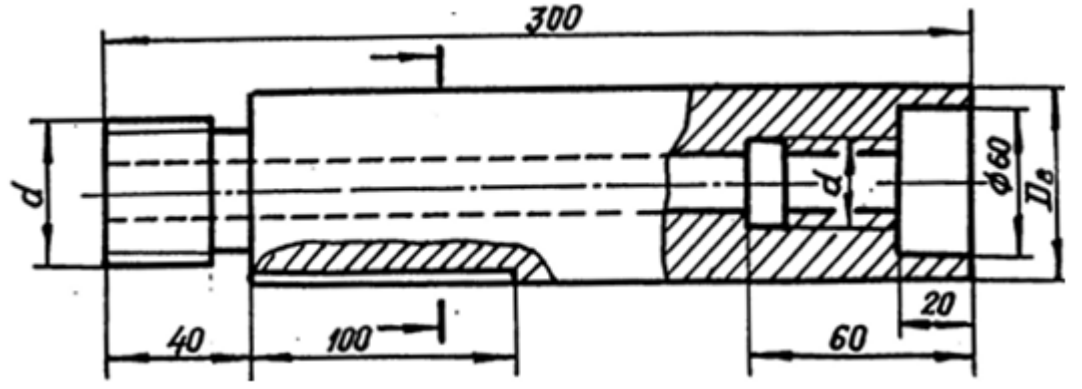
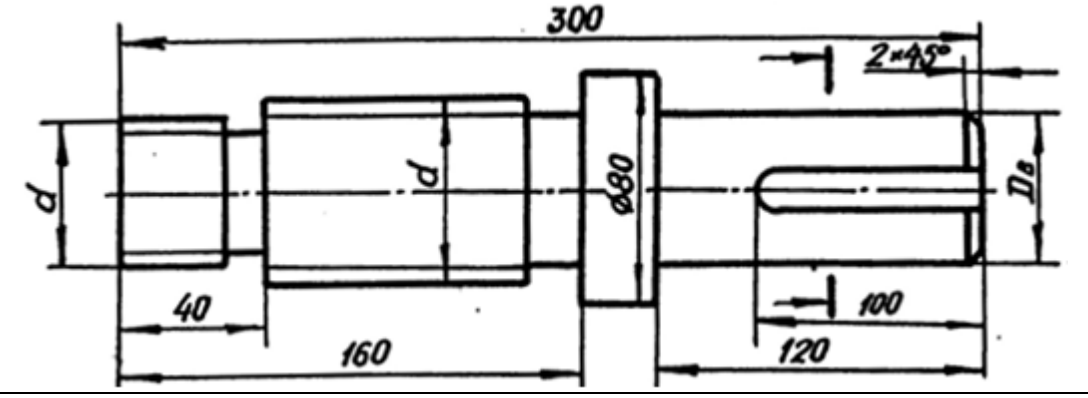
1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	IV	30	*M*	30	3,5	*Tr*	42	3,0
13	I	70	*M*	64	3,0	*Tr*	24	2,0
14	II	60	*M*	48	2,0	*Tr*	40	3,0
15	III	75	*Tr*	65	6,0	*Tr*	42	4,0
16	IV	40	*M*	42	3,0	*M*	65	4,0
17	I	71	*M*	39	3,0	*Tr*	26	5,0
18	II	65	*Tr*	28	2,0	*S*	30	3,5
19	III	78	*M*	45	4,5	*M*	30	3,0
20	IV	28	*M*	24	2,0	*Tr*	44	3,0
21	I	73	*M*	52	5,0	*Tr*	28	2,0
22	II	67	*M*	42	3,0	*Tr*	30	3,0
23	III	80	*Tr*	50	3,0	*M*	24	3,0
24	IV	32	*M*	27	2,0	*Tr*	46	3,0
25	I	75	*M*	48	3,0	*S*	22	2,0
26	II	71	*Tr*	65	4,0	*M*	48	3,0
27	III	82	*M*	56	5,5	*Tr*	40	3,0
28	IV	32	*M*	30	3,0	*Tr*	48	3,0
29	I	80	*M*	42	4,0	*Tr*	24	2,0
30	II	73	*M*	64	3,0	*Tr*	50	3,0
31	III	85	*Tr*	46	3,0	*M*	22	2,5
32	IV	28	*M*	24	1,5	*Tr*	40	3,0
33	I	85	*M*	48	4,0	*S*	32	6,0
34	II	80	*Tr*	42	3,0	*M*	33	2,0
35	III	70	*M*	39	1,5	*Tr*	24	2,0
36	IV	40	*M*	39	1,5	*Tr*	50	3,0
37	I	82	*M*	56	5,5	*Tr*	24	2,0

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
38	II	72	*M*	48	4,0	*Tr*	50	3,0
39	III	71	*Tr*	50	3,0	*M*	30	3,5
40	IV	36	*M*	42	2,0	*Tr*	52	3,0
41	I	63	*M*	48	2,0	*S*	26	5,0
42	II	71	*Tr*	65	4,0	*M*	36	3,0
43	III	73	*M*	48	3,0	*Tr*	28	2,0
44	IV	40	*M*	42	4,5	*Tr*	60	3,0
45	I	80	*M*	64	6,0	*Tr*	28	2,0
46	II	75	*M*	30	3,0	*Tr*	24	2,0
47	III	75	*Tr*	65	4,0	*M*	36	3,0
48	IV	28	*M*	24	3,0	*Tr*	40	3,0
49	I	65	*M*	42	3,0	*S*	26	2,0
50	II	80	*Tr*	55	3,0	*M*	39	4,0
51	III	78	*M*	64	4,0	*Tr*	44	3,0
52	IV	32	*M*	27	2,0	*Tr*	42	3,0
53	I	67	*M*	48	5,0	*Tr*	26	2,0
54	II	82	*M*	48	2,0	*Tr*	65	4,0
55	III	80	*Tr*	52	3,0	*M*	36	4,0
56	IV	40	*M*	42	4,0	*Tr*	65	4,0
57	I	78	*M*	48	4,0	*S*	32	6,0
58	II	85	*Tr*	42	3,0	*M*	42	4,0
59	III	82	*M*	48	3,0	*Tr*	26	2,0
60	IV	36	*M*	30	1,5	*Tr*	44	3,0

Типы валов

Таблица 3

Тип вала	Исходный черте	
	Левый конец вала	Правый конец вала
I		
II		
III		
IV		

7. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

7.1. Конец вала с метрической резьбой на стержне

По заданию на конце вала необходимо изобразить метрическую резьбу с ее технологическими элементами и нанести размерную сетку (рис. 16). Приступая к вычерчиванию, рекомендуется необходимые размеры сводить в табл. 4, например, требуется изобразить метрическую резьбу с номинальным диаметром 36 мм и шагом 3 мм.

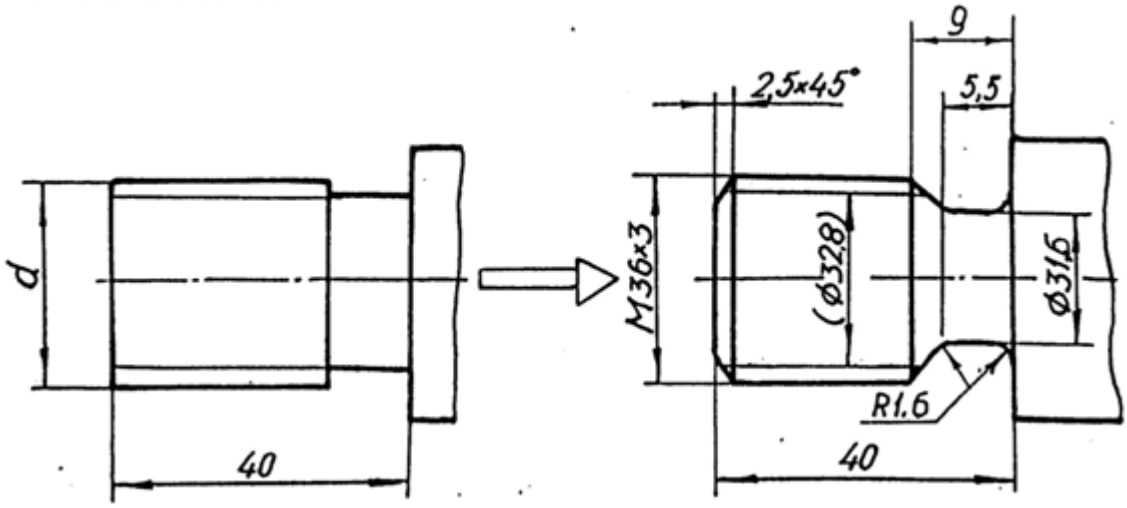


Рис. 16

Таблица 4

Размеры	Обозначение	Величина	Номер табл.	Стр.
Тип резьбы	*M*		2	20…22
Номинальный диаметр резьбы	*d*	36		
Шаг резьбы	*P*	3	2	
Вид шага		мелкий	5	
Внутренний диаметр резьбы	D_1	32,8	5	
Диаметр проточки	*d*	*d*-4.4	6	
Ширина проточки (нормальной)	f_1 min	5,2	6	
	f_2 max	9,0	6	
Радиусы скругления проточки	r	*P*: 2~1,6	6	
Высота фаски	c	2,5	6	

Таблица 5

Шаг метрической резьбы P	Диаметр резьбы		Шаг метрической резьбы P	Диаметр резьбы	
	наружный $d(D)$	внутренний $d_1(D_1)$		наружный $d(D)$	внутренний $d_1(D_1)$
с крупным шагом			с мелким шагом		
1	6	4,9	1,5	24	22,4
1,25	8	6,6		30	28,4
1,5	10	8,4		39	37,4
1,75	12	10,1	2	20	17,8
2	14	11,8		24	21,8
2	16	13,8		27	24,8
2,5	18	15,3		30	27,8
2,5	20	17,3		33	30,8
2,5	22	19,3		36	33,8
3	24	20,8		42	39,8
3	27	23,8		48	45,8
3,5	30	26,2		72	69,8
2,5	33	29,2	3	30	26,8
4	36	31,7		36	33,8
4	39	34,7		42	38,8
4,5	42	37,1		48	44,8
4,5	45	40,1		64	60,8
5	48	42,3	4		
5	52	46,6		42	37,7
5,5	56	50,0		48	43,7
5,5	60	54,0		64	59,7
6	64	57,5			
6	68	61,5			

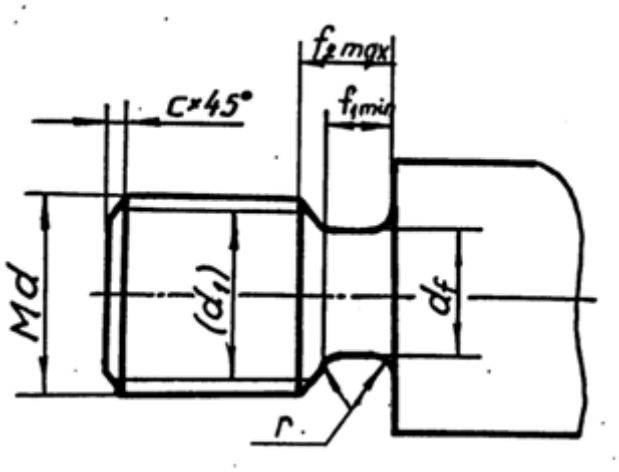


Таблица 6

Шаг резьбы	Номинальный диаметр резьбы с крупным шагом	d_f	Проточка нормальная		Проточка узкая		r 0,5P	c
			f_1min	f_2max	f_1min	f_2max		
1	6; 7	d-1,6	1,6	3,0	1,1	2,5	0,6	1,0
1,5	10	d-2,3	2,5	4,5	1,8	3,8	0,8	1,6
2	14; 16	d-3,0	3,4	6,0	2,5	5,0	1,0	2,0
2,5	18; 20; 22	d-3,6	4,4	7,5	3,2	6,3	0,2	2,5
3	24; 27	d-4,4	5,2	9,0	3,7	7,5	1,6	2,5
3,5	30; 33	d-5,0	6,2	10,5	4,7	9,0	1,6	2,5
4	36; 39	d-5,7	7,0	12,0	5,0	10,0	2,0	3,0
4,5	42; 45	d-6,4	8,0	13,5	5,5	11,0	2,0	3,0
5	48; 52	d-7,0	9,0	15,0	6,5	12,5	2,5	4,0
5,5	56; 60	d-7,7	11,0	17,5	7,5	14,0	3,2	4,0
6	64; 68	d-8,3	11,0	18,0	8,0	15,0	3,2	4,0

7. 2. Конец вала с метрической резьбой в отверстии

При вычерчивании в отверстии метрической резьбы внутренний диаметр определяется по табл. 5, а размеры проточки – по табл. 7.

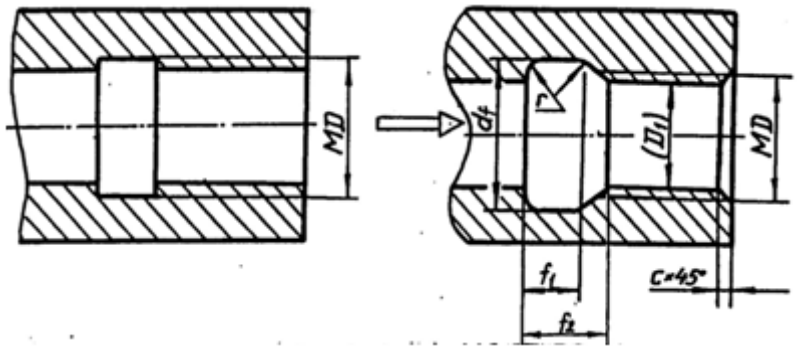
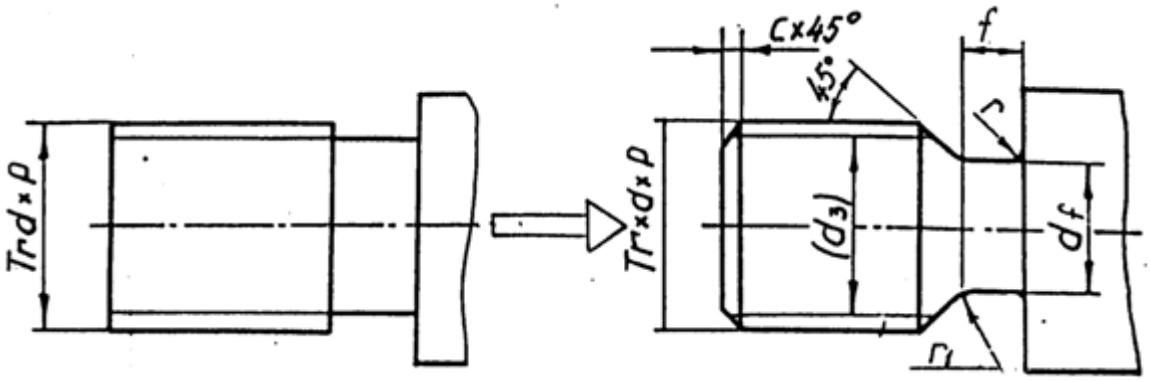


Таблица 7

Шаг резьбы	d_f	Проточка нормальная		Проточка узкая		r 0,5P	c
		$f_1$min	$f_2$max	$f_1$min	$f_2$max		
1	d+0,5	4	5,2	2,5	3,7	0,6	1,0
1,5	d+0,5	6	7,8	3,8	5,6	0,8	1,6
2	d+0,5	8	10,3	5,0	7,3	1,0	2,0
2,5	d+0,5	10	13,0	6,3	9,3	0,2	2,5
3	d+0,5	12	15,2	7,5	10,7	1,6	2,5
3,5	d+0,5	14	17,0	9,0	12,7	1,6	2,5
4	d+0,5	16	20,0	10,0	14,0	2,0	3,0
4,5	d+0,5	18	23,0	11,0	16,0	2,0	3,0
5	d+0,5	20	26,0	12,5	18,5	2,5	4,0
5,5	d+0,5	22	28,0	14,0	20,0	3,2	4,0
6	d+0,5	24	30,0	15,0	21,0	3,2	4,0

7. 3. Конец вала с трапецеидальной резьбой на стержне

При вычерчивании резьбы на стержне внутренний диаметр определяют по табл. 8, а размеры проточки – по табл. 9.



Шаг резьбы P	Диаметр			
	Наружная резьба		Внутренняя резьба	
	d, D	d_3	D_1, d_1	D_4
2	24	21,5	22,0	24,5
	28	25,6	26,0	28,5
3	30	26,5	27,0	30,5
	40	36,5	37,0	40,5
	42	38,5	39,0	42,5
	44	40,5	41,0	44,5
	46	42,5	43,0	46,5
	48	44,5	45,0	48,5
	50	46,5	47,0	50,5
	52	48,5	49,0	52,5
	55	51,5	52,0	55,5
	60	56,5	57,0	60,5
4	65	60,5	61,0	65,5

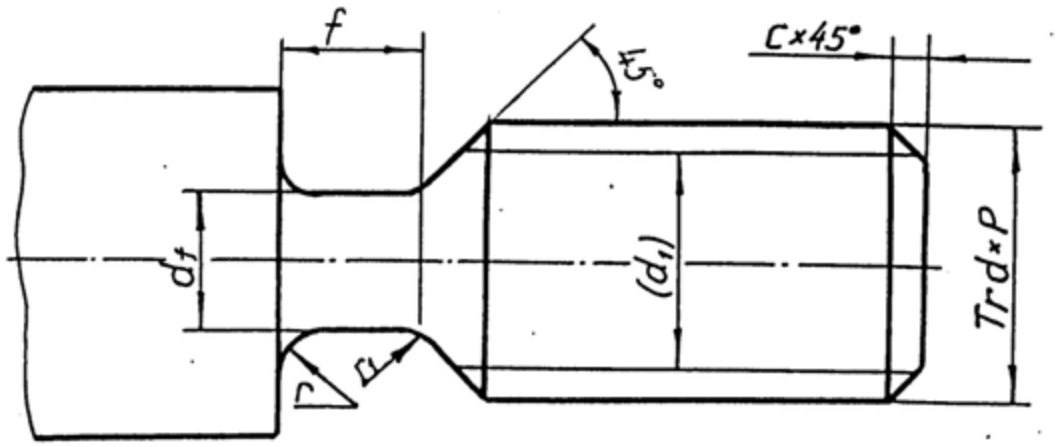


Таблица 9

Шаг резьбы	d_f	f_1	r	r_1	c
2	*d*-3,0	3	1,0	0,5	1,6
3	*d*-4,2	5	1,6	0,5	2,0
4	*d*-5,2	6	1,6	1,0	2,5
5	*d*-7,0	8	2,0	1,0	3,0
6	*d*-8,0	10	3,0	1,0	3,5
8	*d*-10,2	12	3,0	1,0	4,5
10	*d*-12,5	16	3,0	1,0	5,5

7. 4. Конец вала с трапецеидальной резьбой в отверстии

При вычерчивании трапецеидальной резьбы в отверстии следует учитывать зазор между стержнем и «гайкой», изображение выполняют по размерам диаметров, указанных в табл. 8, но на чертеже обозначают резьбу по номинальному размеру. Проточку вычерчивают по размерам, приведенным в табл. 10.

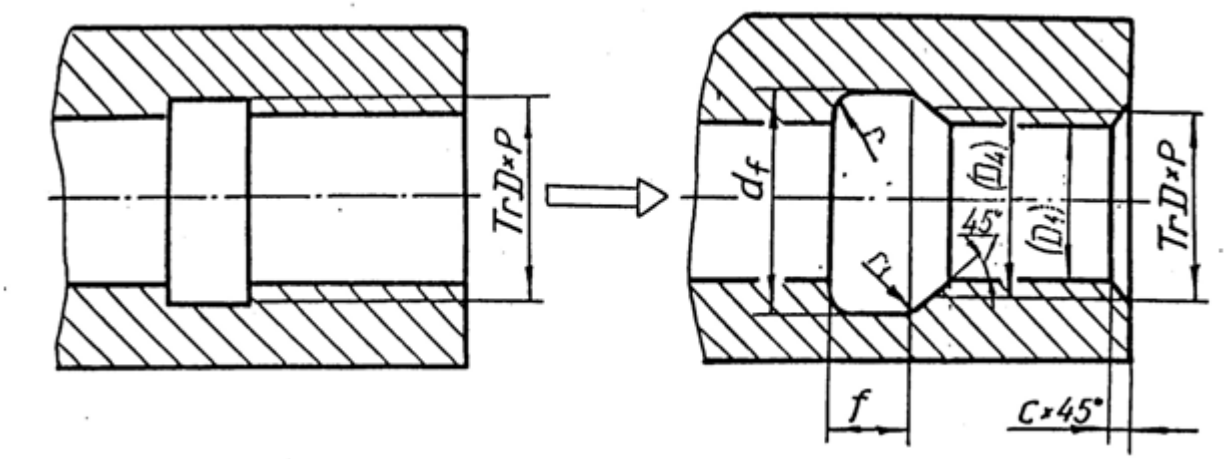


Таблица 10

Шаг резьбы	d_f	f_1	r	r_1	c
2	d+1,0	3	1,0	0,5	1,6
3	d+1,0	5	1,6	0,5	2,0
4	d+1,1	6	1,6	1,0	2,5
5	d+1,6	8	2,0	1,0	3,0
6	d+1,6	10	3,0	1,0	3,5
8	d+1,8	12	3,0	1,0	4,5
10	d+1,8	16	3,0	1,0	5,5

7. 5. Конец вала с упорной резьбой в отверстии

Размеры, необходимые для вычерчивания упорной резьбы, представлены в табл. 11.

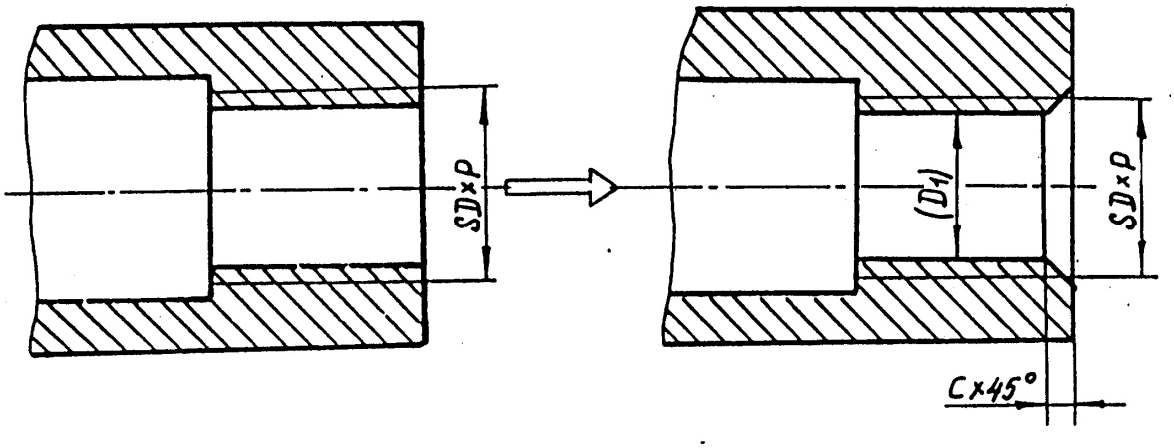


Таблица 11

Шаг резьбы P	Диаметр		Фаска c
	Наружный d, D	Внутренний D_1	
2	20	17,0	1,6
2	22	19,0	1,6
2	26	23,0	1,6
3	32	27,5	2,0
5	26	18,5	3,0
5	28	20,5	3,0
6	32	23,0	3,5

7.6. Изображение шпоночного паза ГОСТ 23360-78 (СТ СЭВ 189-79)

Шпонкой называется деталь, устанавливаемая в пазах двух соприкасающихся деталей для предотвращения их относительного перемещения и для передачи крутящего момента.

Форму шпоночного паза на валу обычно показывают сечением. Размеры шпоночного паза, зависящие от диаметра цапфы вала, представлены в табл. 12.

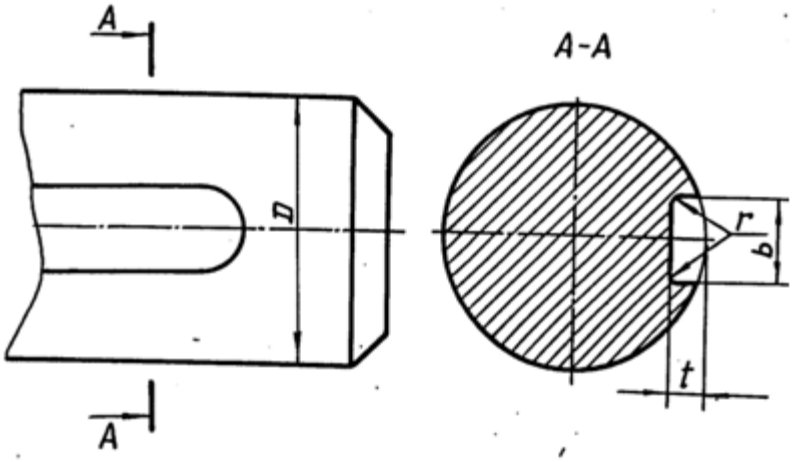
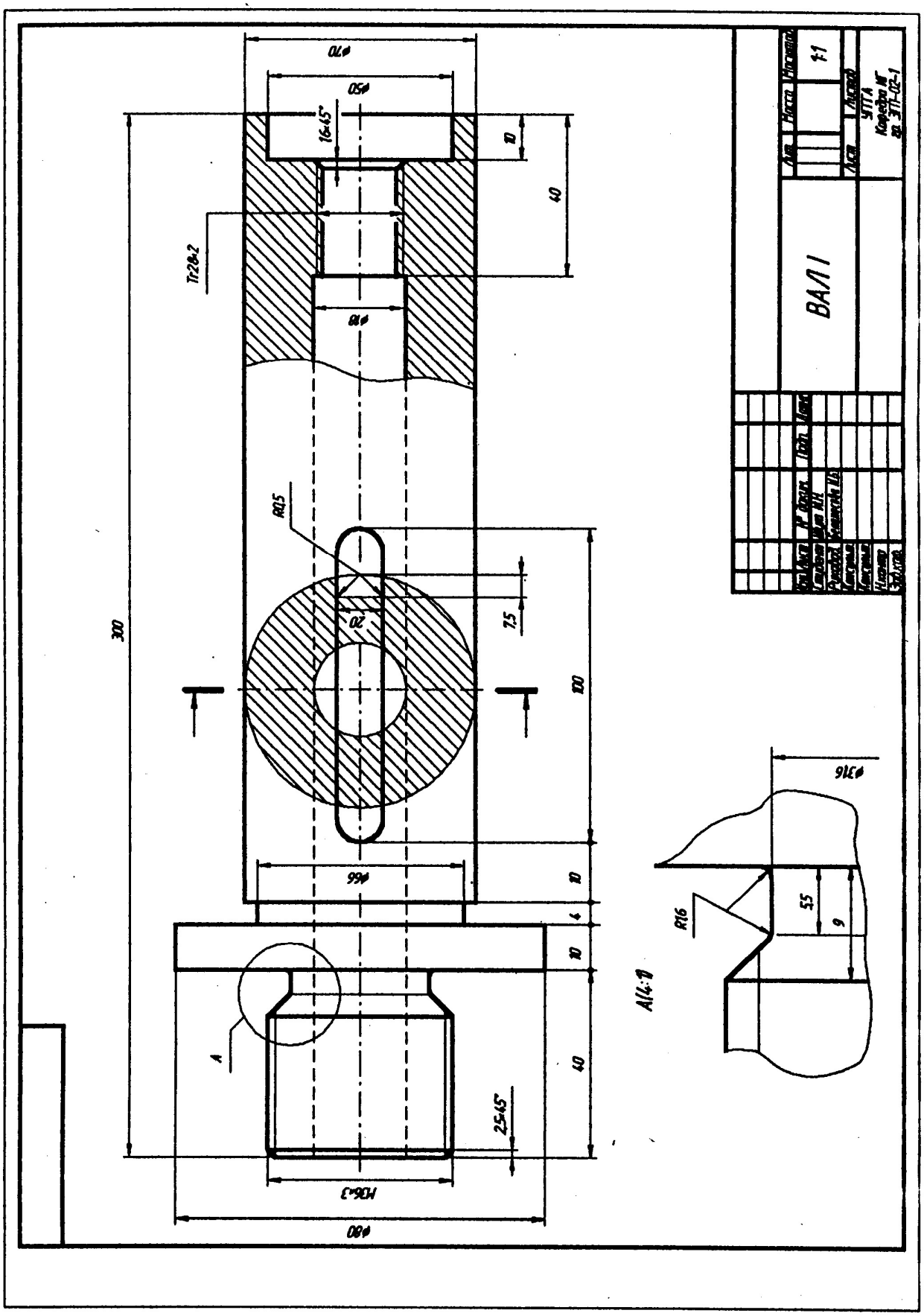
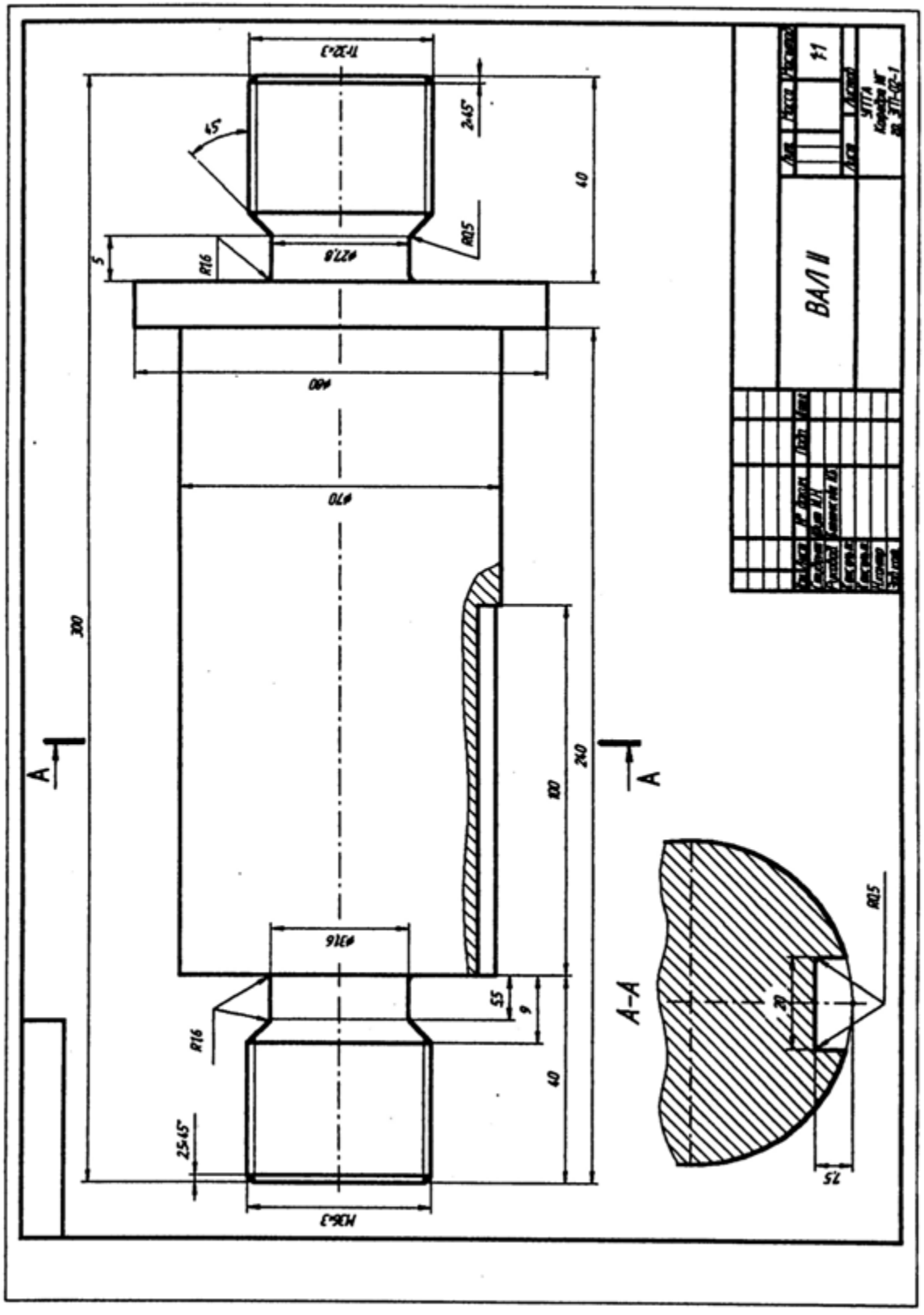
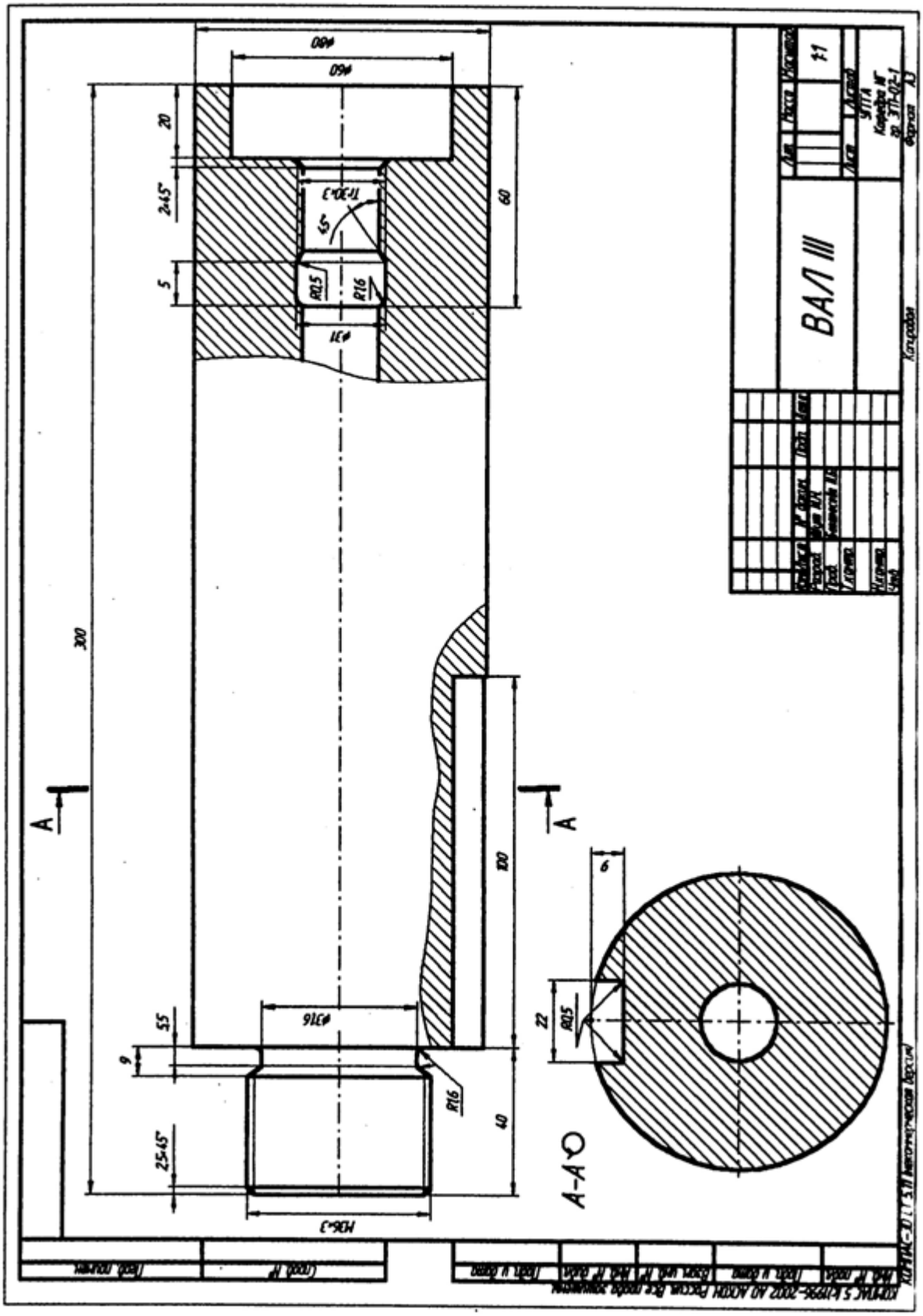


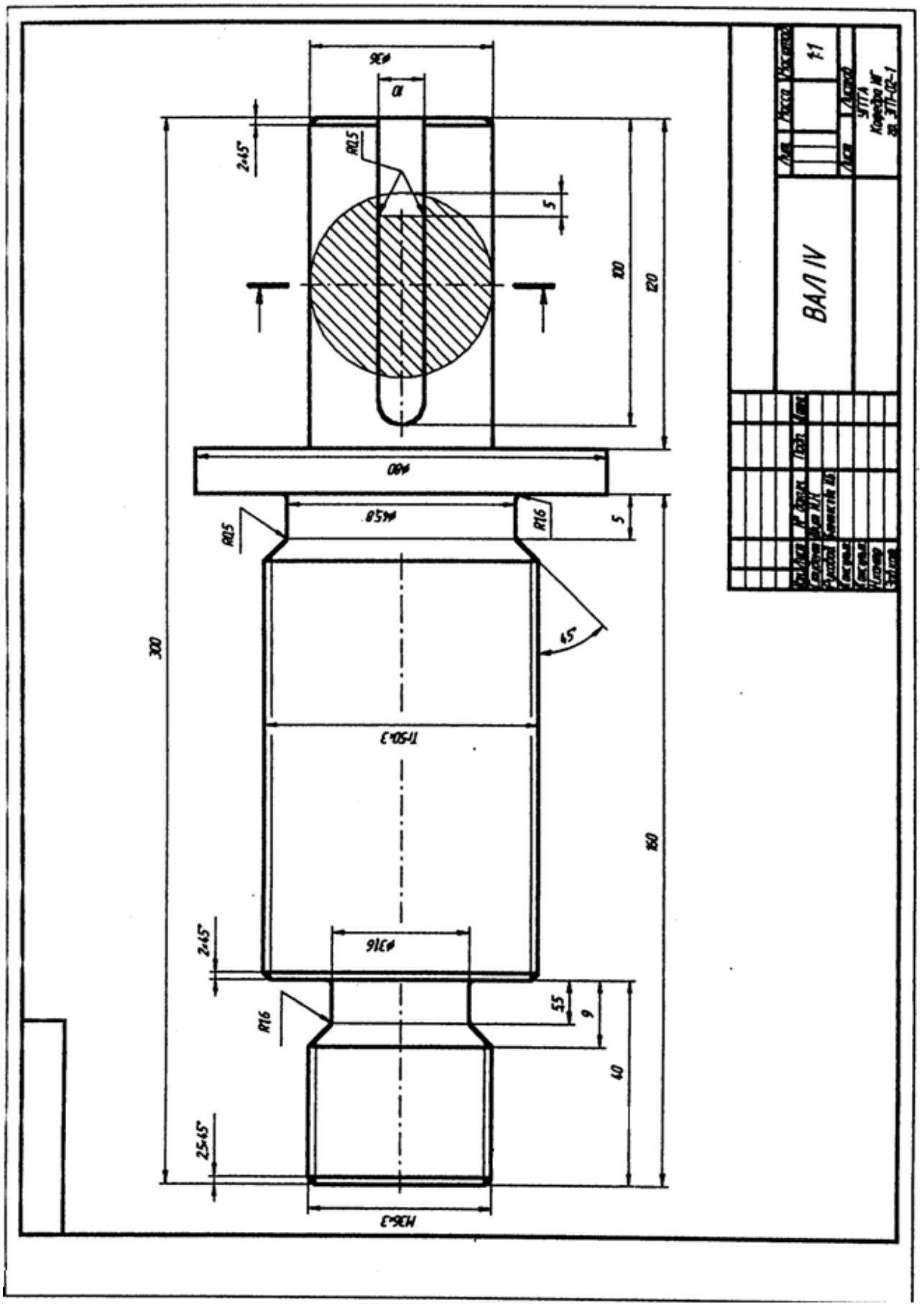
Таблица 12

Диаметр вала O	Шпоночный паз		
	Ширина *b*	Глубина *t*	Радиус закругления *r*
Свыше 22 до 30	8	4,0	От 0,16 до 0,25
30 38	10	5,0	0,25 0,40
38 44	12	5,0	0,16 0,40
44 50	14	5,5	0,25 0,40
50 58	16	6,0	0,25 0,40
58 65	18	7,0	0,25 0,40
65 75	20	7,5	0,40 0,60
75 85	22	9,0	0,40 0,60


ВАЛ 1
Масштаб 1:1
Лист
Масса
Листов
УГТУ
Кафедра МГ
гр. ЭТМ-02-1
Разраб.
Пров.
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
Изм.
Лист
№ докум.
Подп.
Дата
300
100
40
10
4
10
40
10
7,5
2
R15
R16
55
9
A(4:1)
Ø70
Ø66
Ø80
Ø16
M36×3
16,45°
25,45°
11°28'42"


ВАЛ II
1:1
A-A
R16
R05
45°
2×45°
40
100
240
55
9
25
30
52


ВАЛ III
А-А
300
100
40
60
20
24±5
5
55
9
25±5
22
6
R16
R0,5
Ø60
Ø40
Ø31,6
Ø36,3
1:20
45°


ВАЛ IV
Масса
Масштаб
Лит.
Лист
Листов
1:1
Сталь 45
ГОСТ 1050-74
ГОСТ 1133-71
ГОСТ 1051-73
ГОСТ 14959-79
ГОСТ 1414-75
ГОСТ 1577-81
ГОСТ 1759-70
ГОСТ 2590-71
ГОСТ 2879-69
ГОСТ 5950-73
ГОСТ 7417-75
ГОСТ 8239-72
ГОСТ 8240-72
ГОСТ 8509-72
ГОСТ 8510-72
ГОСТ 8713-79
ГОСТ 9234-74
ГОСТ 9238-73
ГОСТ 9467-75
ГОСТ 9478-73
ГОСТ 9821-76
ГОСТ 10551-75
ГОСТ 10702-78
ГОСТ 14637-79
ГОСТ 19281-73
ГОСТ 19903-74
ГОСТ 21729-76
ГОСТ 23570-79
ГОСТ 24379.1-80
ГОСТ 24839-81
ГОСТ 26020-83
ГОСТ 27772-88
ГОСТ 30136-95
ГОСТ 380-94
ГОСТ 535-88
ГОСТ 1050-88

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анурьев В. И*. Справочник конструктора-машиностроителя. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1990.
2. *Баева Г. Г*. Условности машиностроительного черчения. Методическая разработка. Свердловский горный институт. – Свердловск, 1976.
3. ГОСТ 27148-86 (СТ СЭВ 214-86). Выход резьбы, сбеги, недорезы, проточки. Размеры.
4. *Попова Г. Н*., *Алексеев С. Ю*. Машиностроительное черчение. Справочник. – М.: Машиностроение, 1986.
5. *Потишко А. В., Крушевская Д. П*. Справочник по инженерной графике. – Киев: Будівельник, 1983.
6. Резьбы. – М.: Изд. стандартов, 1985.
7. *Розов С. В*. Курс машиностроительного черчения с элементами автоматизированного контроля. - М.: Машиностроение, 1980.
8. *Чекмарев А. А*., *Осипов В. К*. Справочник по машиностроительному черчению. М.: Высшая школа, 1994.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РЕЗЬБА. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ (ГОСТ 11708-82) 3
2. ТИПЫ РЕЗЬБ 5
2.1 Метрическая резьба 6
2.2 Трубная цилиндрическая резьба 7
2.3. Трапецеидальная резьба 9
2.4. Упорная резьба 10
2.5. Прямоугольная и квадратная резьбы 12
3. Изображение резьбы 13
3.1 Изображение наружной резьбы 13
3.2 Изображение внутренней резьбы 14
3.3 Изображение специальных резьб 15
3.4 Изображение резьбового соединения 15
4. ОБОЗНАЧЕНИЕ РЕЗЬБЫ НА ЧЕРТЕЖАХ 16
5. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕЗЬБЫ 17
5.1 Сбег резьбы 17
5.2 Недовод резьбы 18
5.3 Недорез резьбы 18
5.4 Фаска 18
5.5 Проточка 19
6. ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «РЕЗЬБЫ» 20
6.1 Цель задания 20
6.2 Содержание задания 20
7. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 24
7.1 Конец вала с метрической резьбой на стержне 24
7.2 Конец вала с метрической резьбой в отверстии 27
7.3 Конец вала с трапецеидальной резьбой на стержне 28
7.4 Конец вала с трапецеидальной резьбой в отверстии 30
7.5 Конец вала с упорной резьбой в отверстии 34
7.6 Изображение шпоночного паза 32
7.7 Примеры оформления задания 33
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 37

Ирина Борисовна Белоносова

Методические указания
по курсу «Инженерная графика»
по теме «Условности машиностроительного черчения»
для студентов всех специальностей»

Часть 1
«Резьба»

Редактор *Л. В. Устьянцева*

Подписано в печать . .2010 г.
Бумага офсетная. Формат бумаги 60×84 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Печать на ризографе. Печ. л. 2,4 Уч.-изд. 2,05. Тираж 150 экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральская государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

И. Б. Белоносова

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I КУРСА ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ I

Екатеринбург, 2011

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
инженерно-экономического
факультета
«____» _____ 2011 г.
Председатель комиссии
_____проф. к.т.н. И. А. Тяботов

И. Б. Белоносова

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I КУРСА ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ I

Издание УГГУ Екатеринбург, 2011

Б48

Рецензенты: *Н. Н. Черемных*, д. т. н., проф. Уральского государственного лесотехнического университета
Л. Г. Тимофеева, доцент Уральского государственного лесотехнического университета

Пособие рассмотрено на заседании кафедры инженерной графики 06.07.2010 года (протокол №5) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Белоносова И, Б.

Геометрическое черчение. Часть I. Методическое пособие по дисциплине «Начертательная геометрия. Инженерная графика» для студентов I курса всех специальностей. 3-е издание, исправленное и дополненное/И. Б. Белоносова; Уральский госуд. горный университет. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. – 27 с.

В методическом пособии излагаются основные положения Единой системы конструкторской документации, рассматриваются наиболее рациональные приемы построения сопряжений линий, эллипсов, овалов, а также даются рекомендации по выполнению и оформлению задания «Геометрическое черчение».

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Уральский государственный горный университет, 2011
© Белоносова И. Б.,

Одной из основных задач курса «Инженерная графика» является развитие навыков техники выполнения чертежей. На чертеже представлены контуры изображений, образованные прямыми, окружностями, и другими кривыми. При вычерчивании контуров изображений применяют различные построения и сопряжения.

1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Самый простой элемент контуров изображений – это прямая линия.

Прямые являются параллельными, если все точки одной из прямых равноудалены от другой.

Прямые являются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Задача 1.1. Построение прямой, параллельной данной (рис. 1).

Дана прямая *b* и точка *C*, не лежащая на прямой *b*.

Выбираем произвольную точку *D* на прямой *b*.

Этапы построения:

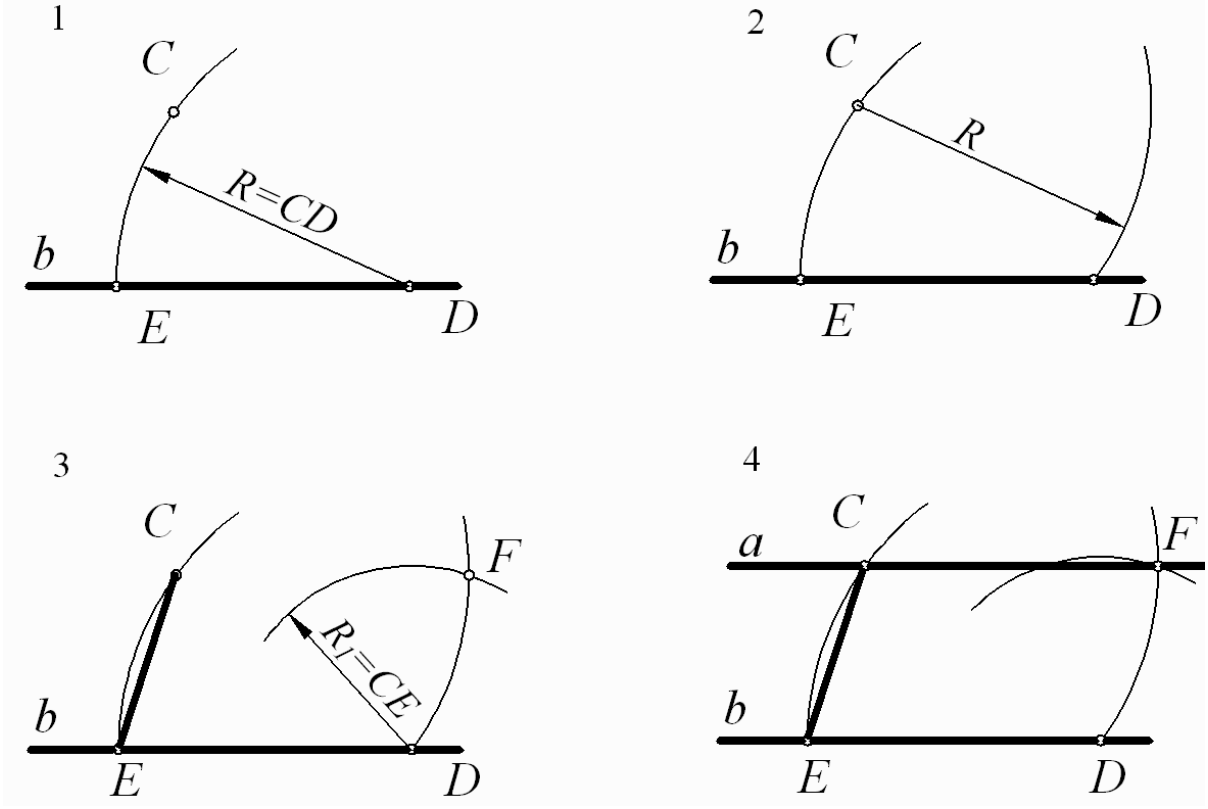


Рис. 1

Задача 1.2. Построить прямую, перпендикулярную заданной.

Даны прямая f и точка C. Этапы построения представлены на рис. 2. Радиусы R и R_1 взяты произвольно, но $R_1 > \frac{AB}{2}$

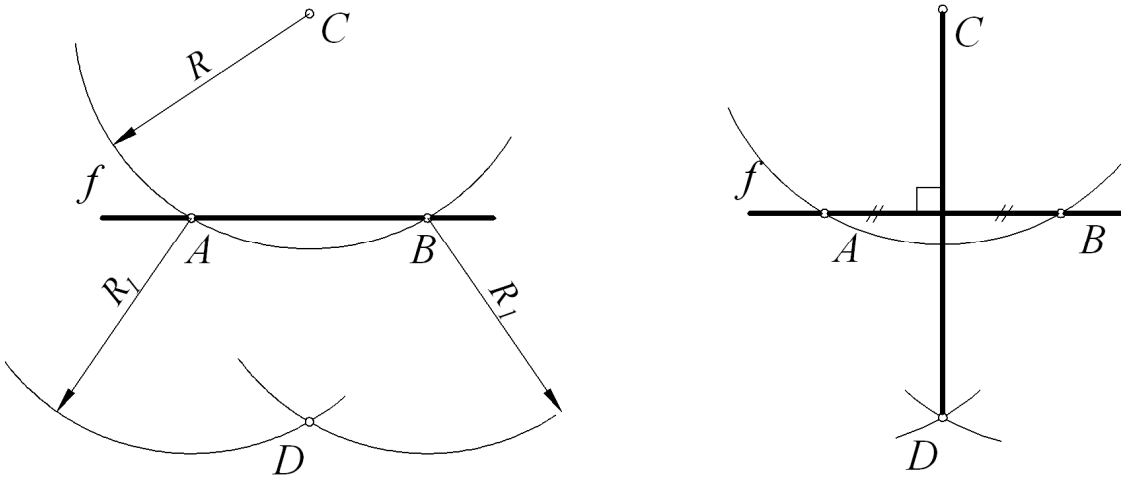


Рис. 2

2. УГОЛ, УКЛОН И КОНУСНОСТЬ

Две пересекающиеся прямые составляют угол. Прямая, которая делит угол на две равные части, называется биссектрисой.

Задача 2.1. Построить биссектрису угла.

Из центра угла проводят дугу произвольного радиуса, из точек пересечения дуги A и B проводят вспомогательные дуги произвольного радиуса R_1 до их взаимного пересечения. Точку пересечения дуг соединяют с вершиной угла C. Полученные углы можно таким же образом разделить на две равные части и т. д. (рис. 3).

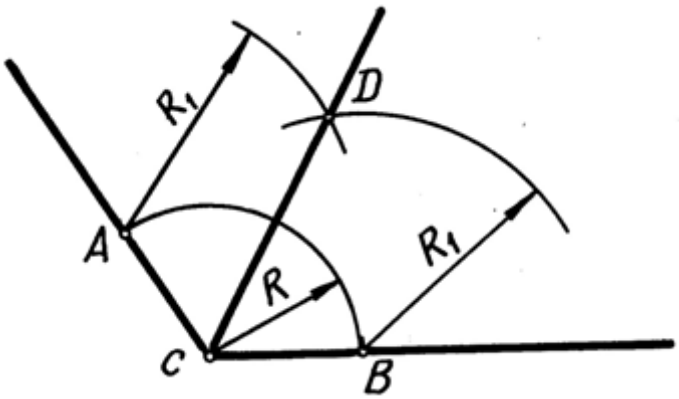


Рис. 3

Задача 2.2. Разделить отрезок *AB* на пять равных частей.

При делении отрезка на заданное число частей необходимо из одного конца отрезка провести произвольный луч и отложить на нем такое число произвольных по длине, но равных между собой отрезков, на которое нужно разделить данный отрезок (рис. 4).

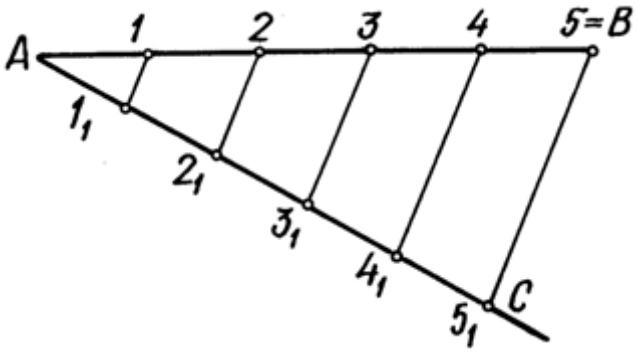


Рис. 4

Уклон – это величина, которая характеризует наклон одной прямой линии по отношению к другой и равна тангенсу угла между ними. Так наклон прямой *AC* к *AB* определяется уклоном, который равен $tg\alpha^{\circ} = \frac{CB}{AB}$ (рис. 5).

Уклон может быть выражен в процентах или в виде отношения двух чисел. Пред числовым значением наносят знак ∠, причем острый угол этого знака направляют в сторону уклона.

Незначительный уклон рекомендуется на чертеже изображать с увеличением.

$$tg\alpha^{\circ} = \frac{CB}{AB}$$

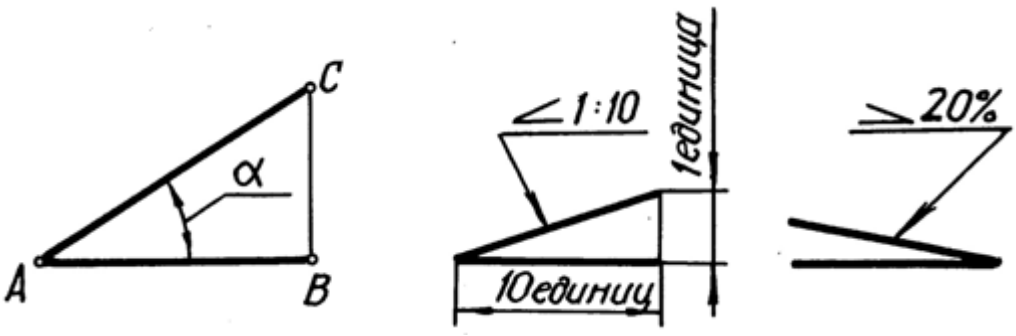
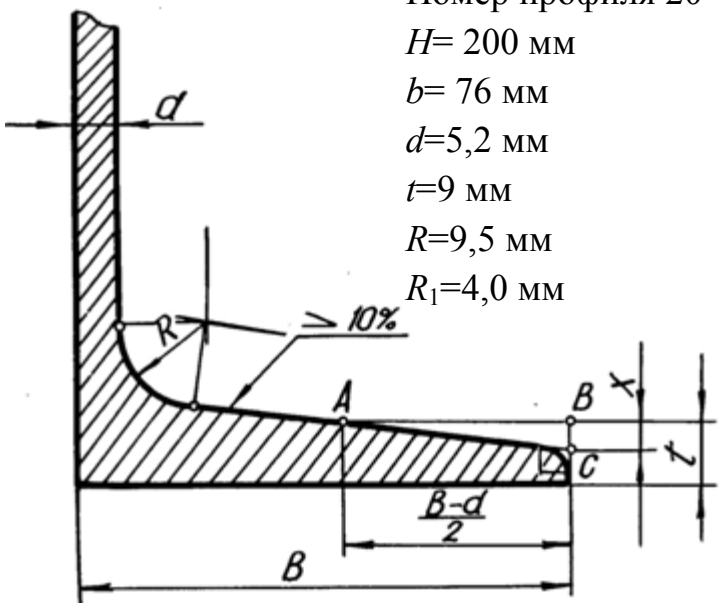


Рис. 5

Задача 2.3. Построить фрагмент полки швеллера, уклон которой 1:6.



Номер профиля 20
H= 200 мм
b= 76 мм
d=5,2 мм
t=9 мм
R=9,5 мм
R_1=4,0 мм

$$\frac{b-d}{2}=\frac{76-5,2}{2}=35,4 \text{ мм}$$

Через точку А, построенную по заданным размерам, проводят горизонтальную линию СВ, которая равна $\frac{b-d}{2}$.

Уклон 10%

$$\frac{1}{10}=\frac{BC}{AB};\quad \frac{1}{10}=\frac{BC}{35,4}$$

BC=3,5 мм

Рис. 6

Конусность – величина, представляющая собой отношение разности диаметров оснований прямого кругового усеченного конуса к его длине

$$K=\frac{D-d}{L} \text{ при } D=0,\ K=\frac{D}{L}.$$

Конусность также выбирается как отношение диаметра основания прямого кругового конуса к его высоте, т. е. $K= tg2\alpha$ (рис. 7).

Перед размерным числом, определяющим конусность, наносят знак ▷, острый угол которого должен быть направлен в сторону вершины конуса.

Незначительную конусность рекомендуется на чертеже изображать с увеличением. Конусность при угле 2α, равном от 30° до 120°, обозначают на чертеже величиной угла. Конусность так же, как и уклон может быть выражена в виде отношения или в процентах.

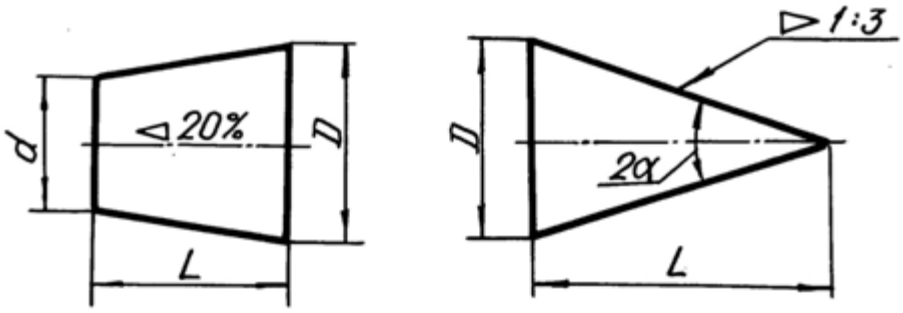


Рис. 7

3. ОКРУЖНОСТЬ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Окружность – это замкнутая плоская кривая линия, у которой все точки находятся на одинаковом расстоянии от центра. Это расстояние называется радиусом (рис. 8).

Два радиуса, которые лежат на одной прямой, составляют диаметр. Наибольшее расстояние между двумя точками окружности равно диметру.

Прямая, которая пересекает окружность в двух точках, называется секущей. Отрезок секущей, расположенный между точками пересечения, называется хордой. Хорда перпендикулярна радиусу, проведенному через ее середину.

Прямая, которая имеет с окружностью одну общую точку, называется касательной. Касательная перпендикулярна радиусу, который проведен в точку касания.

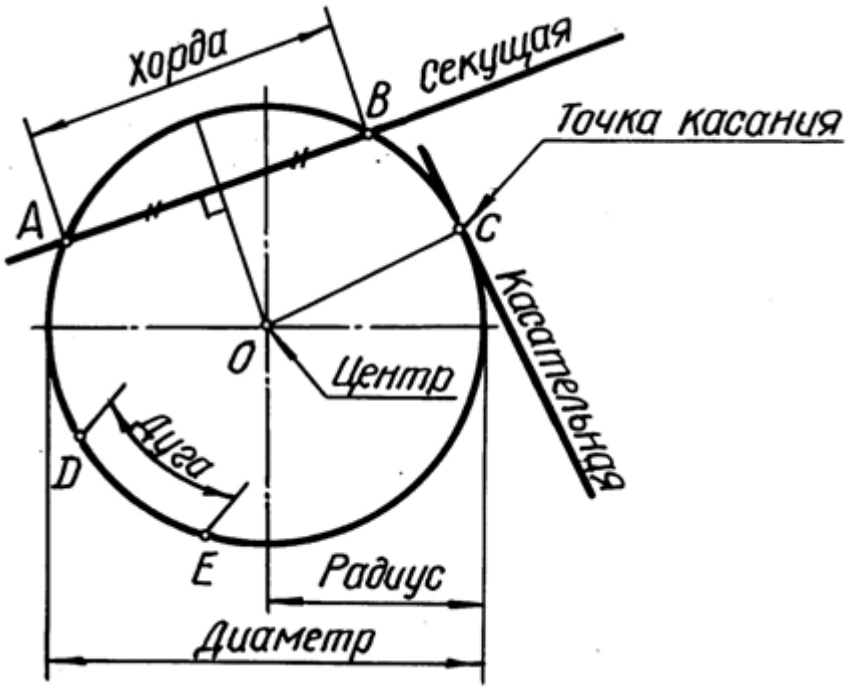


Рис. 8

При выполнении чертежей часто нужно делить окружность на несколько равных частей. Правильные многоугольники также строят при помощи деления окружности на равные части (рис. 9).

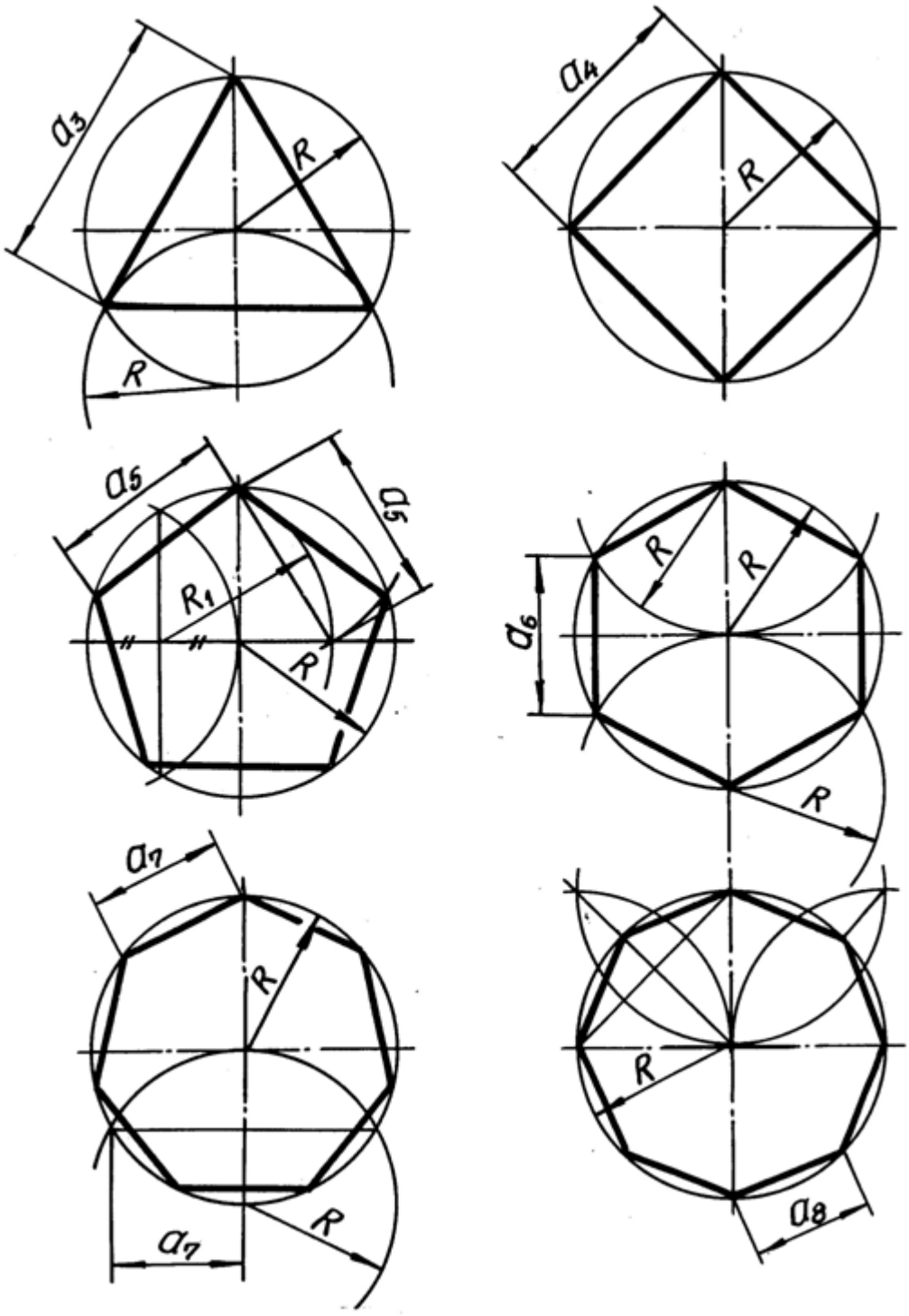


Рис. 9

Задача 3.1. Найти центр заданной дуги.

Центр окружности, которой принадлежит дуга, находят следующим образом. На дуге выбирают три произвольные точки *A*, *B*, *C* (рис. 10), которые соединяют хордами *AB* и *CB*. Через середины хорд проводят к ним перпендикуляры, в точке пересечения которых получают центр окружности (точку О).

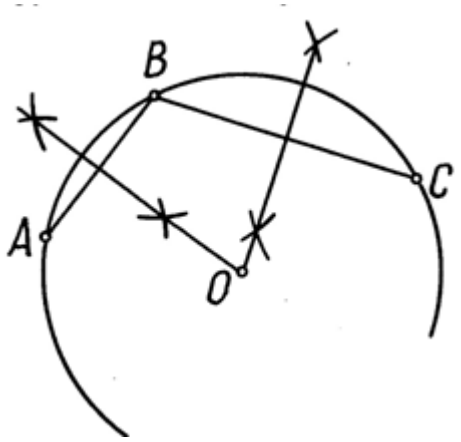


Рис. 10

Задача 3.2. Провести касательную к окружности через заданную точку *A* (рис. 11).

Строят вспомогательную окружность, диаметр которой равен расстоянию от точки *A* до центра *O*. Отмечают точки пересечения вспомогательной и данной окружностей *B* и *C*, которые соединяют с точкой *A*. Эти прямые *AB* и *AC* – искомые касательные, т. к. ∠*OBA* и ∠*OCA*=90°.

Задача имеет два решения.

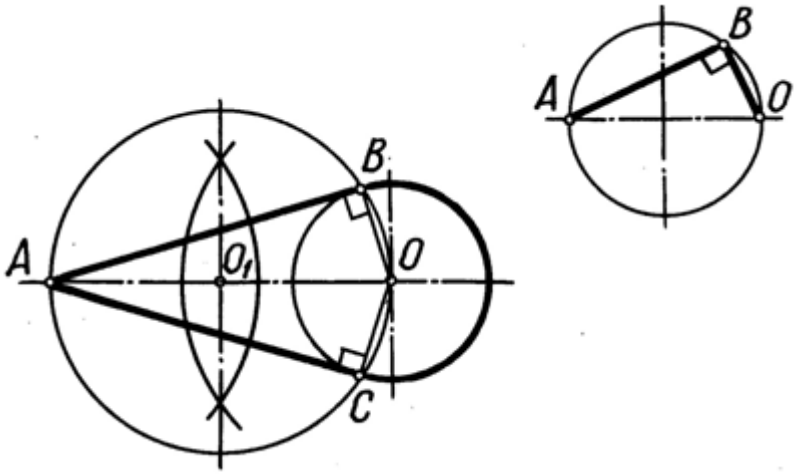


Рис. 11

4. СОПРЯЖЕНИЯ

Сопряжения – это плавные переходы от одной линии к другой.

Общая для этих линий точка называется точкой сопряжения или точкой перехода.

Построение сопряжений базируется на геометрических положениях о прямых, касательных к окружности, и об окружностях, касательных друг к другу. Сущность этих положений следующая:

1. для сопряжения прямой и дуги необходимо, чтобы центр окружности, которой принадлежит дуга, лежал на перпендикуляре, восстановленном к прямой в точке касания (рис. 12);

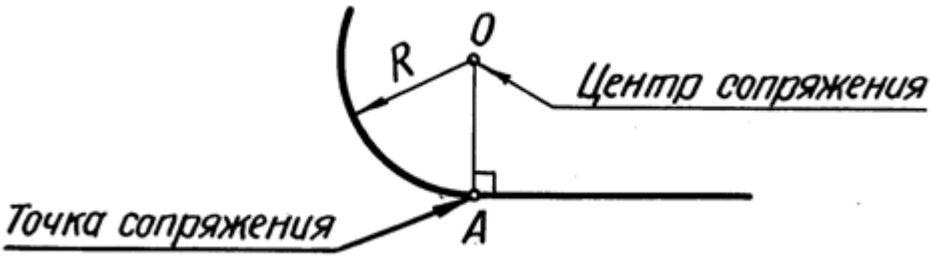


Рис. 12

2. точка сопряжения двух дуг лежит на линии их центров, перпендикулярной к общей касательной этих дуг в точке их касания или сопряжения (рис. 13).

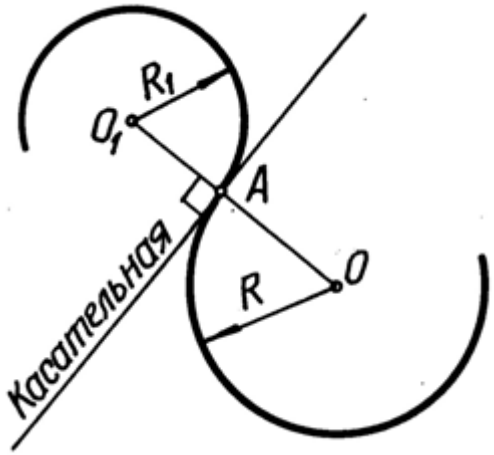


Рис. 13

В практике выполнения чертежей приходится сталкиваться с различными случаями сопряжения.

Все задачи на построение сопряжений решаются в следующем порядке:

1. определение центра сопряжения;
2. определение точек сопряжения (касания);
3. проведение дуги сопряжения заданного радиуса.

4.1. СОПРЯЖЕНИЯ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Для определения центра сопряжения – точки, равноудаленной от заданных прямых, проводим прямые, параллельные заданным и отстоящие от них на расстоянии радиуса, которые являются геометрическими местами точек, удаленных от заданных прямых на расстоянии радиуса. Пересечение этих прямых дает центр сопряжения *O*. Заметим, что центр сопряжения точка *O* может быть задана в пересечении биссектрисы угла, образованного заданными прямыми, с прямой, параллельной одной из сторон угла.

Для определения точек касания *A* и *B* – точек плавного перехода от прямых к сопрягаемой дуге – опускают перпендикуляры из точки *O* на заданные прямые. Из центра сопряжения *O* проводят дугу сопряжения радиусом *R* (рис. 14).

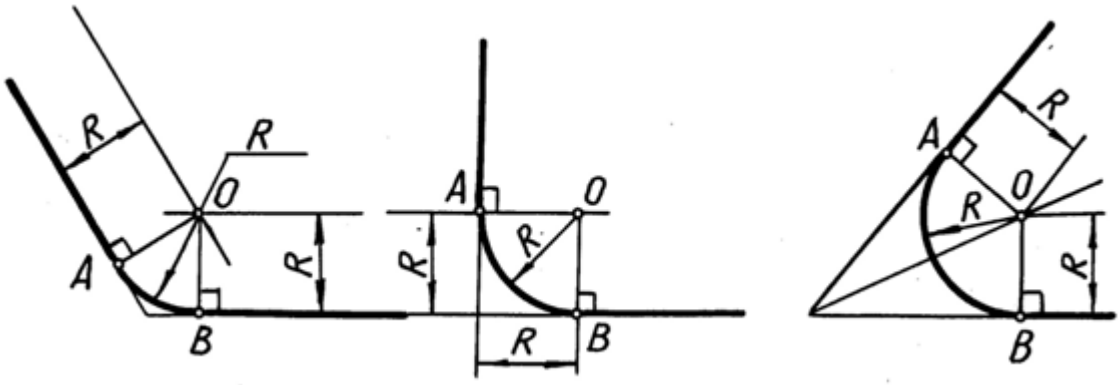
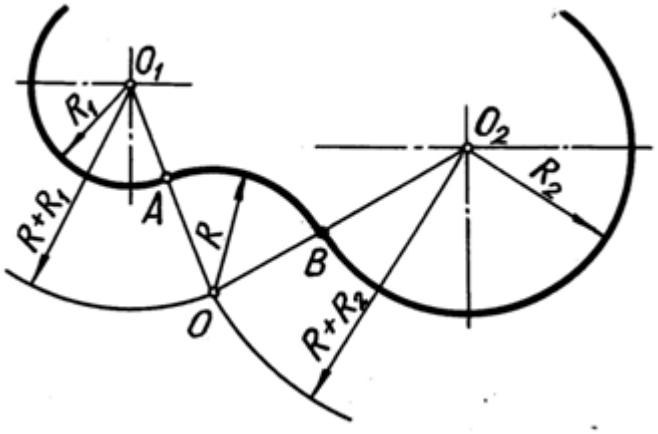


Рис. 14

4.2. СОПРЯЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

ВНЕШНЕЕ СОПРЯЖЕНИЕ (рис. 15). Под внешним сопряжением двух дуг понимают такое сопряжение, когда сопрягаемые дуги и дуга сопряжения находятся по разные стороны от общей касательной и дуга сопряжение является вогнутой по отношению к сопрягаемым дугам.

Расстояние от центра сопряжения до центров исходных дуг равно сумме радиусов. Центр сопряжения точка O получена в пересечении двух дуг, проведенных из центров O_1 и O_2 радиусами $R+R_1$ и $R+R_2$. Соединяя точку O с точками O_1 и O_2, получаем точки сопряжения A и B. Из центра O радиусом R проводим дугу сопряжения от A до B.



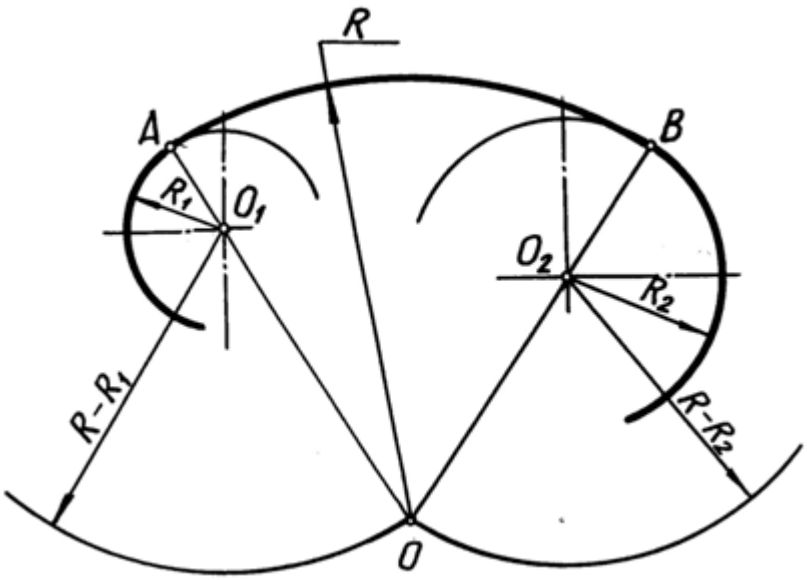
$OO_1 = R + R_1$

$OO_2 = R + R_2$

Рис. 15

ВНУТРЕННЕЕ СОПРЯЖЕНИЕ (рис. 16). При внутреннем сопряжении и сопрягаемые дуги и дуга сопряжения находятся по одну сторону от общей касательной, и дуга сопряжения является выпуклой по отношению к сопрягаемым дугам.

Расстояние от центра сопряжения до центров исходных дуг равно разности радиусов. Центр сопряжения точка O получена в пересечении двух дуг, проведенных из центров O_1 и O_2 радиусами $R-R_1$ и $R-R_2$. Соединяя точку O с точками O_1 и O_2, получаем точки сопряжения A и B. Из центра O проводим дугу сопряжения радиусом R от A до B.



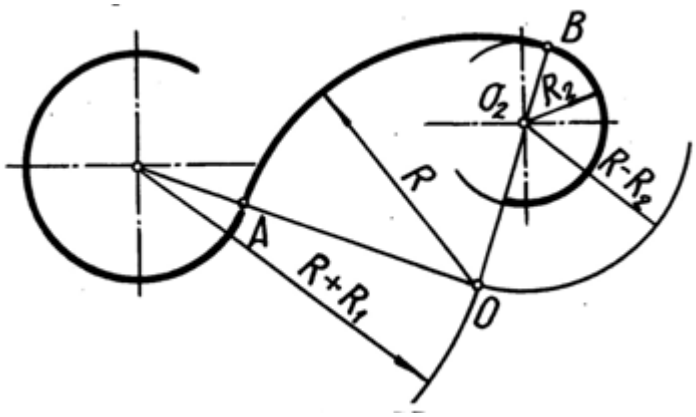
$OO_1 = R - R_1$

$OO_2 = R - R_2$

Рис. 16

СМЕШАННОЕ СОПРЯЖЕНИЕ (рис. 17). При смешанном сопряжении дуга сопряжения является по отношению к одной сопрягаемой дуге вогнутой (внешнее сопряжение), а по отношению к другой – выпуклой (внутреннее сопряжение).

Такое сопряжение содержит элементы сопряжения двух предыдущих видов. В этом случае также проводятся две вспомогательные дуги. Одна дуга равна сумме радиусов дуг сопрягаемой и сопряжения, а другая – разности радиусов дуг сопряжения и сопрягаемой. остальные построения аналогичны рассмотренным.



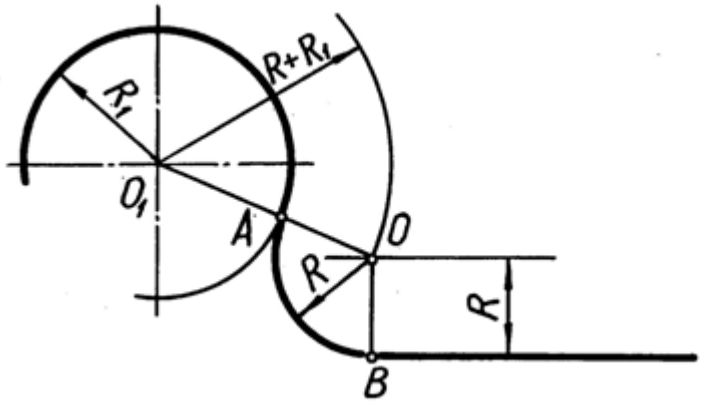
$OO_1 = R + R_1$

$OO_2 = R - R_2$

Рис. 17

4.3. СОПРЯЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ОКРУЖНОСТИ

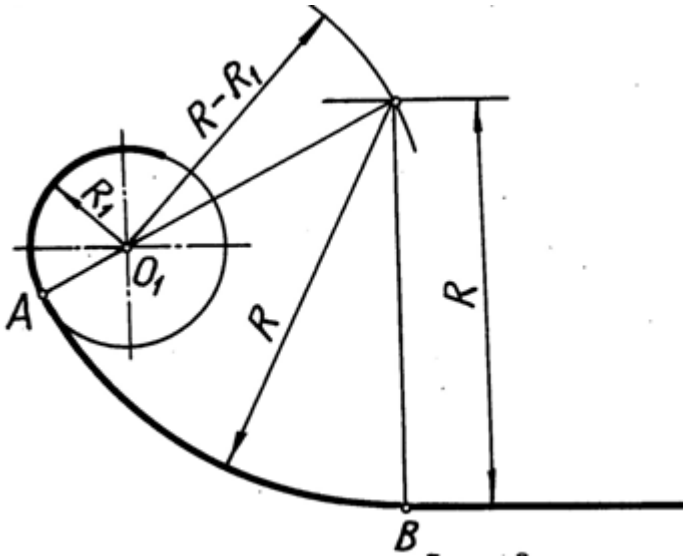
ВНЕШНЕЕ СОПРЯЖЕНИЕ (рис. 18). Центр сопряжения получают в пересечении прямой, параллельной заданной и отстоящей от нее на расстоянии, равном радиусу сопряжения, с дугой, проведенной из центра окружности радиусом $R+R_1$. Построение точек касания A и B видно на чертеже. Из центра O между точками касания проводим дугу сопряжения.



$OO_1=R+R_1$

Рис. 18

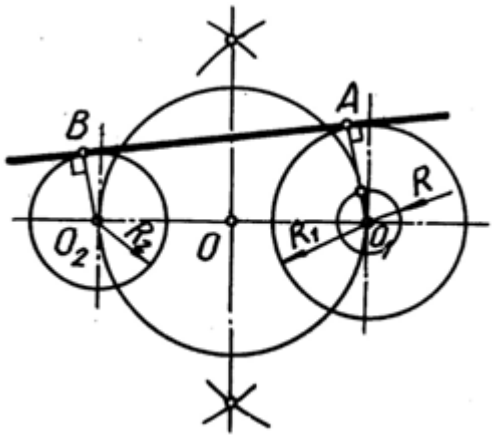
ВНУТРЕННЕЕ СОПРЯЖЕНИЕ (рис. 19). Центр сопряжения получают в пересечении прямой, параллельной заданной и отстоящей от нее на расстоянии, равном радиусу сопряжения, с дугой, проведенной из центра окружности радиусом $R - R_1$.



$OO_1=R - R_1$

Рис. 19

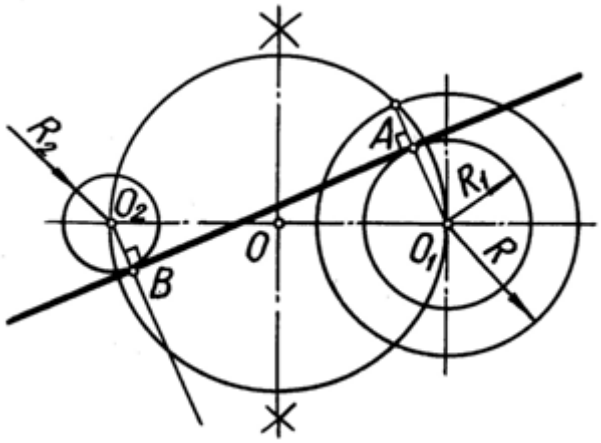
ВНЕШНЯЯ КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТЯМ (рис. 20). Строят вспомогательную окружность, диаметр которой равен расстоянию между центрами исходных окружностей. Из центра большей окружности проводят дугу, радиус которой равен разности радиусов окружностей, до пересечения со вспомогательной окружностью. Прямая, проходящая через центр большей окружности и точку пересечения вспомогательных, определяет направление перпендикуляров к касательной (рис. 11).



$R = R_1 - R_2$

Рис. 20

ВНУТРЕННЯЯ КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТЯМ (рис. 20). Строят вспомогательную окружность, диаметр которой равен расстоянию между центрами данных окружностей. Из центра одной из окружностей проводят дугу, радиус которой равен сумме радиусов окружностей, до пересечения со вспомогательной окружностью. Прямая, проходящая через центр окружности и точку пересечения вспомогательных, определяет направление перпендикуляров к касательной.



$R = R_1 + R_2$

Рис. 21

5. ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ОКРУЖНОСТИ

Аксонометрические проекции применяют для наглядной передачи формы предметов и изделий.

Наиболее сложной плоской кривой для вычерчивания в аксонометрии является окружность. При аксонометрическом проецировании окружность изображается в виде эллипса. Направление главных осей эллипса зависит от положения плоскости, в которой расположена проецируемая окружность. Если плоскость окружности параллельна плоскости, содержащей две любые аксонометрические оси, то направление осей эллипса определяют по направлению третьей отсутствующей аксонометрической оси: большая ось ей перпендикулярна, а малая параллельна (рис. 22).

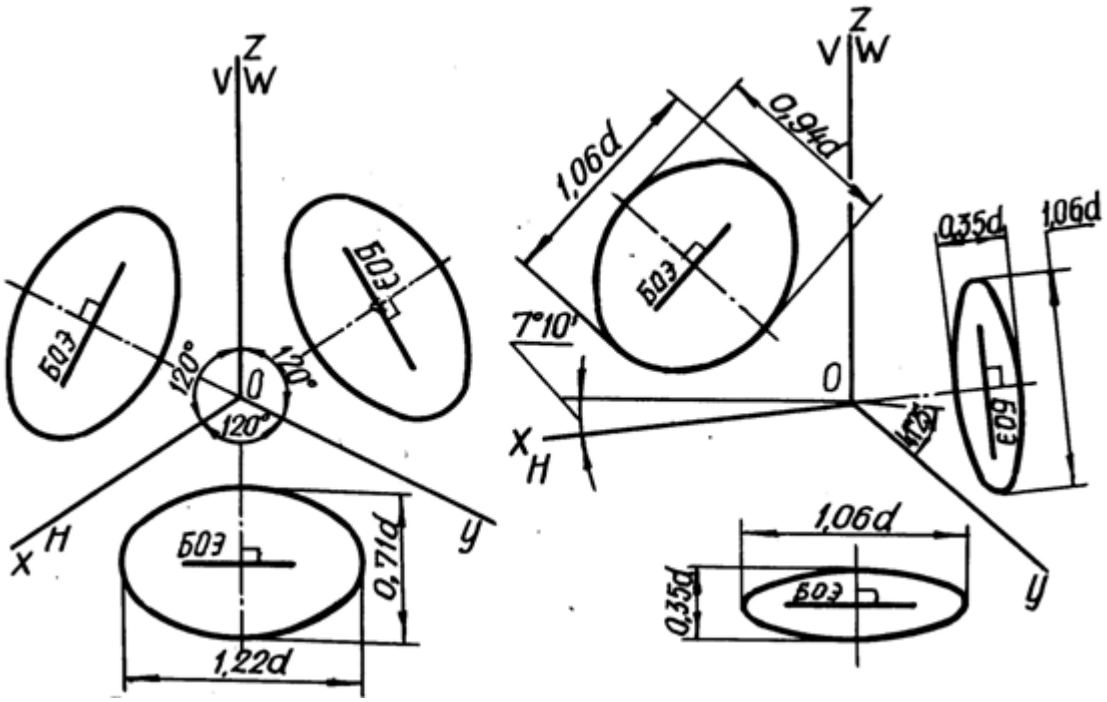


Рис. 22

В машиностроительном черчении построение эллипсов заменяют четырехцентровым овалом, так как это упрощает вычерчивание. В чертежах всех отраслей промышленности чаще применяют прямоугольные аксонометрические проекции: изометрическую и диметрическую.

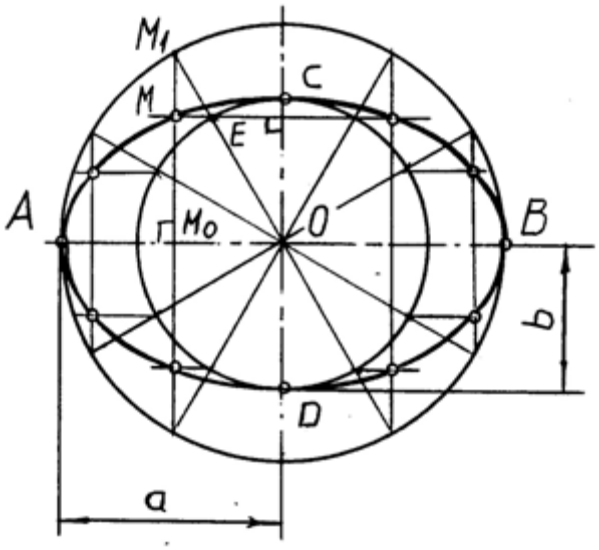


Рис. 23

Построение эллипса в начертательной геометрии выполняется при помощи двух концентрических окружностей, проведенных радиусами: *a* – большая полуось и *b* – малая полуось.

Из центра эллипса *O* проводятся несколько прямых линий, которые делят окружности на некоторое число частей. Из полученных точек проводят перпендикуляры: из точки на окружности большего диаметра опускают перпендикуляр на большую ось эллипса *AB*, а из точки на окружности меньшего диаметра опускают перпендикуляр на малую ось эллипса *CD*. При пересечении этих двух перпендикуляров получаются точки, принадлежащие эллипсу. Полученные точки соединяют плавной кривой при помощи лекала.

Эллипс симметричен относительно своих осей и относительно центра *O*, поэтому, построив какую-либо точку эллипса, можно построить еще три точки, симметричные найденной.

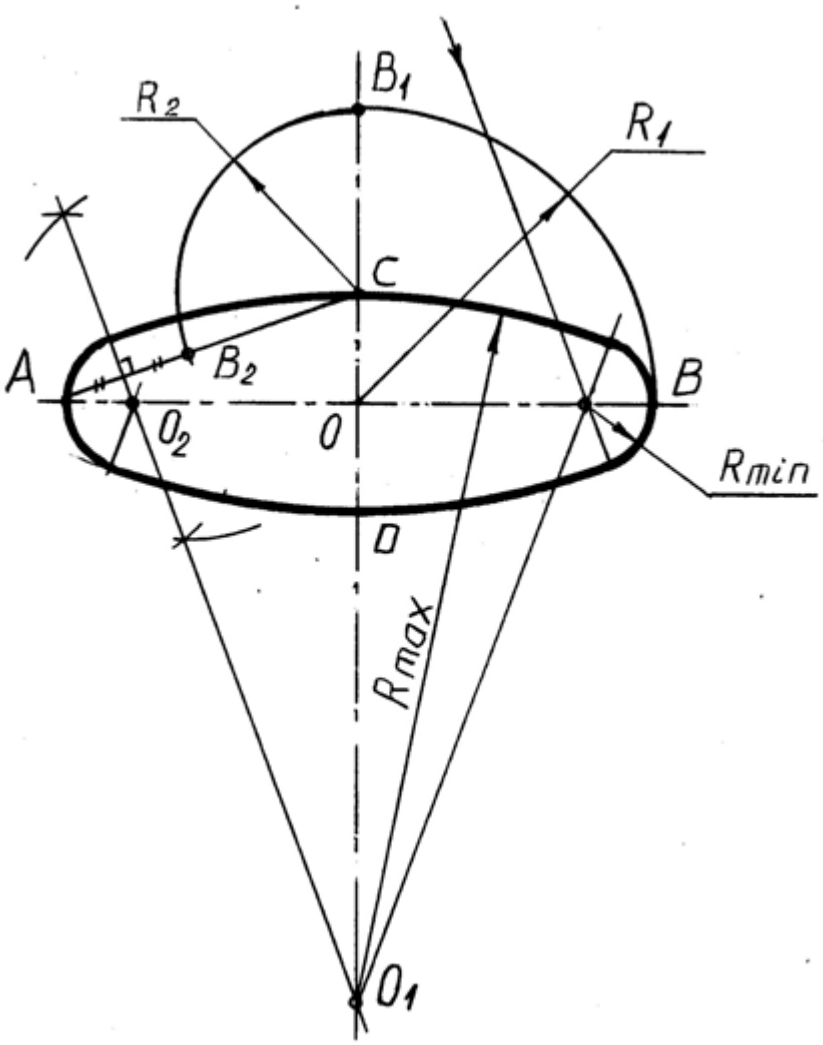


Рис. 24

На рис. 24 показано построение четырехцентрового овала, заменяющего изображение эллипса, при выполнении аксонометрических проекций деталей в машиностроительном черчении.

Известны размеры большой *AB* и малой *CD* осей эллипса. На линии, соединяющей точки *A* и *C*, откладывается полуразность большой и малой осей эллипса: $OB\text{-}OC=CB_1$, $CB_1=CB_2$. К середине отрезка *AB* проводится перпендикуляр до пересечения с большой и малой осями эллипса. Точки O_1 и O_2 являются центрами дуг, имеющими радиусы R_{max} и R_{min}.

5.1. ОВАЛЫ, ЗАМЕНЯЮЩИЕ ЭЛЛИПСЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Положение осей аксонометрии приведено на рис. 25. Построение основано на правиле деления окружности на три равные части (рис. 9).

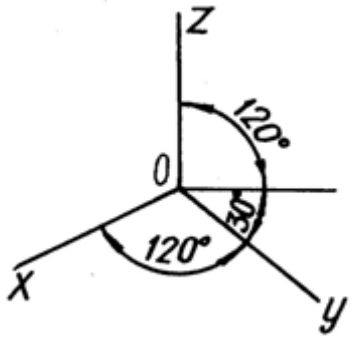


Рис. 25

Коэффициент искажения по осям *x*, *y*, *z* равен 0,82. Изометрическую проекцию для упрощения, как правило, выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*, т. е. приняв коэффициент искажения равным 1.

Если изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям, то большая ось эллипса равна 1,22, а малая ось – 0,71 диаметра окружности. На рис. 26 показан графический способ определения большой и малой осей изометрического эллипса.

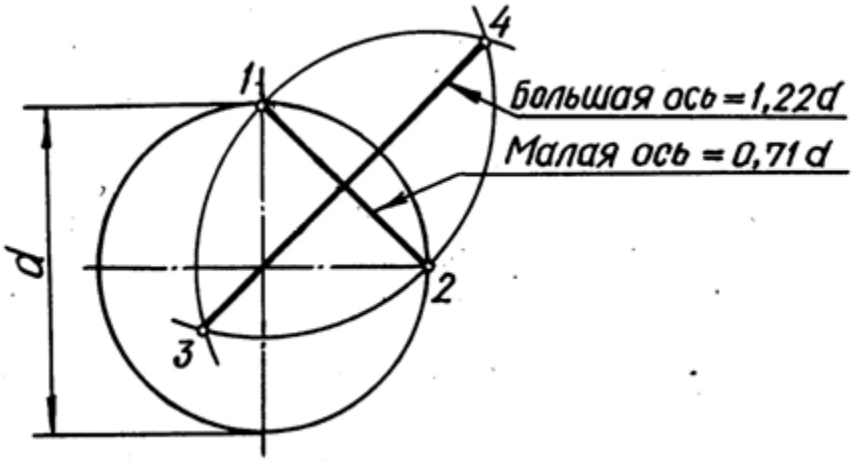


Рис. 26

На рис. 27 показан один из многих способов построения четырехцентрового овала по большой и малой осям эллипса.

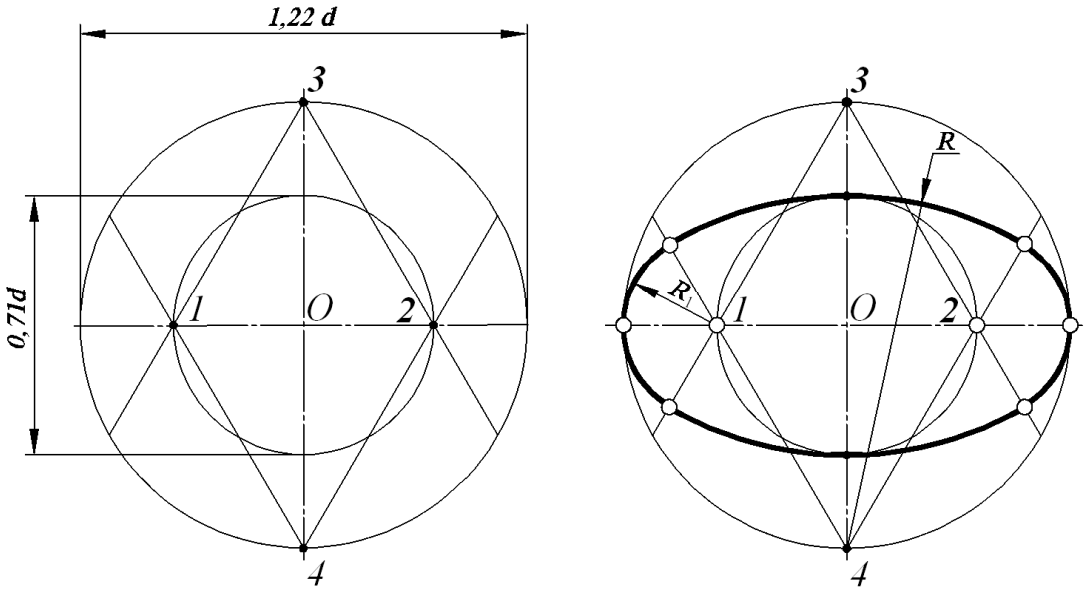


Рис. 27

Четырехцентровый овал - плоская, замкнутая кривая образуется сопряжением двух дуг, проведенных из четырех центров.

Наиболее простой, но менее точно передающий форму эллипса способ построения четырехцентрового овала состоит из следующих операций: 1. проводят окружность исходного диаметра; 2. строят аксонометрические оси, а также указывают направление большой и малой осей овала, заменяющего эллипс; 3. отмечают центры дуг, проведя прямые, соединяющие точки пересечения окружности с осями аксонометрии и с направлением большой оси эллипса; 4. проводят дуги радиусами R и R_1 из четырех центров (рис. 28).

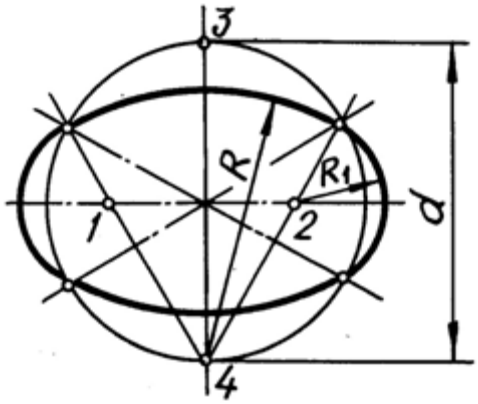


Рис. 28

На рис. 29 представлен пример выполнения изображения детали в прямоугольной изометрии.

При нанесении размеров на чертежах, выполненных в аксонометрических проекциях, выносные линии проводят параллельно аксонометрическим осям, размерные линии – параллельно измеряемому отрезку.

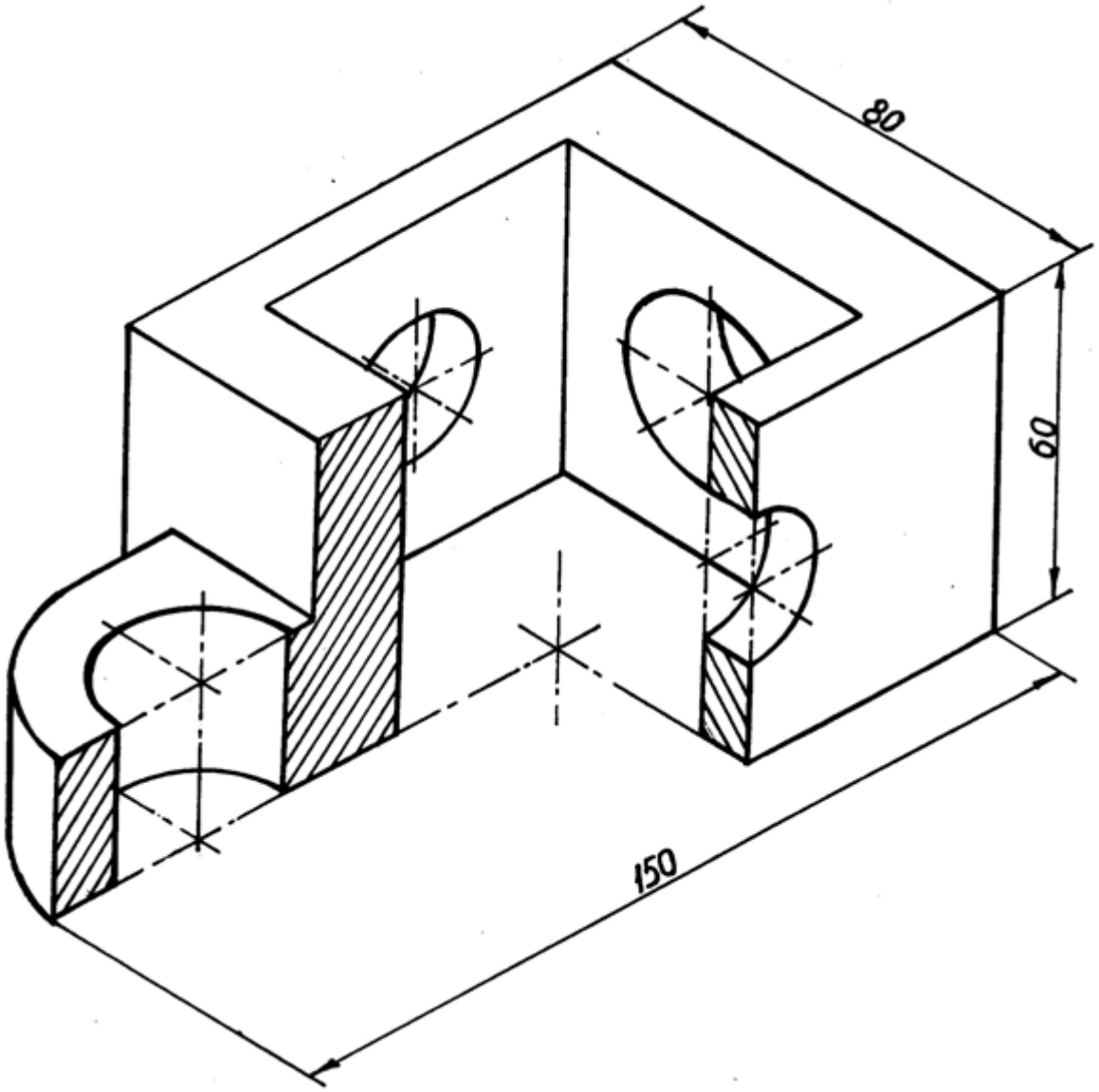


Рис. 29

Линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях наносят параллельно одной из гипотенуз равнобедренных треугольников, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям.

5.2. ОВАЛЫ, ЗАМЕНЯЮЩИЕ ЭЛЛИПСЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Положение осей аксонометрии приведено на (рис. 30). Построение основано на правиле вычерчивания наклонных прямых по тангенсам углов:

$tg\ 7°10' = \frac{1}{8}$, $tg\ 41°25' = \frac{7}{8}$ (рис. 5).

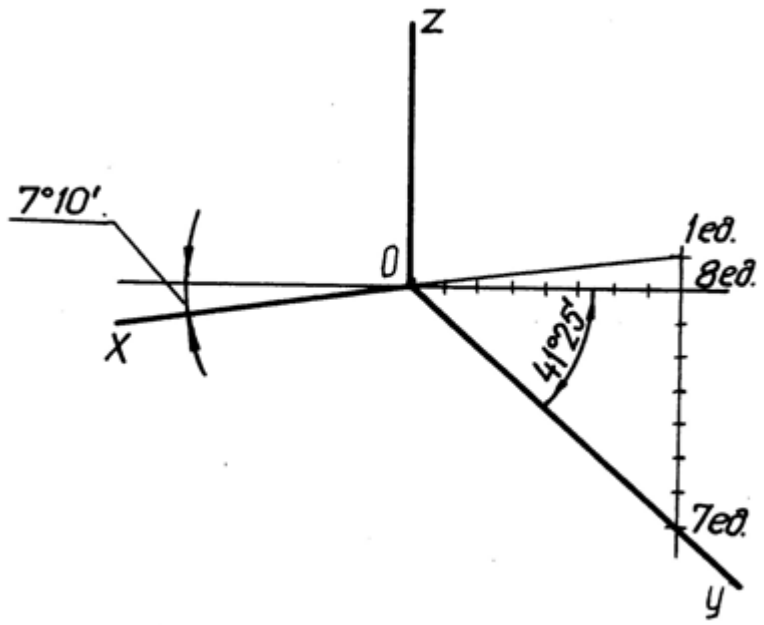


Рис. 30

Коэффициент искажения по оси $y = 0{,}47$, а по оси x и z – 0,94. Диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x и z, и с коэффициентом искажения 0,5 по оси y.

Если диметрическую проекцию выполняют без искажения по осям x и z, то большая ось эллипсов равна 1,06 диаметра окружности, а малая ось эллипса в плоскости xOz – 0,95 и эллипсов в плоскости yOz и yOx – 0,35 диаметра окружности.

На рис. 31 дано построение диметрического овала для окружностей диаметра d, расположенного в плоскости xOz. Последовательность выполнения следующая: 1. через центр окружности точку O проводим оси Oz и Ox плоскости, содержащей данную окружность. Направление малой оси эллипса совпадает с направлением оси Oy, направление большой оси эллипса перпендикулярно к оси Oy, отсут-

ствующей в этой плоскости; 2. проводим окружность исходного диаметра и отмечаем точки ее пересечения с осью *OX*, из которых проводятся горизонтальные прямые до пересечения с большой и малой осями эллипса, полученные точки и являются центрами овала; 3. из центров 2 и 4 радиусом, равным *R*, проводим первую пару дуг, а из центров 1 и 3 - вторую пару дуг радиусом R_1, границей дуг являются аксонометрические оси.

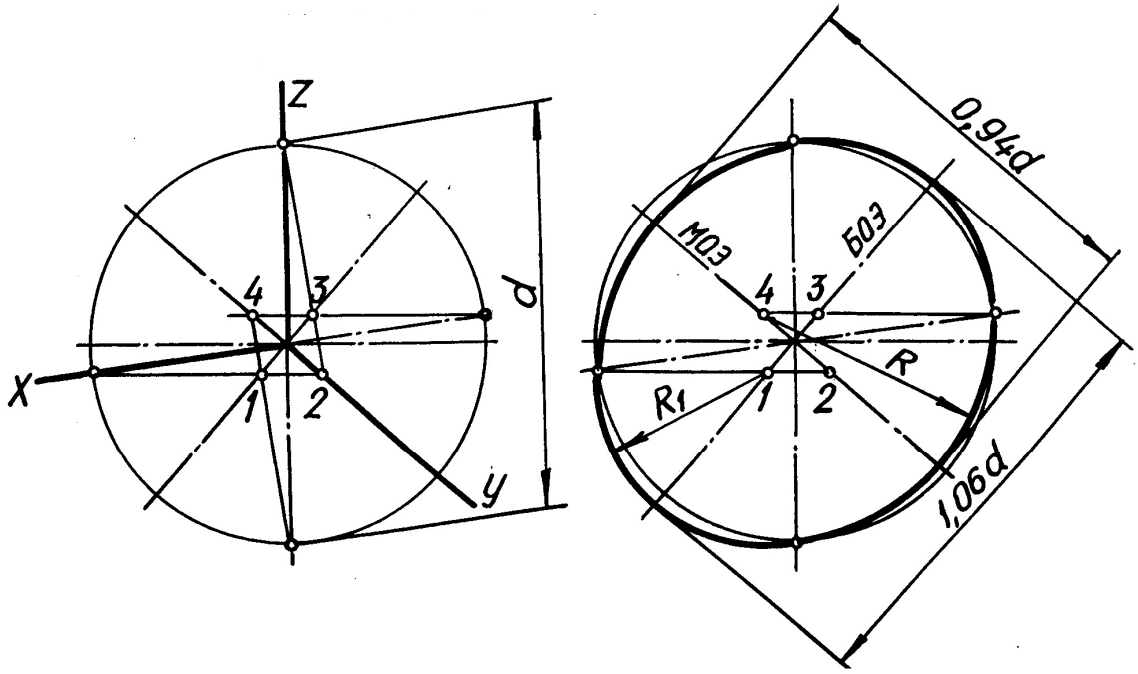


Рис. 31

На рис. 32 дано построение диметрического овала для окружности диаметра *d*, расположенного в плоскостях *xOy* и *zOy*. Последовательность выполнения следующая: 1. через центр окружности точку *O* проводим аксонометрические оси, прямую, указывающую направление большой оси эллипса, т. е. перпендикулярно отсутствующей оси в заданной плоскости; 2. проводим окружность исходного диаметра отмечаем точки пересечения с осью *OX* (осью, повернутой относительно большой оси эллипса на угол 7°10′) и прямой, симметричной ей – точки сопряжения дуг; 3. на прямой, указывающей направление малой оси эллипса, вверх и вниз от центра окружности откладываем отрезки, равные 1,06*d*, т. е. большой оси эллипса, получаем два центра дуг

большего радиуса; соединим полученные центры сточками, расположенными на окружности, пересечение проведенных прямых с направлением большой оси эллипса дает еще два центра дуг малого радиуса; 5. проводим дуги радиусами R и R_1.

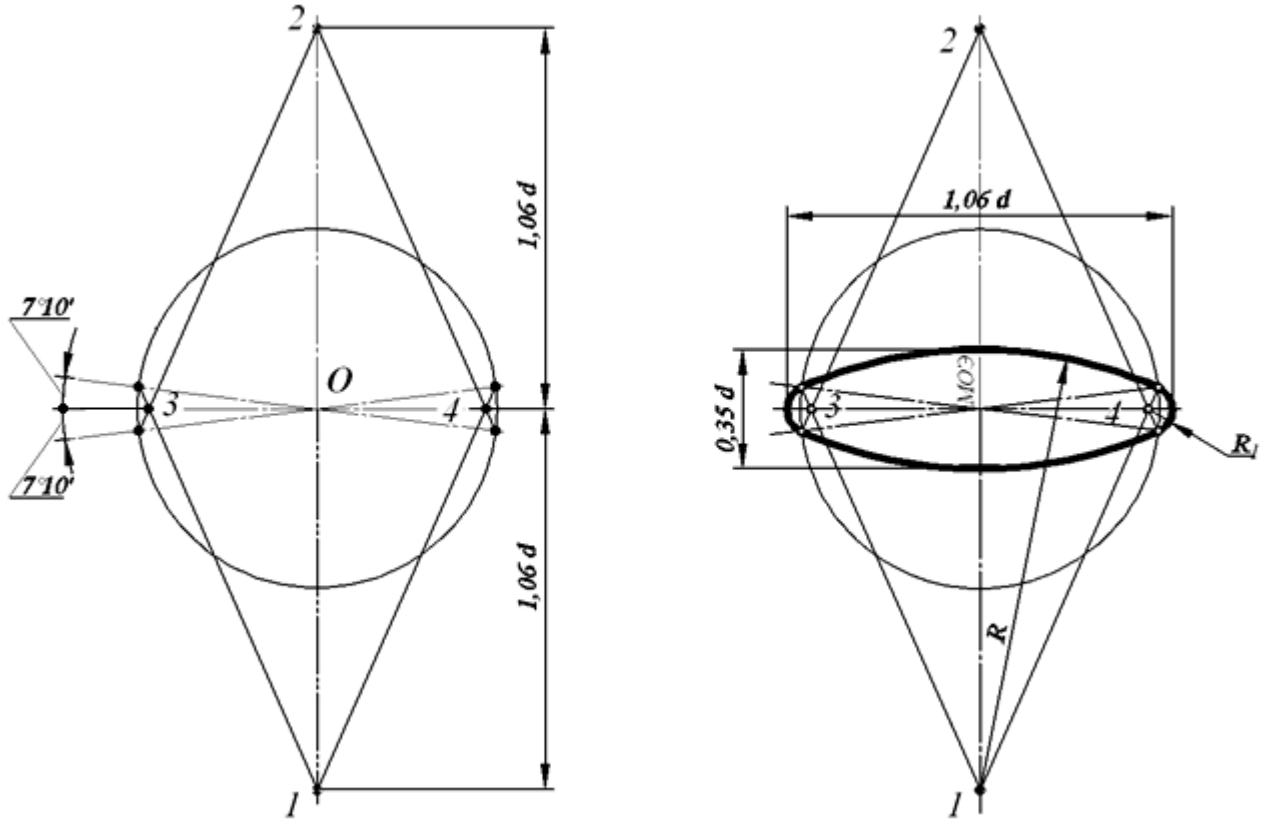


Рис. 32

В учебной литературе приведено несколько способов построения четырехцентровых овалов, заменяющих эллипсы, которые можно использовать как при выполнении задания по геометрическому черчению, так и при вычерчивании других работ.

Следует помнить, что при нанесении размеров в аксонометрии, размерные и выносные линии должны быть расположены параллельно аксонометрическим осям.

На рис. 33 представлено изображение детали в прямоугольной диметрической проекции.

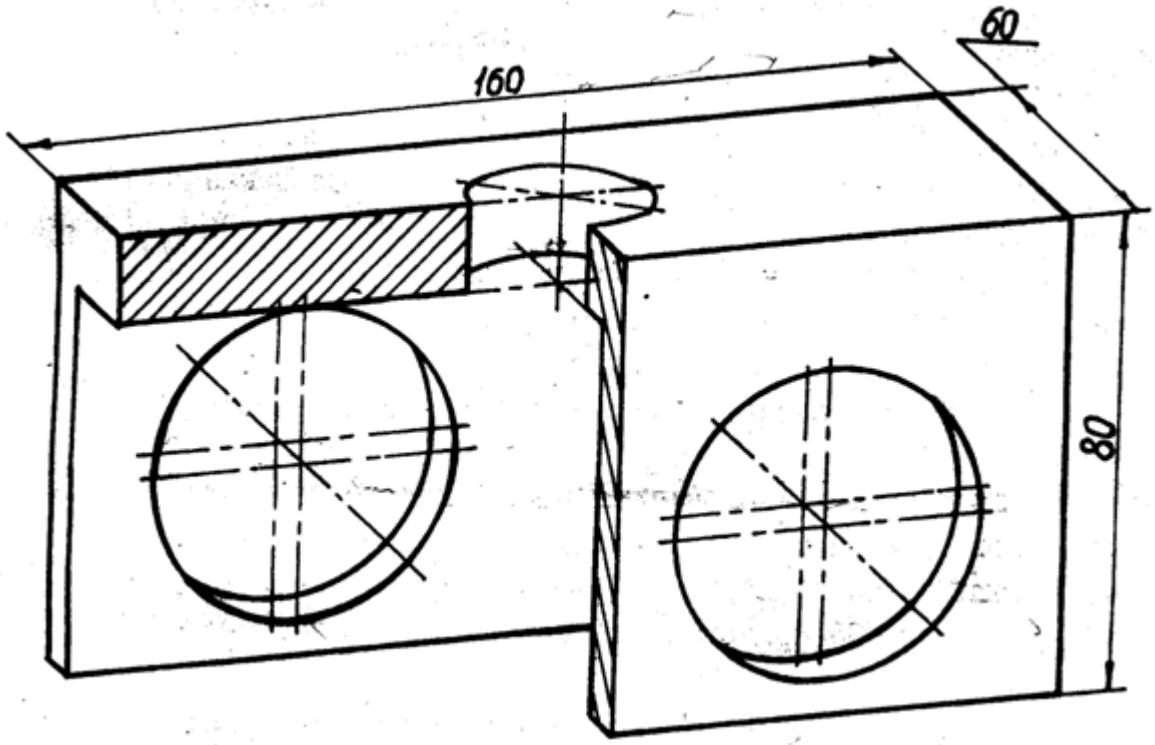


Рис. 33

6. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ЧЕРТЕЖЕЙ

Все чертежи любого назначение и содержания необходимо оформлять по правилам, установленным ЕСКД – Единой системой конструкторской документации.

К оформлению чертежей относят форматы по ГОСТ 2.301-68, масштабы по ГОСТ 2.302-68, линии по ГОСТ 2.303-68, шрифт по ГОСТ 2.304-81 и основную надпись по ГОСТ 2.104-68.

Чертежным форматом называется размер конструкторского документа. Лист бумаги, как правило, больше по размерам, чем формат, установленный ГОСТом.

Форматы листов определяются размерами внешней рамки чертежа, которую обводят тонкой линией. На рис. 34 показано оформление чертежа.

На всех конструкторских документах в правом нижнем углу помещают основную надпись. На листах формата А4 основную надпись располагают только вдоль короткой стороны, а на листах других форматов – справа вдоль короткой или длинной стороны листа.

На всех чертежах и других технических документах все надписи, т. е. буквы и цифры, выполняют стандартным чертежным шрифтом. Высота прописной буквы в миллиметрах определяет размер шрифта. На рис. 35 представлен шрифт типа Б с наклоном 75°, применяемый в машиностроении.

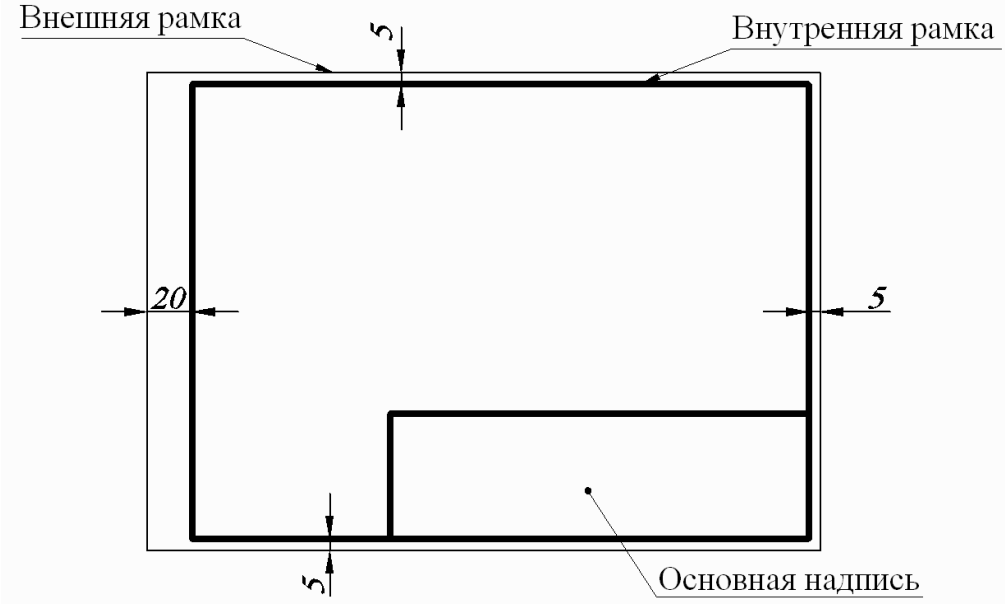


Рис. 34

АБВГДЕЖЗИЙК
ЛМНОПРСТУФХ
ЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ
абвгдежзийкл
мнопрстуфхцч
шщъыьэюя
1234567890 ф
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Студент Голомонзина
Консульт. Белоносова
Рук. Белоносова
Н. контр.
Зав. каф. Шангина Е.И.
ШРИФТ
Лит. Масса Масштаб
Лист Листов
УГГУ РМ
Кафедра инженерной графики

Рис. 35

ЛИТЕРАТУРА

1. Манцветова И. В., Маянц Д. Ю., Галиченко К. Я., Ляшкевич К. К. Проекционное черчение с задачами. – Минск: Высшая школа, 1978.

2. Соловьев С. А., Буланже Г. В., Шульга А. К. Задачник по черчению и перспективе. – М.: Высшая школа, 1978.

3. ГОСТ 2.301-68 и др. ЕСКД. Общие правила выполнения чертежей: Сборник. – Введ. с 01.01.71. – Переизд. Апрель 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Прямая линия	3
2.	Угол, уклон и конусность	4
3.	Окружность и ее элементы	7
4.	Сопряжения	10
5.	Построение аксонометрической проекции окружности	16
6.	Основные сведения по оформлению чертежей	26

Белоносова Ирина Борисовна

Геометрическое черчение

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине «Начертательная геометрия.

Инженерная графика» для студентов всех специальностей:

Часть 1

Корректура кафедры инженерной графики

Подписано в печать г.

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16

Печ. л. 1,9 Уч. - изд. 1,11. Тираж 60 экз. Заказ №29

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Лаборатория множительной техники

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу

_____ С.А. Упоров

Б1.Б.14 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Направленность (профиль)
Производство и реновация машин и оборудования

Форма обучения: очная, заочная

Автор: Насолдина И. Ю. ассистент

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Инженерной графики	горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Шангина Е. И.	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 5 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…….....3

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ……...4

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ……7

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ …….. ……11

ВВЕДЕНИЕ

Зубчатые передачи широко применяются в различных механизмах для передачи вращательного момента от одного вала к другому. Основной деталью зубчатой передачи является зубчатое колесо.

Данное методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении чертежа зубчатого колеса, который является частью задания «Условности машиностроительного черчения».

При выполнении этого чертежа студент должен ознакомиться с элементами конструкции зубчатого колеса, его основными параметрами, а также с особенностями, условностями и упрощениями, применяемыми при построении изображений зубчатых колес.

Работа содержит основные сведения о функциональном назначении и конструктивных особенностях зубчатых колес различного применения, а также соотношения между основными параметрами цилиндрического зубчатого колеса; приведена методика определения размеров основных конструктивных элементов зубчатого колеса в зависимости от величины модуля и количества зубьев.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ

Зубчатые зацепления широко распространены в технике. Они служат для передачи вращательного момента от одного вала к другому. Оси вращения валов могут располагаться параллельно друг другу, а также пересекаться или скрещиваться между собой. Если зубчатые передачи состоят из двух колес, то колесо, которое передает момент другому колесу, называется ведущим, а второе называется ведомым. В зависимости от соотношения числа зубьев ведущего и ведомого колес изменяется частота вращения вала ведомого колеса.

Кроме того, зубчатые колеса могут применяться для преобразования вращательного движения в поступательное. В этом случае зубчатая передача называется реечной и состоит из зубчатого колеса и рейки.

В зубчатых передачах усилие от одного колеса к другому передается посредством зубьев, последовательно вступающих в контакт друг с другом. В зависимости от функционального назначения и условий работы зубья могут иметь различную форму и расположение относительно оси колеса.

На рис. 1 показаны зубчатые зацепления с различной формой зубьев:

а) цилиндрическая передача с прямыми зубъями;

б) цилиндрическая передача с косыми зубьями;

в) цилиндрическая передача с шевронными зубьями;

г) коническая передача с прямыми зубьями.

В зависимости от формы профиля зуба передачи подразделяются на эвольвентные, неэвольвентные (передачи Новикова) и циклоидальные.

На рис. 2 показано зубчатое колесо с эвольвентным профилем зуба.

Основными параметрами зубчатого колеса являются: диаметр делительной окружности $\boldsymbol{d}$, модуль $\boldsymbol{m}$ и число зубьев $\boldsymbol{z}$.

Диаметр делительной окружности $\boldsymbol{d}$ равен диаметру цилиндрической поверхности, которая делит зубья на головку и ножку. Окружной шаг зацепления зубьев $\boldsymbol{P_t}$ (рис. 2) представляет собой расстояние между

одноименными точками профиля соседних зубьев по дуге делительной окружности.

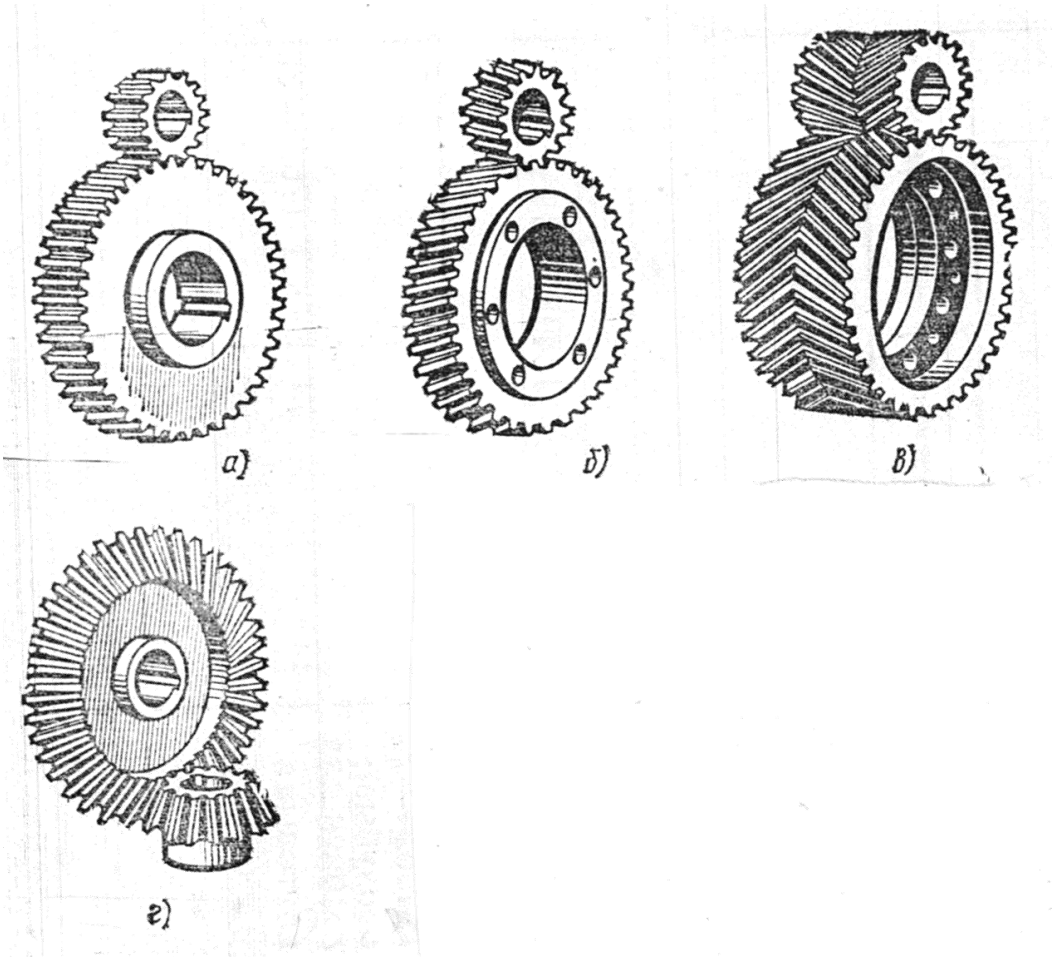


Рис. 1. Зубчатые зацепления

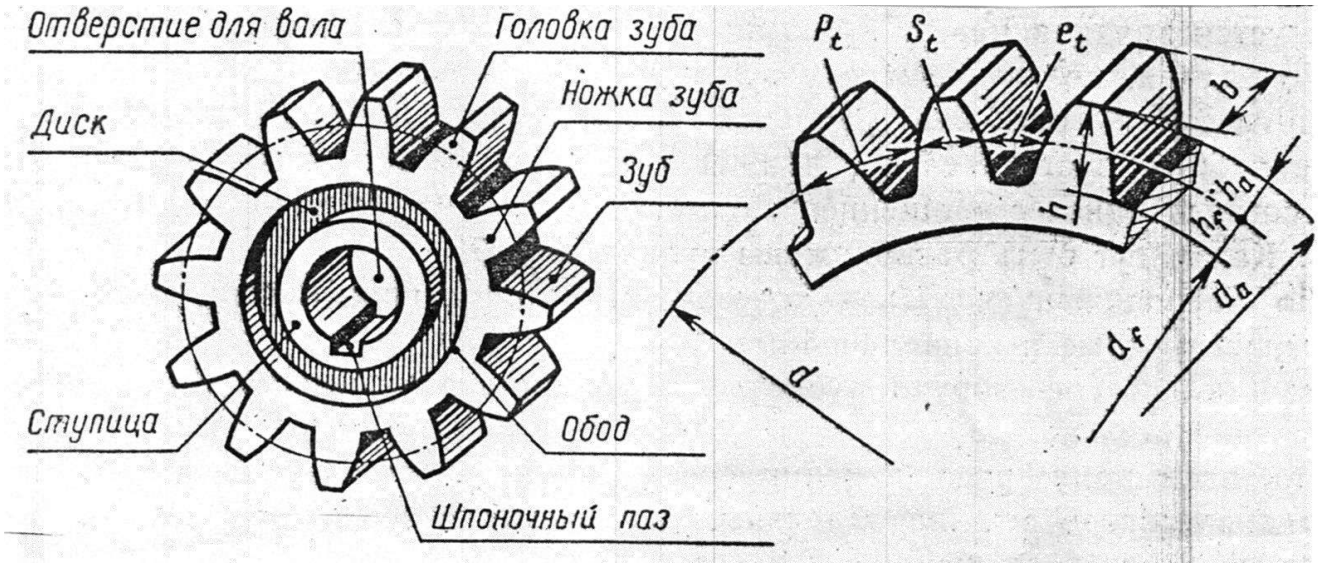


Рис. 2. Зубчатое колесо с эвольвентным профилем зуба

Величина P_t делится поверхностями соседних зубьев на две равные части окружную толщину зуба S_t и окружную ширину впадины ℓ_t (рис. 2).

Длина делительной окружности, таким образом, равна произведению окружного шага зацепления на число зубьев

$$\pi d = P_t \, z \qquad (1)$$

Модулем зубчатого колеса называется отношение окружного шага зацепления P_t к величине π

$$m = \frac{P_t}{\pi} \qquad (2)$$

На основании уравнений (1) и (2) можно сделать вывод, что

$$d = mz \qquad (3)$$

Величина модуля определяет размер зуба и рассчитывается в зависимости от момента вращения, передаваемого зубчатым колесом. Модуль является величиной стандартной и поэтому после расчета зуба на прочность конструктор выбирает величину модуля из таблицы в соответствии с ГОСТ 9563-60, ближайшую к расчетной.

Для эвольвентных цилиндрических зубчатых колес общего назначения высоту головки зуба h_a и величину ножки зуба h_f определяют по формулам

$$h_a = m, \qquad (4)$$

$$h_f = 1{,}25m. \qquad (5)$$

Таким образом, высота зуба

$$h = 2{,}25m. \qquad (6)$$

На основании уравнений (3) - (5) можно определить диаметр окружности впадин d_f и диаметр окружности выступов d_a

$$d_f = m(z - 2{,}5) \qquad (7)$$

$$d_a = m(z + 2) \qquad (8)$$

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

В табл. 1 приведены исходные данные для выполнения задания. В качестве исходных данных приведены два параметра зубчатого колеса: модуль ***m*** и число зубьев ***z***. Необходимо на основе этих данных определить размеры всех элементов цилиндрического зубчатого колеса. Диаметр делительной окружности, диаметры окружности впадин и выступов определяются по формулам (3), (7) - (8).

Таблица 1

Исходные данные

Номер варианта	***z***	***m***	Номер варианта	***z***	***m***
1	50	2	26	60	4
2	50	2,5	27	60	5
3	50	1,5	28	60	6
4	50	1,25	29	60	8
5	50	1	30	30	5
6	50	4	31	30	4
7	50	10	32	30	2
8	50	5	33	30	0,5
9	40	5	34	20	0,5
10	40	10	35	20	1
11	40	12	36	20	2
12	40	1	37	20	4
13	40	2	38	25	4
14	40	3	39	25	3
15	40	4	40	25	2
16	40	20	41	25	1
17	40	5	42	25	5
18	40	6	43	32	2,5
19	45	2	44	32	5
20	45	1	45	32	2
21	45	3	46	32	4
22	45	4	47	32	2
23	45	8	48	36	1,5
24	60	2	49	36	2
25	60	3	50	36	2,5

Для определения большинства остальных размеров зубчатого колеса (рис. 3) существуют эмпирические зависимости.

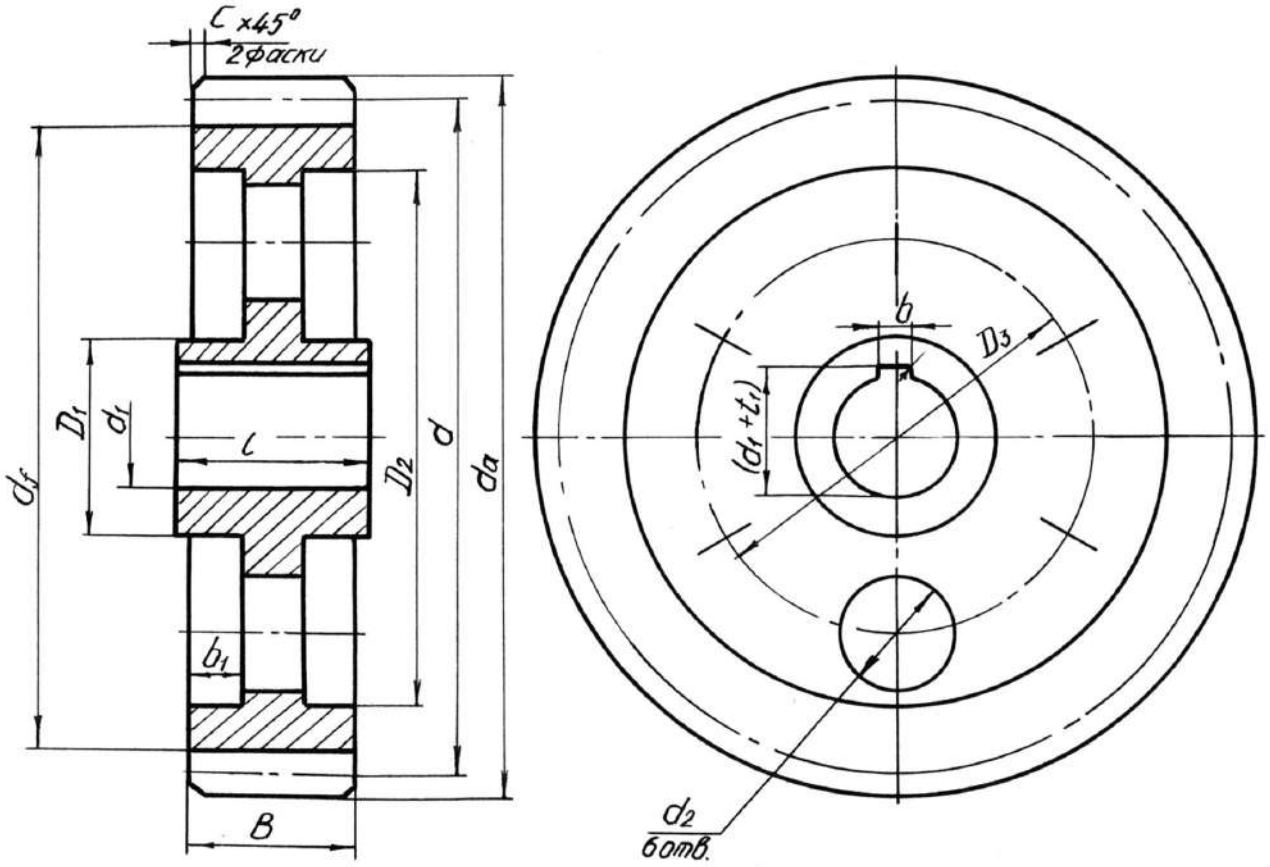


Рис. 3. Основные размеры элементов зубчатого колеса

В частности, размеры ступицы определяются по формулам

$$d_1=(4\ 5)m, \tag{9}$$

$$\ell=1{,}7d_1, \tag{10}$$

$$D_1=(1{,}6\ 1{,}8)d_1. \tag{11}$$

Где d_1 – диаметр отверстия ступицы зубчатого колеса; ℓ – ширина ступицы; D_1 – диаметр ступицы. Размеры элементов обода колеса и зубчатого венца определяются по формулам

$$D_2=d_f-(3\ 4{,}5)m\ , \tag{12}$$

$$B=(6\ 8)\ m, \tag{13}$$

$$b_1=\frac{1}{3}B. \tag{14}$$

Величина D_2 представляет собой внутренний диаметр обода.

Размеры шпоночного паза определяются в зависимости от диаметра отверстия ступицы d_1 по ГОСТ 8788-68. Величины d_2, D_3 и c определяются (конструктивно) по усмотрению конструктора.

После определения размеров выполняют чертеж зубчатого колеса на листе формате А3. Масштаб изображения выбирается самостоятельно в соответствии с ГОСТ 2.302-68. На рис. 4 приведен пример такого чертежа.

Следует обратить особое внимание на условности и упрощения, применяемые при выполнении чертежа. На месте главного вида выполняется полный фронтальный разрез колеса; зуб на разрезе показан не заштрихованным, а по диаметру делительной окружности нанесена штрихпунктирная линия. На виде слева делительная окружность показана также штрихпунктирной линией, а окружность впадин вообще не изображена.

В правом верхнем углу необходимо выполнить таблицу, в которой приведены основные параметры зубчатого колеса.

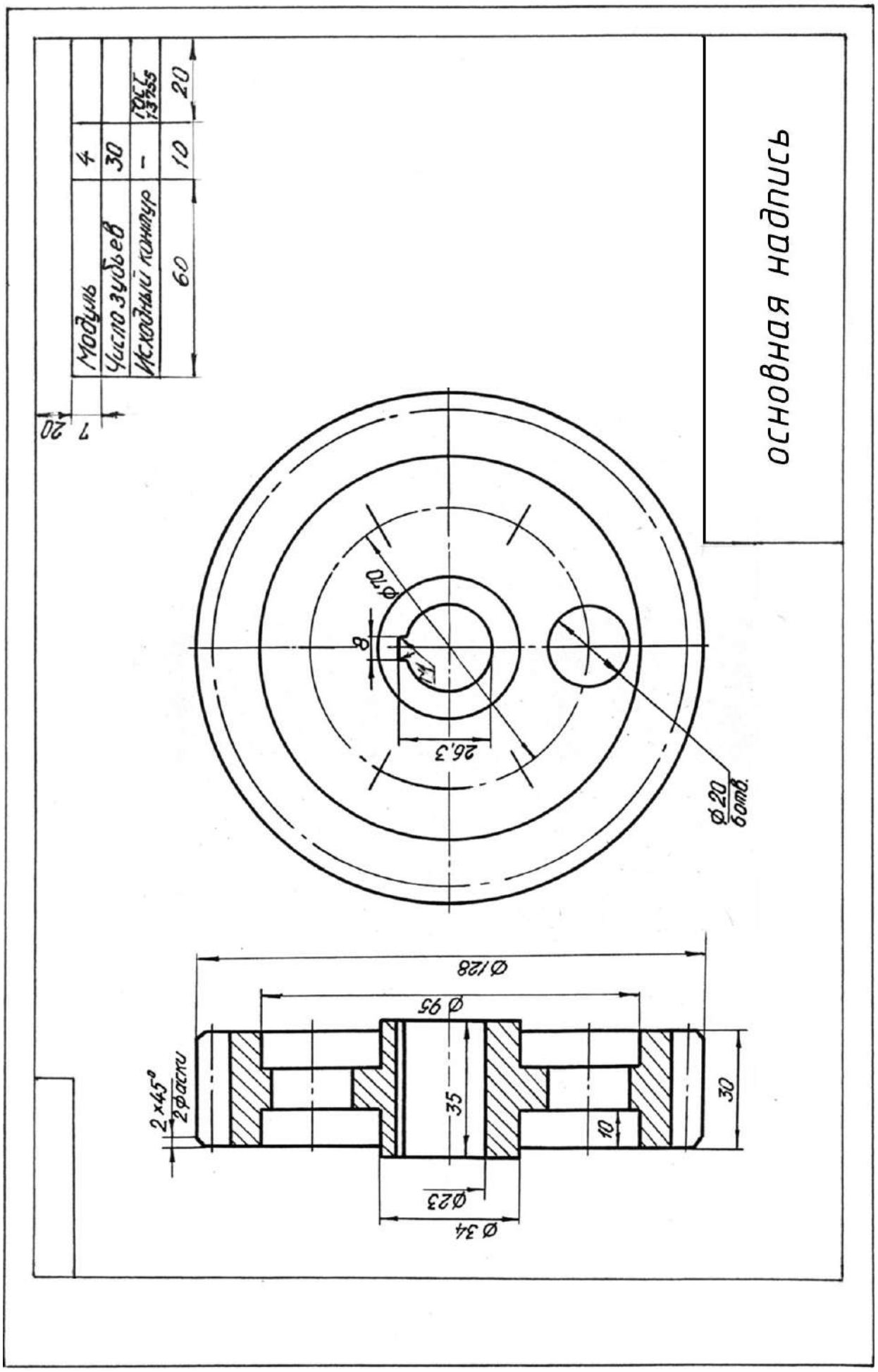


Рис. 4. Пример выполнения

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Богданов В. Н. и др. Справочное руководство по черчению. М.: Машиностроение, 1989.

Суворов С. Г., Суворова Н. С. Машиностроительное черчение в вопросах и ответах: Справочник. М.: Машиностроение, 1984.

Федоренко В. А., Шошин А. И. Справочник по машиностроительному черчению. Л.: Машиностроение, 1981.

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Т. Е. Савина

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «СОЗДАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА СРЕДСТВАМИ AUTOCAD»

по дисциплинам:

«Инженерная и компьютерная графика»,

«Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика»

Екатеринбург – 2019

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А. Упоров

Т. Е. Савина

Методическое пособие по выполнению практической работы «Создание проекционного чертежа средствами AutoCAD» по дисциплинам: «Инженерная и компьютерная графика», «Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Ш20

Рецензент: *Е. И. Шангина*, д-р пед. н., к.т.н., профессор кафедры ИГр УГГУ.

Пособие рассмотрено на заседании кафедры инженерной графики 07.09.2017 г. (протокол № 1) и рекомендованы для издания в УГГУ

Савина Т. Е.

Ш20 Методическое пособие по выполнению практической работы «СОЗДАНИЕ ПРОЕКЦИЕННОГО ЧЕРТЕЖА СРЕДСТВАМИ AUTOCAD» курсу «Компьютерная графика» для студентов всех специальностей /Т. Е. Савина. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 31 с.

В методическом пособии изложена последовательность и порядок построения проекционного чертежа в системе AutoCAD. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении. Дан пример выполнения графической работы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ……3

1. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ……..4

2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ……6

3. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ 2D ЧЕРТЕЖА……..8

4. ПРИЛОЖЕНИЕ…… …19

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ…… …….32

СОЗДАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРТЕЖА СРЕДСТВАМИ AUTOCAD

Цель задания:

-закрепление навыков работы с командами построения и редактирования системы AutoCAD в процессе выполнения чертежа, оформленного в соответствии с требованиями стандартов Единой Системы Конструкторской Документации (ЕСКД).

Задание содержит 12 вариантов, приведённых в приложении.

По двум заданным изображениям детали построить проекционный чертеж в трех проекциях, на месте соответствующих видов выполнить необходимые разрезы (ГОСТ 2.305-68). Выполнить компоновку чертежа на формате А3 (ГОСТ 2.301-68), с основной надписью формы 1 (ГОСТ 2.104-68).

1. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

При выполнении задания необходимо опираться на ГОСТ 2.305-68, 2.307-68, знать интерфейс, основные понятия и принципы работы в системе AutoCAD.

Используя проекционную связь между данными в варианте изображениями, выявить геометрические формы элементов детали, с четким разграничением внутренних и наружных поверхностей. В задании внутренний контур показан штриховыми линиями, для его выявления необходимо использовать разрезы и сечения. Разрезы располагать на месте соответствующих видов. При наличии плоскости симметрии, совмещать половину вида с половиной разреза на одном изображении. После выполнения разрезов штриховые линии на видах не показывают.

Изображения на чертеже располагать равномерно, расстояния между ними выбирать с учетом простановки размеров в соответствии с ГОСТ 2.307-68. При простановке размеров необходимо помнить:

1.Размеры указывают истинные, независимо от масштаба, в котором выполнен чертеж.

2.Линейные размеры проставляют в миллиметрах, без указания размерности, угловые – с единицами измерения (градусы, минуты, секунды).

3.В машиностроительном черчении не допускается замкнутая размерная цепочка.

4.Минимальное расстояние между размерной линией и линией контура – 10 мм, между последующими размерными линиями – 7 мм. Чтобы размерные линии не пересекались сначала (ближе к контуру) ставят меньшие размеры.

5.Если изображения состоят из половины вида и половины разреза, то размерные линии обрывают за осью симметрии, при этом размерное число ставят полным и ближе к середине.

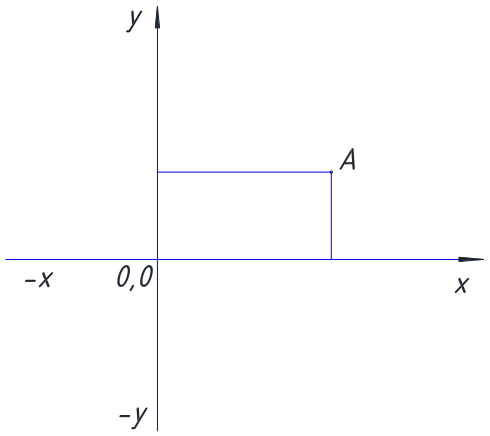
6. Размеры, относящиеся к наружным и внутренним поверхностям, группируют отдельно: наружные – со стороны вида, внутренние – со стороны разреза.

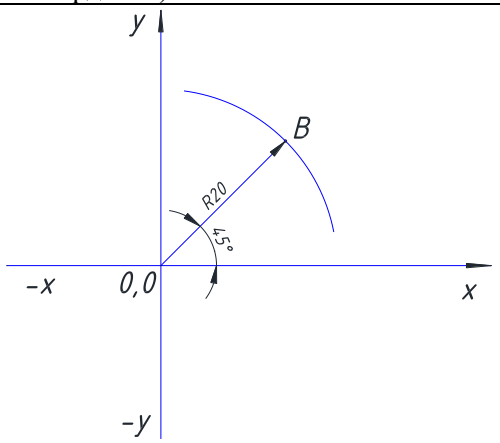
7.Размеры относящиеся к одному и тому же элементу (отверстию, пазу и т.п.), располагают в одном месте того изображения, где наиболее полно читается его форма.

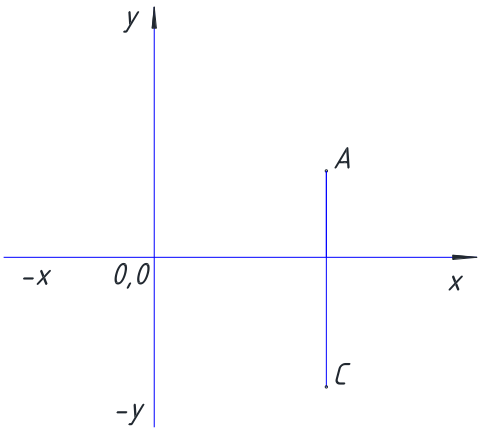
2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

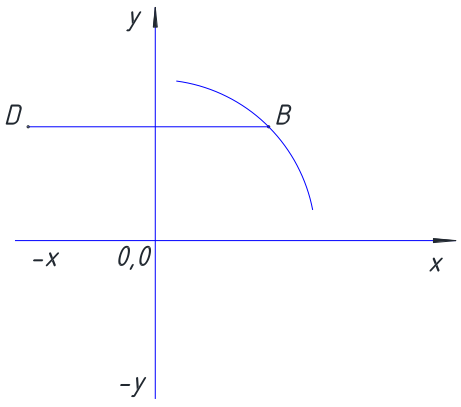
- Все изображения строятся в пространстве модели, в масштабе 1:1.
- Фрагменты чертежа: осевые и центровые линии, вспомогательные построения, чистовая обводка, размерные лини и т.д. принято размещать на разных слоях. Послойная грамотная организация чертежа позволяет сократить время по его разработке.
- Точность геометрических построений обеспечивается способами задания точки:

1. Координатный (ввод с командной строки)

<table>
<tr><th>Прямоугольные координаты</th><th>Полярные координаты</th></tr>
<tr><td colspan="2">Абсолютные
(отсчет от начала системы координат)</td></tr>
<tr><td> 

x, y
т.A: 20,10</td><td> 

R< φ
т.B: 20<45</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в строке состояния включен режим ДИН (динамический ввод), то перед абсолютными координатами необходимо указывать символ #</td></tr>
<tr><td colspan="2">Относительные
(отсчет от последней введенной точки, первую точку задать НЕЛЬЗЯ)</td></tr>
<tr><td> 

@x,y
т.C: @0,-25</td><td> 

@R< φ
т.D: @30<180</td></tr>
</table>

2. Применение режимов рисования таких, как **СЕТКА** и **ШАГ**, **ОРТО** или **ПОЛЯРНОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ**, **ОБЪЕКТНЫЕ ПРИВЯЗКИ**.
Соответствующие кнопки находятся на строке состояния.

Кнопка режима **СЕТКА (F7)** позволяет включать или выключать отображаемую на экране сетку из линий с настраиваемым шагом. Эта видимая сетка может не совпадать с невидимой сеткой, используемой в режиме **ШАГ**.

Кнопка режима **ШАГ (F9)** дает возможность включать или выключать шаговую привязку к точкам невидимой сетки с определенным настраиваемым шагом (перемещение курсора тогда осуществляется не непрерывно, а только по узлам этой сетки) или полярную привязку (в этом случае, при включении **ПОЛЯРНОГО ОТСЛЕЖИ-ВАНИЯ,** движение курсора вблизи заданных углов осуществляется с заданными направлением и шагом).

Кнопка **ОРТО (F8)** включает и выключает режим ортогональности (курсор перемещается вертикально и горизонтально).

Кнопка режима **ПОЛЯРНОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ (F10)** является расширением режима ОРТО на углы с некоторым настраиваемым шагом.

Кнопка режима **ПРИВЯЗКА (F3)** позволяет включить или выключить постоянное действие объектных привязок (привязок к характерным точкам существующего объекта).

3. Быстрый метод «**Направление + расстояние**». Направление фиксируется с помощью одного из режимов **ОРТО** или **ПОЛЯРНОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ**, а расстояние задается с клавиатуры без символа @.

Любое изображение создается с помощью базового набора графических примитивов. К наиболее часто используемым примитивам относятся **ОТРЕЗОК (LINE)**, **ОКРУЖНОСТЬ (CIRCLE)**, **ДУГА (ARC)**, **ПОЛИЛИНИЯ (POLYLINE)** и т.д.

При выполнении задания важную роль играют команды редактирования:

- Для четкой разметки элементов изображения целесообразно использовать команду **ПОДОБИЕ (OFFSET)** позволяющую создавать параллельные отрезки и полилинии, концентрические дуги и окружности, подобные существующим и отстоящие от исходных на заданное расстояние.
- При наличии симметрии достаточно построить половину изображения и отобразить с помощью команды **ЗЕРКАЛО (MIRROR)** относительно заданной оси, которая определяется двумя точками.

- Повторяющиеся объекты размножить командами **КОПИРОВАТЬ** (**COPY)** или **МАССИВ (ARRAY).**
- Для построения фасок и сопряжений применить команду **ФАСКА (CHAMFER)** и **СОПРЯЖЕНИЕ (FILLET).**
- Для удаления части объекта использовать команду **ОБРЕЗАТЬ (TRIM),** которая удаляет объект с помощью пересекающих его других объектов (режущих кромок) или команда **РАЗОРВАТЬ (BREAK),** позволяющий удалить части примитива в 2х указанных точках.
- После завершения всех построений необходимо выполнить компоновку изображений внутри выбранного формата. Для этого применяется команда **ПЕРЕНЕСТИ (MOVE)** и при необходимости **МАСШТАБ (SCALE).**

Завершающий этап – простановка размеров и выполнения текстовых надписей. Предварительно необходимо настроить текстовый и размерный стили в соответствии с ЕСКД.

3. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ 2D ЧЕРТЕЖА

Порядок построения чертежа рассмотрим на примере варианта 13

1. Запустить AutoCAD. Создать новый файл-чертеж на основе шаблона **Acadiso.dwt** (папка *Template*) с именем соответствующим названию детали. Файл сохранить в предварительно созданной папке, названной по фамилии студента в папке *Мои документы*. Например:*Основание.dwg/Иванов_ЭЭТ/Мои документы*
2. Настройки и рабочая среда чертежа
Выбранный шаблон позволит сэкономить время на настройку единиц измерения и лимитов (границ) чертежа. Шаблон **Acadiso.dwt** уже имеет необходимые настройки: метрические единицы и границы 420х297мм.
3. Настроить интервал видимой сетки -10 мм, интервал шаговой привязки - 5мм. Диалоговое окно **Режимы рисования** (рис 1) можно вызвать, щелкнув правой кнопкой мыши на одной из кнопок соответствующих режимов, например, **ШАГ.** После настройки параметров шага и сетки перейти на вкладку **Объектная привязка** и выбрать следующие привязки: кон. точка; точка пересечения ; центр; касательная.

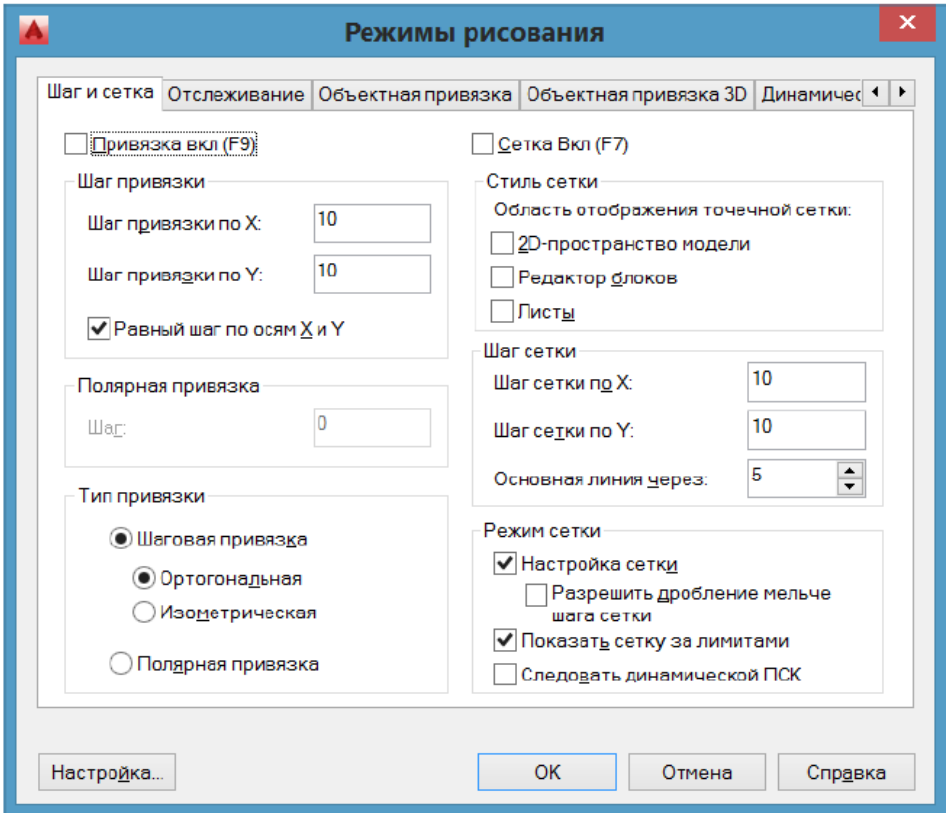


Рис.1

4. Создать слои. Открыть диалоговое окно **Диспетчер свойств слоев,** рис.2 (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Слои** → **),** выбрать команду **СОЗДАТЬ СЛОЙ**

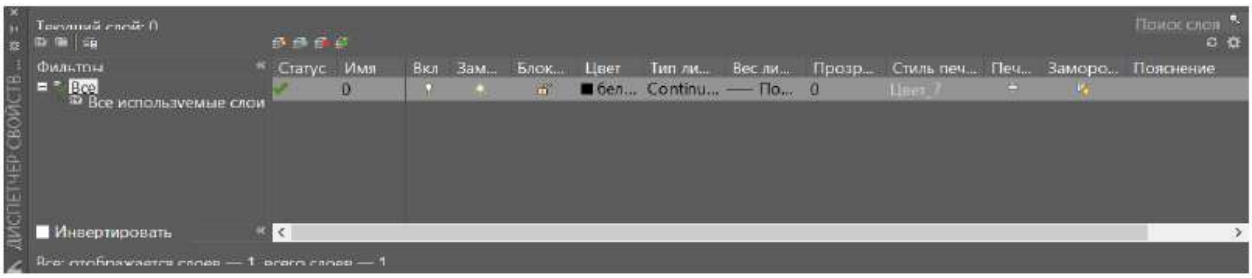


Рис.2

Название	Цвет	Тип линии	Вес (толщина) линии, мм
Слой ***Оси***	красный	штрихпунктирная	0.15
Слой ***Черновик***	зеленый	сплошная	0.15
Слой ***Контур***	белый или черный (контрастный по отношению к фону в окне чертежа)	сплошная	0.5
Слой ***Штриховка***	синий	сплошная	0.15
Слой ***Размеры***	синий	сплошная	0.15
Слой ***Рамка***	белый или черный	сплошная	0.15

*Обратите внимание на свойства объекта (примитива): цвет, тип и толщина линий должны быть настроены «по слою» (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Свойства**). Толщина линий отображается при включенном режиме **отображение/скрытие веса линий**

5. Сделать текущим слой «Оси».

Проведем осевые и центровые линия вида сверху с которого удобнее начать построение .

Команда **ОТРЕЗОК** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование**): построить горизонтальную линию от т.1 (50;100) длиной 220 мм (т.2). Вертикальную линию от т.3 (85,50) длиной 108мм (т.4), рис.3.

Проведем с помощью команды **ПОДОБИЕ** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Редактирование**) вторую вертикальную линию на расстояние 110 мм справа от первой, рис.3.

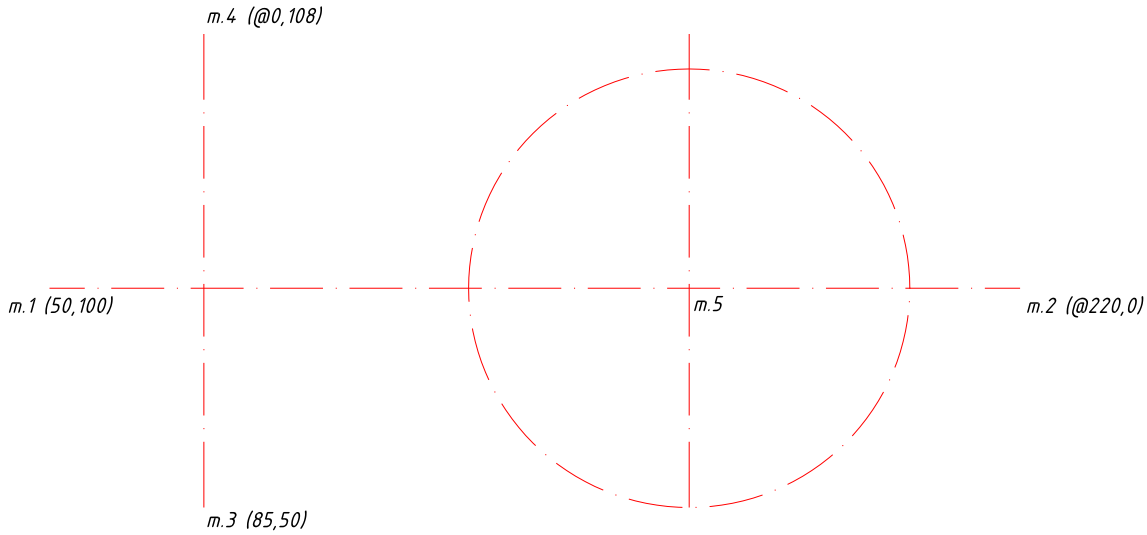


Рис. 3

Построить окружность (команда **ОКРУЖНОСТЬ** **- Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование**) с центром в т.5 ,которая выбрана с помощью объектной привязки пересечение, и R 50.

6. Текущий слой «Контур»

Построить 4 окружности, см рис.4:

- окружность O_1, R70
- окружность O_2, R10
- окружность O_3, R16
- окружность O_3, R32

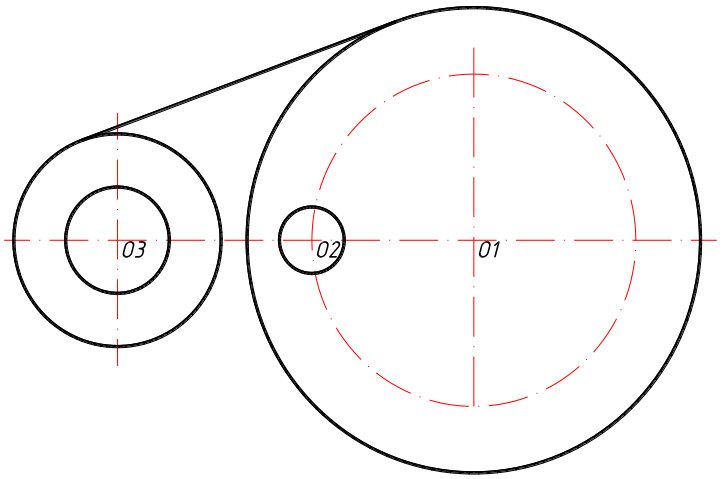


Рис. 4

Провести внешнюю касательную к окружности (O_3, R32) и окружности (O_1, R70):

Команда **ОТРЕЗОК:**

от точки : указать т-ку на окружности задающую первую касательную (объект. привязка «кас» включена)

След. точка: указать точку на другой окружности, задающий вторую касательную рис.4.

Зеркально отобразить построенный отрезок. Команда **ЗЕРКАЛО** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Редактирование**):

Выбрать отрезок, подтвердить выбор (клавиша «Enter»).

Указать с помощью объектной привязки пересечение т. O_1 и O_3. Исходный объект не удалять.

Удалить часть окружности (O_3, R32) между касательными. Команда **ОБРЕЗАТЬ** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Редактирование**): сначала указать «режущие кромки» - все касательные, подтвердить выбор нажатием клавиши «Enter».В ответ на следующий запрос необходимо выбрать ту часть окружности, которую надо удалить. Результат см. на рис. 5.

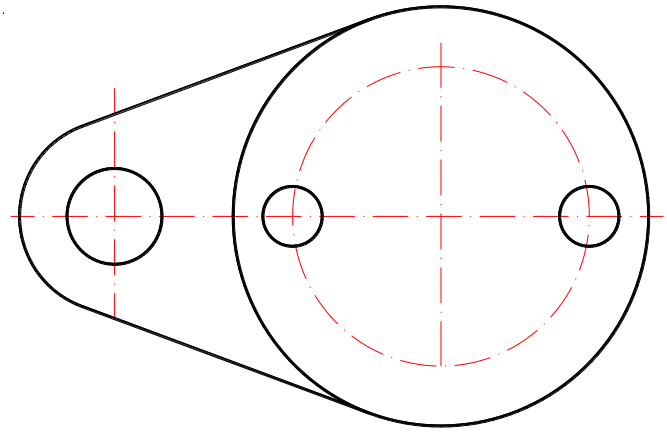


Рис. 5.

Скопировать окружность R=10. Команда **КОПИРОВАТЬ** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Редактирование**): позволяет выбрать выбранные объекты параллельно вектору переноса, который задается начальной и конечной точкой.

7. Текущий слой «Черновик», на котором нужно выполнить вспомогательные построения для отверстия со шпоночным пазом и ребра жесткости. Построить окружность с центром O_1 и R=30. Наметить ширину и глубину шпоночного паза.

Команда **ПОДОБИЕ**: величина смещения 8 мм, выбрать вертикальную центровую линию, указать произвольную точку сначала справа, затем слева от этой линии.

Команда **ПОДОБИЕ:** величина смещения 36 мм, выбрать горизонтальную штрих пунктирную линию, указать точку ниже исходной линии, (рис 6).

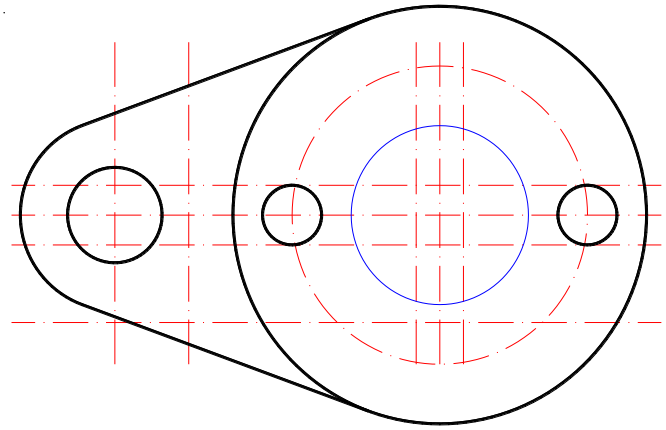


Рис. 6

Толщину и длину ребра жесткости так же наметить с помощью команды **ПОДОБИЕ** в соответствии с размерами элемента, заданными на исходном чертеже (см. задание).

Все полученные, в результате выполнения этой команды, линии находятся на слое «оси», так же как и исходный объект.

Чтобы перенести эти линии на слой «Черновик», необходимо выбрать линии и изменить слой на ленте меню или в окне свойства.

8. Текущий слой «Контур»

Произвести чистовую обводку контуров отверстия со шпоночным пазом. Используя команду **ПОЛИЛИНИЯ** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование**): построить линейные и дуговые сегменты, точки задать с помощью объектной привязки **пересечение**. Обводку дуги удобнее выполнить против часовой стрелки. Контур ребра жесткости так же выполнить командой **ПОЛИЛИНИЯ**, рис. 7.

9. На месте главного вида необходимо построить фронтальный разрез.

Текущий слой «черновик».

Наметить длину с помощью линий проекционной связи. Построить вертикальные линии: от точки – указать первую точку с помощью объектной привязки **пересечение** на виде сверху; вторая точка – указать курсором при включенном режиме **Орто**, либо задать через относительные координаты (длина 210 мм), рис. 8.

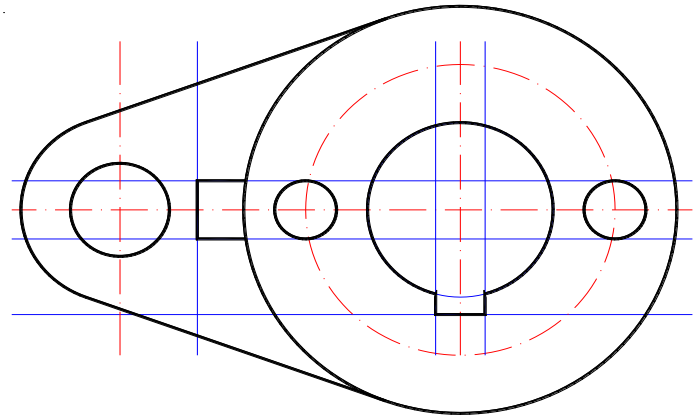


Рис.7

Разметку по высоте удобно выполнить с помощью команды **ПОДОБИЕ**. Выбрать горизонтальную осевую линию и построить подобную ей на расстоянии 130мм к верху от исходной. Построить еще две параллельные линии на расстоянии соответственно 30 и 50 мм к верху от предыдущей. Все три построенные линии перенести на слой «Черновик», рис.8.

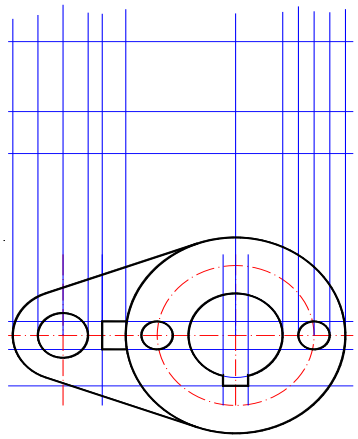


Рис.8

10. Текущий слой «Контур».
Командой **ПОЛИЛИНИЯ** выполнить:

-обводку внешнего контура, указав точки с помощью объектной привязки **пересечение**;

-ребра жесткости;

-обвести очерковые образующие отверстий в основании и цилиндрической части. Для построения отверстий в цилиндрической части рекомендуется использовать команду **ЗЕРКАЛО**, рис.9.

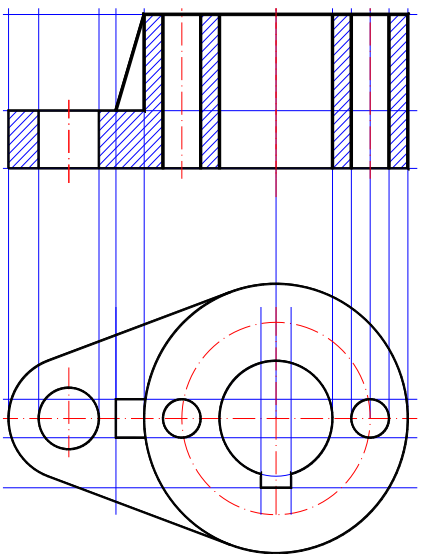


Рис.9

11. Текущий слой «Штриховка».

Команда **ШТРИХОВКА** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование**): выбрать образец ANSI и указать по одной точке внутри каждой из замкнутых областей, подлежащих штриховке, рис. 10.

12. Текущий слой «Оси».

Командой **ОТРЕЗОК** провести осевые линии поверх линий проекционной связи, выходя за контур на 3-5 мм, рис. 10.

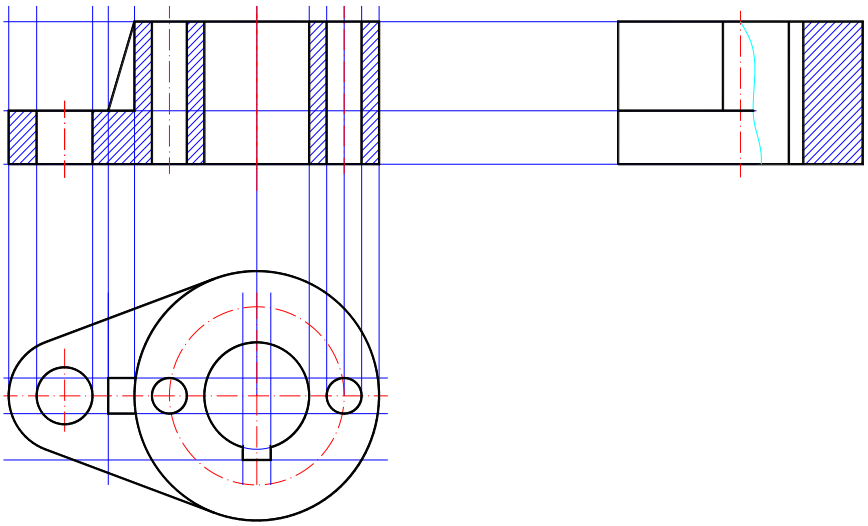


Рис. 10.

13. Строим вид слева, используя местный разрез для выявления шпоночного паза.
Текущий слой «Черновик».

Наметить высоту элементов с помощью линий проекционной связи.

Команда **ОТРЕЗОК**: провести три горизонтальные линии (рис. 10), длиной примерно 250мм.

Для разбивке по ширине применить команду **ПОДОБИЕ.**

Дальнейшие построения выполнить самостоятельно по вышеописанной схеме (см. построение фронтального разреза).

Разграничить вид и разрез сплошной волнистой линией. Так как это линия сплошная тонкая выполнить ее можно на слое «Штриховка» командой **СПЛАЙН** (**Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование**).

14. Оформить 2D чертеж возможно как в пространстве листа, так и в пространстве модели. В целях облегчения усвоения материала выберем второй вариант.
Для оформления чертежа необходима рамка формата А3 с основной надписью формы1. Если готовая рамка с основной надписью есть, то вставить ее в текущий файл можно через буфер обмена или как внешний блок.

Чтобы вычертить рамку надо сделать текущим слой «Рамка». Толщина линий на этом слое равна 0.2 мм, толщину основных линий зададим командой **ПОЛИЛИНИЯ.**

С помощью команды **ПРЯМОУГОЛЬНИК** **(Лента:** вкладка **Главная** → панель **Рисование)** наметим границы формата (первый угол:0, 0; второй угол:420, 297)

Команда **ПОЛИЛИНИЯ.** Задать координаты первой точки рамки: 20,5; затем перейти на опцию **ширина** и задать начальную ширину:0.6; конечную ширину: 0.6. После указания ширины нужно указать координаты 2-й точки: @395,0;

координаты 3-й точки: @0,287;

координаты 4-й точки: @-395,0

и перейти на опцию **замкни.**

Основная надпись содержит линии различной толщины. Сначала вычертить границы рамки тонкими линиями.

Команда **ОТРЕЗОК.** Начертить последовательно вертикальный и горизонтальный отрезки

от точки: 215,50

до точки:@0,55

до точки:@185,0

Размножить построенные линии командой **ПОДОБИЕ,** удалить лишние фрагменты командой **ОБРЕЗАТЬ** и выполнить обводку основных толстых линий командой **ПОЛИЛИНИЯ** (рис. 11)

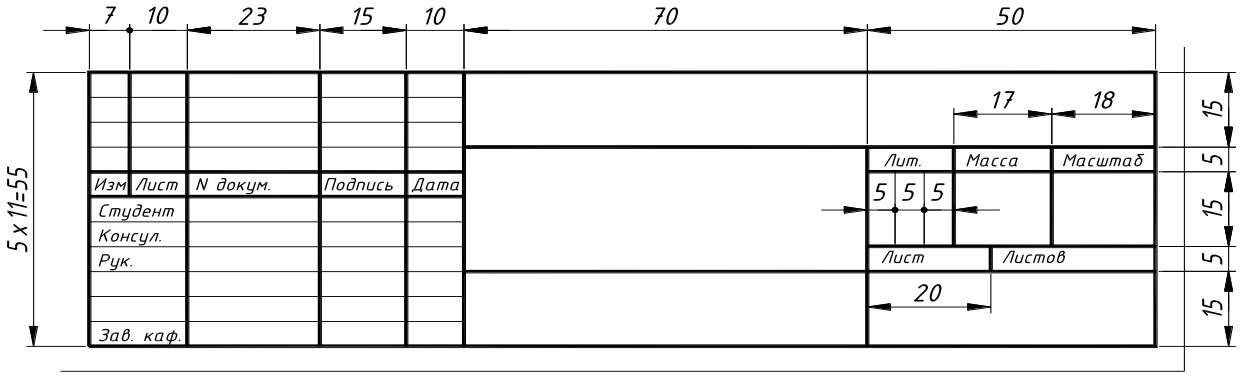


Рис.11.

Перед заполнением основной надписи необходимо настроить стиль текста. Диалоговое окно «Стиль текста» можно открыть через **Ленту:** вкладка **Главная** → панель **Аннотации** → **.** Это окно позволяет редактировать текущий или создать новый текстовый стиль, который определяется выбором шрифта *isocpeur*, наиболее соответствующего ЕСКД, высотой букв (в окне высоту задать о), углом наклона 15 градусов от вертикали.

Надписи выполнять командой **ТЕКСТ (Лента:** вкладка **Главная**→панель **Аннотации▼**→) высотой 2,5; 7; 5мм, высоту удобнее менять непосредственно в команде **ТЕКСТ.**

Компоновка чертежа. Изображения должны отстоять друг от друга, а также от рамки чертежа примерно на одинаковое расстояние по вертикали и горизонтали. Расстояния должны быть достаточными для простановки размеров и обозначений. Передвинуть изображения, при необходимости, позволяет команда **ПЕРЕМЕСТИТЬ,** уменьшить или увеличить команда **МАСШТАБ.** В нашем случае воспользуемся командой **МАСШТАБ** **(Лента:** вкладка **Главная →** панель **Редактирование)** и уменьшим изображения в 2 раза. После выбора объектов, указать базовую точку (точка, не меняющая своего положения, после масштабирования)

Простановка размеров. Размеры представляют собой сложные примитивы, состоящие из размерных чисел (текстовая составляющая), выносных и размерных линий. По умолчанию AutoCAD создает ассоциативные размеры, то есть зависимые от объектов, к которым они привязаны. Это означает, что при редактировании основного объекта будут автоматически изменяться и связанные с ним размеры.

Перед простановкой размеров рекомендуется настроить размерный стиль соответствующий требованиям ЕСКД через диалоговое окно «Диспетчер размерных стилей» **(Лента:** вкладка **Главная →** панель **Аннотации▼ →** **.** В окне отображается список размерных стилей

текущего чертежа, текущий стиль выделен. Стиль определяет внешний вид размеров. Кнопка **Редактировать,** вызывает диалоговое окно **Изменение размерного стиля,** в котором производится изменение параметров стиля.

Вкладка **Текст** этого окна позволяет выбрать стиль и высоту текста (3,5 мм), ориентацию текста – согласно ИЗО.

Вкладка **Основные единицы** позволяет задать единицы измерения, точность и масштаб размерных чисел. В нашем примере масштаб равен **2!**

После настройки размерного стиля переходим непосредственно к простановке размеров.

Текущий слой «Размеры»

Проставим сначала высоту детали на главном виде. Команда **РЗМЛИНЕЙНЫЙ (Лента:** вкладка **Главная →** панель **Аннотации →** **):**

Начало первой выносной линии или<выбор объекта>: с помощью объектной привязки указать правую нижнюю точку на главном виде

Начало второй выносной линии: указать верхнюю правую точку

Положение размерной линии или [МТекст/Текст/Угол/Горизонтальный/Вертикальный/Повернутый]:требуется щелчком мыши указать точку на расстоянии не менее 10мм от крайней правой вертикальной контурной линии главного вида

Размерный текст<80>

По указанным на объекте точкам, система сама определяет какой тип размера (вертикальный, горизонтальный) необходимо проставить. Опции **МТекст** (многострочный текст**)** и **Текст** позволяют редактировать размерный текст. Можно полностью изменить текст или сохранить выведенное значение с помощью угловых скобок < > и добавить, когда необходимо, текст до или после скобок. Так для указания знака диаметра перед размерным числом указывают символы %%c, а для простановки угла в градусах - %%d.

Проставить все оставшиеся линейные размеры самостоятельно, рис.11.

Нанести радиальный размер – команда **РЗМРАДИУС (Лента:** вкладка **Главная →** панель **Аннотации →** **):**

Выберите дугу или круг: указать курсором дугу на виде сверху

Размерный текст <32>

Положение размерной линии или [МТекст/Текст/Угол]: указать точку местоположения размерной линии (она определяет внутри или снаружи будет расположен размер)

Обозначение фронтального разреза выполнить на слое «Размеры», используя команды **ПОЛИЛИНИЯ, ЗЕРКАЛО, ТЕКСТ,** самостоятельно, рис.12.

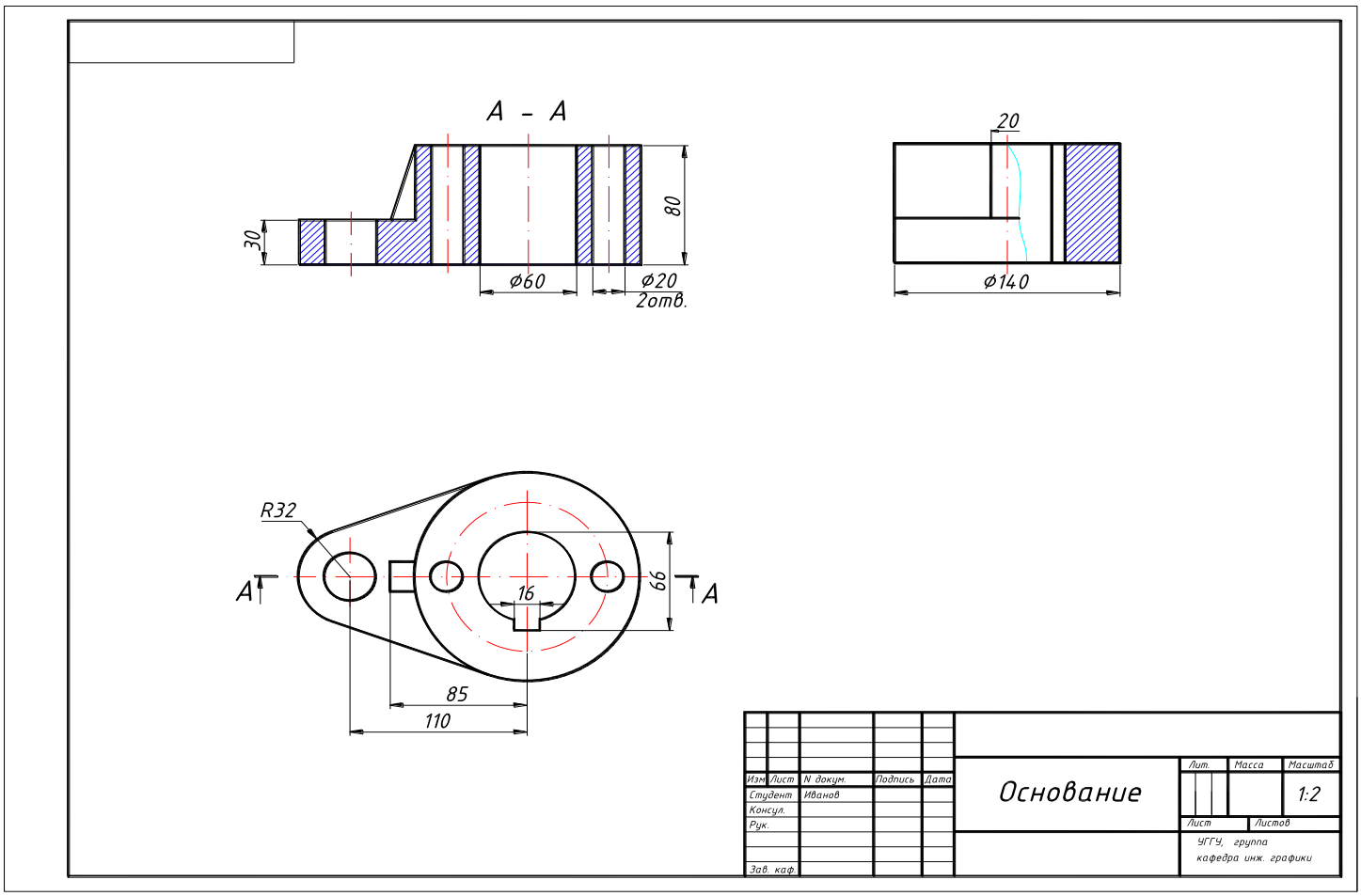
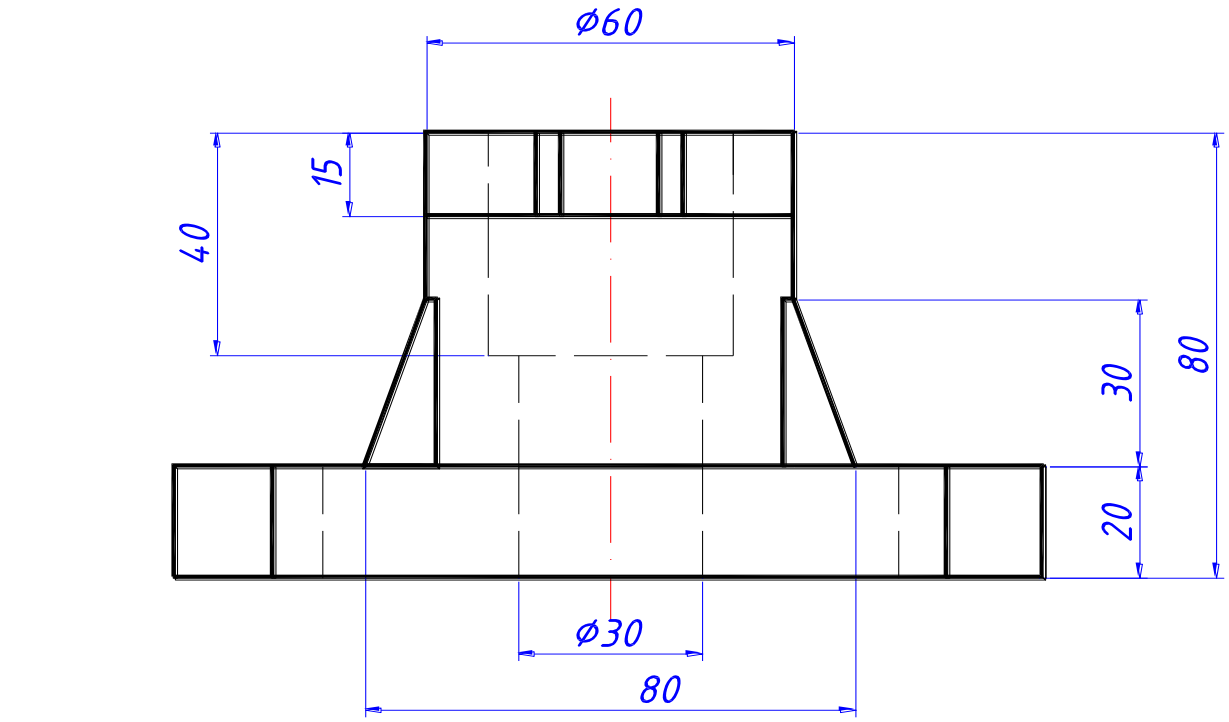
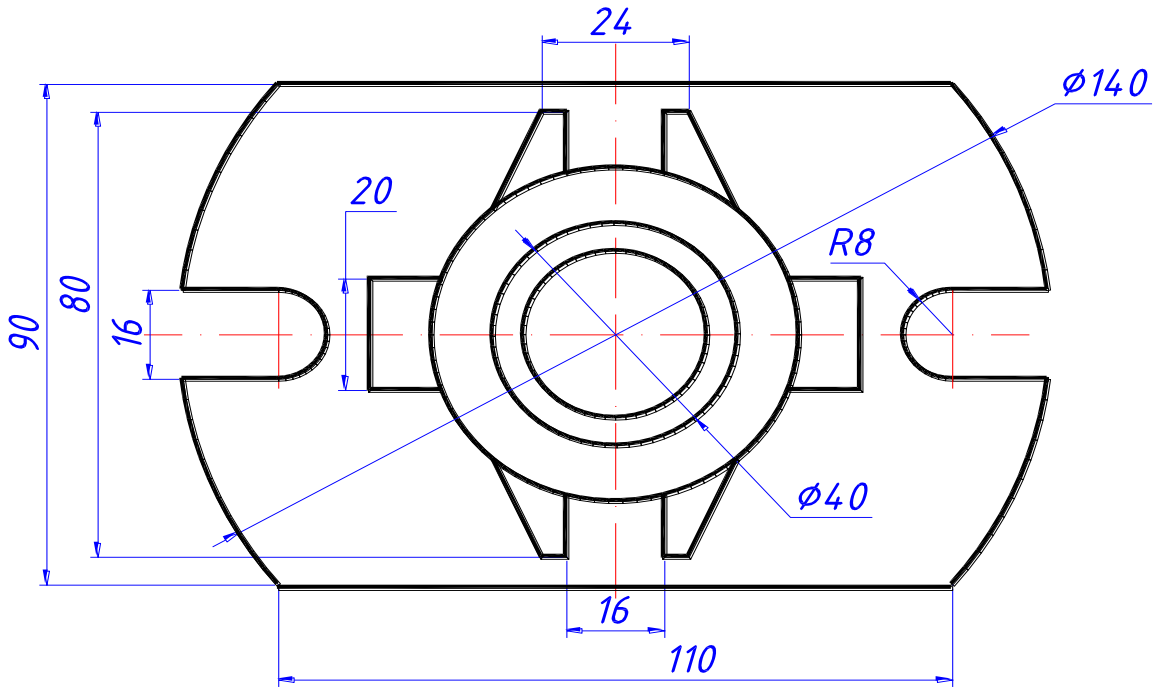

А - А
80
30
ø60
ø20
2отв.
20
ø140
R32
А
А
16
66
85
110
Изм. Лист N докум. Подпись Дата
Студент Иванов
Консул.
Рук.
Зав. каф.
Основание
Лит. Масса Масштаб
1:2
Лист Листов
УГГУ, группа
кафедра инж. графики

Рис.12

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

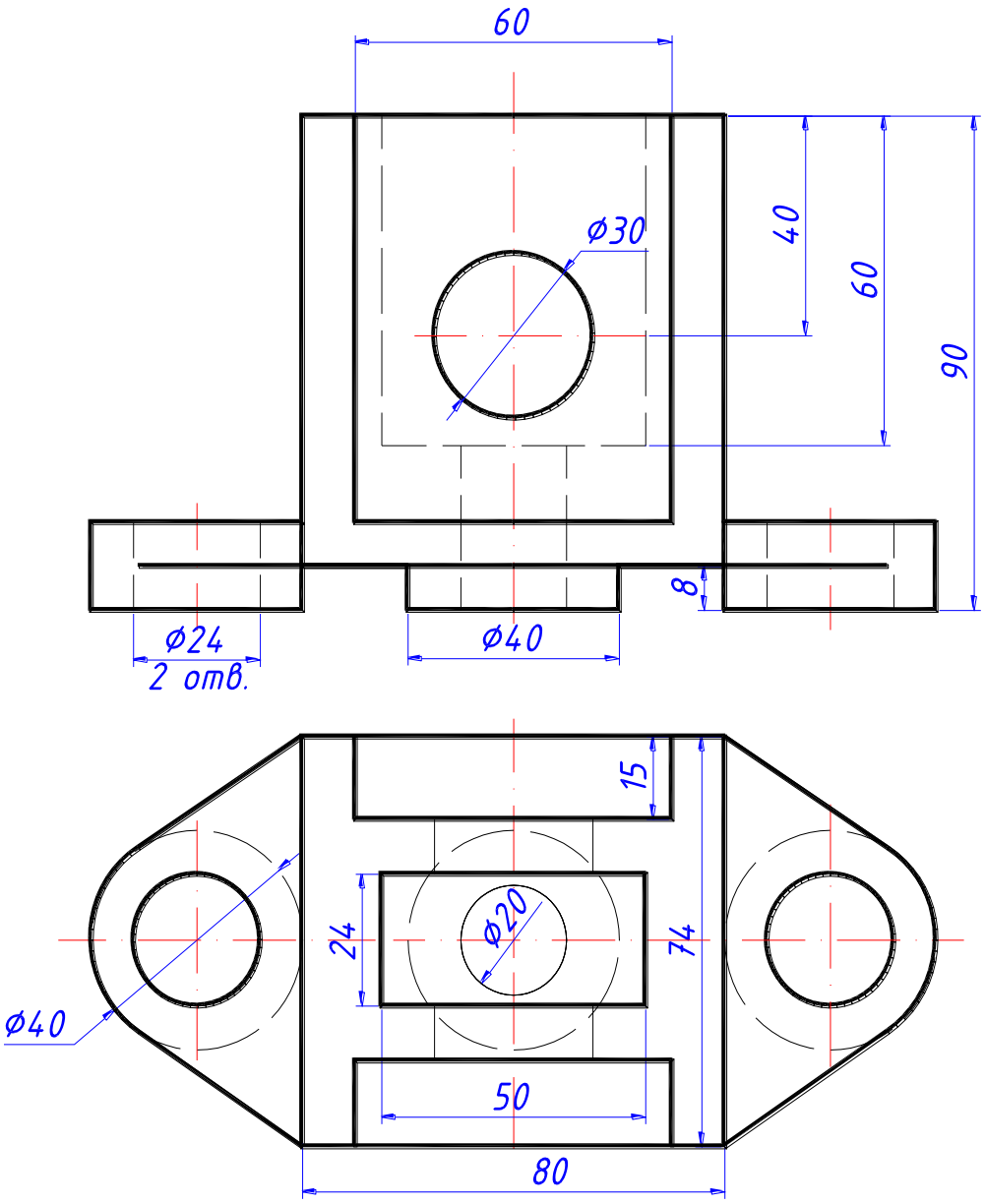
Вариант1





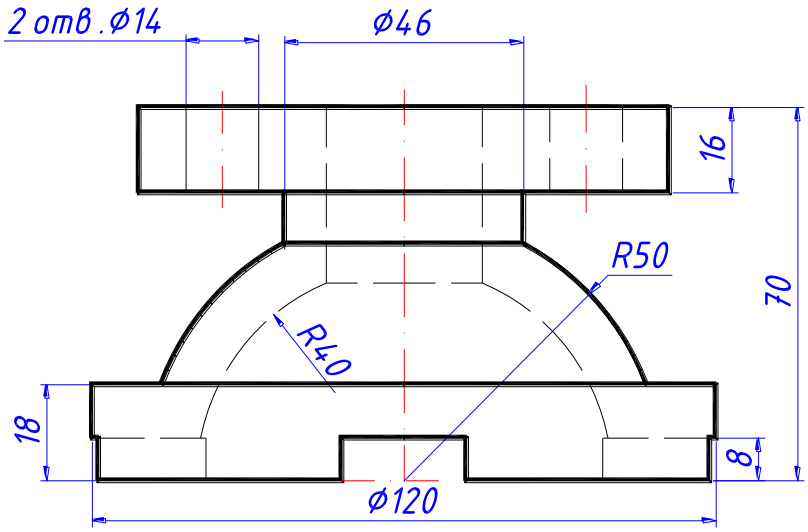
Корпус

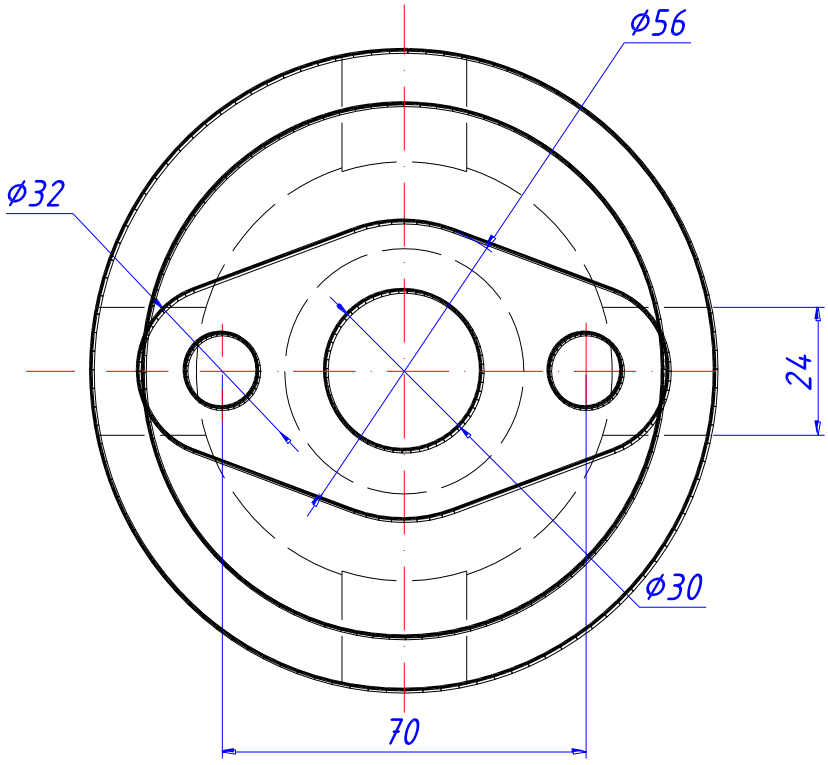
Вариант 2



Основание

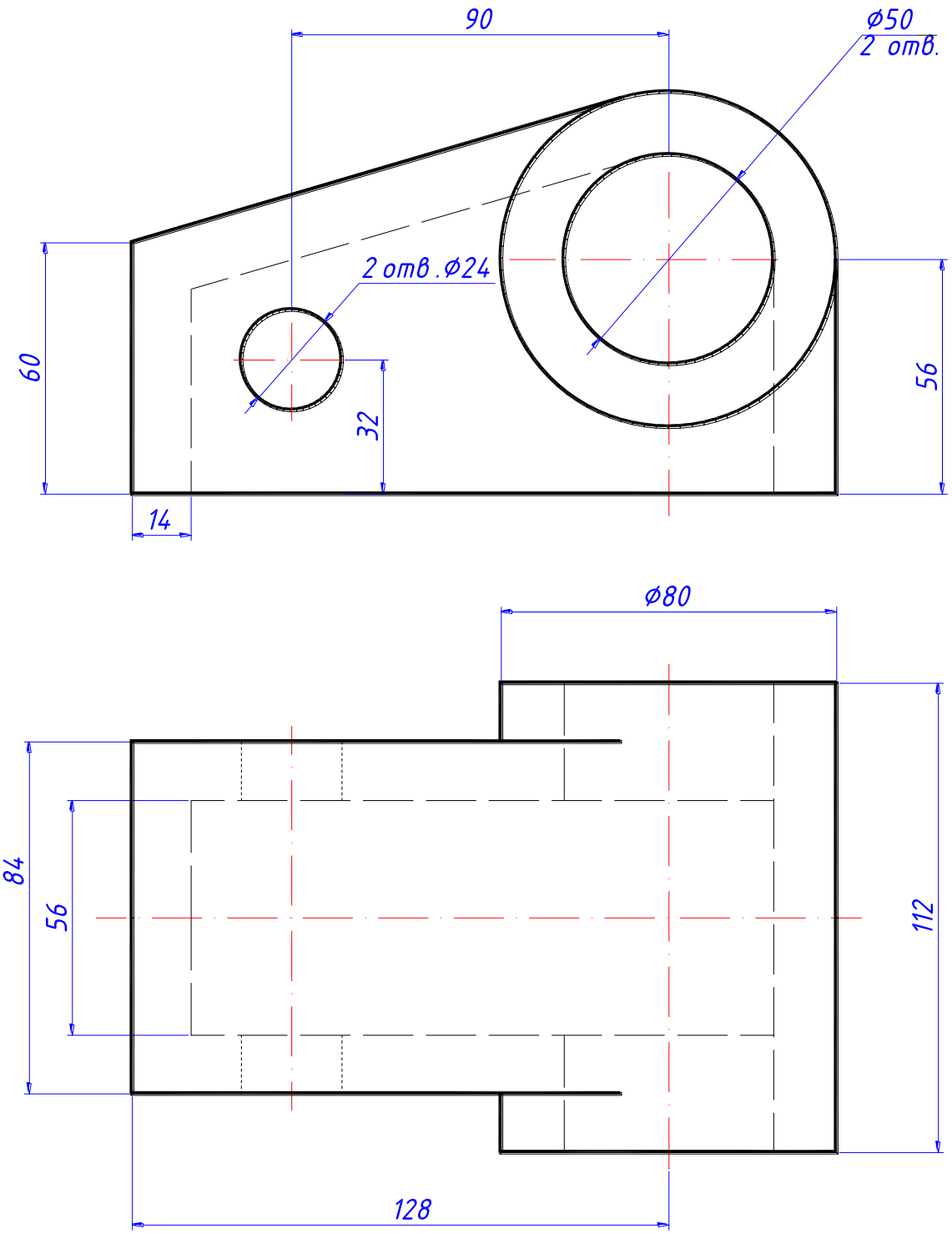
Вариант 3





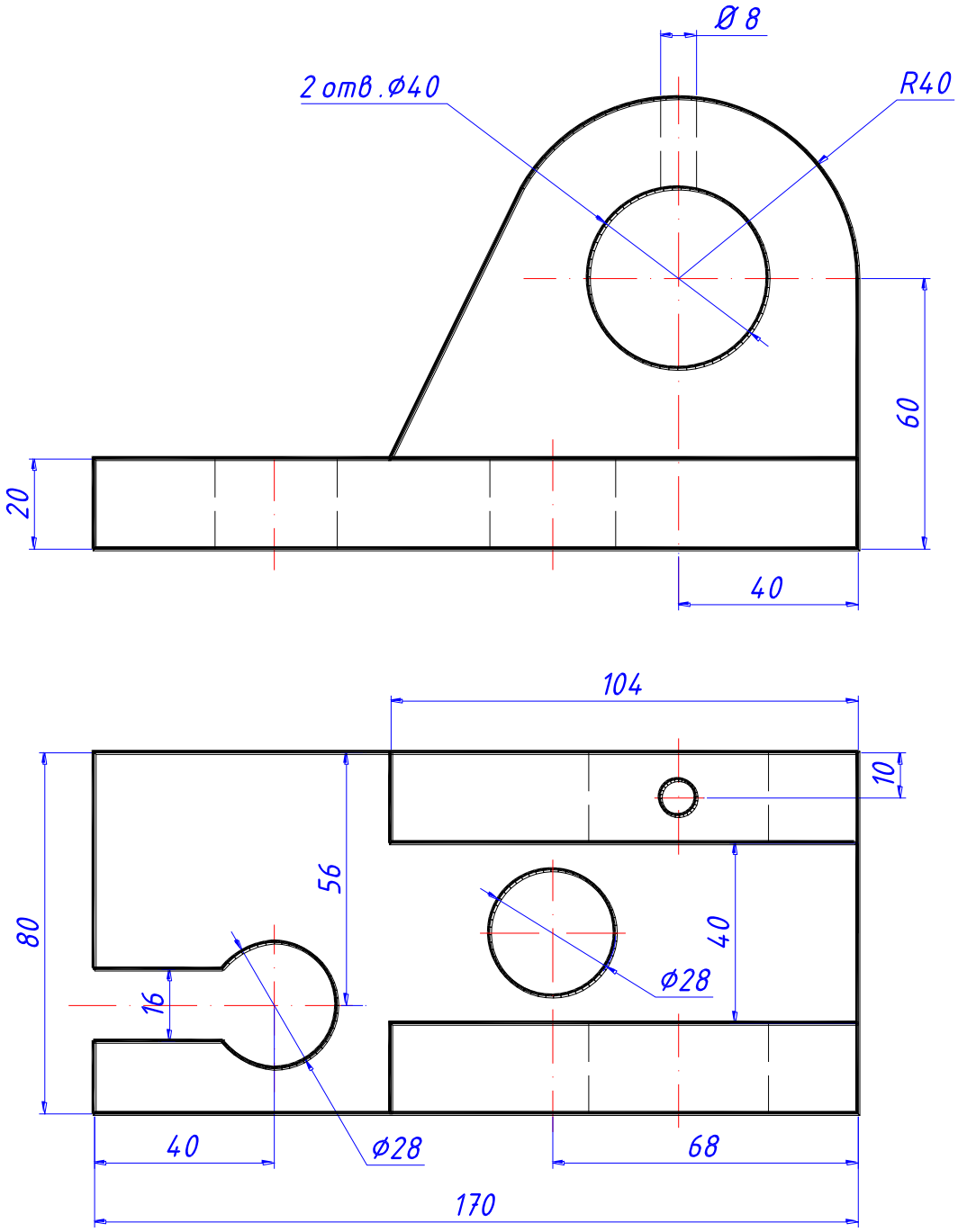
Крышка

Вариант 4



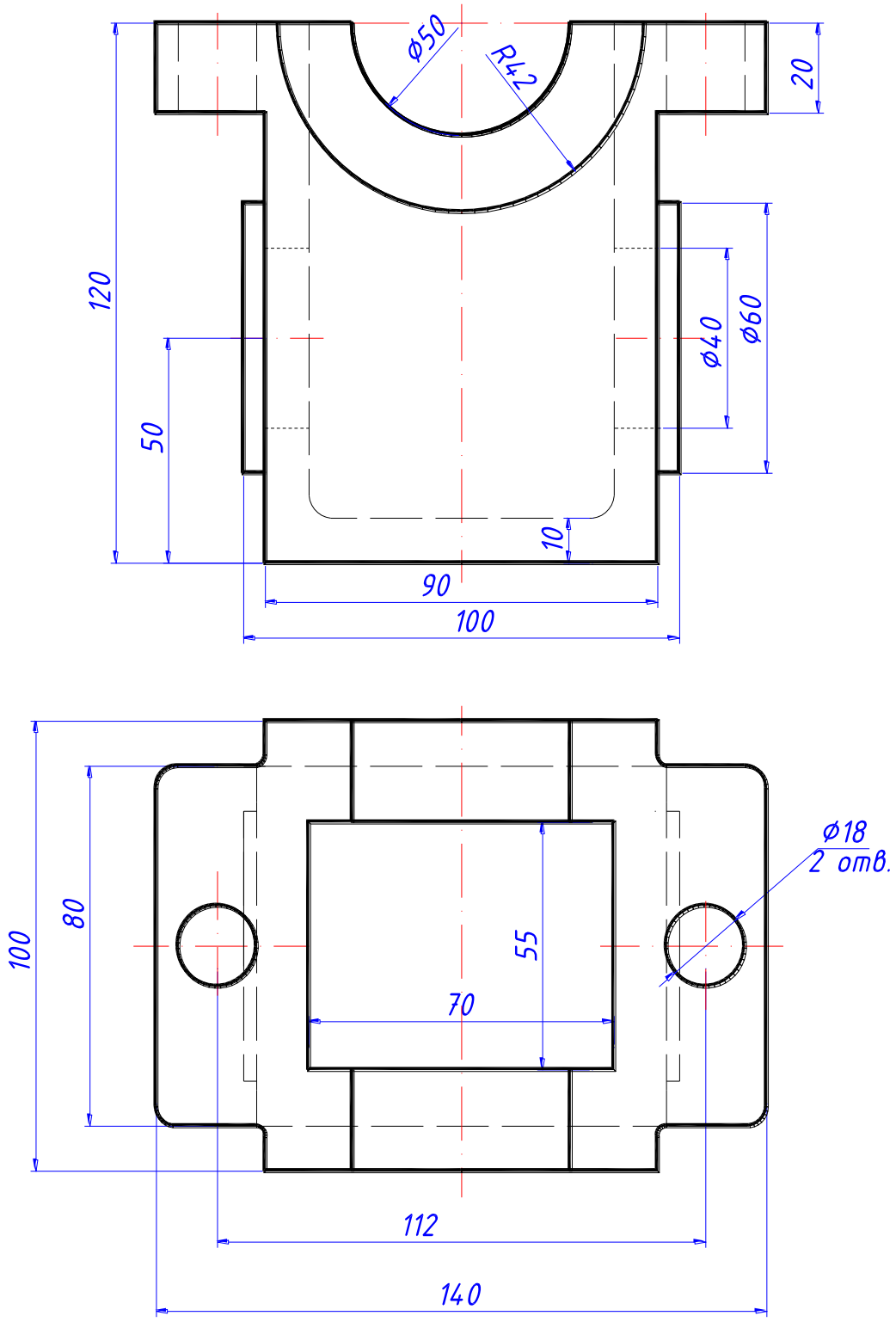
Кожух

Вариант 5



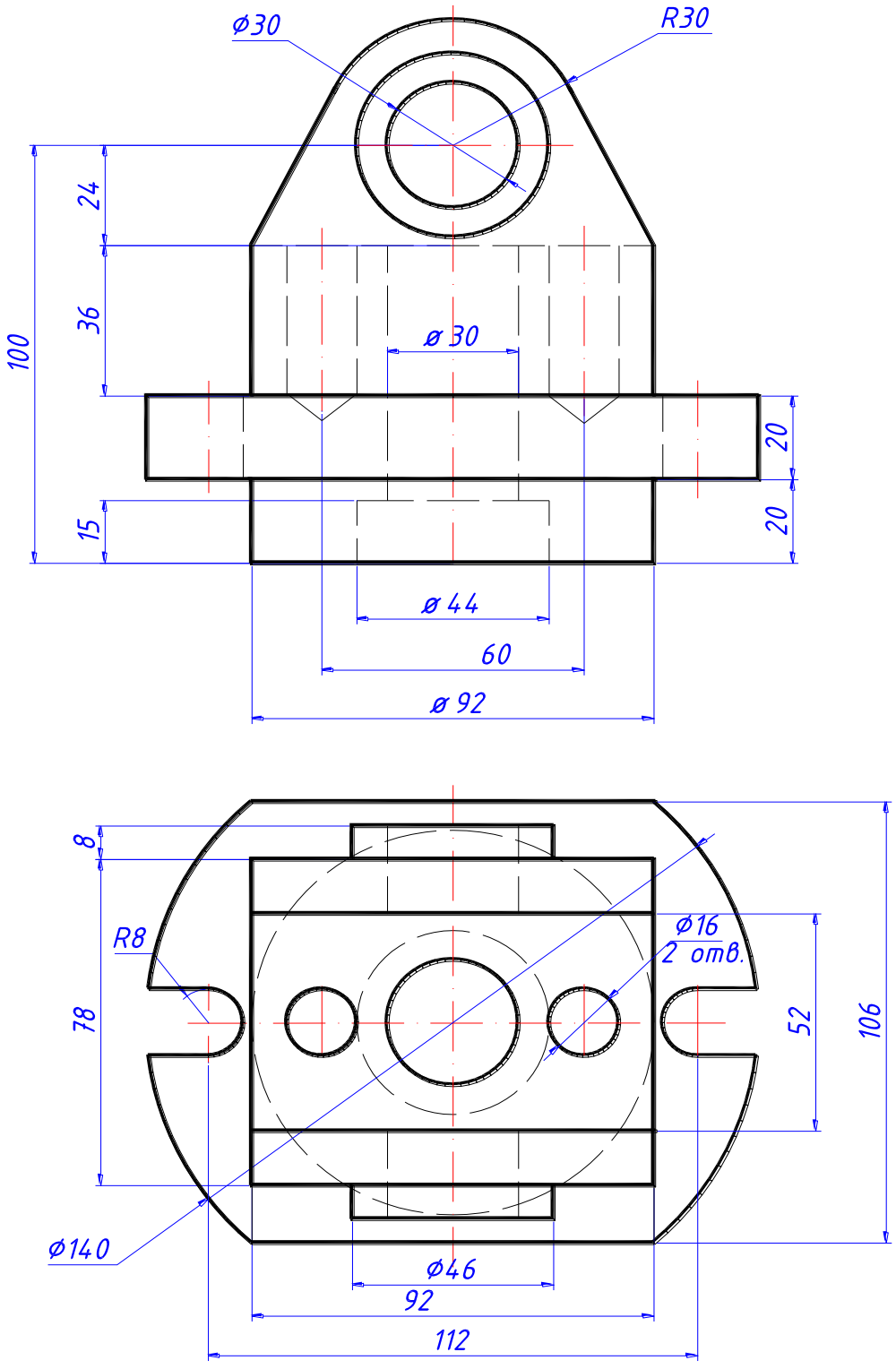
Проушина

Вариант 6



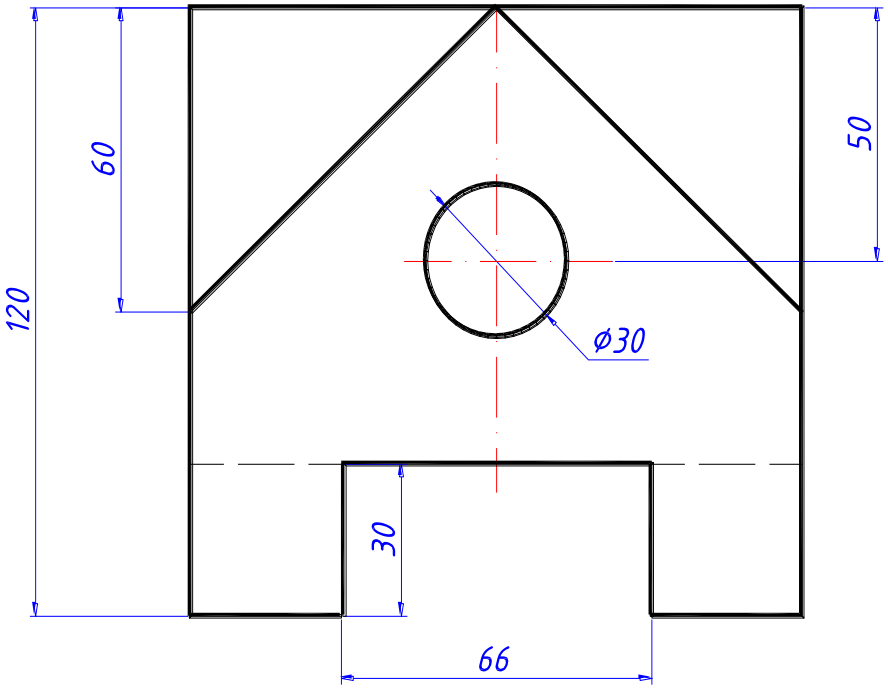
Корпус

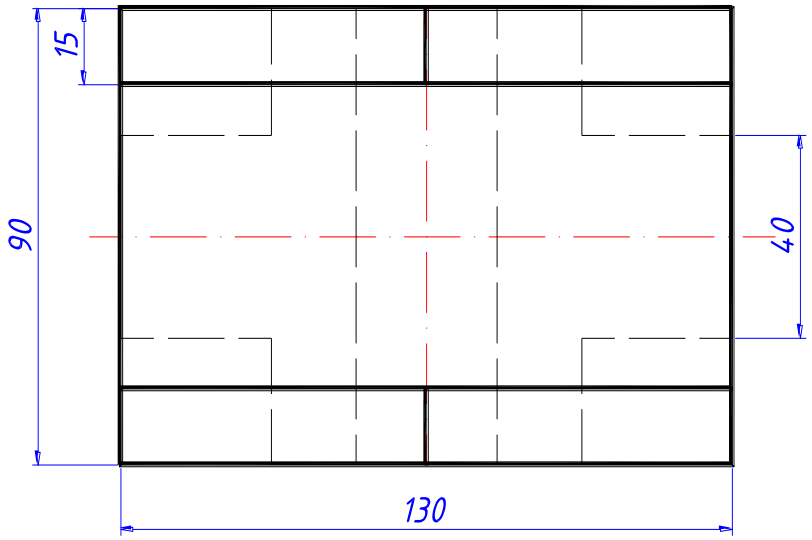
Вариант 7



Проушина

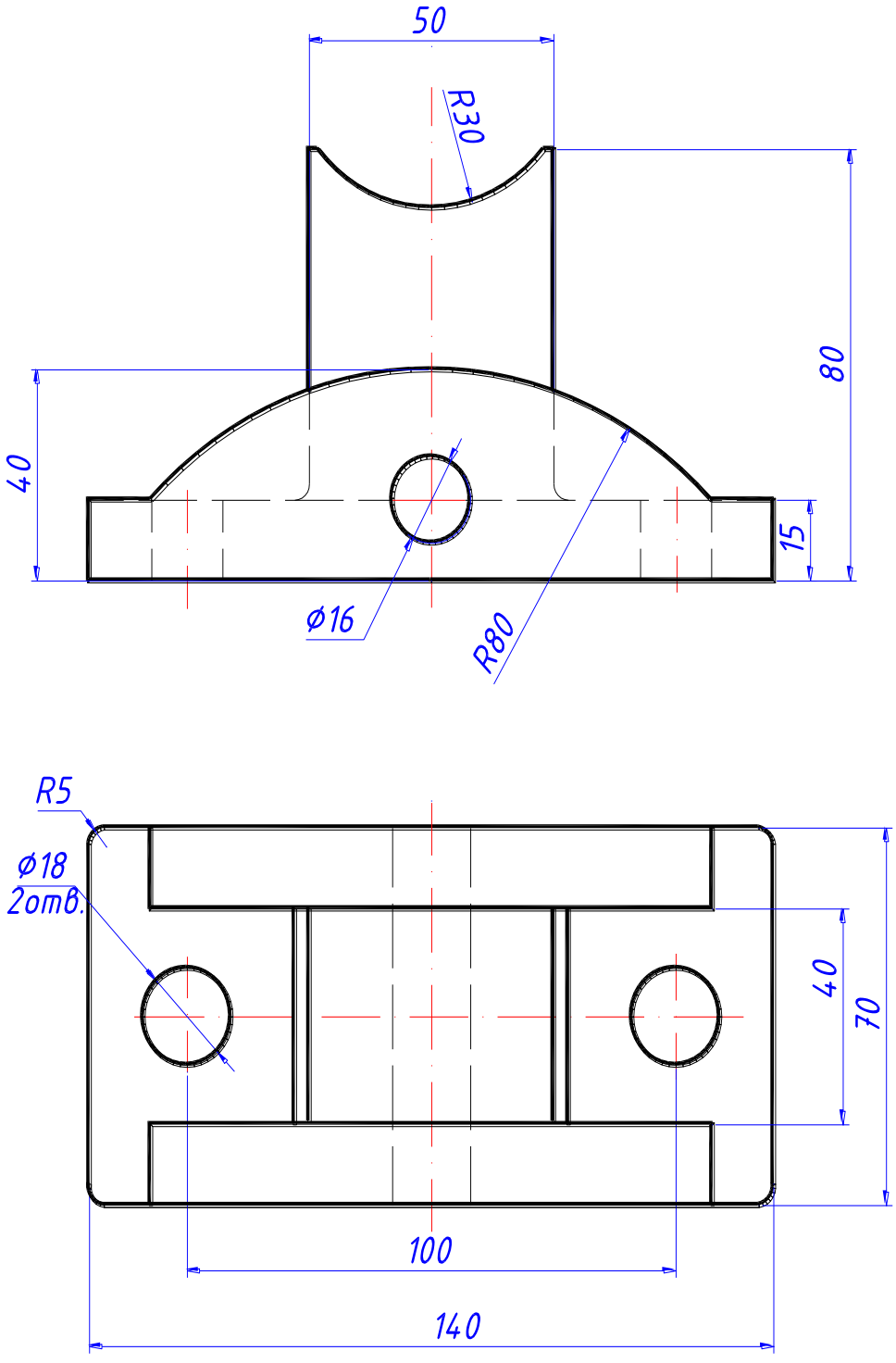
Вариант 8





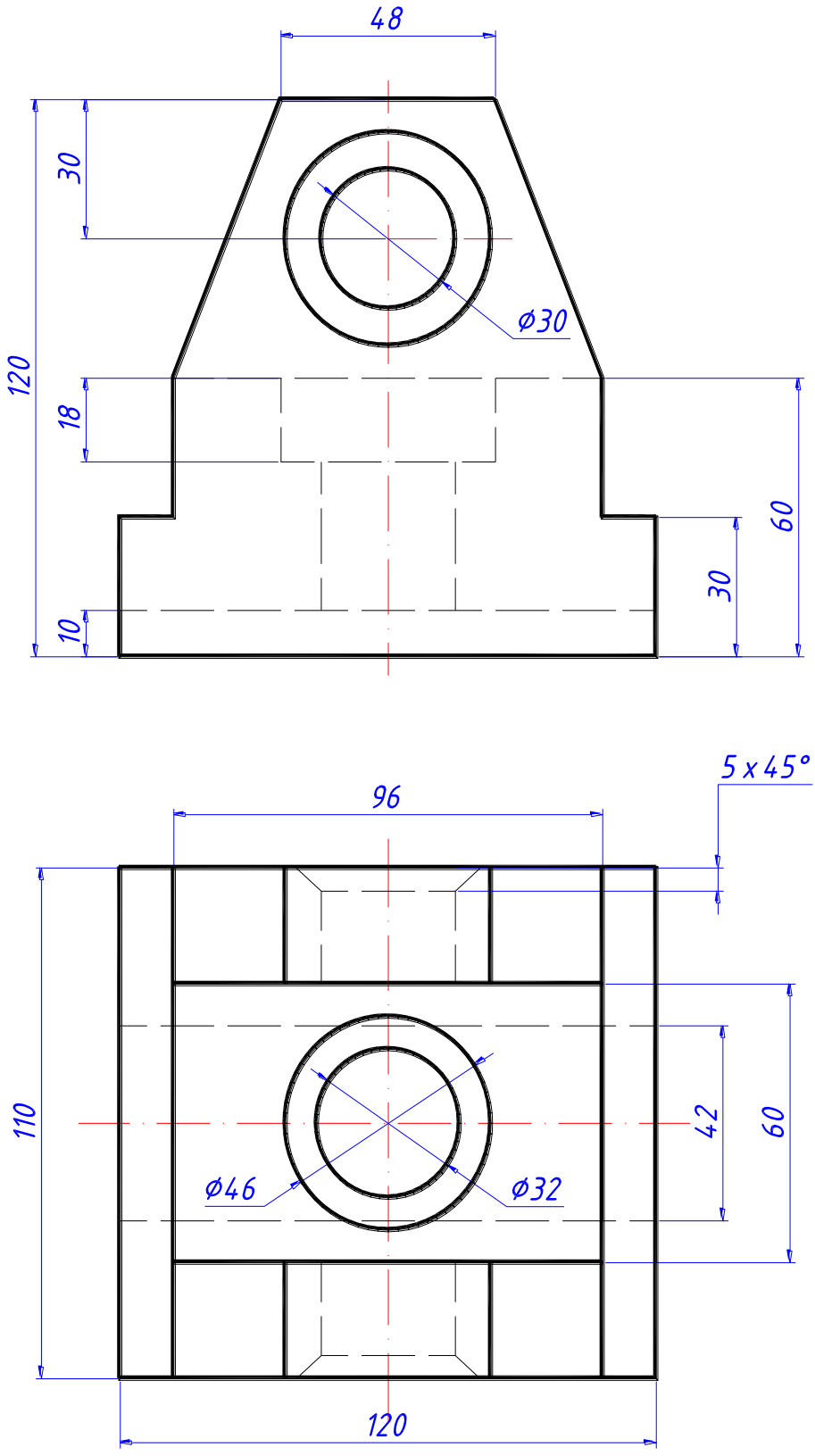
Колодка

Вариант 9



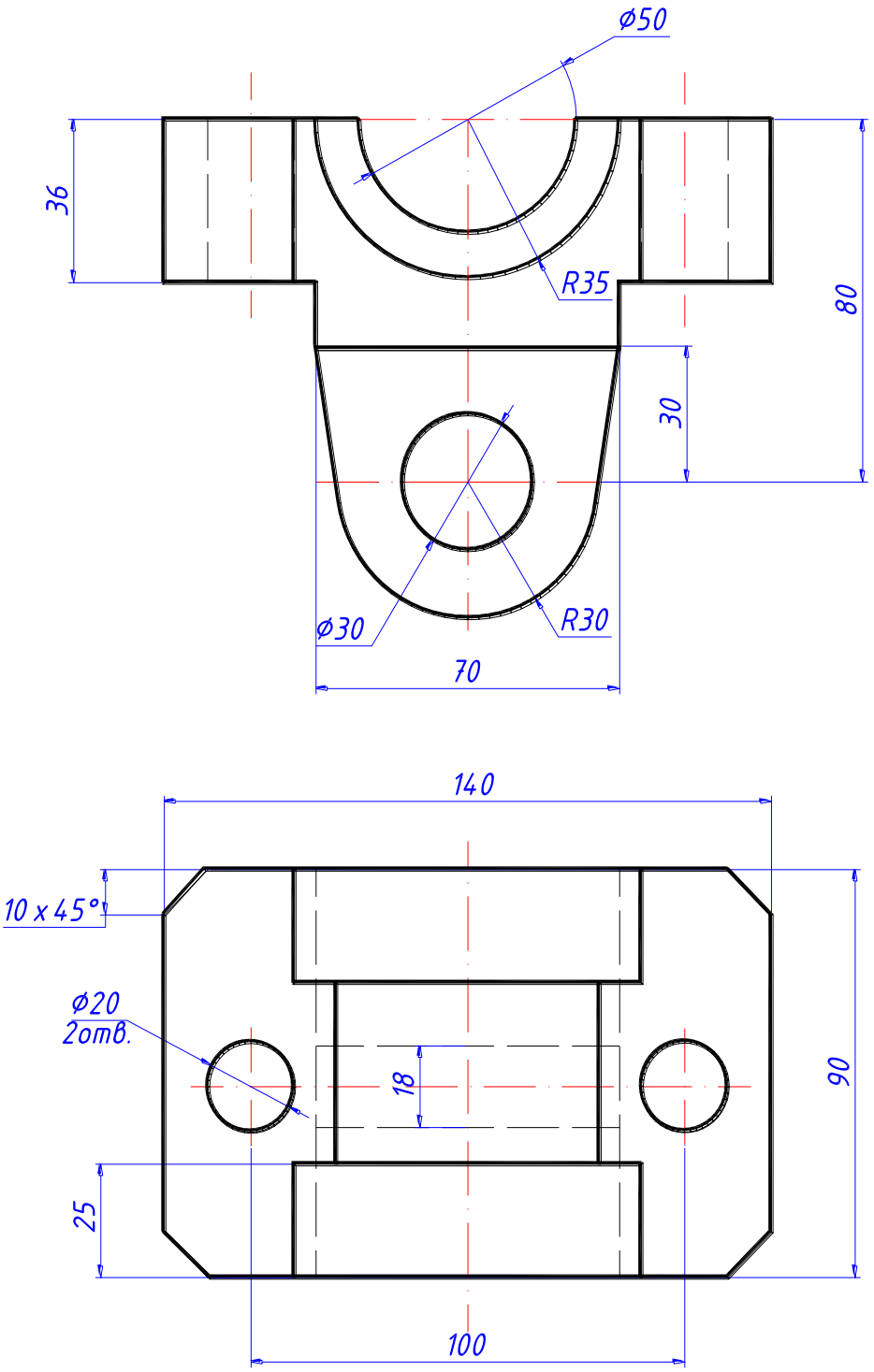
Опора

Вариант 10



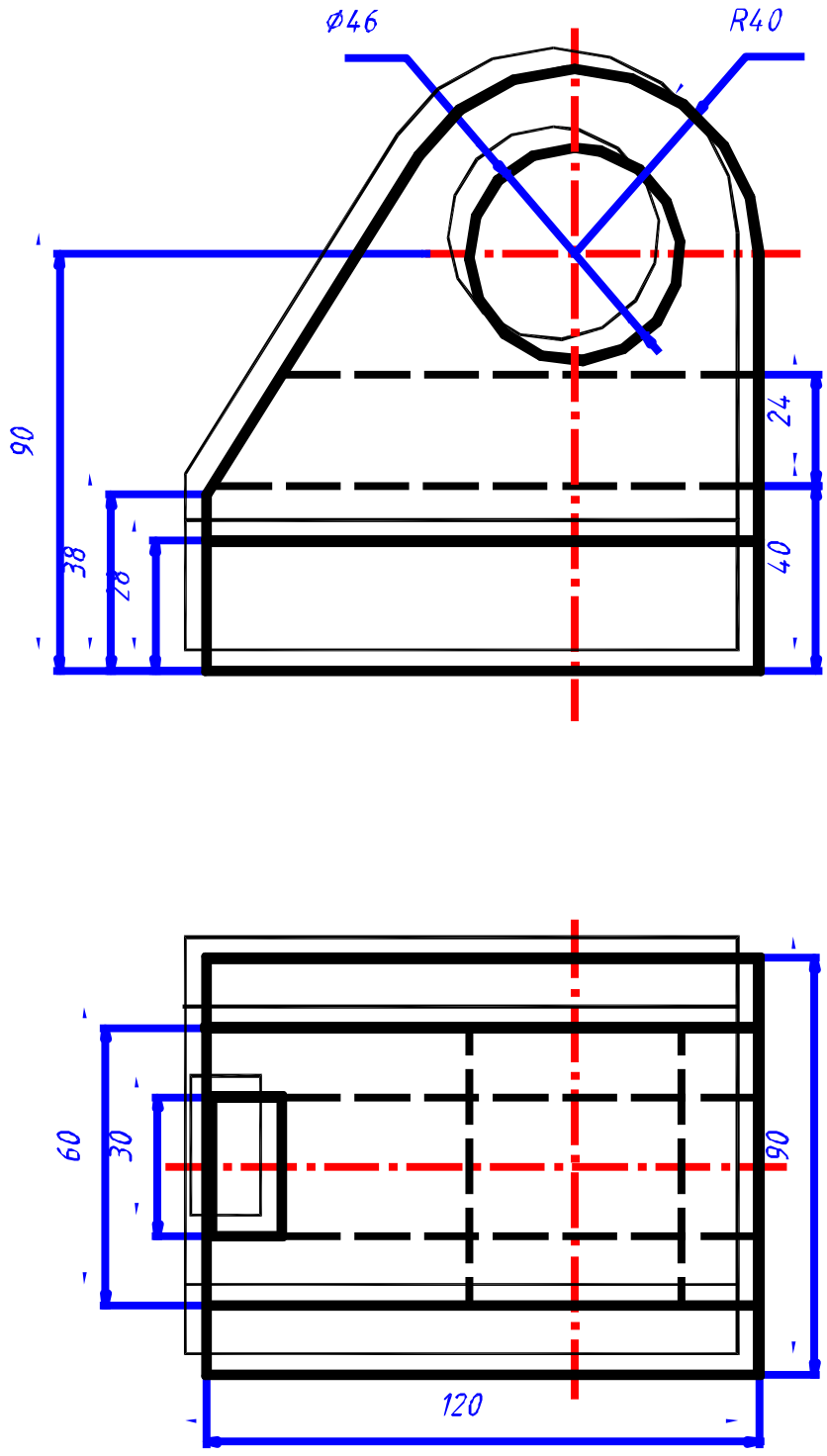
Вилка

Вариант 11



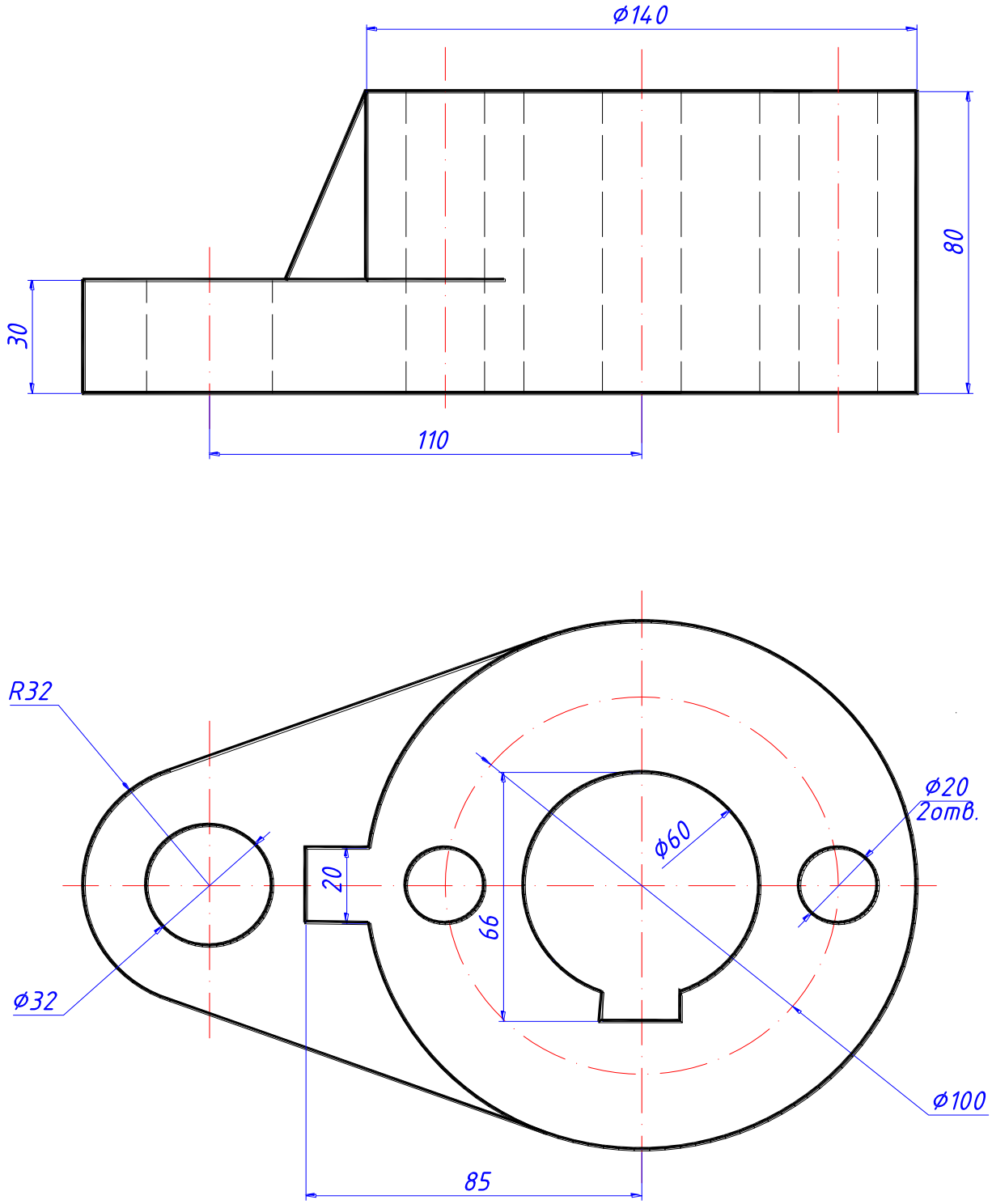
Серьга

Вариант 12



Вилка

Вариант 13



Основание

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полещук Н. Самоучитель AutoCAD 2016. – Санкт-Петербург: Издательство БХВ-Петербург, 2016. – 464с.

2. Шангина Е.И. Компьютерная графика. Учебное пособие. – Екатеринбург: Издательство УГГУ, 2006. – 188с.

3. Хейфец А. Л. Инженерная компьютерная графика. Учебно-справочное пособие.— М.: ДИАЛОГ -МИФИ , 2002, 428 с.

Савина Татьяна Евгеньевна

Методическое пособие
по выполнению практической
работы «Создание проекционного чертежа средствами AutoCAD» по дисциплинам:
«Инженерная и компьютерная графика»,
«Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика».

Редактор

Подписано в печать_____.2017 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/8. Печать на ризографе.
Гарнитура Times New Roman .Печ. л. ___. Уч.- изд. 0,83. Тираж 150 экз.
Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинала – макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

Б1.Б.14 Учебно-методическое пособие
по выполнению графической работы
для студентов всех специальностей

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Направленность (профиль)
Производство и реновация машин и оборудования

Форма обучения: очная, заочная

Автор: Фролов А.П.

Одобрена на заседании кафедры
Инженерной графики
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____
(подпись)
Шангина Е. И.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 5 от 17.04.2019
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
горно-механического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ 6

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ВЗАИМНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР 13

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА 18

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ …..……..20

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебно–методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении графической работы «Эпюр №3» по курсу «Начертательная геометрия. Инженерная графика».

При выполнении данной работы студент должен научиться методике определения взаимного пересечения кривых поверхностей. Эти знания горному инженеру могут пригодиться при решении конкретных технических задач. Известно, что в условиях горно-обогатительных предприятий одним из наиболее распространенных видов транспорта является трубопроводный транспорт. Большинство конструкций, предназначенных для транспортировки и хранения жидких и пульпообразных продуктов обогащения, выполняется из листового материала путем его изгибания и соединения краев пайкой, сваркой и т. п. Корпуса многих машин и аппаратов, применяемых при обогащении полезных ископаемых, также изготавливаются этими способами. Поверхности трубопроводов для транспортировки жидкостей и пульп, как известно, представляют собой цилиндры. Различные емкости и корпуса обогатительного оборудования ограничены цилиндрическими, коническими, сферическими, а также гранными поверхностями.

При проектировании подземных горных выработок может возникнуть необходимость построения линий перехода поверхностей этих выработок, которые, как известно, представляют собой сочетания поверхностей вращения и гранных поверхностей.

В данной работе рассмотрены основные способы построения линий взаимного пересечения различных поверхностей, в частности, приведена методика применения вспомогательных плоскостей и вспомогательных сфер.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задание «Эпюр №3» предназначено для закрепления знаний студентов по теме «Взаимное пересечение поверхностей» и состоит из двух чертежей.

На первом чертеже необходимо определить линии взаимного пересечения поверхностей. В качестве исходных данных первого чертежа предложена композиция из поверхностей вращения и поверхностей многогранников. Для определения линии взаимного пересечения поверхностей (в первой задаче) рекомендуется применять способ вспомогательных секущих плоскостей. Чертеж необходимо выполнить в трех проекциях. Невидимый контур наносится штриховой линией.

Второй чертеж состоит из двух проекций заданных поверхностей. В качестве исходных данных дана композиция из двух или трех поверхностей вращения. Для решения задачи по определению взаимного пересечения поверхностей рекомендуется способ вспомогательных сфер. Невидимый контур наносится штриховой линией.

Оба чертежа рекомендуется выполнять в масштабе 1:1 на одном формате А 2. Пример выполнения задания приведен на рис. 6.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для определения линии взаимного пересечения поверхностей обычно применяют метод поверхностей-посредников. В качестве посредников могут быть использованы вспомогательные секущие плоскости и вспомогательные секущие сферы. Вспомогательные секущие плоскости могут быть использованы в том случае, если можно подобрать такое множество плоскостей, каждая из которых пересекает заданные поверхности по простым (с точки зрения построения) линиям. Таких линий, как известно, всего две – прямая и окружность.

Если даны две пересекающиеся поверхности α и β, и необходимо определить на чертеже линию их пересечения, то для этого достаточно построить проекции ряда точек, принадлежащих обеим заданным поверхностям. Соединив одноименные проекции полученных точек определим искомую линию пересечения на чертеже. Таким образом, задача сводится к определению множества точек, общих для заданных поверхностей.

Методику определения таких точек можно свести к следующим действиям:

1) задаем вспомогательную секущую плоскость γ, исходя из условия изложенного выше;
2) определяем линии пересечения a и b вспомогательной плоскости γ и с заданными поверхностями α и β;
3) определяем точку (точки) пересечения K и M полученных линий a и b;

Задав множество подобных плоскостей, определим ряд точек, принадлежащих обеим заданным поверхностям.

Более подробно и конкретно применение данной методики будет показано в следующем разделе.

Способ вспомогательных секущих сфер применяется в том случае, если в пространстве имеется множество сфер, каждая их которых пересекает заданные поверхности по окружностям. В частности, этот способ может быть применен для определения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями вращения. При этом центр вспомогательных сфер должен находиться в точке пересечения осей вращения поверхностей, а сферы - расположены концентрически.

Эксцентрические сферы применяются в том случае, если оси поверхностей вращения не пересекаются, а также для определения линий взаимного пересечения циклических поверхностей. Положение центра для каждой вспомогательной сферы определяется в каждом конкретном случае и индивидуально.

Если даны две поверхности α и β, то общая методика определения точек, принадлежащих линиям пересечения этих поверхностей, состоит из следующих действий:

1. Задаем вспомогательную секущую сферу φ, пересекающую обе поверхности α и β.
2. Определяем окружности m и l, по которым сфера φ пересекает поверхности α и β.
3. Определяем точки пересечения E и F окружностей m и l.

Задав множество подобных вспомогательных сфер, определим ряд точек, принадлежащих обеим заданным поверхностям.

Более подробно данная методика будет рассмотрена в последующих разделах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Методика реализации способа плоскостей была рассмотрена в предыдущем разделе. Основной проблемой при решении конкретной задачи является проблема выбора пространственного положения плоскостей-посредников. Совершенно очевидно, что для поверхностей с параллельными осями вращения следует выбирать вспомогательные плоскости, расположенные перпендикулярно осям вращения.

Характерный пример такого положения показан на рис. 1. В данном случае оси вращения поверхностей расположены вертикально, следовательно, если пересечь обе поверхности горизонтальной плоскостью, то в их сечении получатся окружности. Решение следует начинать с определения характерных точек. Совершенно очевидно, что точки 1, 2 и 3 являются характерными точками с экстремальными координатами *z*. Точки 2 и 3 лежат на окружностях оснований поверхностей и имеют минимальную координату *z*. Точка 1 имеет максимальную координату *z* и ее фронтальная проекция определяется пересечением очерков фронтальных проекций заданных поверхностей. Для определения промежуточных точек линии пересечения зададим вспомогательную плоскость α. Фронтальный след этой плоскости α_v в данном случае параллелен оси *X*. Плоскость α пересекает поверхность сферы по окружности радиуса *R* и поверхность конуса по окружности радиуса *r*. Эти окружности отображаются на горизонтальную плоскость проекций без искажения.

Таким образом, построив горизонтальные проекции этих окружностей, определим горизонтальные проекции точек 6 и 7, принадлежащих обеим заданным поверхностям. Фронтальные проекции этих точек определим с помощью линий связи из условия их принадлежности следу α_v. Задав множество подобных плоскостей, определим ряд точек, принадлежащих обеим заданным плоскостям. Соединив одноименные проекции точек между собой, построим проекции искомой линии пересечения.

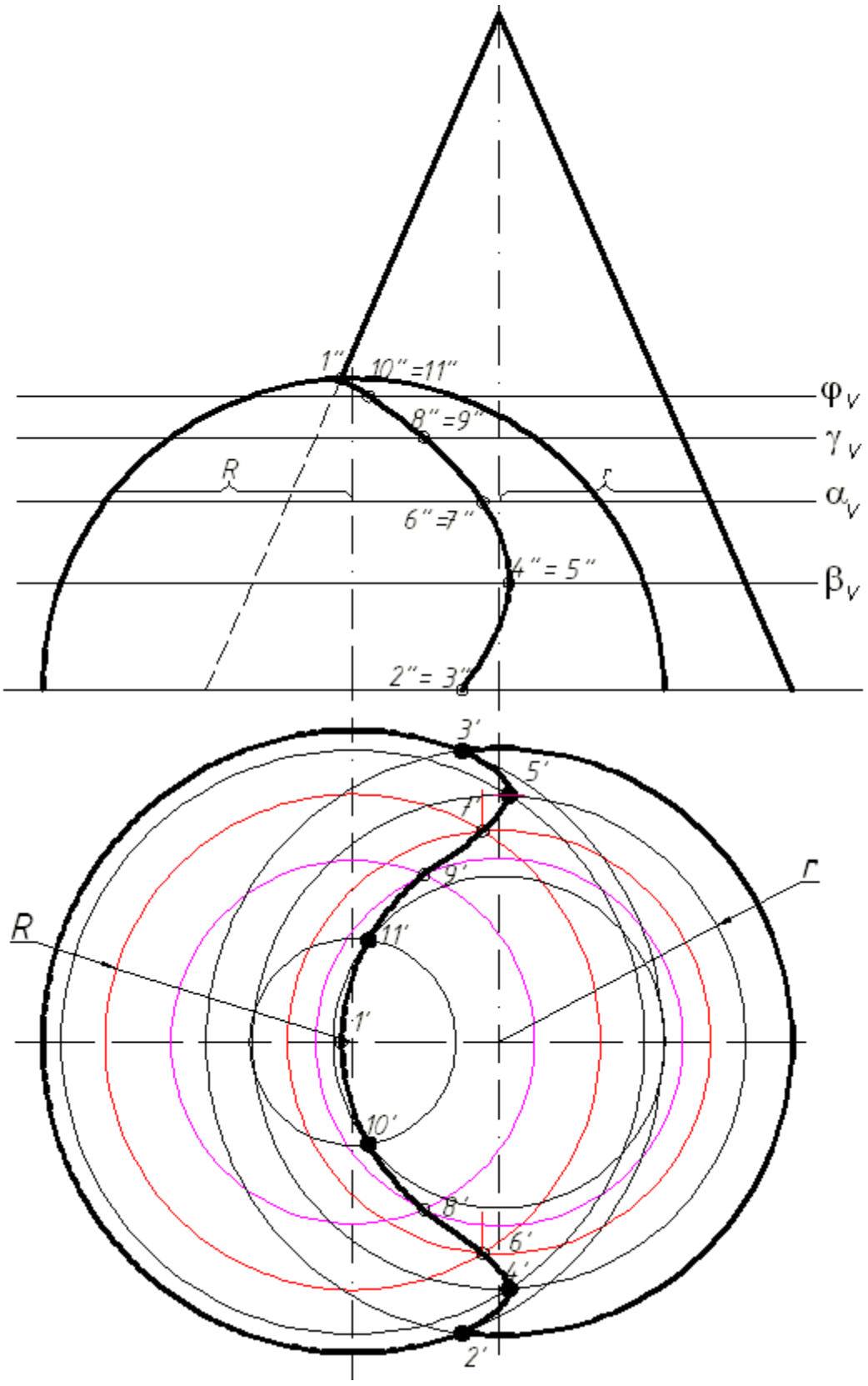


Рис. 1. Определение линии пересечения поверхностей вращения способом вспомогательных плоскостей

Совершенно очевидно, что горизонтальная проекция линии пересечения видима полностью, так как эта линия находится выше экватора сферы, горизонтальная проекция которого совпадает с очерком.

Что касается фронтальной проекции, то можно утверждать, что видимая часть проекции совпадает с невидимой частью, поскольку линия пересечения поверхностей симметрична относительно плоскости симметрии композиции из заданных поверхностей.

На рис. 2 показан еще один пример решения задачи по определению линии пересечения поверхностей вращения. Необходимо определить линии пересечения поверхности сферы и поверхности цилиндра вращения.

Общая методика решения этой задачи аналогична методике решения предыдущей задачи и сводится к заданию множества вспомогательных плоскостей.

В данном случае более рационально воспользоваться фронтальными вспомогательными плоскостями. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что цилиндр занимает горизонтально-проецирующее положение и, следовательно, горизонтальная проекция искомой линии пересечения совпадает с очерком горизонтальной проекции цилиндра.

Для построения фронтальной проекции воспользуемся фронтальными вспомогательными плоскостями. Совершенно очевидно, что точки 4 и 10 являются точками с экстремальными координатами *y*, следовательно, вспомогательные секущие плоскости будут располагаться между этими двумя точками. Для определения фронтальных проекций этих точек зададим фронтальные плоскости γ и ρ. Эти плоскости пересекут поверхность сферы по двум окружностям радиусами R_1 и R_2 соответственно. Построив фронтальные проекции этих окружностей, определим фронтальные проекции точек 4 и 10 с помощью соответствующих линий связи. Важным моментом при решении подобных задач является методика определения точек с экстремальными координатами *z*.

В данном случае эти точки 5 и 11 лежат в плоскости симметрии, общей для обеих поверхностей. Совершенно очевидно, что эта плоскость *P* является горизонтально-проецирующей, которая определена осями вращения заданных поверхностей. В плоскости *P* лежат точки 5 и 11, горизонтальные проекции которых лежат в пересечении P_H и очерка горизонтальной проекции цилиндра.

Для определения фронтальной проекции этих точек зададим две фронтальные плоскости λ и ε, которые пересекут поверхность сферы по окружностям радиусов R_3 и R_4 соответственно. На фронтальных проекциях

этих окружностей строим точки 5″ и 11″. С помощью плоскостей λ и ε определим также точки 3 и 9. Их фронтальные проекции 3″ и 9″ лежат соответственно на окружностях радиусов R_3 и R_4. Точки 1 и 7 имеют экстремальные координаты X и определяются с помощью плоскости β. Задав множество фронтальных вспомогательных плоскостей, определим ряд точек, принадлежащих обеим заданным плоскостям. Соединив фронтальные проекции этих точек между собой, построим фронтальную проекцию линии пересечения заданных поверхностей. Для определения видимости фронтальной проекции полученной линии необходимо определить границу видимости. Совершенно очевидно, что эта граница определяется двумя точками, а именно – 1 и 7, поскольку фронтальные проекции этих точек лежат на очерковых линиях фронтальной проекции цилиндра. Таким образом, проекции 1″, 2″, 3″ 4″, 5″, 6″, 7″ невидимы. Что касается видимости горизонтальной проекции линии пересечения, то совершенно очевидно, что она вся видна, так как границей видимости является экватор сферы.

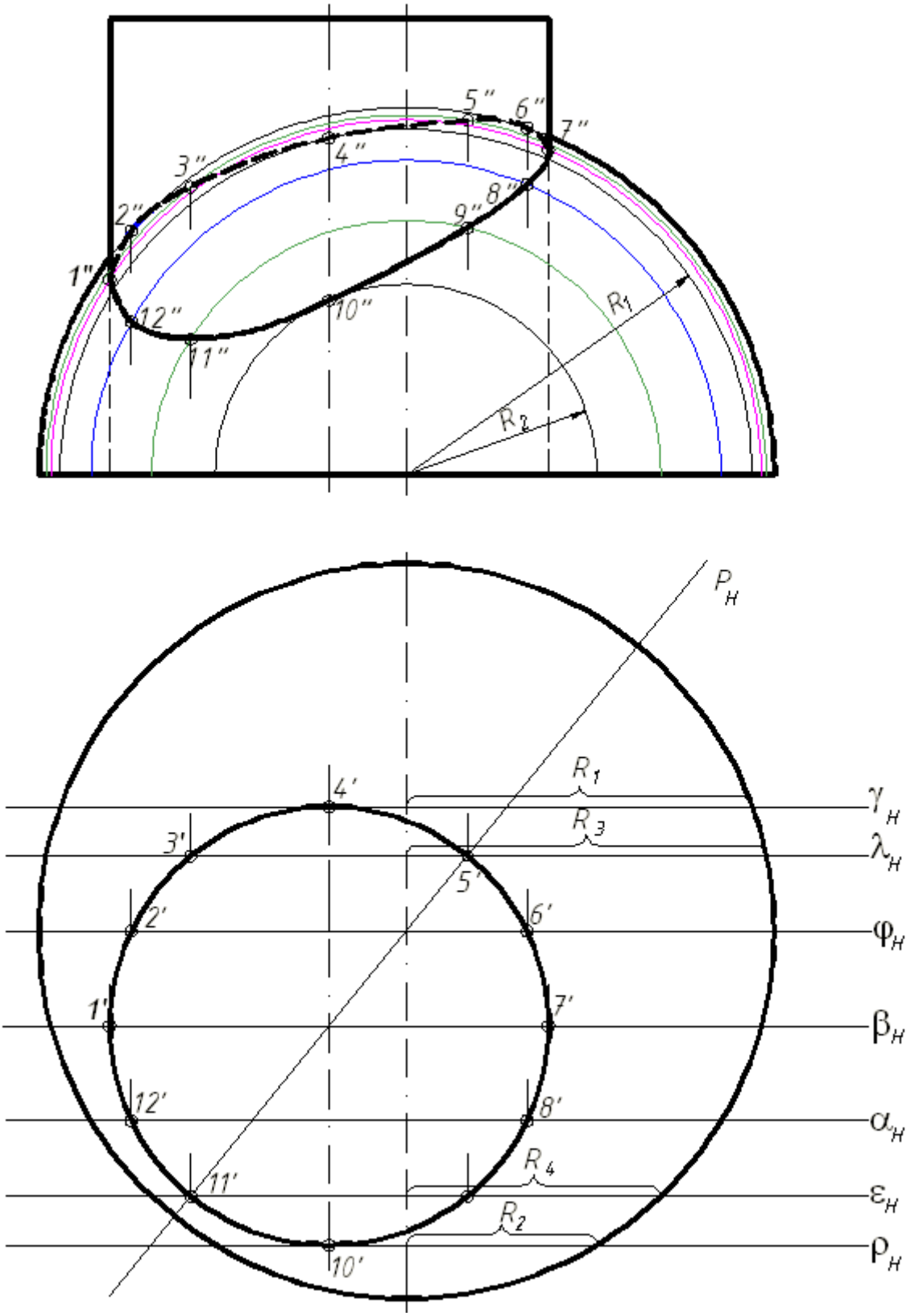


Рис. 2. Определение линии пересечения поверхностей вращения способом вспомогательных плоскостей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ ВЗАИМНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР

Общая методика реализации способа вспомогательных сфер была рассмотрена в предыдущем разделе. При решении конкретной задачи этим способом необходимо определить пространственное положение центра каждой сферы. Каждая сфера должна быть расположена таким образом, чтобы она пересекала обе заданные поверхности по окружностям. Существуют две модификации способа вспомогательных сфер. В том случае, если оси вращения заданных поверхностей пересекаются между собой, для решения задачи следует применить концентрические сферы, т. е. сферы с единым центром. При этом центр сфер находится в точке пересечения осей вращения поверхностей. Известно, что если соосные поверхности вращения пересекаются, то линия их пересечения представляет собой окружность. Таким образом, если центр сферы находится в пересечении осей вращения поверхностей, то эта сфера будет соосна с обеими поверхностями и будет пересекать обе поверхности по окружностям. Если эти окружности пересекаются между собой, то точки их пересечения будут принадлежать обеим заданным поверхностям. Основной проблемой в этом случае является подбор таких вспомогательных сфер, которые пересекали бы обе поверхности, кроме того, непременным условием решения задачи является наличие общих точек полученных линий пересечения. На рис. 3. приведен конкретный пример применения концентрических сфер для решения задачи по определению линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями. Совершенно очевидно, что центр вспомогательных сфер находится в точке O, которая является точкой пересечения осей вращения поверхностей. Решение задачи следует начинать с определения диапазона изменения радиуса вспомогательных секущих сфер. Сфера максимального радиуса, как правило, проходит через точку пересечения очерковых образующих, в данном случае эта сфера проходит через точку 1 (рис. 3). Очерк фронтальной проекции сферы, таким образом, определяется проекцией $1''$. Сфера минимального радиуса обычно касательна к одной заданной поверхности и пресекает другую. В данном случае сфера минимального радиуса $R_{\min}$ касается поверхности конуса по окружности радиуса r_1 и пересекает поверхность цилиндра по окружности, фронтальная проекция которой представляет собой отрезок $A''B''$. Эта окружность, пересекаясь с окружностью радиуса r_1, дает две точки.

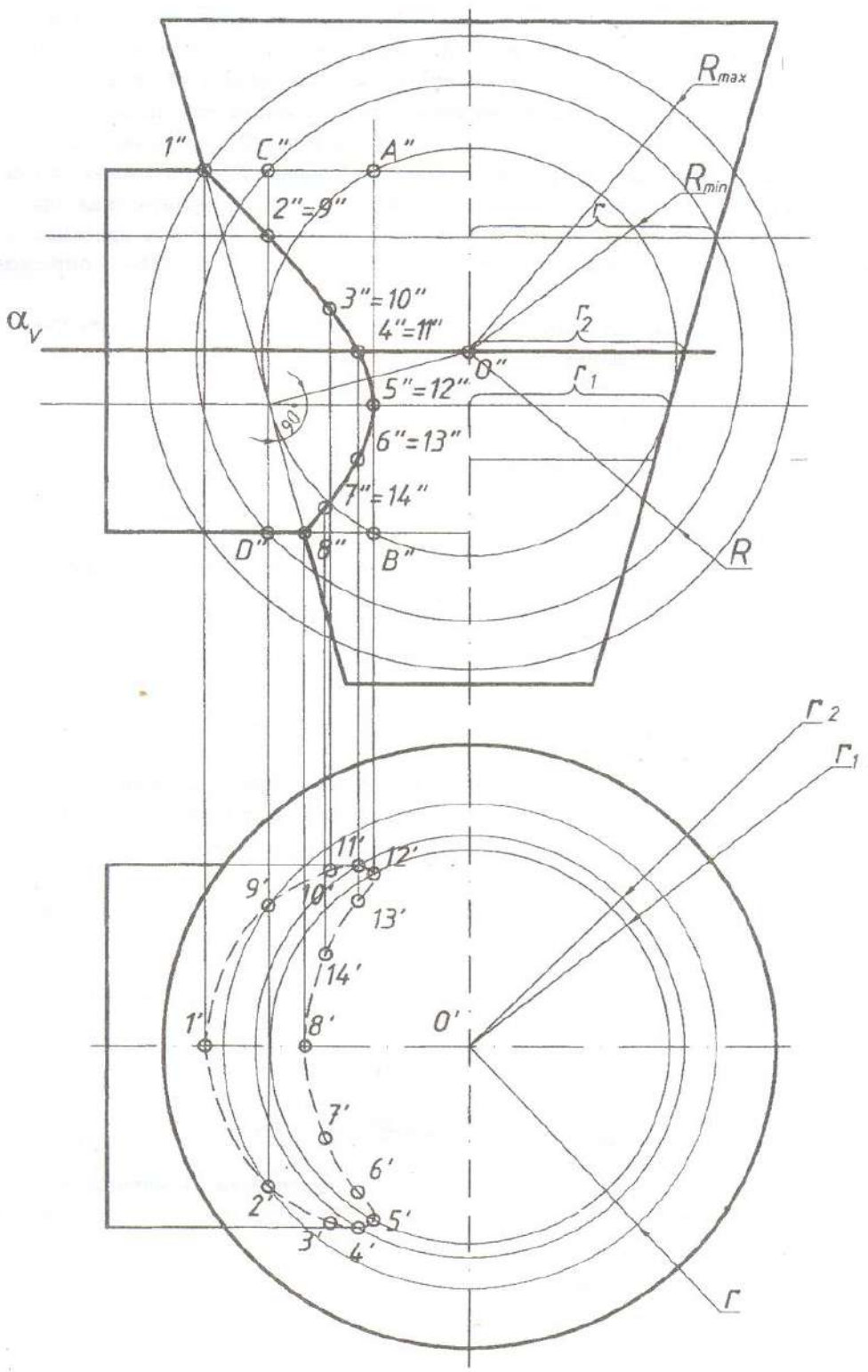


Рис. 3. Определение линии пересечения поверхностей вращения способом вспомогательных плоскостей

Фронтальные проекции этих точек на чертеже обозначены 5″ и 12″. Эти точки являются характерными, так как носят экстремальный характер. В данном случае они имеют минимальную координату *x*. Горизонтальные проекции 5′ и 12′ лежат на окружности радиуса r_1 и определены с помощью линии связи.

Определим остальные характерные точки. Фронтальные проекции точек 1 и 8 определены в пересечении очерков фронтальных проекций заданных поверхностей. Эти точки являются характерными, поскольку имеют экстремальные координаты *z*. Горизонтальные проекции этих точек лежат на оси, симметрии горизонтальной проекции данной композиции. Для определения точек, имеющих экстремальные координаты *y*, удобно воспользоваться горизонтальной плоскостью α, проходящей через ось заданного цилиндра.

Эта плоскость пересекает поверхность конуса по окружности радиуса r_2. Горизонтальная проекция этой окружности, пересекаясь с очерковыми линиями горизонтальной проекции цилиндра, дает горизонтальные проекции точек 4 и 11. Фронтальные проекции этих точек принадлежат α_v и построены с помощью линий связи. Для определения промежуточных точек зададим сферу радиуса *R* из условия $R_{max}>R>R_{min}$. Эта сфера пересечет поверхность конуса по окружности радиуса *r*. Фронтальная проекция окружности пересечения этой сферы с цилиндром обозначена *C″D″*. Фронтальная проекция окружности радиуса *r*, пересекаясь с *C″D″*, определит 2″и 9″. Горизонтальные проекции точек 2 и 9 определены по их принадлежности окружностям радиуса *r*. Точки 6 и 13 определены аналогично.

Определим видимость проекций линии пересечения. Совершенно очевидно, что линия взаимного пересечения заданных поверхностей симметрична относительно плоскости симметрии общей для обеих заданных поверхностей. Следовательно, видимая часть фронтальной проекции линии пересечения совпадает с её невидимой частью. Таким образом, фронтальная проекция линии выполняется сплошной основной. Что касается горизонтальной проекции линии пересечения, то можно утверждать, что вся она будет невидима, так как она находится ниже верхнего основания цилиндра.

На рис. 4 приведен пример определения линии пересечения с помощью эксцентрических сфер. Как и во всех предыдущих примерах, решение задачи следует начинать с определения характерных точек. В данном случае фронтальные проекции 1″, 2″ этих точек могут быть легко определены в пересечении очерков фронтальных проекций заданных поверхностей. Горизонтальные проекции этих точек (1′, 2′) лежат на осевой линии очерков горизонтальных проекций поверхностей.

Основной проблемой реализации способа эксцентрических сфер является методика определения центра сферы. В данном случае поверхность тора может быть представлена как множество окружностей, каждая из которых лежит в плоскости, проходящей через ось вращения поверхности. Совершенно очевидно, что окружности, необходимые для решения данной задачи, лежат в плоскостях, расположенных между плоскостями α и ω, проходящими через характерные точки 1″ и 2″.

Зададим в этом диапазоне вспомогательную секущую плоскость β, которая пересечет поверхность тора по окружности, проходящей через точки точки *A* и *B*. Центр этой окружности - точка *C*.

Представим себе, что через точку *C* проходит ось воображаемого цилиндра вращения, которая параллельна фронтальной плоскости проекций. Эта ось, пересекаясь с осью конуса, даст точку O_1. Из полученной точки O_1 задаем вспомогательную сферу радиуса R_1, которая проходит через окружность с центром *C*. В этом случае очерк фронтальной проекции сферы пройдет через *A″* и *B″*. Заданная сфера пересечет поверхность конуса по окружности радиуса r_1.

Эта окружность, пересекаясь с окружностью, лежащей на поверхности тора и имеющей в качестве центра точку *C*, даст две точки – 3 и 4. Фронтальные проекции этих точек лежат на *A″B″*. Горизонтальные проекции лежат на окружности радиуса r_1 с центром O_1'. Точки 5 и 6 определены с помощью вспомогательной плоскости γ и вспомогательной сферы радиуса R_2 с центром O_2'. Определим видимость проекций линии пересечения. Совершенно очевидно, что горизонтальная проекция этой линии видима, поскольку сама линии пересечения лежит на верхней половине тора. Что касается фронтальной проекции, то её видимая часть совпадает с невидимой частью, поэтому фронтальная проекция линии пересечения выполнена сплошной основной.

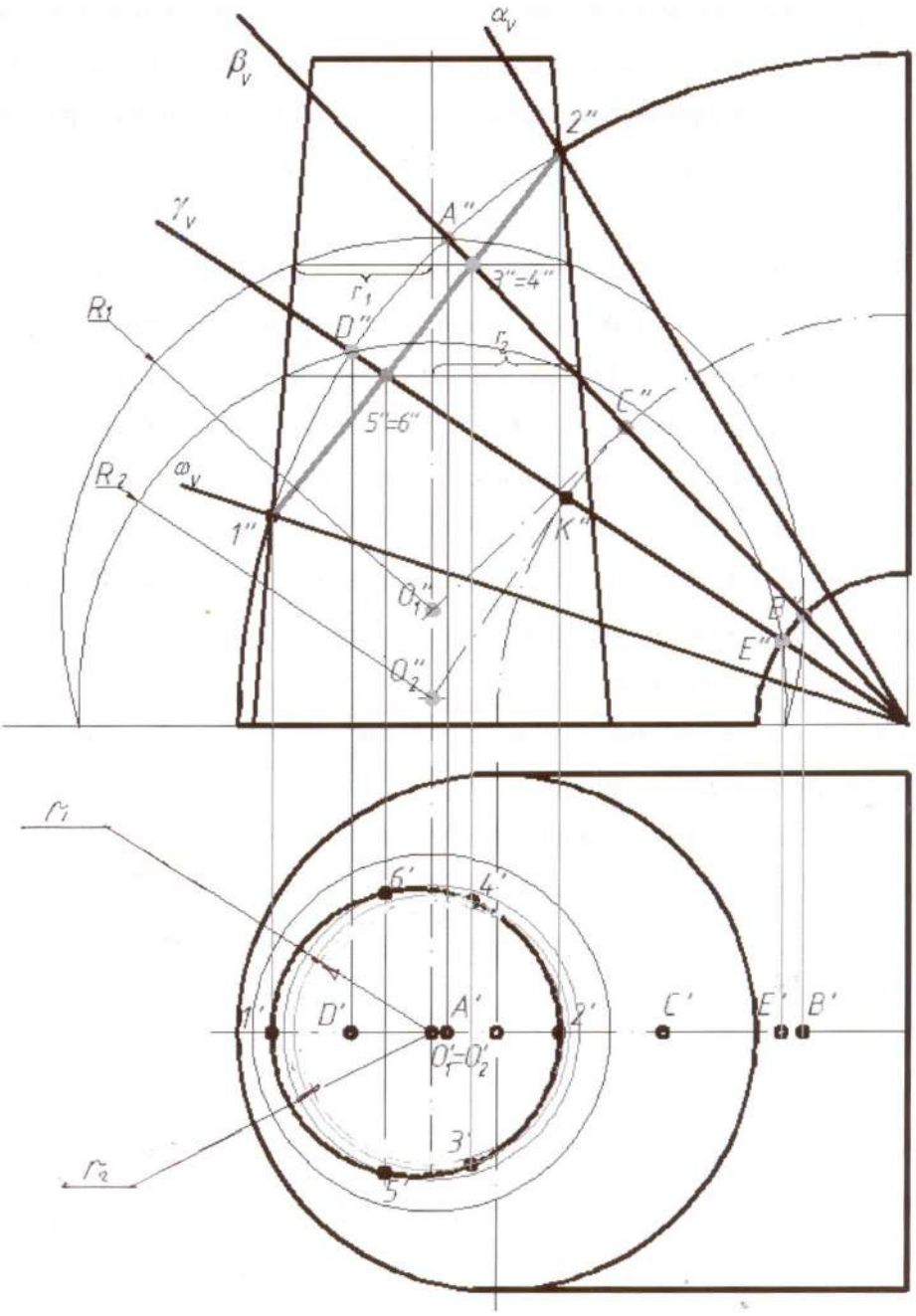


Рис. 4. Определение линии пересечения с помощью способа эксцентрических сфер

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА

Решение задачи на определение пересечения кривой поверхности с гранной поверхностью в общем случае сводится к определению точек пересечения прямой с кривой поверхностью и линии пересечения плоскости с кривой поверхностью. Основным методом решения таких задач является метод вспомогательных секущих плоскостей. Методика реализации этого метода приведена в разделе «Основные понятия и определения». На рис. 5 показано построение проекций линии пересечения конуса вращения с поверхностью призмы. В результате сечения поверхности конуса призмой образуется ломаная кривая линия. Призматическая поверхность образована четырьмя фронтально-проецирующими плоскостями, фронтальные следы которых обозначены на чертеже P_V, T_V, S_V и Q_V. Вполне очевидно, что фронтальная проекция линии пересечения заданных плоскостей представляет собой прямоугольник, поскольку плоскости P_V, T_V, S_V и Q_V занимают фронтально-проецирующее положение. Построим горизонтальную проекцию линии пересечения. Для этого зададим вспомогательную секущую плоскость α, которая проходит через ребро призматической поверхности. Заданная плоскость пересечет поверхность конуса по окружности радиуса R_1. На этой окружности лежат точки 1, 11, 5 и 15. Для построения горизонтальных проекций этих точек, построим окружность радиуса R_1 с центром S'. Для определения $1'$, $11'$, $5'$ и $15'$ проведем вертикальные линии проекционной связи до пересечения с соответствующей окружностью радиуса R_1. Для построения проекций остальных точек зададим множество горизонтальных плоскостей, параллельных плоскости α. Последовательно соединив одноименные проекции определенных точек, получим проекции искомой линии пересечения.

Обратим внимание на то обстоятельство, что данная задача может быть решена также с помощью секущих плоскостей, проходящих через вершину конуса. В этом случае коническая поверхность будет пересекаться по прямым, проходящим через вершину конуса.

Общий алгоритм решения подобных задач такой же, как при решении задачи на построение линии пересечения поверхностей вращения.

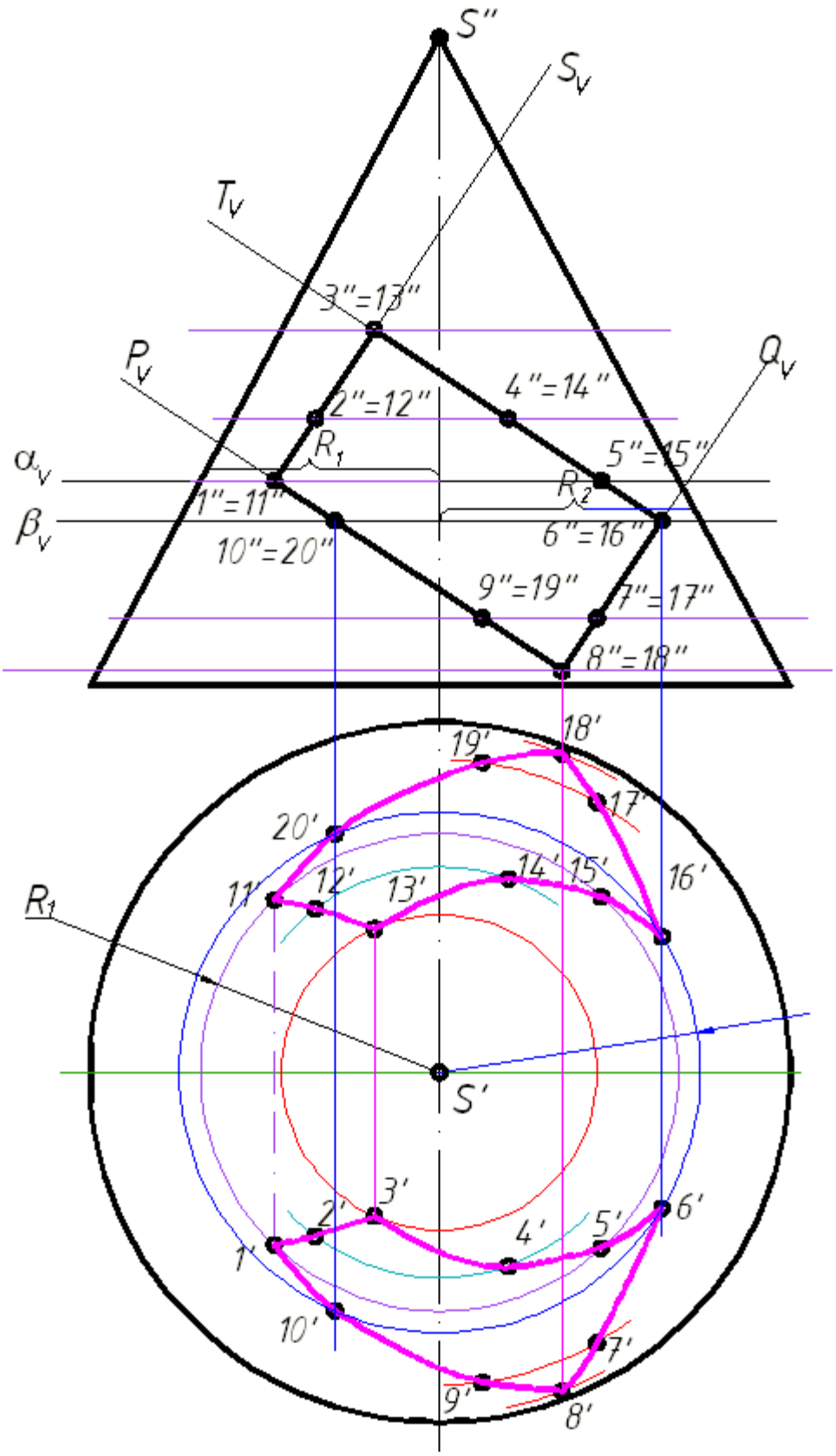


Рис. 5. Построение линии пересечения кривой и гранной поверхности

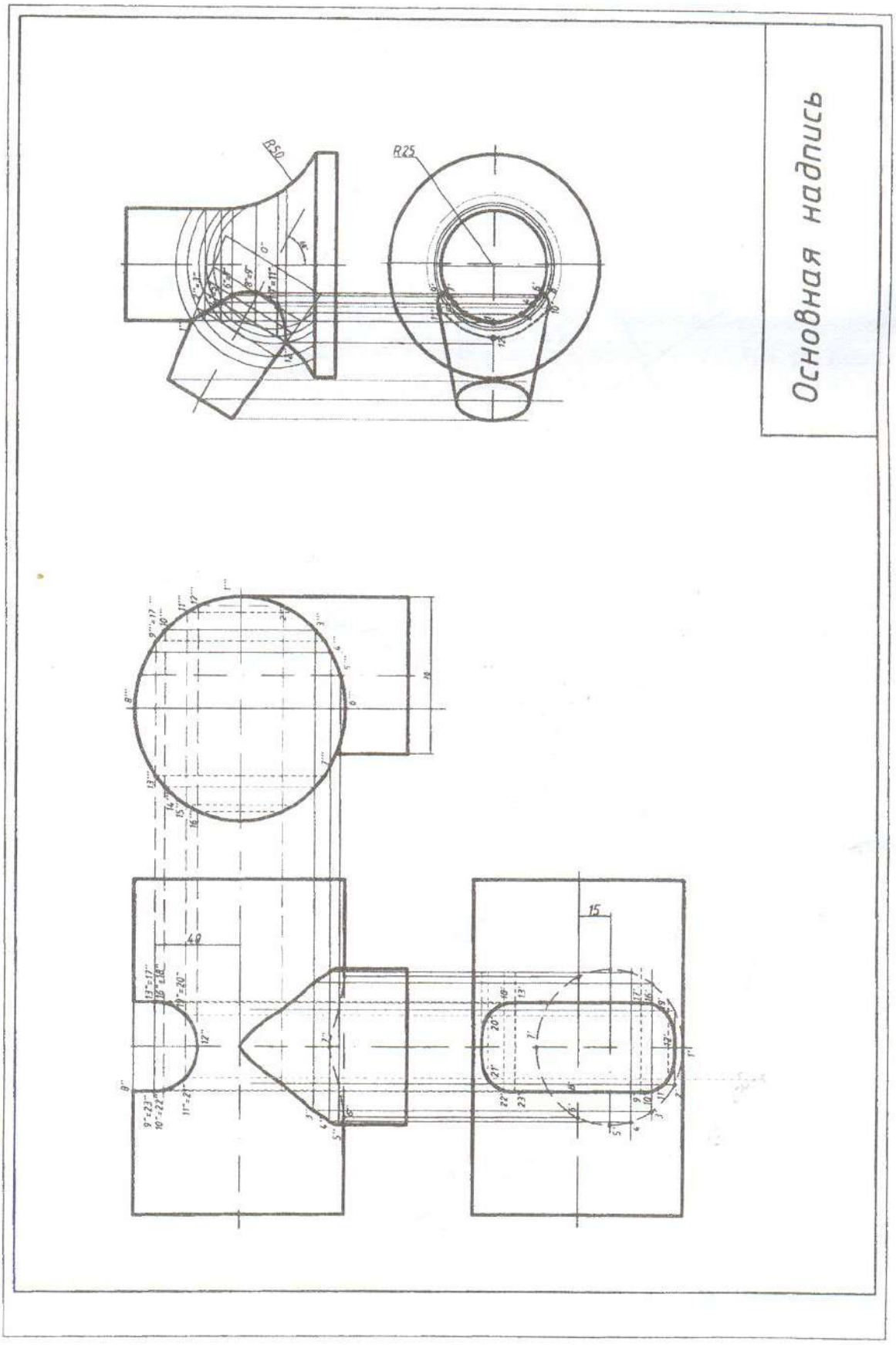


Рис. 6. Пример выполнения задания

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для втузов – М.: Наука, 2007. –271 с.

Фролов С. А. Начертательная геометрия: учебник. – 3 изд. перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2008. -281 с.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

БОЛТОВОЕ СОЕДИНЕНИЕ

Б1.Б.14 Учебно-методическое пособие по выполнению графической работы для студентов всех специальностей 3-е издание, переработанное

Направление подготовки
15.03.01 Машиностроение

Направленность (профиль)
Производство и реновация машин и оборудования

Форма обучения: очная, заочная

Автор: Фролов А. П.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Инженерной графики	горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Шангина Е. И.	Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 5 от 17.04.2019	Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……..… 4

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ……...5

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ ……6

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ …... 13

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ……..... 18

ВВЕДЕНИЕ

Болтовые соединения широко применяются во всех отраслях промышленности и строительства, трудно представить себе машину или механизм без этого вида соединения.

При выполнении машиностроительных чертежей значительную часть времени конструктор затрачивает на вычерчивание изображения крепежных деталей и в частности болтов, гаек и т.д.

В этой связи необходимо отметить, что выполнение всех правил, установленных соответствующими стандартами, а также рекомендаций справочников, учебников, основанных на опыте конструкторов, значительно облегчают и упрощают этот трудоемкий процесс.

Настоящее методическое пособие предназначено для изучения и закрепления знаний, указанных правил и рекомендаций.

Работа содержит исходные данные индивидуальных заданий, описание основных крепежных деталей болтового соединения, методику определения размеров, необходимых для выполнения чертежа соединения деталей болтами различных конструкций, а также принципы формирования условных обозначений крепежных деталей.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Чертеж болтового соединения является частью задания «Условности машиностроительного черчения». Это задание выполняют студенты технологических и механических специальностей университета.

Работу выполняют в формате А 4 карандашом. Оформляется чертеж в соответствии с требованиями ЕСКД. Масштаб изображения следует выбирать в зависимости от размеров крепежных деталей.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Чертеж болтового соединения (рис. 2) содержит три изображения: полный фронтальный разрез, расположенный на месте главного вида, вид сверху и вид слева; на изображениях следует нанести обозначения резьбы, длину болта и размер под ключ. Кроме того, чертеж должен содержать условные обозначения крепежных изделий.

В качестве исходных параметров для выполнения чертежа дана толщина соединяемых деталей и вид крепежных изделий, определенный стандартами, а также размер резьбы болта. Эти данные приведены в таблице 1.

Общие сведения о крепежных деталях болтового соединения.

Соединение деталей болтом обычно состоит из трех стандартных крепежных изделий: болт, гайка и шайба. В некоторых случаях, обычно когда болтовое соединение работает в условиях повышенной вибрации, для предотвращения самопроизвольного отвинчивания гайки применяются шплинты (рис. 1). ***Шплинтом*** называется изделие, изготовленное из стальной проволоки полукруглого сечения, сложенной вдвое и предназначенное для фиксирования болта относительно гайки. Основными параметрами шплинта является его длина l и условный диаметр d_o. Условный диаметр шплинта равен диаметру отверстия болта под шплинт.

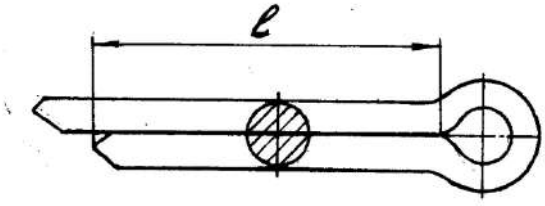


Рис. 1. Шплинт

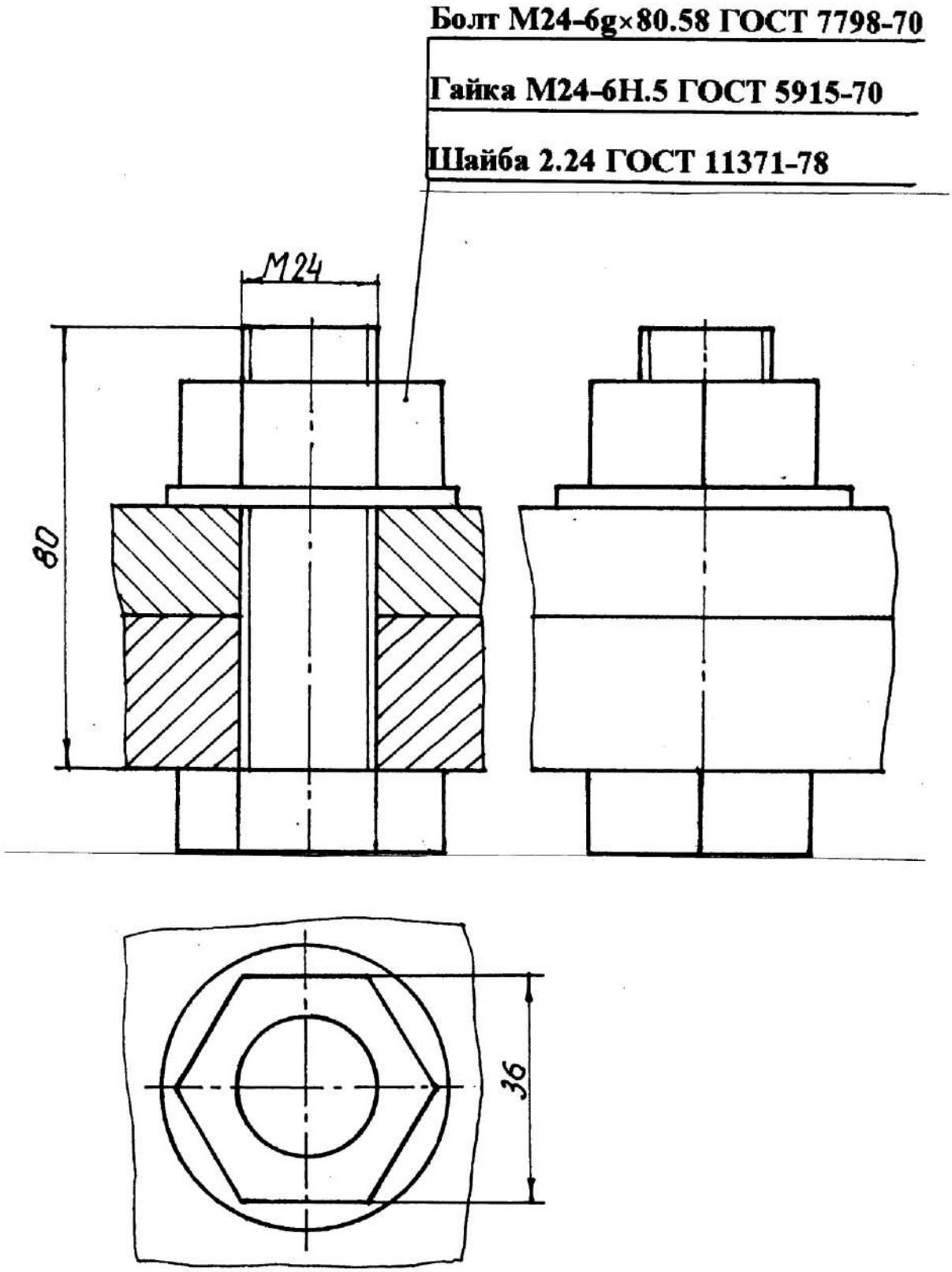


Рис. 2. Чертеж болтового соединения

Исходные данные

Таблица 1

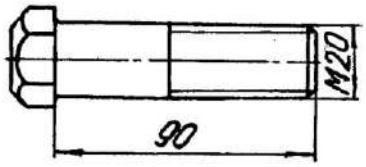
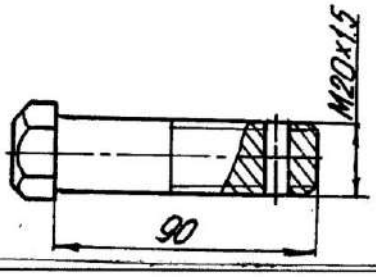
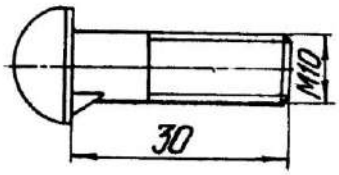
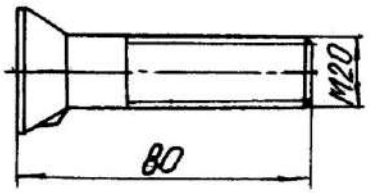
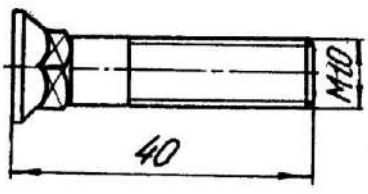
Номер варианта	БОЛТ					ГАЙКА		ШАЙБА
	Номинальный диаметр резьбы, мм	Шаг резьбы, мм	Исполнение	Толщина деталей	Номер ГОСТ	Исполнение	Номер ГОСТ	Номер ГОСТ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	20	2,5	1	40 40	7796-70	2	5915-70	11371-78
2	10	1,5	1	30 30	7783-81	1	5916-70	11371-78
3	10	1,25	4	10 20	7798-70	2	5918-73	6958-78
4	12	1,75	2	20 40	7785-81	2	5916-70	11371-78
5	12	1,25	1	15 20	7805-70	-	5927-70	10450-78
6	16	2,0	-	20 20	7786-81	1	5915-70	11371-78
7	24	2,0	2	30 40	7796-70	1	5918-73	11371-78
8	10	1,5	1	30 30	7783-81	1	3032-76	10450-78
9	12	1,75	3	20 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
10	12	1,75	-	20 50	7786-81	2	3032-76	6958-78
11	16	2,0	2	30 30	7805-70	-	5918-73	11371-78
12	16	2,0	1	40 40	7785-81	1	3032-76	10450-78
13	30	3,5	3	50 40	7796-70	1	5916-70	6958-78
14	20	2,5	2	30 50	7783-81	2	3032-76	6958-78
15	16	1,5	2	20 20	7798-70	1	5918-73	10450-78
16	10	1,5	2	15 15	7785-81	1	3032-76	10450-78
17	20	1,5	3	40 10	7805-70	-	5927-70	11371-78
18	12	1,75	-	10 40	7786-81	2	3032-76	6958-78
19	40	3,0	4	50 50	7796-70	2	5918-73	6958-78
20	16	2,0	1	40 30	7783-81	1	3032-76	10450-78
21	12	1,75	1	20 10	7798-70	-	15523-70	6402-70
22	20	2,5	1	30 30	7785-81	2	3032-76	6958-78
23	24	3,0	1	50 40	7805-70	-	5927-70	10450-78

Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	10	1,5	-	30 50	7786-81	1	3032-76	10450-78
25	16	2,0	1	20 40	7796-70	2	5916-70	11371-78
26	12	1,75	2	20 30	7783-81	2	5915-70	11371-78
27	24	2,0	4	20 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
28	16	2,0	1	20 40	7785-81	1	5916-70	11371-78
29	30	3,5	3	40 40	7798-70	-	15523-70	6958-78
30	20	2,5	-	20 40	7786-81	2	5916-70	11371-78
31	12	1,25	2	30 20	7796-70	1	5918-73	10450-78
32	16	2,0	1	15 25	7783-71	1	3032-76	10450-78
33	30	2,0	2	30 40	7805-70	2	5918-73	11371-78
34	6	1,0	1	10 10	7785-81	1	5915-70	6958-78
35	8	1,0	3	10 20	7805-70	-	5927-70	6402-70
36	8	1,25	-	15 20	7786-81	2	3032-76	10450-78
37	10	1,5	3	20 10	7796-70	1	5916-70	11371-78
38	10	1,5	2	20 10	7783-81	2	5915-70	6958-78
39	36	3,0	2	50 10	7798-70	1	5918-73	6958-78
40	12	1,75	2	20 25	7785-81	1	3032-76	10450-78
41	10	1,25	1	15 25	7805-70	-	5927-70	6402-70
42	16	2,0	-	20 15	7786-81	1	5915-70	6968-78
43	20	1,5	5	30 20	7796-70	2	5915-70	11371-78
44	16	2,0	1	10 30	7783-81	2	3032-76	10450-78
45	20	2,5	1	10 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
46	6	1,0	1	10 8	7785-81	2	5915-70	6958-78
47	16	1,5	2	30 20	7805-70	2	5918-73	11371-78
48	8	1,25	-	10 12	7786-81	1	3032-76	10450-78
49	24	3,0	1	20 40	7796-70	2	5916-70	6958-78
50	10	1,5	2	10 25	7783-81	1	5915-70	11371-78

Таблица 2

Изображение и обозначение болтов

Изображение	Условные обозначение	Расшифровка обозначения
	Болт М20-6g×90.58 ГОСТ 7798-70	Болт исполнения 1, диаметром резьбы d=20 мм, длиной l=90мм, с крупным шагом резьбы, с полем допуска 6g, класса прочности 5.8, без покрытия.
	Болт 2М20×1,5-6g×90.58 ГОСТ 7798-70	Болт исполнения 2, диаметром резьбы d=20 мм, длиной l=90мм, с мелким шагом резьбы с полем допуска 6g, класса прочности 5.8, без покрытия.
	Болт С М10-6g×30.46.019 ГОСТ 7783-81	Болт с диаметром резьбы d=10 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l=30 мм, класса прочности 4.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Болт С М20-6g×80.56.019 ГОСТ 7785-81	Болт с диаметром резьбы d=20 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l=80 мм, класса прочности 5.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Болт С М10-6g×40.46.019 ГОСТ 7786-81	Болт с диаметром резьбы d=10 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l= 40 мм, класса прочности 4.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.

Условное обозначение шплинта должно содержать условный диаметр, длину, условное обозначение материала и покрытия, толщину покрытия и наименование стандарта. Если шплинт изготовлен из низкоуглеродистой стали, то условное обозначение материала не указывается. При отсутствии покрытия шплинта его вид и толщина в обозначении не указываются.

Например, шплинт с условным диаметром 8 мм, длиной 32 мм из низкоуглеродистой стали без покрытия: *Шплинт 8×32 ГОСТ 379 - 70*.

Основными деталями болтового соединения являются болт и гайка. ***Болт*** представляет собой цилиндрический стержень с головкой на одном конце и резьбой на другом. На резьбовую часть болта навинчивается гайка.

Обычно в болтовом соединении применяются стандартные болты. В зависимости от условий работы и функционального назначения болты могут иметь различную форму стержня, форму и размер головки, параметры резьбы, характер исполнения и т. п. Все эти характеристики детали установлены соответствующим стандартом.

Условное обозначений болта, в общем случае, должно содержать следующие данные: название детали, класс точности, исполнение, условное обозначение резьбы, поле допуска, длину болта, класс прочности, характеристику материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия, условное обозначение стандарта. В условном обозначении болта не указывают исполнение 1, отсутствие покрытия, а также характеристику материала, если деталь выполнена из углеродистой нелигированной стали и соответствует техническим требованиям ГОСТ 1759.4 - 87. Кроме того, не указывают класс точности В, если стандартом на изделие предусмотрено два класса точности (А и В).

Примеры условного обозначения болтов различных конструкций приведены в таблице 2.

Гайка представляет собой деталь, имеющую отверстие с резьбой для навинчивания на болт или шпильку. Как правило, в соединениях применяются стандартные гайки. В некоторых случаях, вследствие специфических условий, могут быть применены гайки нестандартные.

В зависимости от условий эксплуатации соединения устанавливают гайки различных конструкций, например, для соединений работающих в условиях повышенной вибрации, обычно применяют про-

резные и корончатые гайки со шплинтами. В тех случаях, когда необходимо навинчивать гайку вручную, используют гайки–барашки.

Условное обозначение гайки, в общем случае, должно содержать следующие характеристики: название детали, класс точности, исполнение, условное обозначение резьбы, поле допуска, класс прочности, характеристику материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия, условное обозначение стандарта. В условном обозначении гайки не указывают исполнение 1, отсутствие покрытия, а также характеристику метериала, если деталь выполнена из углеродистой нелигированной стали и соответствует требованиям ГОСТ 17595-87. Не указывается в обозначении класс точности В, если стандартом на эту деталь установлено два класса точности (А и В). Примеры обозначения стандартных гаек различных конструкций приведены в таблице 3.

Шайбой называется деталь, которую устанавливают между гайкой или головкой болта и поверхностью одной из деталей. Она служит для предохранения материала детали от повреждения, а также для предотвращения самопроизвольного развинчивания крепежных деталей.

Условные обозначения шайбы включают следующую информацию: название детали, класс точности, если стандарт предусматривает два класса, исполнение, диаметр резьбы крепежной детали, толщину шайбы, условное обозначение марки (группы) материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия. Толщина шайбы указывается только в том случае, если стандартом на данный вид шайбы такой толщины не предусмотрено. Марка материала указывается только в том случае, если шайба изготовлена из материала не соответствующего техническим требованиям, установленным ГОСТ 18123 - 82. При отсутствии покрытия не указываются его условные обозначения и толщина. Примеры условных обозначений шайб приведены в таблице 4.

Таблица 3

Изображение и обозначение гаек

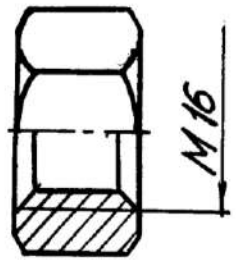
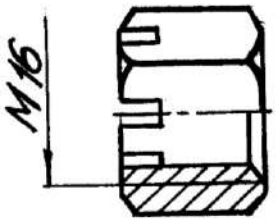
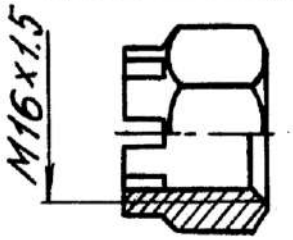
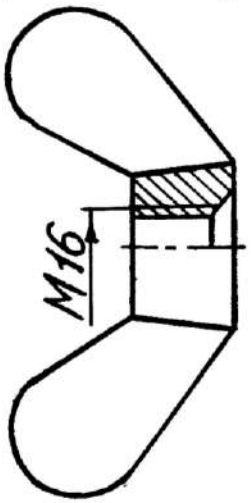
Изображение	Условные обозначения	Расшифровка обозначения
	Гайка М16-6Н.5 ГОСТ 5915-70	Гайка исполнения 1, с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса прочности 5, без покрытия.
	Гайка М16-6Н.5 ГОСТ 5918-73	Гайка класса точности В, исполнения 1, с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса точности 5, без покрытия.
	Гайка 2 М16×1,5-6Н.5.019 ГОСТ 5918-73	Гайка класса точности В, исполнения 2, с диаметром резьбы d=16 мм, с мелким шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса точности 5, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Гайка М16-6Н.6 ГОСТ 3032-76	Гайка - барашек с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса прочности 6, без покрытия.

Таблица 4

Изображения и обозначения шайб

Изображение	Условные обозначения	Расшифровка обозначения
	Шайба 2.12 ГОСТ 11371-78	Шайба круглая исполнения 2 для крепежной детали диаметром 12 мм из материала , соответствующего техническим условиям, без покрытия
	Шайба 10 65 Г ГОСТ 6402-70	Шайба пружинная исполнения 1 для крепежной детали диаметром 10 мм из стали 65 Г, без покрытия

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

На сборочных чертежах и чертежах общего вида применяются упрощенные и условные изображения крепежных деталей. Эти изображения установлены ГОСТ 2.315 - 68; их применение в значительной мере сокращают затраты труда конструктора. Крепежные детали, у которых диаметр стержня на чертеже менее 2 мм, изображают условно. В остальных случаях следует применять упрощенные изображения. Пример упрощенного изображения соединения деталей болтом с шестигранной головкой приведен на рис. 1.

При выполнении упрощенного изображения болтового соединения применяются следующие упрощения:

- фаски, проточки, галтели не показываются;
- резьба изображается выполненной по всей длине цилиндрической части болта;
- на виде сверху внутренний диаметр резьбы не показывается;
- зазоры между соединяемыми деталями и стержнем болта не показываются;

- изображения крепежных деталей выполняются по относительным размерам.

Если в соединении применен болт с шестигранной головкой, то размеры изображения деталей определяем по формулам, приведенным на рис.3. Приведенные формулы не установлены стандартом и рекомендованы на основе длительного опыта конструкторских и чертежных работ.

Основными параметрами, в зависимости от которых определяются относительные размеры изображения, являются размеры резьбы болта и толщина соединяемых деталей. Длину болта определяем по формуле, приведенной на рис. 3. Полученное значение необходимо сравнить со стандартной величиной длины болта. Как правило, они не совпадают, в этом случае выбираем ближайшее стандартное значение.

Относительные размеры конструктивных элементов болтов с различными формами головки приведены на рис. 4 и на рис. 5.

На чертеже необходимо проставить следующие размеры:

- условное обозначение резьбы болта;
- длину болта;
- размер под ключ гайки.

Длина болта и размер под ключ определяются по таблице соответствующего стандарта. Для определения размеров изображений болтов других конструкций пользуемся рис. 4 и рис. 5.

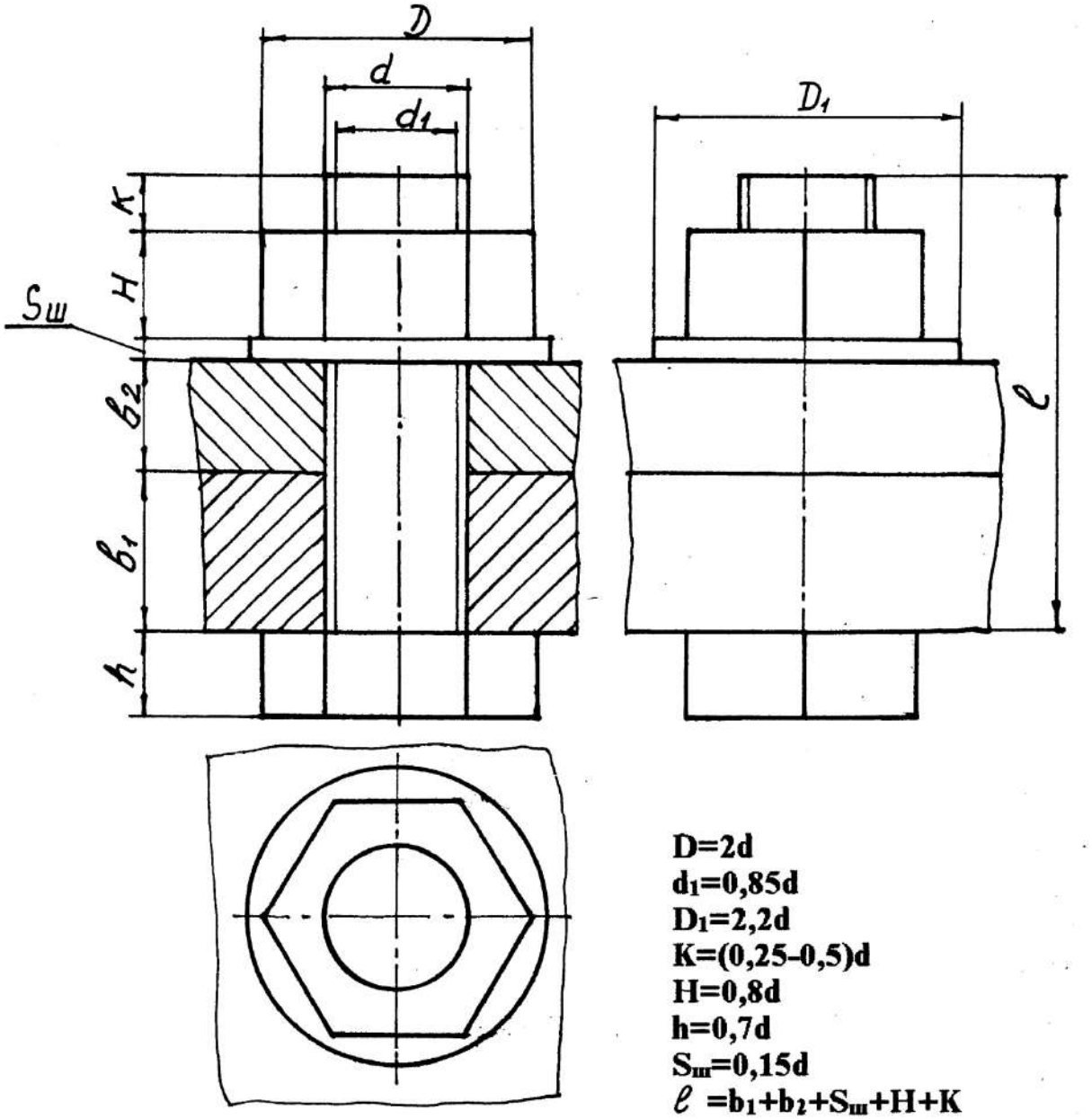


Рис. 3. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

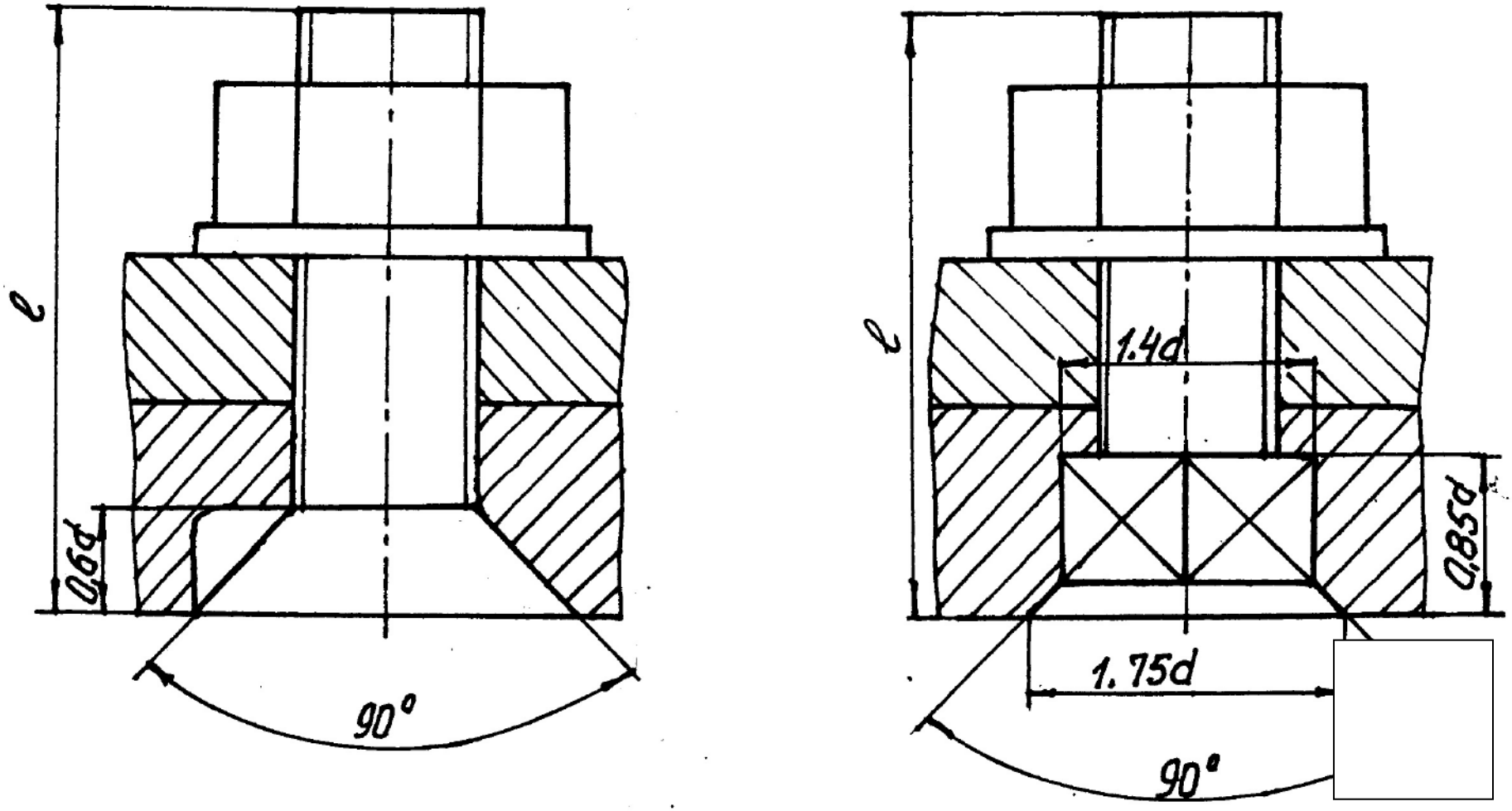


Рис. 4. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

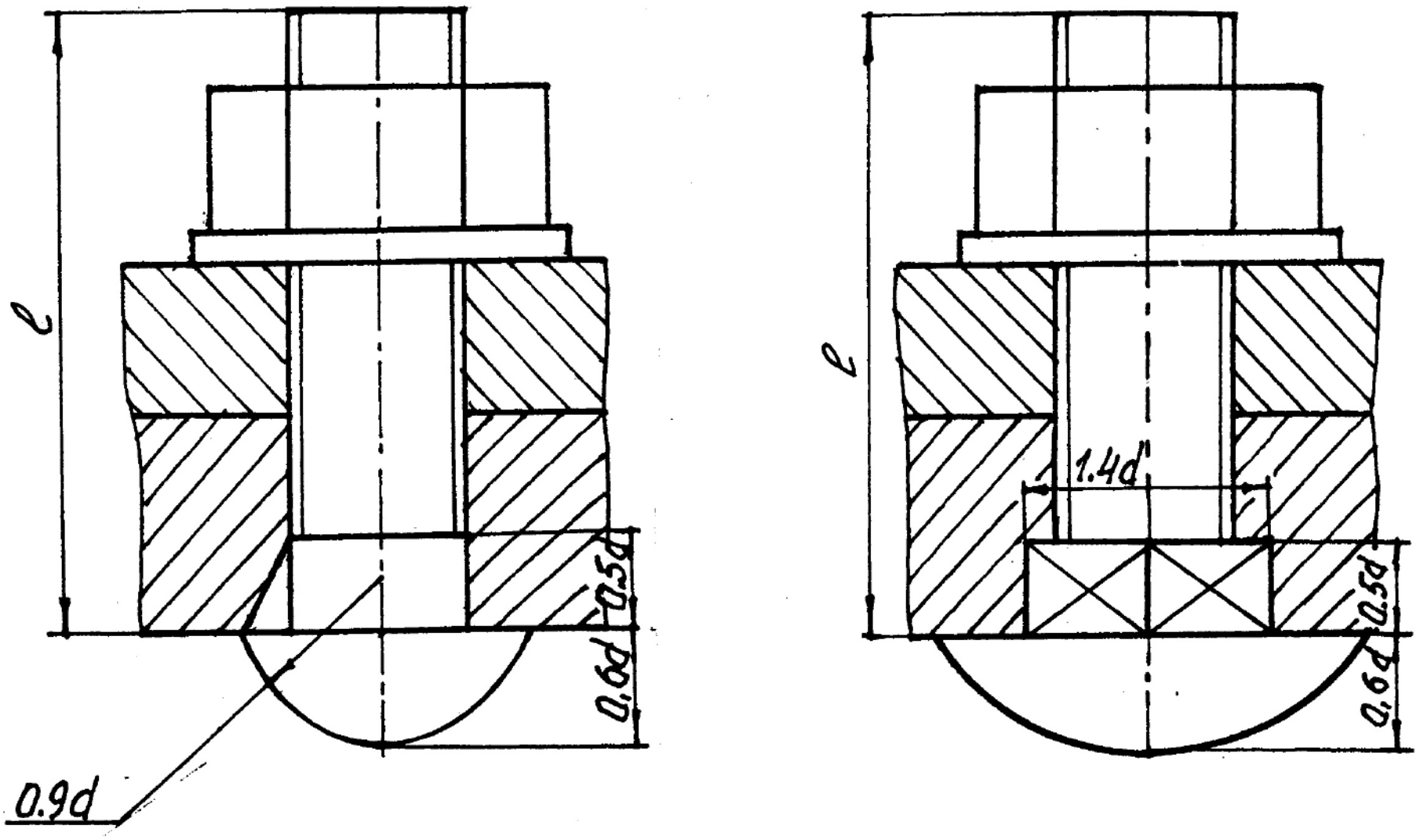


Рис. 5. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Анурьев В. И. Справочник конструктора – машиностроителя: в 3 т. т. 1. - 9 -е изд., перераб. и доп/ под ред. И. Н. Жестковой. – М.: Машиностроение, 2006. – 928 с.: ил.

Чекмарев А. А., Осипов В. К. Справочник по машиностроительному черчению: учебное пособие. – М.: Высшая школа , 2008. – 493 с.

Федоренко В. А., Шошин А. И. Справочник по машиностроительному черчению. – Изд. Альянс, 16-е изд., переработанное, 2007. – 416 с.

Министерство образования и науки РФ

ФГБОУ ВПО

«Уральский государственный горный университет»

В. Н. Бабич, А. П. Фролов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ЭПЮР № 2

Учебно-методическое пособие
по выполнению индивидуальной графической работы

для студентов всех специальностей

3-е издание, переработанное

ЕКАТЕРИНБУРГ

2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ 6

2. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ 6

3. ПОСТРОЕНИЕ ИСХОДНОГО ЧЕРТЕЖА 6

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА №2 8

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ СЕЧЕНИЯ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СЕЧЕНИЯ 12

5. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ 14

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 16

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно – методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении самостоятельной графической работы «Эпюр № 2» курса «Начертательная геометрия. Инженерная графика».

Работа содержит 50 вариантов индивидуальных заданий, а также методические указания по решению эпюра.

При выполнении данного эпюра студент закрепляет знания, полученные на лекциях и практических занятиях по теме «Преобразование проекций». В частности, основной задачей эпюра является определение сечения поверхности многогранника плоскостью общего положения. Эта задача решается с помощью способа замены плоскостей проекций.

Кроме того, при решении эпюра применяется способ плоскопараллельного перемещения. Этим способом определяется натуральная величина сечения. Важным элементом эпюра является задача на построение развертки поверхности многогранника. В данной разработке рекомендовано решать эту задачу путем определения натуральных величин ребер многогранника методом прямоугольного треугольника, однако, в зависимости от конкретных исходных данных возможно применение других методов.

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Работа выполняется в масштабе I:I на формате *A2* в карандаше. В случае необходимости, развертку поверхности многогранника допускается выполнять в масштабе 1:2, сопровождая ее соответствующей надписью. Проекции сечения поверхности многогранника плоскостью, а также линия сечения на развертке выполняются цветным карандашом. Оформление работы выполняется в соответствии с требованиями ЕСКД; основная надпись по форме 1.

2. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Дана пирамида *SABCD*. Основание пирамиды *ABCD* представляет собой ромб, сторона которого равна *a*; диагональ ромба параллельная плоскость *V* равна *d*; диагонали ромба пересекаются в точке *O*. Основание пирамиды принадлежит фронтально-проецирующей плоскости, которая наклонена к плоскости *H* под углом φ; P_x – точка схода следов плоскости *P* определяется координатой X_p. Исходные данные по заданию приведены в таблице. Секущая плоскость α задается преподавателем индивидуально.

Необходимо построить три проекции сечения поверхности пирамиды плоскостью α; определить натуральную величину сечения; построить развертку поверхности пирамиды с нанесением линии сечения.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИСХОДНОГО ЧЕРТЕЖА

Для построения исходного чертежа (рис. 3.1) необходимо выбрать начало координат. Для того чтобы изображения располагались равномерно, рекомендуется выбрать начало координат *O* в центре листа. Зная координату X_p и угол φ, строим следы плоскости *P*. Поскольку точка *O* принадлежит плоскости *P*, ее фронтальная проекция должна лежать на P_V, на удалении, равном Z_o от оси *X*.

Горизонтальную проекцию точки *O* построим, проводя вертикальную линию связи и отложив по ней Y_o.

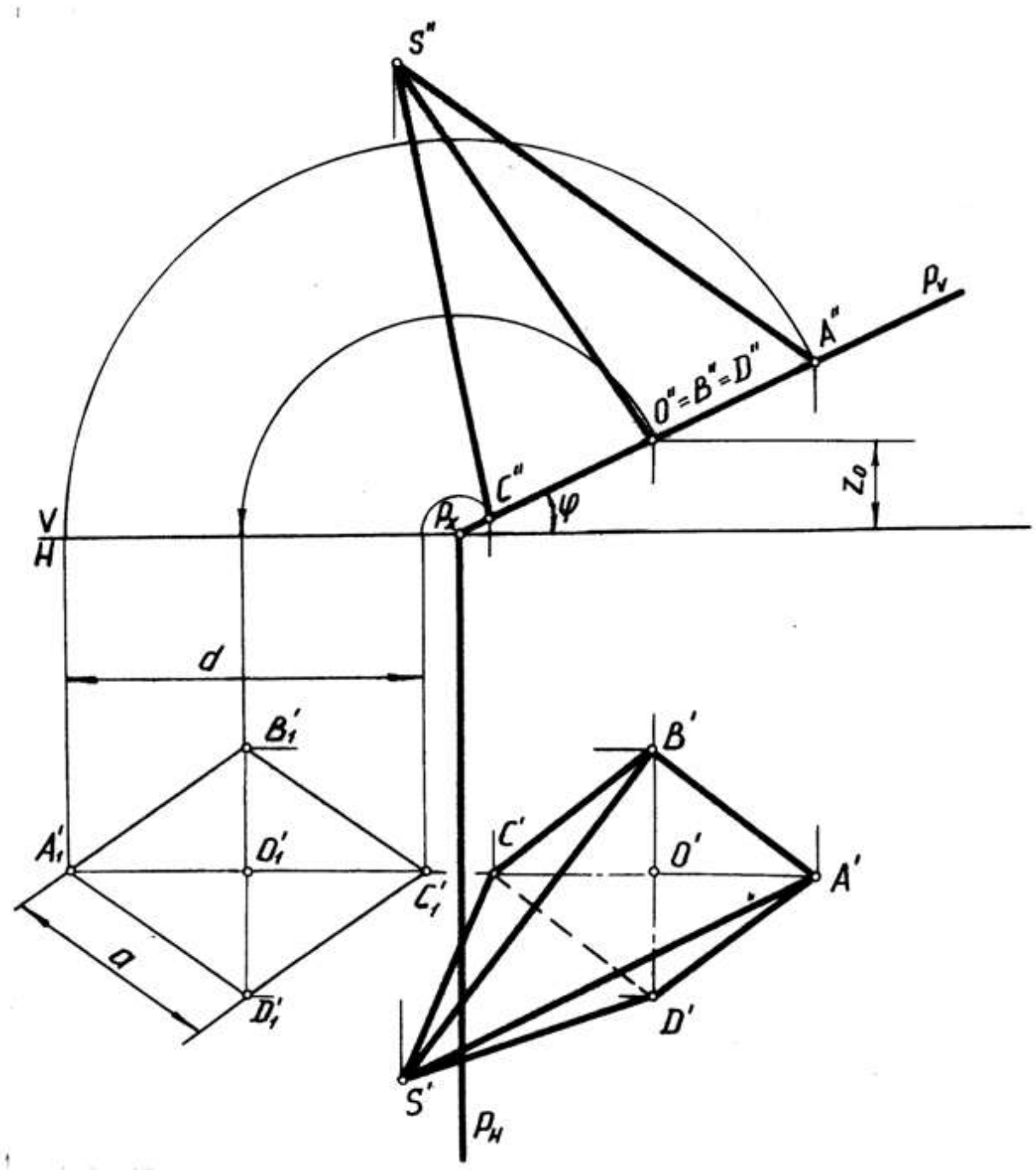


Рис. 3.1. Исходный чертеж

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА №2

Таблица

Номер вар.	x_p	φ°	y_0	z_0	a	d	x_S	y_S	z_S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	150	30	40	25	50	80	155	150	120
2	150	30	45	25	50	80	155	150	120
3	150	30	50	25	50	80	155	150	120
4	150	30	55	25	50	80	155	130	120
5	150	30	60	25	50	80	155	150	120
6	150	30	65	25	50	80	155	150	120
7	150	30	70	25	50	80	155	150	120
8	150	30	75	25	50	80	155	140	120
9	150	30	80	25	50	80	155	150	120
10	150	30	85	25	50	80	155	150	120
11	150	30	90	25	50	80	155	150	120
12	150	30	95	25	50	80	155	150	120
13	150	30	100	25	50	80	155	150	120
14	160	30	100	25	50	80	155	150	120
15	160	30	95	25	50	80	155	150	120
16	160	30	90	25	50	80	155	150	120
17	160	30	85	25	50	80	155	150	120
18	160	30	80	25	50	80	155	150	120
19	160	30	75	25	50	80	155	150	120
20	160	30	70	25	50	80	155	150	120
21	160	30	65	25	50	80	155	150	120
22	160	30	60	25	50	80	155	150	120
23	160	30	55	25	50	80	155	150	120

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
24	160	30	50	25	50	80	155	150	120
25	160	30	45	25	50	80	155	150	120
26	160	30	40	30	50	80	155	150	120
27	150	30	40	30	50	90	145	150	120
28	150	30	45	30	50	90	145	150	120
29	150	30	50	30	50	90	145	150	120
30	150	30	55	30	50	90	145	150	120
31	150	30	60	30	50	90	145	150	120
32	150	30	65	30	50	90	145	150	120
33	150	30	70	30	50	90	145	150	120
34	150	30	75	30	50	90	145	150	120
35	150	30	80	30	50	90	145	150	120
36	150	30	85	30	50	90	145	150	120
37	150	30	90	30	50	90	145	150	120
38	150	30	95	30	50	90	145	150	120
39	150	30	100	30	50	90	145	150	120
40	160	30	100	30	50	90	145	150	120
41	160	30	95	30	50	90	145	150	120
42	160	30	90	30	50	90	145	150	120
43	160	30	85	30	50	90	145	150	120
44	160	30	80	30	50	90	145	150	120
45	160	30	75	30	50	90	145	150	120
46	160	30	70	30	50	90	145	150	120
47	160	30	65	30	50	90	145	150	120
48	160	30	60	30	50	90	145	150	120
49	160	30	55	30	50	90	145	150	120
50	160	30	50	30	50	90	145	150	120

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	150	30	40	25	50	50	80	150	120
52	150	30	45	25	50	50	80	150	120
53	150	30	50	25	50	50	80	150	120
54	150	30	55	25	50	50	80	130	120
55	150	30	60	25	50	50	80	150	120
56	150	30	65	25	50	50	80	150	120
57	150	30	70	25	50	50	80	150	120
58	150	30	75	25	50	50	80	140	120
59	150	30	80	25	50	50	80	150	120
60	150	30	85	25	50	50	80	150	120
61	150	30	90	25	50	50	80	150	120
62	150	30	95	25	50	50	80	150	120
63	150	30	100	25	50	50	80	150	120
64	160	30	100	25	50	50	80	150	120
65	160	30	95	25	50	50	80	150	120
66	160	30	90	25	50	50	80	150	120
67	160	30	85	25	50	50	80	150	120
68	160	30	80	25	50	50	80	150	120
69	160	30	75	25	50	50	80	150	120
70	160	30	70	25	50	50	80	150	120
71	160	30	65	25	50	50	80	150	120
72	160	30	60	25	50	50	80	150	120
73	160	30	55	25	50	50	80	150	120

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
74	160	30	50	25	50	80	155	150	120
75	160	30	45	25	50	80	155	150	120
76	160	30	40	30	50	80	155	150	120
77	150	30	40	30	50	90	145	150	120
78	150	30	45	30	50	90	145	150	120
79	150	30	50	30	50	90	145	150	120
80	150	30	55	30	50	90	145	150	120
81	150	30	60	30	50	90	145	150	120
82	150	30	65	30	50	90	145	150	120
83	150	30	70	30	50	90	145	150	120
84	150	30	75	30	50	90	145	150	120
85	150	30	80	30	50	90	145	150	120
86	150	30	85	30	50	90	145	150	120
87	150	30	90	30	50	90	145	150	120
88	150	30	95	30	50	90	145	150	120
89	150	30	100	30	50	90	145	150	120
90	160	30	100	30	50	90	145	150	120
91	160	30	95	30	50	90	145	150	120
92	160	30	90	30	50	90	145	150	120
93	160	30	85	30	50	90	145	150	120
94	160	30	80	30	50	90	145	150	120
995	160	30	75	30	50	90	145	150	120
96	160	30	70	30	50	90	145	150	120
97	160	30	65	30	50	90	145	150	120
98	160	30	60	30	50	90	145	150	120
99	160	30	55	30	50	90	145	150	120
100	160	30	50	30	50	90	145	150	120

Для построения проекций основания пирамиды воспользуемся способом совмещения (см. рис. 3.1). Поскольку плоскость P занимает фронтально-проецирующее положение, то при ее совмещении с плоскостью H фронтальный след P_V совместится с осью X, и поэтому O_1'' (новая фронтальная проекция точки O) будет лежать на оси X. O_1' - новая горизонтальная проекция точки O построена в пересечении вертикальной линии связи траектории перемещения O', которая перпендикулярна P_H. Таким образом, плоскость P совмещена с плоскостью H, и, следовательно, новая горизонтальная проекция основания пирамиды будет равна его натуральной величине. Зная величину стороны a и одной диагонали основания d, строим его новую горизонтальную проекцию $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Выполнив обратные преобразования, т. е. повернув плоскость P в исходное положение, построим фронтальную и горизонтальную проекции основания $ABCD$. Проекции вершины пирамиды S строим по известным координатам (таблица). Таким образом, построен исходный чертеж задания.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ СЕЧЕНИЯ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СЕЧЕНИЯ

Секущая плоскость α задается преподавателем каждому студенту индивидуально.

На рис. 4.1 эта плоскость задана прямой ℓ и точкой К.

Для определения сечения, в данном случае, удобно воспользоваться заменой плоскостей проекций. Замена должна производиться таким образом, чтобы плоскость α стала проецирующей по отношению к новой плоскости проекций V_1. Для этого необходимо задать горизонталь плоскости α. В данном случае горизонталь представляет собой отрезок КМ. Фронтальная проекция К″М″ горизонтали параллельна оси Х. Горизонтальная проекция К′М′ строится с помощью линий связи.

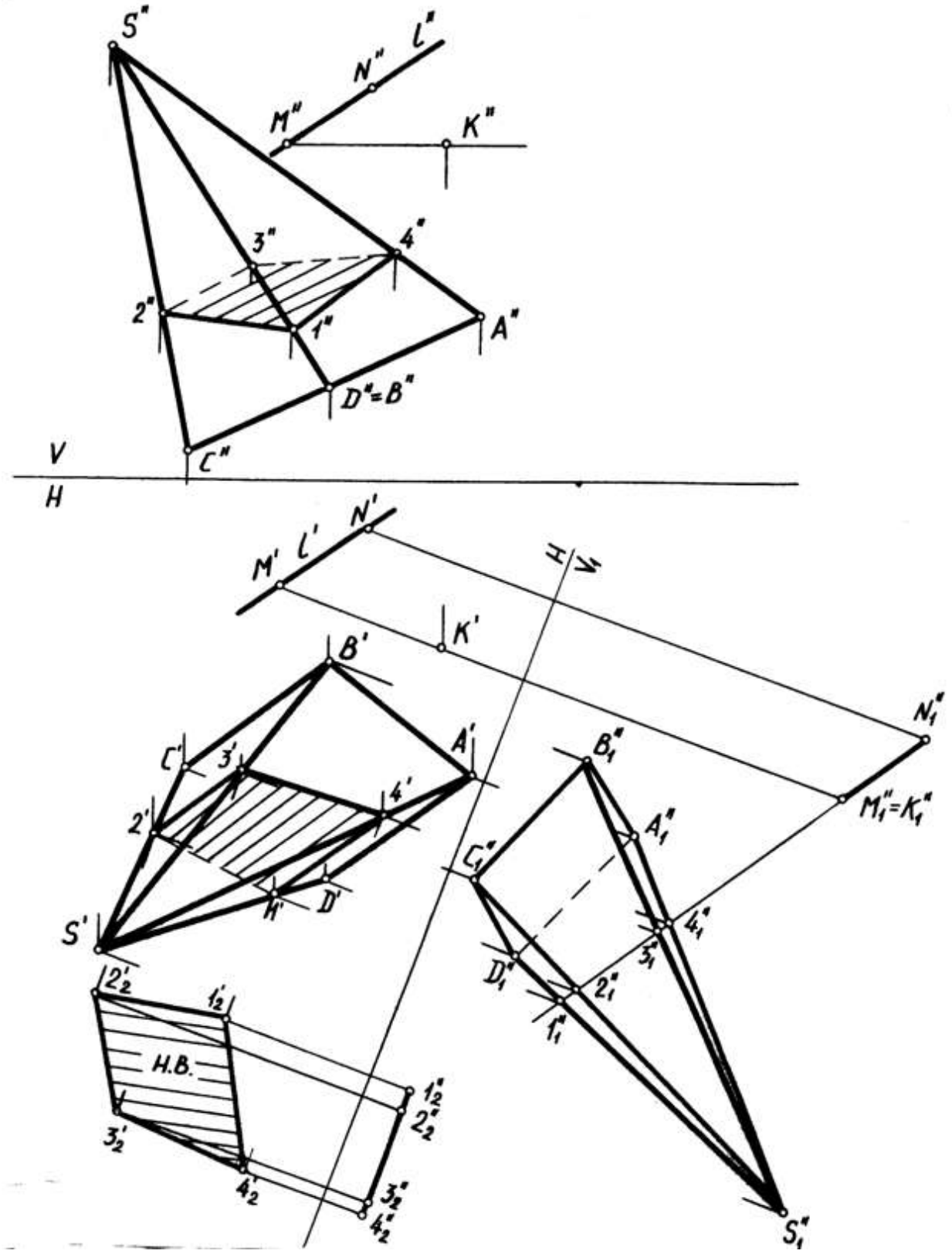


Рис. 4.1. Построение проекций сечения пирамиды плоскостью

Новую ось выбираем перпендикулярно К′М′. Проведя линии связи и отложив на них координаты Z точек К и М, получим новую проекцию горизонтали на плоскость V_1, которая представляет собой точку $M_1''=K_1''$. Для построения новой проекции плоскости α зададим произвольно точку N, принадлежащую плоскости α. Отложив координату Z на соответствующей линии связи, получим N_1''. Соединив N_1'' и $M_1''=K_1''$, получим новую проекцию плоскости α, которая является также новым следом плоскости и обозначается α_{v1}.

Для построения проекции пирамиды на плоскость V_1 проведем линии связи из горизонтальных проекций ее вершин перпендикулярно оси α_1 и отложим координаты Z вершин пирамиды, на них определяем A_1'',B_1'',C_1'',D_1'' и S_1''. Новая проекция α_{v1} , пересекая проекции ребер пирамиды, даст проекции точек сечения $1_1''$,$2_1''$,$3_1''$ и $4_1''$. Горизонтальные и фронтальные проекции этих точек построим с помощью линий связи.

Для определения натуральной величины сечения пирамиды плоскостью α выполним еще одно преобразование чертежа. В данном случае применим метод плоскопараллельного перемещения: проекцию сечения $1_1''2_1''3_1''4_1''$ перемещаем таким образом, чтобы она стала параллельной оси X_1; получена новая проекция $1_2''2_2''3_2''4_2''$; проведя линии связи из точек этой проекции и траектории перемещения горизонтальных проекций точек сечения, получим проекцию $1_2'2_2'3_2'4_2'$, которая равна натуральной величине сечения пирамиды плоскостью α.

5. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ

Для построения развертки поверхности пирамиды необходимо определить натуральные величины всех ребер пирамиды. Натуральные величины ребер основания пирамиды известны и равны величине *a* (см. рис. 3.1). Для определения натуральных величин остальных ребер применим способ прямоугольного треугольника (см. рис. 5.1). Определим натуральную величину ребра *SA*. Для этого построим прямоугольный треугольник, одним катетом которого яв-

ляется $S''A''$, а вторым катетом - разность координат Y точек A и S (ΔY). Гипотенуза полученного треугольника равна н. в. ребра AS. Определив н. в. ребра BS аналогично и зная, что $|AD|=a$, строим натуральную величину грани развертки пирамиды $S_0A_0D_0$. Натуральные величины остальных боковых ребер определим также с помощью способа прямоугольного треугольника. К первой грани развертки $S_0A_0D_0$ последовательно пристраиваем остальные боковые грани и основание. Для построения линии сечения на развертке необходимо определить натуральные величины отрезков боковых ребер $A4$, $B3$, $C2$, $D1$. Эти величины удобно в данном случае определить, основываясь на теореме о пропорциональном делении отрезка. Действительно,

$$\frac{S''A''}{4''A''} = \frac{S''A_1''}{4_1''A_1''}, \qquad 4_1''A'' = |A4|.$$

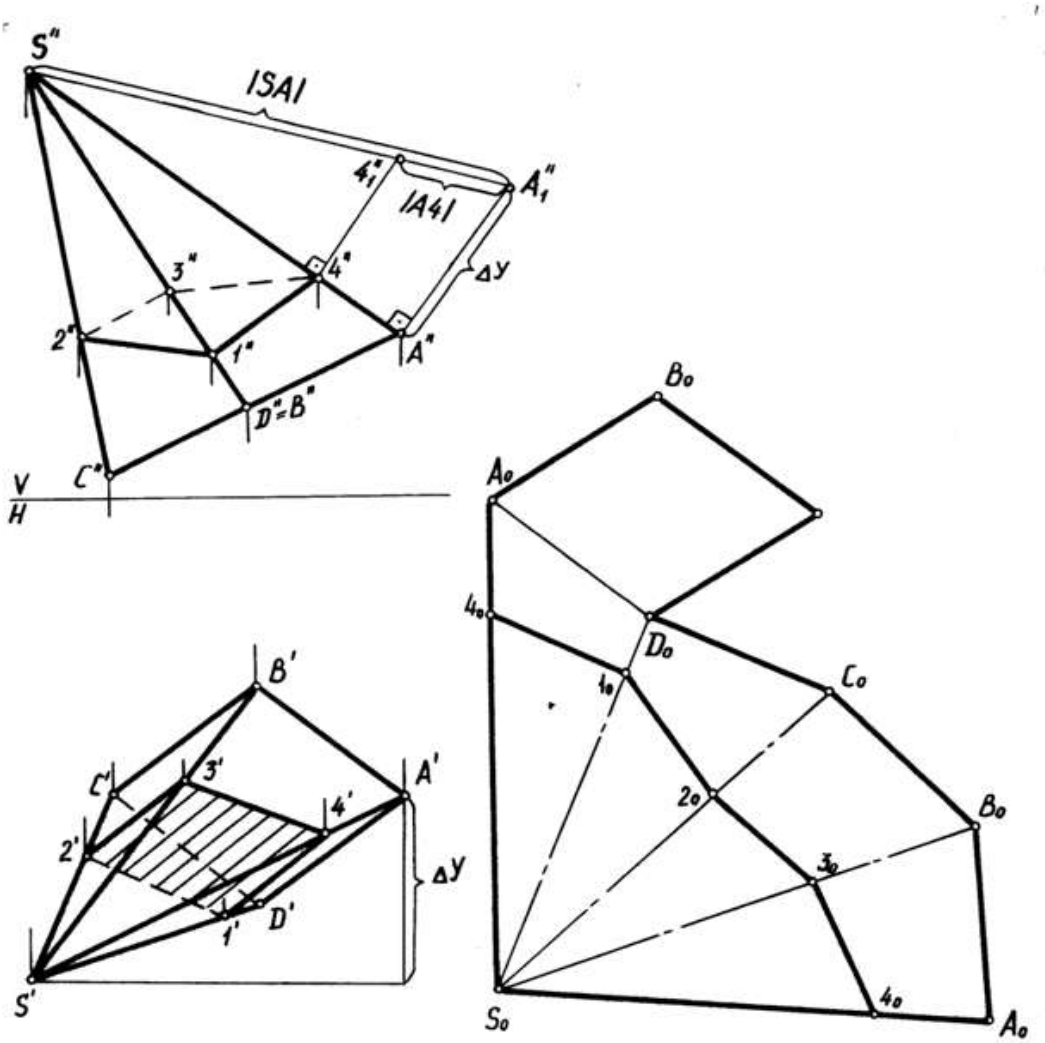


Рис. 5.1. Построение развертки поверхности пирамиды

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Гордон В. О., *Семенцов-Огиевский М. А*. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для втузов – М.: Наука, 2007. 271 с.

Фролов С. А. Начертательная геометрия: учебник. С. А. Фролов. – 3 изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА – М, 2008. 281с.

Дополнительная литература:

Дровосеков А. И. Методические указания по выполнению домашней графической работы «Эпюр № 2» для студентов горных и горно-механических специальностей. – Свердловск: Издание СГИ, 1985. 39 с.

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Н. Б. Сиразутдинова

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «ЭПЮР № 1»

по курсу «Начертательная геометрия»
для студентов всех специальностей

Екатеринбург – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ 5
2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЭПЮРА 5
3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА 7
4. ПРИЛОЖЕНИЕ 1 15
5. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 16

ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие «Эпюр № 1выполнено на основе учебного пособия А. И. Образцова, изданного в 1953 году.

Данное пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении графической работы «Эпюр №1» по курсу «Начертательная геометрия».

Цель работы - научиться строить линию пересечения заданных плоских фигур, определять видимость этих фигур на проекциях.

Графическая работа «Эпюр №1» является первым самостоятельным заданием студента по дисциплине «Начертательная геометрия». Для выполнения этой работы студент должен изучить следующие разделы начертательной геометрии: «Точка и прямая», «Плоскость», «Взаимное положение прямой и плоскости», «Взаимное положение двух плоскостей».

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Графическая работа «Эпюр №1» выполняется в масштабе 1:1 на формате А3 (297×420 мм). В правом нижнем углу формата А3 студент выполняет основную надпись – форма 1 по ГОСТ 2.104-68. Пример заполнения основной надписи приведен в Приложении I. В левом верхнем углу формата выполняется дополнительная графа 26 (14×70 мм). Пример выполнения графической работы дан в Приложении I.

В соответствии с ГОСТ 2.303-68 задание выполняется следующими типами линий:

- линии видимого контура толщиной S, равной 0,6÷0,8 мм;
- линии построения – сплошные тонкие, толщиной от $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$;
- линии невидимого контура – штриховые, толщиной от $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$;
- следы вспомогательных плоскостей-посредников изображаются разомкнутыми линиями, длиной 8-10 мм, толщиной от 1,5 *S* до 2*S*.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЭПЮРА

Вариант задания включает в себя три различные геометрические плоские фигуры:

- фигура № 1 задана координатами трех точек, фигура № 2 (многоугольник) полностью задана координатами трех точек и оставшимися точками, у которых одна из координат заменяется условием их принадлежности к плоской фигуре № 2;

- фигура № 3 занимает проецирующее положение (фронтально-проецирующее или горизонтально-проецирующее) и задается очерком в виде кольца, серпа, круга или его части.

Выполнение эпюра состоит из графического решения нескольких задач:

1) достроить недостающую проекцию многоугольника;
2) построить проекции линии пересечения треугольника *ABC* и многоугольника;
3) построить проекции линии пересечения: треугольника с плоскостью частного положения; многоугольника с плоскостью частного положения;
4) определить видимость элементов фигур на чертеже, считая фигуры непрозрачными.

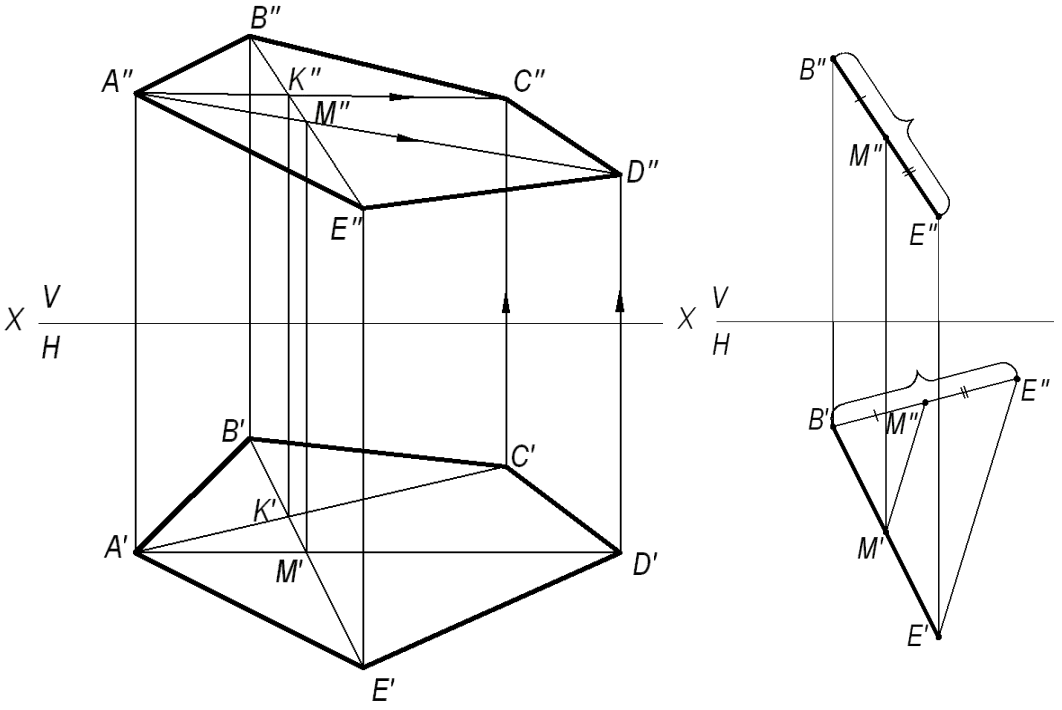
Исходные данные заданы численными значениями координат и сведены в таблицу.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА

Для выполнения графической работы студенту необходимо решить ряд задач.

Задача 1. Построение исходного чертежа многоугольника (рис. 1).

Горизонтальная проекция многоугольника *ABCDE* задана полностью, а фронтальная проекция только тремя проекциями точек *A″B″E″*. Необходимо достроить фронтальную проекцию точек *C* , *D*. При построении недостающей проекции заданного многоугольника необходимо соблюдать условие принадлежности точек данной фигуры к плоскости. Чтобы точки *C*, *D* лежали в плоскости, определенной тремя точками *A*, *B* и *E*, необходимо, чтобы они находились на прямых, лежащих в этой плоскости. Этими прямыми являются диагонали *AC*, *AD* и *BE*, горизонтальные проекции которых можно построить (рис. 1*а*).



а) *б*)

Рис. 1. Построение исходного чертежа многоугольника:

а- построение недостающих проекций вершин многоугольника; *б*- пропорциональное деление отрезка *BE*

На фронтальной проекции пятиугольника проводят проекцию диагонали *B″E″*. В плоскости пятиугольника лежат точки пересечения диагоналей *K* и *M*, горизонтальные проекции которых *K′* и *M′* имеются, а фронтальные проекции получаются в результате пересечения линий проекционной связи, проведенных из *K′* и *M′*, с диагональю *B″E″*. По двум точкам строятся фронтальные проекции других двух диагоналей *A″K″* и *A″M″*, на них должны лежать проекции точек *C″* и *D″*, которые определяются по их горизонтальным проекциям.

В случае, если линия совпадает по направлению с линией проекционной связи или круто наклонена к оси проекций, то недостающая проекция точки строится из условия пропорционального деления отрезка: если точка делит отрезок на пропорциональные части, то проекция этой точки делит проекции этого отрезка в том же отношении. На рис. 1*б* нужно построить горизонтальную проекцию точки *M′*. Из проекции точки *B′* проводят линию под углом меньше 90° к *B′E′* и на ней от проекции точки *B′* откладывают отрезки равные *B″M″* и *B″E″*. Соединяют *E′* и *E″* и параллельно этому направлению проводят от M″ линию до пересечения с *B′E′*. Получают искомую горизонтальную проекцию *M′*.

Задача 2. Построить точку пересечения прямой *MN* с плоскостью треугольника *ABC*.

Если прямая линия не параллельна плоскости, то она пересекает эту плоскость в действительной точке (см. рис. 2).

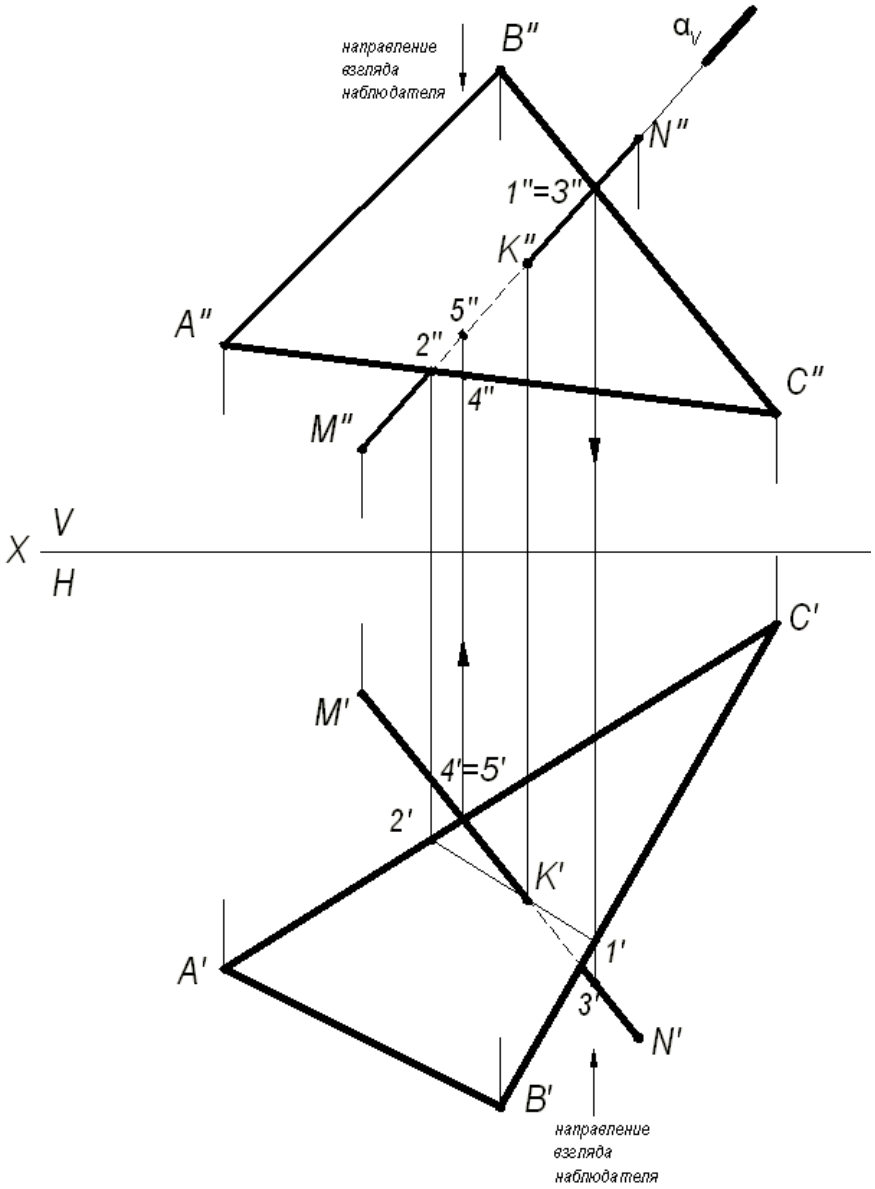


Рис. 2. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Алгоритм решения задачи:

1) Через заданную прямую *MN* проводим вспомогательную плоскость-посредник α, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций *V* все точки плоскости-посредника α будут проецироваться в прямую линию, совпадающую с фронтальной проекцией прямой *M″N″*.

2) Находим линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника α с заданной плоскостью треугольника *ABC*. На чертеже линия (1,2).

3) Находим искомую точку пересечения *K* прямой *MN* с плоскостью треугольника *ABC*. Она определяется как пересечение искомой прямой с найденной линией пересечения вспомогательной плоскости-посредника с плоскостью треугольника *ABC*.

Определение видимости на чертеже.

В начертательной геометрии плоскости считаются непрозрачными, поэтому необходимо на проекциях определить видимость.

Для определения видимости на чертеже используем метод конкурирующих точек, сущность которого заключается в выборе двух скрещивающихся прямых.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций *V* поступают так. Выбираем две скрещивающиеся прямые *B″C″* и *M″N″*, фронтальные проекции которых пересекаются в точках 1 и 3. По горизонтальной проекции определяем, что проекция точки 3′, лежащая на проекции прямой *M′N′*, будет закрывать проекцию точки 1′, лежащую на проекции прямой *B′C′*, т. к она будет ближе к наблюдателю. На чертеже направление взгляда наблюдателя показано стрелкой. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций проекция *M″N″* будет закрывать проекцию *B″C″*. Границей видимости является проекция точки пересечения К″.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций *H* выбираем две скрещивающиеся прямые *A′C′* и *M′N′*, горизонтальные проекции которых пересекаются в точках 4′ и 5′. По фронтальной проекции определяем, что проекция точки 5″, лежащая на проекции прямой *M″N″*, будет закрывать проекцию точки 4″, лежащую на проекции прямой *A″C″*, т. к. она будет ближе к наблюдателю. На чертеже направление взгляда наблюдателя показано стрелкой. Следовательно, на горизонтальной плоскости проекций проекция *M′N′* будет закрывать проекцию *A′C′*. Границей видимости является проекция точки пересечения *K′*.

Задача 3. Построение линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает частное положение.

Даны две плоскости: плоскость ΔABC – плоскость общего положения, плоскость ΔDEK – плоскость частного положения, которая расположена перпендикулярно фронтальной плоскости проекций (рис. 3).

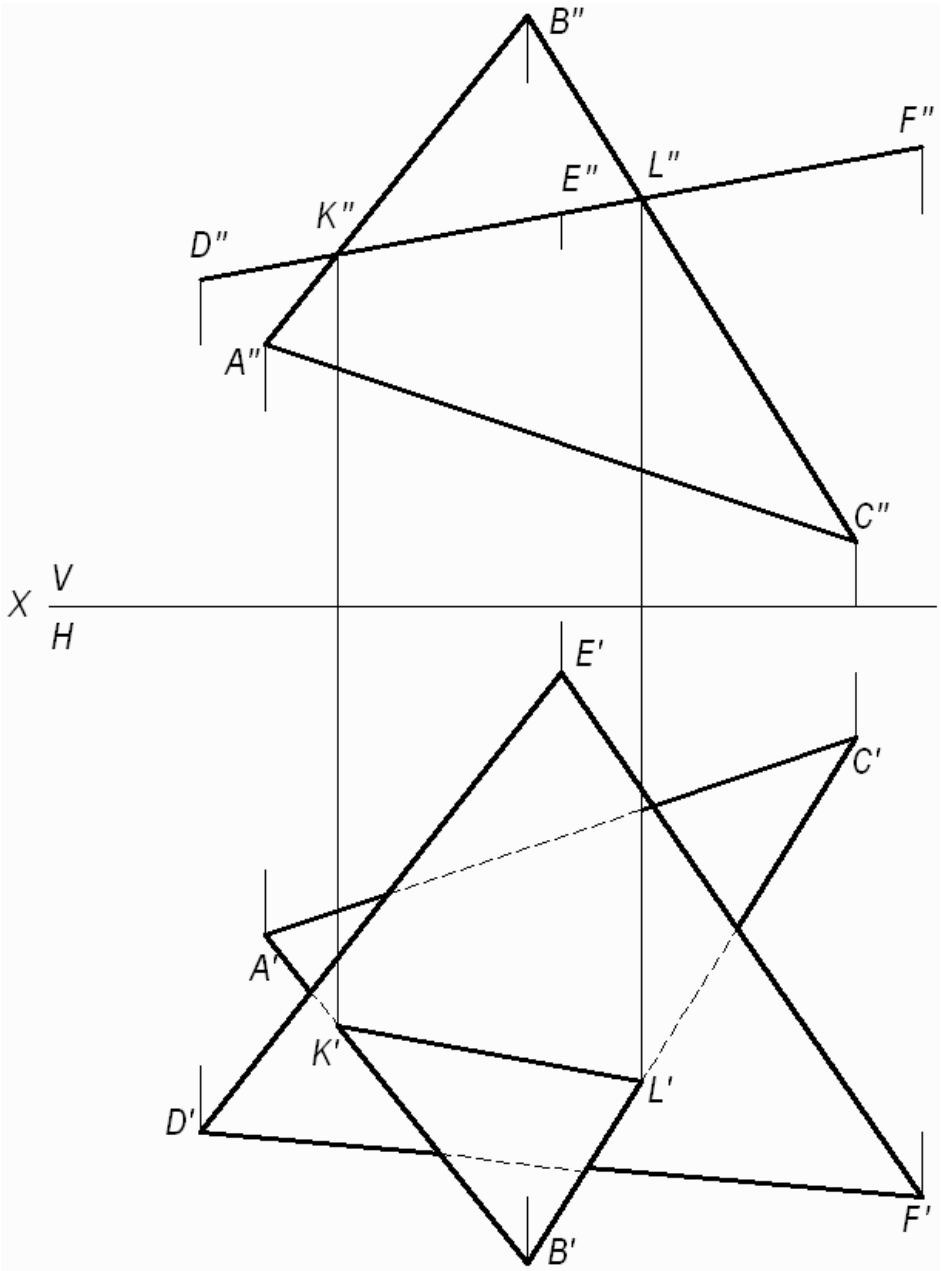


Рис. 3. Построение линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает частное положение

Фронтальная проекция ΔDEK совпадает с фронтальным следом плоскости и фронтальной проекцией линии пересечения треугольников.

(*KL*) - линия пересечения двух треугольников. Проекции этой линии пересечения – фронтальную и горизонтальную строят исходя из свойства принадлежности точек *K* и *L* сторонам (*AB*) и (*BC)*, соответственно. Видимость треугольников на горизонтальной плоскости проекций определяем методом конкурирующих точек, рассмотренном в задаче 2.

Задача 4. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.

Даны две плоскости общего положения, заданные треугольниками *ABC* и *DEK*. Построить линию пересечения двух треугольников, определить видимость треугольников на проекциях.

Прямая линия, получаемая при взаимном пересечении двух плоскостей, определяется двумя точками, каждая из которых одновременно принадлежит обеим плоскостям. Общие точки определяются решением основной позиционной задачи начертательной геометрии – построение точки пересечения прямой с плоскостью (см. рис. 2).

Для решения данной задачи проводят вспомогательные плоскости-посредники частного положения (проецирующие плоскости). Решение задачи приведено на рис. 4.

Алгоритм решения задачи:

1. Определяют первую точку линии пересечения двух треугольников – точку *M*.

1.1. Фронтально-проецирующая плоскость α проведена через сторону *DK* и задана на чертеже фронтальным следом α_V.

1.2. Плоскость α пересекает плоскость треугольника *ABC* по прямой (1,2), на чертеже строят две проекции этой прямой.

1.3. Прямая (1,2) пересекает сторону *DK* в точке *M*, строят две проекции точки M'' и M'.

2. Определяют вторую точку искомой линии пересечения двух треугольников – точку *N*.

2.1. Горизонтально-проецирующая плоскость β проведена через сторону *AB* и задана на чертеже горизонтальным следом β_H.

2.2. Плоскость β пересекает плоскость треугольника *DEK* по прямой (3,4), на чертеже строят две проекции этой прямой.

2.3. Прямая (3,4) пересекает *AB* в точке *N*, строят две проекции точки N'' и N'.

Плоскости треугольников *ABC* и *DEK* пересекаются по прямой *MN*.

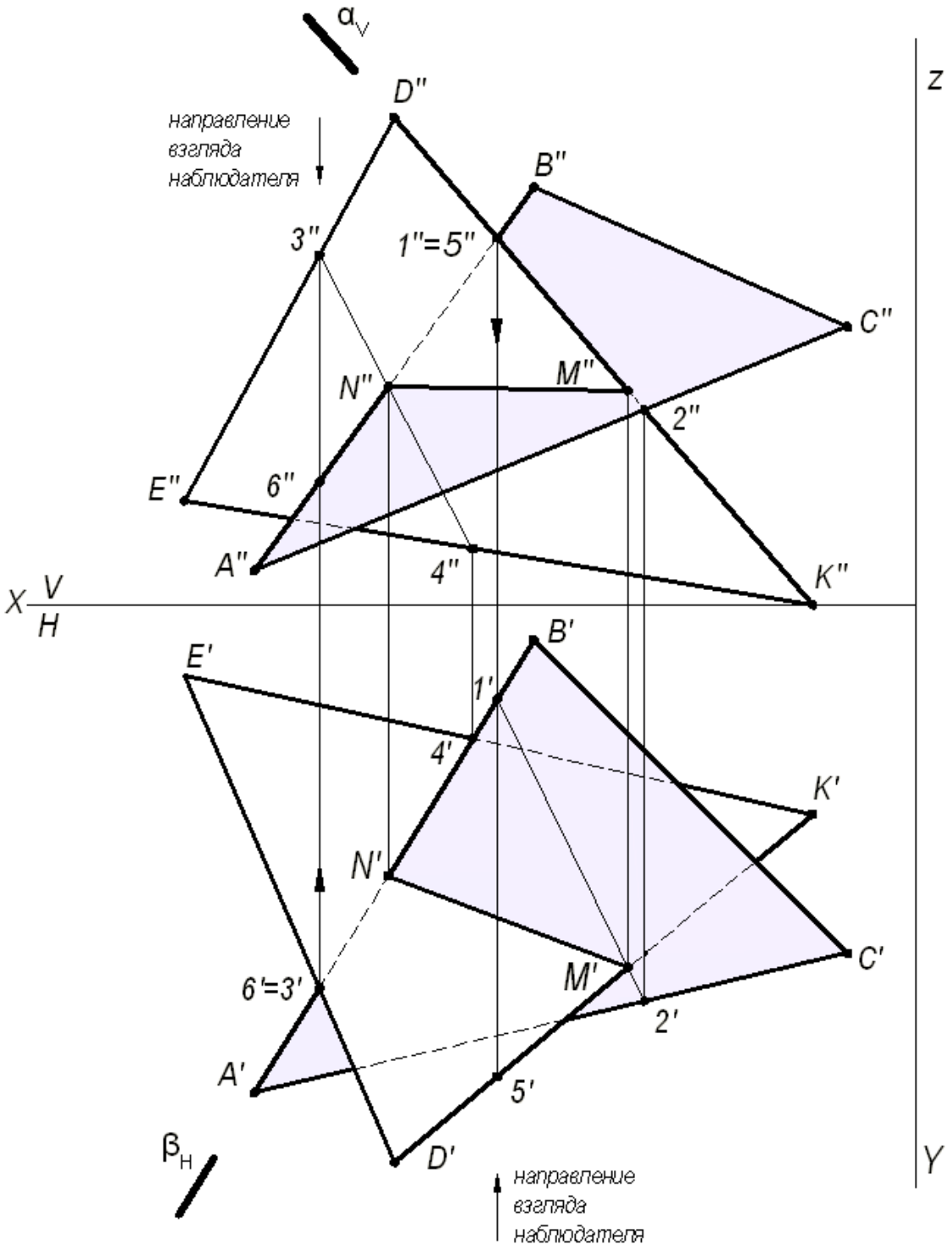


Рис. 4. Построение линии пересечения двух треугольников

3. Видимость плоских фигур на проекциях определяют методом конкурирующих точек.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций *V* выбираем две скрещивающиеся прямые *D″K″* и *A″B″*, фронтальные проекции которых пересекаются в точках 1″ и 5″. По горизонтальной проекции определяем, что проекция точки 5′, лежащая на проекции прямой *D′K′*, будет закрывать про-

екцию точки 1′, лежащую на проекции прямой $A'B'$, т. к. она будет ближе к наблюдателю. Следовательно, на фронтальной плоскости проекция $D''K''$ будет закрывать проекцию $A''B''$. Границей видимости является проекция линии пересечения $M''N''$.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций H выбираем две скрещивающиеся прямые $A'B'$ и $D'E'$, горизонтальные проекции которых пересекаются в точках 3′ и 6′. По фронтальной проекции определяем, что проекция точки 3″, лежащая на проекции прямой $D''E''$, будет закрывать проекцию точки 6″, лежащую на проекции прямой $A''B''$, т.к. она будет ближе к наблюдателю. Следовательно, на горизонтальной плоскости проекция $D'E'$ будет закрывать проекцию $A'B'$. Границей видимости является проекция линии пересечения $N'M'$.

Задача 5. Построить две проекции линии пересечения плоскости α - общего положения, заданной следами и плоскости β - общего положения, заданной параллельными прямыми a и b.

Для решения данной задачи проводят вспомогательные плоскости-посредники частного положения (плоскости уровня), пересекающие заданные плоскости по прямым, недостающие проекции которых легко строятся и пересекаются в пределах чертежа.

Графическое решение задачи приведено на рис. 5.

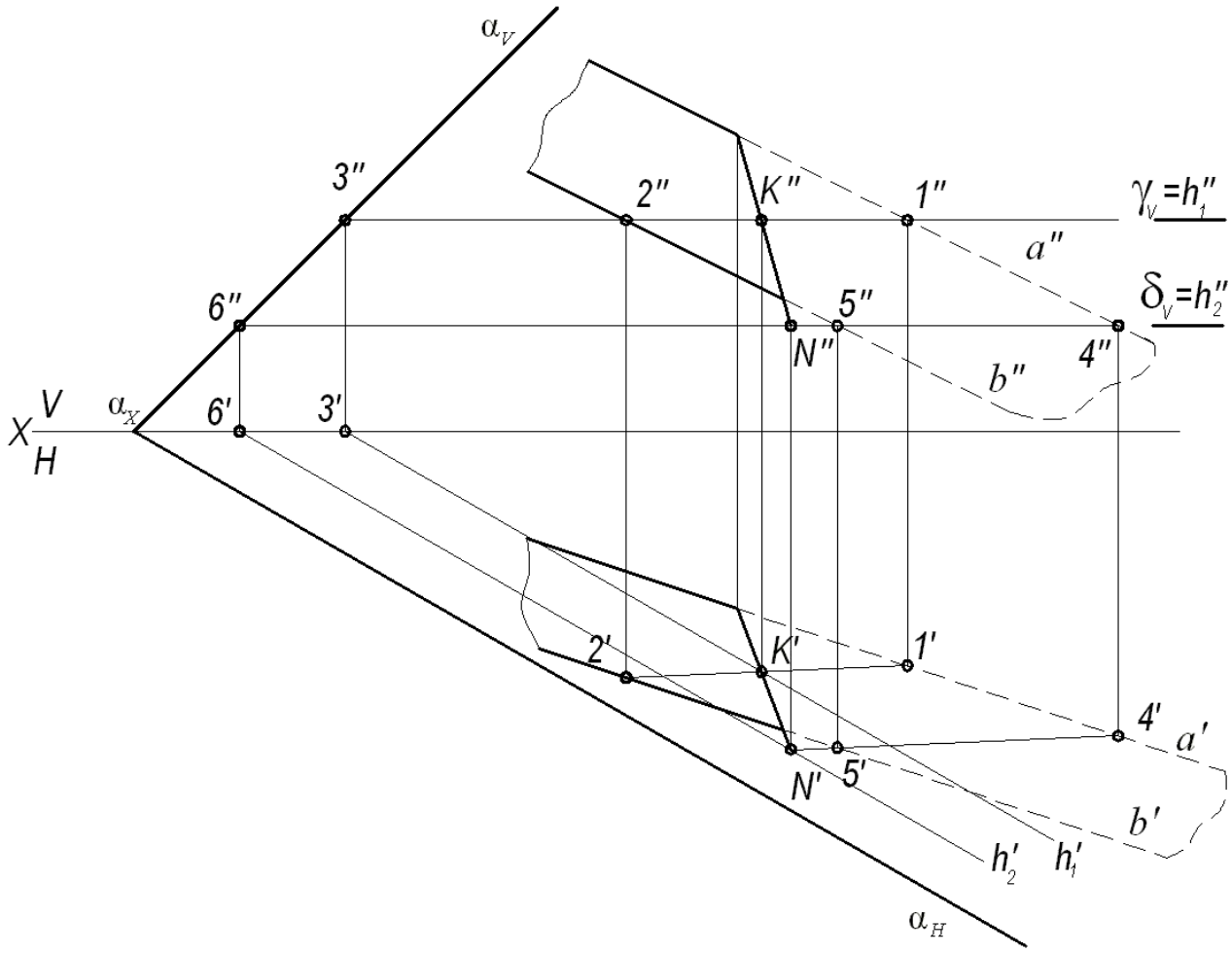
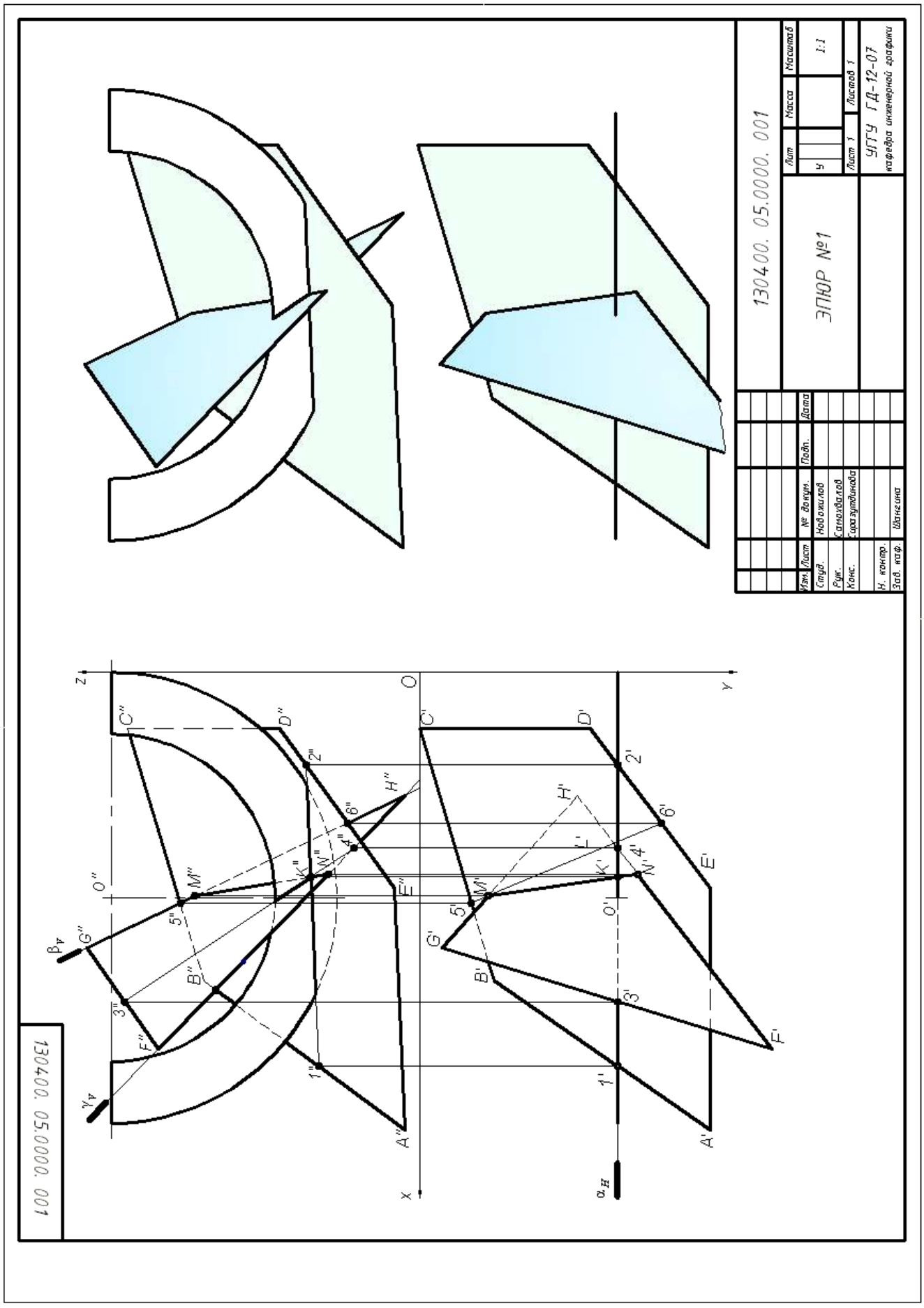


Рис. 5. Построение линии пересечения двух плоскостей

Вспомогательная горизонтальная плоскость-посредник γ задана следом γ_V и пересекает плоскость α по горизонтали, проходящей через точку 3, а плоскость β по горизонтали (1, 2). Горизонтальные проекции этих горизонталей пересекаются в точке *K*. Строят фронтальную проекцию точки *K*, используя свойство принадлежности точки прямой линии. Точка *K* принадлежит обеим плоскостям α и β. Вторая точка *N*, общая для двух плоскостей α и β, определяется второй вспомогательной плоскостью-посредником частного положения δ (на чертеже задана следом δ_V). Искомая прямая (*KN*) является линией пересечения двух плоскостей α и β.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. Учеб. пособие. М.: Высшая школа. 2007.272 с.

2. Самохвалов Ю. И. Начертательная геометрия. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2011. 121 с.

3. Самохвалов Ю. И., Шангина Е. И. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Учебно-методическое пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2011. 96 с.

Минобрнауки России
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

Методические указания по самостоятельной работе студентов по направлению 15.03.01 – «Машиностроение», 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование» 23.03.01 Технология транспортных процессов для студентов очного и заочного обучения

Автор: Хазин М.Л.

Одобрен на заседании кафедры
Эксплуатации горного оборудования
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____
(подпись)
Симисинов Д.И.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 8 от 17.04.2019
(Дата)

Рассмотрен методической комиссией факультета
Горно-механического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Барановский В.П.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 7 от 19.04.2019
(Дата)

Екатеринбург
2019

Х12

Рецензенты: Тихонов И. Н., к-т. техн. наук, зав. кафедрой «Электронное машиностроение» УрФУ, Жуков Ю. Н., д-р. техн. наук, профессор кафедры «Электронное машиностроение» УрФУ

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры эксплуатации горного оборудования 05 июня 2018 года (протокол № 6) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Хазин М. Л. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ: Методические указания по самостоятельной работе студентов по направлению 15.03.01 – «Машиностроение». Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 24 с.

В методических указаниях по самостоятельной работе приведена последовательность выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Материаловедение», изложена методика решения задач, даны задачи, вопросы для самопроверки по разделам.

Методические указания предназначены для студентов направлений бакалавриата: 15.03.01 – «Машиностроение», 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование», 23.03.01 Технология транспортных процессов, подготовка которых требует знаний по свойствам и применению металлических и неметаллических материалов.

© Хазин М. Л., 2019
© Уральский государственный горный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование производства, выпуск современных разнообразных машиностроительных конструкций, специальных приборов, машин и различной аппаратуры невозможны без дальнейшего развития производства и изыскания новых материалов, как металлических, так и неметаллических.

Материаловедение является одной из первых инженерных дисциплин, основы которой широко используются при курсовом и дипломном проектировании, а также в практической деятельности инженера-машиностроителя.

Прогресс в области машиностроения тесно связан с созданием и освоением новых, наиболее экономичных материалов, обладающих самыми разнообразными механическими и физико-химическими свойствами. Свойства материала определяются его внутренним строением, которое, в свою очередь, зависит от состава и характера предварительной обработки. В курсе "Материаловедение" изучаются физические основы этих связей.

ПРОГРАММА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ЧАСТЬ I. МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ

Строение металлов

Металловедение как наука о свойствах металлов и сплавов. Типы связи в твердых телах. Атомно-кристаллическое строение металлов. Процесс кристаллизации.

Рассмотрите типы химической связи в твердых телах, основное внимание обратите на особый тип металлической связи, который обусловливает отличительные свойства металлов: высокую электропроводность и теплопроводность, высокую пластичность и металлический блеск. Металлические тела характеризуются кристаллическим строением. Однако свойства реальных кристаллов определяются известными несовершенствами кристаллического строения. В связи с этим необходимо разобраться в видах несовершенств и особенно в строении дислокаций (линейных несовершенств), причинах их легкого перемещения в кристаллической решетке и влияния на механические свойства.

Термодинамические причины фазовых превращений являются одним из частных случаев общего закона природы: стремления любой системы

к состоянию с наименьшим запасом энергии (в данном случае свободной энергии). Уясните теоретические основы процесса кристаллизации, состоящего из двух элементарных процессов: зарождения и роста кристаллов, и влияния на эти параметры степени переохлаждения.

В процессе кристаллизации при формировании структуры литого металла решающее значение имеет реальная среда, а также возможность искусственного воздействия на строение путем модифицирования.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?

2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?

3. Что такое элементарная ячейка?

4. Что такое полиморфизм?

5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?

6. Что такое мозаичная структура?

7. Виды дислокаций и их строение.

8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?

9. Каковы параметры процесса кристаллизации?

10. Что такое переохлаждение?

Теория сплавов

Сплавы, виды взаимодействия компонентов в твердом состоянии. Диаграммы состояния для случаев полной нерастворимости, неограниченной и ограниченной растворимости компонентов в твердом виде, а также для случая образования устойчивого химического соединения.

Необходимо отчетливо представлять строение металлов и сплавов в твердом состоянии. Уясните, что такое твердый раствор, химическое (металлическое) соединение, механическая смесь. Наглядное представление о состоянии любого сплава в зависимости от его состава и температуры дают диаграммы состояния. Нужно усвоить общую методику построения диаграмм состояния для различных случаев взаимодействия компонентов в твердом состоянии.

При изучении диаграмм состояния нужно уметь применять правило отрезков (для определения доли каждой фазы или структурной составляющей в сплаве), правило фаз (для построения кривых нагревания и охлаждения), определять химический состав фаз. С помощью правил Курнакова нужно уметь установить связь между составом, строением и свойствами сплава.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число степеней свободы?

2. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.

3. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения?

4. Как строятся диаграммы состояния?

5. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.

6. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.

7. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.

8. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.

10. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?

Пластическая деформация и механические свойства металлов

Напряжения и деформация. Явление наклепа. Стандартные механические свойства: твердость; характеристики, определяемые при растяжении; ударная вязкость; сопротивление усталости.

Рассмотрите физическую природу деформации и разрушения. Внимание уделите механизму пластической деформации, ее влиянию на плотность дислокаций. Уясните связь между основными характеристиками, строением и механическими свойствами. Разберитесь в сущности явления наклепа и его практическом использовании.

Изучите основные методы исследования механических свойств металлов и физический смысл определяемых при разных методах испытания характеристик.

Вопросы для самопроверки

1. В чем различие между упругой и пластической деформациями?

2. Как изменяется строение металла в процессе пластического деформирования?

3. Как изменяется плотность дислокаций при пластической деформации?

4. Как влияют дислокации на прочность металла?

5. Почему наблюдается огромное различие теоретической и практической прочности?

6. Как влияет изменение строения на свойства деформированного металла?

7. В чем сущность явления наклепа и какое он имеет практическое использование?

8. Какие характеристики механических свойств определяются при испытании на растяжение?

9. Что такое твердость?

10. Какие методы определения твердости вы знаете?

Влияние нагрева на структуру и свойства деформируемого металла

Необходимо знать сущность рекристаллизационных процессов: возврата, первичной рекристаллизации, собирательной (вторичной) рекристаллизации, протекающих при нагреве деформированного металла. Уясните, как при этом изменяются механические, физико-химические свойства и размер зерна. Установите влияние состава сплава и степени пластической деформации на протекание рекристаллизационных процессов. Научитесь выбирать режим рекристаллизационного отжига. Уясните его практическое значение, различие между холодной и горячей пластическими деформациями.

Вопросы для самопроверки

1. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве?
2. В чем сущность процесса возврата?
3. Что такое полигонизация?
4. Сущность процессов первичной и вторичной рекристаллизации.
5. Как влияют состав сплава и степень пластической деформации на температуру рекристаллизации?
6. Что такое критическая степень деформации?
7. В чем различие между холодной и горячей пластическими деформациями?
8. Как изменяются строение и свойства металла при горячей пластической деформации?
9. Каково назначение рекристаллизационного отжига и как он осуществляется?

Железо и его сплавы

Диаграмма состояния железо - цементит. Классификация железоуглеродистых сплавов. ГОСТы на металлы и сплавы. Фазы, образуемые легирующими элементами в сплавах железа. Структурные классы легированных сталей. Чугуны.

Научитесь вычерчивать диаграмму состояния железо - цементит и определять все фазы и структурные составляющие этой системы. С помощью правила фаз постройте кривые охлаждения (или нагревания) для любого сплава; разберитесь в классификации железоуглеродистых сплавов и усвойте, что различие между тремя классами (техническое железо, сталь, чугун) не является формальным (по содержанию углерода). Разные классы сплавов принципиально различны по структуре и свойствам. Технические железоуглеродистые сплавы состоят не только из железа и углерода, но и обязательно содержат постоянные примеси, попадающие в сплав в результате предыдущих операций при выплавке.

Изучите влияние легирующих элементов на критические точки железа и стали и объясните, при каком сочетании углерода и соответствующего ле-

гирующего элемента могут быть получены легированные стали ферритного, перлитного, аустенитного и ледебуритного классов.

Уясните влияние постоянных примесей на строение чугуна и разберитесь в различии металлической основы серых чугунов разных классов. Запомните основные механические свойства и назначение чугунов различных классов и их маркировку. Обратите внимание на способы получения ковких и высокопрочных чугунов. Изучите физическую сущность процесса графитизации.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое феррит, аустенит, перлит, цементит и ледебурит?
2. Какие превращения происходят в сплавах при температурах A1, A2, A3, A4, Acm?
3. Каковы структуры серых чугунов? 1
4. Каковы структура и свойства технического железа, стали и белого чугуна?
5. Как влияют легирующие элементы на положение критических точек железа и стали?
6. Какие легирующие элементы являются карбидообразующими?
7. Какие легирующие элементы способствуют графитизации?
8. Как влияют легирующие элементы на свойства феррита и аустенита?
9. В чем отличие серого чугуна от белого?
10. Классификация и маркировка серых чугунов.

Теория термической обработки стали

Превращения в стали при нагреве. Превращения переохлажденного аустенита. Мартенситное превращение и его особенности. Превращения аустенита при непрерывном охлаждении. Превращения при отпуске закаленной стали.

Теория и практика термической обработки стали - главные вопросы металловедения. Термическая обработки - один из основных способов влияния на строение, а следовательно, и на свойства сплавов.

При изучении превращений переохлажденного аустенита особое внимание обратите на диаграмму изотермического распада, устанавливающую связь между температурными условиями превращения, интенсивностью распада и строением продуктов превращения.

Изучите влияние легирующих элементов на кинетику и характер превращения аустенита в перлитной, промежуточной и мартенситной областях. В связи с влиянием легирующих элементов на диаграммы изотермического распада аустенита рассмотрите причины получения различных классов по структуре (перлитного, мартенситного, аустенитного). Уясните влияние легирующих элементов на превращения при отпуске. Запомните, что легирующие элементы, как правило, затормаживают процессы превращений.

Вопросы для самопроверки

1. Механизм образования аустенита при нагреве стали.
2. Каковы механизмы и температурные районы образования структур перлитного типа (перлита, сорбита, тростита) и бейнита?
3. В чем различие между перлитом, сорбитом и троститом?
4. Что такое мартенсит и в чем сущность и особенности мартенситного превращения?
5. Что такое критическая скорость закалки?
6. От чего зависит количество остаточного аустенита?
7. В чем сущность превращений, происходящих при отпуске?
8. Как влияют легирующие элементы на перлитное превращение?
9. В чем сущность явления отпускной хрупкости?
10. Как влияют легирующие элементы на превращения при отпуске?

Технология термической обработки

Основные виды термической обработки стали. Отжиг, нормализация, закалка, обработка холодом. Прокаливаемость стали. Отпуск стали. Поверхностная закалка.

Уясните влияние скорости охлаждения на структуру и свойства стали и физическую сущность процессов отжига, нормализации, закалки и обработки холодом. При изучении технологических процессов термической обработки особое внимание обратите на разновидности режимов и их назначение. Для выяснения причин брака при термической обработке стали следует прежде всего разобраться в природе термических и фазовых напряжений.

Уясните различие между закаливаемостью и прокаливаемостью стали, а также факторы, влияющие на эти характеристики. Разберитесь в способе получения высокопрочных деталей - термомеханической обработке.

Различные виды поверхностной закалки позволяют получить особое сочетание свойств поверхностного слоя и сердцевины, что приводит к повышению эксплуатационных характеристик изделия.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
2. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
3. Какова природа фазовых и термических напряжений?
4. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?
5. Каковы виды и причины брака при закалке?
6. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особен-

ности?

7. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?

8. Какие вам известны технологические приемы уменьшения деформации при термической обработке?

9. Для чего и как производится обработка холодом?

10. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

Химико-термическая обработка стали и поверхностное упрочнение наклепом

Физические основы химико-термической обработки. Цементация. Азотирование. Цианирование. Диффузионная металлизация. Дробеструйный наклеп.

При изучении основ химико-термической обработки следует исходить из того, что принципы химико-термической обработки едины. Процесс химико-термической обработки состоит из выделения атомов насыщающего вещества внешней средой, захвата (сорбции) этих атомов поверхностью металла и диффузии их внутрь металла. Поэтому рассмотрите реакции в газовой среде при цементации или азотировании и усвойте современные представления о процессе диффузии в металлах. В большинстве случаев насыщение может происходить из твердой, жидкой и газовой сред, а поэтому нужно знать наиболее удачные варианты насыщения для каждого метода химико-термической обработки и конечные результаты (поверхностное упрочнение и изменение физико-химических свойств).

Разберитесь в технологии проведения отдельных видов химико-термической обработки. Уясните преимущества и области использования цементации, азотирования, цианирования и различных видов диффузионной металлизации. Объясните влияние легирования на механизм формирования структуры поверхностного слоя. Рассмотрите сущность и назначение дробеструйного поверхностного наклепа и его влияние на эксплуатационные свойства деталей машин.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключаются физические основы химико-термической обработки?

2. Химизм процесса азотирования.

3. Химизм процесса цементации.

4. Назначение цементации и режим термической обработки после нее.

5. Для каких целей и как производится нитроцементация?

6. Каковы свойства цементированных и азотированных изделий?

7. Химизм и назначение процесса цианирования.

8. Сущность и назначение процесса борирования.

9. Как изменяются свойства изделий при дробеструйной обработке и

какова природа этих изменений?

10. Как влияет поверхностное упрочнение на эксплуатационные характеристики изделий?

Конструкционные стали

Конструкционные стали общего назначения. Цементуемые, улучшаемые, пружинно-рессорные стали. Высокопрочные мартенситостареющие стали. Коррозионно-стойкие и жаростойкие стали и сплавы. Жаропрочные стали и сплавы.

Нужно усвоить принципы маркировки сталей и уметь по маркировке определить состав и особенности данной стали, а также иметь общее представление о разных группах стали.

Разберитесь во влиянии легирующих элементов на изменение структуры и свойств стали, особое внимание уделите технологическим особенностям термической обработки легированной стали различных групп.

Рассмотрите способы классификации, основные принципы выбора для различного назначения цементуемых, улучшаемых, пружинно-рессорных, износостойких, высокопрочных, нержавеющих, жаропрочных и других сталей.

При изучении жаропрочных сталей обратите внимание на особенности поведения металла в условиях нагружения при повышенных температурах. Уясните сущность явления ползучести и основные характеристики жаропрочности; каковы предельные рабочие температуры и области применения сталей различного структурного класса.

В качестве примеров указать две-три марки стали каждой группы, расшифровать состав, назначить режим термической обработки и охарактеризовать структуру, свойства и область применения.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: 40, 20Х, 30ХГСА, 50Г, Г13, ШХ15, 18Х2Н4ВА, 5ХНМ, Х18Н9Т, Н18К8М5Т.

2. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?

3. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?

4. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?

5. Какова термическая обработка цементуемых деталей?

6. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?

7. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

8. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?

9. Какие вы знаете износостойкие стали?

10. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющим сталям?

Инструментальные стали

Классификация и маркировка инструментальных сталей. Стали, не обладающие и обладающие теплостойкостью. Стали для режущего, измерительного и штампового инструмента. Твердые сплавы.

Изучите классификацию инструментальных сталей в зависимости от назначения инструмента и в связи с этим рассмотрите основные эксплуатационные свойства инструмента каждой группы. Особое внимание уделите быстрорежущим сталям. Уясните причины их высокой красностойкости и особенности термической обработки.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: У10, 9ХС, ХВГ, Р18, Р18Ф2, Р9К10, Р9М4К8, Х12, 6ХВ2С, Х12М.
2. Как классифицируются инструментальные стали?
3. Требования, предъявляемые к сталям для режущего инструмента.
4. Приведите примеры углеродистых и легированных сталей, используемых для режущего инструмента.
5. Укажите и расшифруйте основные марки быстрорежущей стали.
6. Что представляют собой твердые сплавы?
7. Каковы свойства и преимущества твердых сплавов?
8. Укажите марки твердых сплавов, их состав и назначение.

Алюминий, магний и их сплавы

Деформируемые и литейные сплавы.

Обратите внимание на основные преимущества алюминиевых и магниевых сплавов, связанные с их высокой удельной прочностью. Рассмотрите классификацию алюминиевых сплавов и обоснуйте технологический способ изготовления изделий из сплавов каждой группы. Разберитесь в основах теории термической обработки (старения) легких сплавов. Обоснуйте выбор способа упрочнения деформируемых и литейных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Свойства и применение алюминия.
2. Как классифицируются алюминиевые сплавы?
3. Какие сплавы упрочняются путем термической обработки?
4. В чем сущность процесса старения?
5. Какие сплавы не упрочняются путем термической обработки?
6. Какие вы знаете литейные алюминиевые сплавы?
7. Какие вы знаете жаропрочные алюминиевые сплавы?
8. Какие вы знаете порошковые алюминиевые сплавы?

9. Каковы свойства магния?

10. Укажите свойства и назначение сплавов на основе магния.

Медь и ее сплавы

Латуни и бронзы.

Изучите классификацию медных сплавов и уясните маркировку, состав, структуру, свойства и области применения разных групп медных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Как влияют примеси на свойства чистой меди?

2. Как классифицируются медные сплавы?

3. Какие сплавы относятся к латуням?

4. Приведите несколько примеров латуней с указанием их состава, структуры, свойств и назначения.

5. Какие сплавы относятся к бронзам? Их маркировка и состав.

6. Укажите строение, свойства и назначение различных бронз.

7. Какой термической обработке подвергается бериллиевая бронза?

Композиционные материалы

Обратите внимание на принципиальное отличие композиционного материала, заключающееся в сочетании разнородных материалов с четкой границей раздела между ними. В связи с тем, что композит обладает свойствами, которыми не может обладать ни один из его компонентов в отдельности, такие материалы становятся весьма перспективными в различных областях новой техники. Укажите свойства композитов в зависимости от вида матрицы и формы, размеров и взаимного расположения наполнителя. Уясните возможность использования композитов в качестве жаропрочных материалов и способы повышения их жаропрочности.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое композиты?

2. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?

3. Как подразделяют композиты по виду матрицы?

4. От чего зависят механические свойства композитов?

5. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?

ЧАСТЬ II. НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Пластические массы

В основе неметаллических материалов лежат полимеры. Обратите внимание на особенности строения полимеров, которые определяют их механические и физико-химические свойства. Классификация полимерных материалов. Свойства и области применения пластмасс.

Пластические массы - искусственные материалы, получаемые на основе органических полимерных связывающих веществ, которые являются обязательными компонентами пластмасс. Изучите различные группы пластических масс, их свойства и области применения.

Вопросы для самопроверки

1. Что лежит в основе классификации полимеров?
2. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?
3. Какие вы знаете наполнители пластмасс?
4. Для чего вводят в пластмассы отвердители?
5. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.
6. Укажите область применения термопластов и реактопластов.
7. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

Резиновые материалы

Как технический материал резина отличается от других материалов высокими эластичными свойствами, что связано со свойствами самой основы резины - каучука. Уясните состав резины, способы получения и влияние различных добавок на ее свойства. Подробно рассмотрите влияние порошковых и органических наполнителей на свойства резины, изучите физико-механические свойства и области применения резин различных марок.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой резина?
2. Какие компоненты относятся к совмещающимся и как они влияют на свойства резины?
3. Объясните роль порошковых наполнителей.
4. В каких случаях применяются волокнистые наполнители?

Неорганические материалы

Поскольку большинство неорганических материалов содержит различные соединения кремния с другими элементами, эти материалы получили общее название силикатных материалов. Обратите внимание на внутреннее строение неорганического стекла. Уясните сущность стеклообразного состояния как разновидности аморфного состояния вещества. Разберитесь в изме-

нении свойств стекла в зависимости от состава. Рассмотрите стеклокристаллические материалы (ситаллы) и их отличие от стекла минерального. Уясните причины образования кристаллической структуры ситаллов.

При изучении керамических материалов обратите внимание на отличие технической керамики от обычной. Разберитесь в химическом и фазовом составах технической керамики, ее свойствах и области применения.

Вопросы для самопроверки

Какие силикатные материалы относятся к минеральному стеклу?

Их отличительные свойства.

Как достигаются электроизоляционные или электропроводящие свойства стекла?

Объясните причины, вызывающие кристаллизацию ситаллов (стеклокристаллитов).

Укажите область применения ситаллов.

5. В чем отличие технической керамики от обычной? Укажите область ее применения.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Задания на контрольные работы выдают индивидуально каждому студенту. Задание включает вопросы и задачи по основным разделам курса.

При выполнении контрольных работ студенты изучают методику выбора и назначения сталей и сплавов для изготовления конкретных деталей машин и различного вида инструментов, а также знакомятся с особенностями строения, технологией получения и областью применения наиболее распространенных неметаллических материалов. Одновременно студент должен научиться пользоваться рекомендуемыми справочными материалами, с тем чтобы уметь в дальнейшем правильно выбрать материал при курсовом и дипломном проектировании.

Перечень ГОСТов, необходимых для выполнения контрольных работ, приведен в приложении. Диаграмма состояния железо-цементит и диаграмма изотермического превращения аустенита эвтектоидной стали У8 также приведены в приложении (см. рис. 1 и 2).

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант 1

1. Что такое ликвация? Виды ликвации, причины их возникновения и способы устранения.

2. Дайте определение ударной вязкости (KCV). Опишите методику измерения этой характеристики механических свойств металла.

3. Вычертите диаграмму состояния железо - карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите прев-

ращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 3,6% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 45...50 HRC. Укажите, как этот режим называется, опишите сущность превращений и какая структура получается в данном случае.

5. Как изменяются структура и свойства стали 40 и У12 в результате закалки от температуры 750 и 850° С. Объясните с применением диаграммы состояния железо-цементит. Выберите оптимальный режим нагрева под закалку каждой стали.

Вариант 2

1. Как и почему скорость охлаждения при кристаллизации влияет на строение слитка?

2. Из листа свинца путем прокатки при комнатной температуре была получена тонкая фольга. Твердость и прочность этой фольги оказались такими же, как у исходного листа. Объясните, какие процессы происходили при пластической деформации свинца и какими изменениями структуры и свойств они сопровождались.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,8% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму состояния железо -цементит и кривую изменения твердости в зависимости от температуры отпуска, назначьте для углеродистой стали 40 температуру закалки и температуру отпуска, необходимые для обеспечения твердости 400 НВ. Опишите превращения на всех этапах термической обработки и получаемую структуру.

5. Для каких целей применяется диффузионный отжиг? Как выбирается режим такого отжига? Приведите примеры.

Вариант 3

1. Опишите виды твердых растворов. Приведите примеры.

2. Дайте определение твердости. Какими методами измеряют твердость металлов и сплавов? Опишите их.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-цементит, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 2,2% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 150 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в данном случае.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит обоснуйте выбор режима термической обработки, применяемой для устранения цементитной сетки в заэвтектоидной стали. Дайте определение выбранного режима обработки и опишите превращения, которые происходят при нагреве и охлаждении.

Вариант 4

1. Опишите физическую сущность и механизм процесса кристаллизации.

2. Для чего проводится рекристаллизационный отжиг? Как назначается режим этого вида обработки? Приведите несколько конкретных примеров.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,4 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму изотермического превращения аустенита, объясните, почему нельзя получить в стали чисто мартенситную структуру при охлаждении ее со скоростью меньше критической?

5. После термической обработки углеродистой стали получена структура цементит + мартенсит отпуска. Нанесите на диаграмму состояния железо-цементит ординату заданной стали (примерно) и обоснуйте температуру нагрева этой стали под закалку. Так же укажите температуру отпуска.. Опишите превращения, которые произошли при термической обработке.

Вариант 5

1. Что такое ограниченные и неограниченные твердые растворы? Каковы необходимые условия образования неограниченных твердых растворов?

2. Опишите сущность явления наклепа и примеры его практического использования.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава содержащего 1,1% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. При непрерывном охлаждении стали У8 получена структура троостит + мартенсит. Нанесите на диаграмму изотермического превращения аустенита кривую охлаждения, обеспечивающую получение данной структуры. Укажите интервалы температур превращений и опишите характер превращения в каждом из них.

5. С помощью диаграммы состояния железо - цементит установите температуру полной и неполной закалки для стали 45 и опишите структуру и свойства стали после каждого вида термической обработки.

Вариант 6

1. Начертите диаграмму состояния для случая ограниченной растворимости компонентов в твердом виде. Укажите структурные составляющие во всех областях этой диаграммы и опишите строение типичных сплавов различного состава, встречающихся в этой системе.

2. Волочение медной проволоки проводят в несколько переходов. В некоторых случаях проволока на последних переходах разрывается. Объясните причину разрыва и укажите способ его предупреждения.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 200 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в этом случае.

5. Используя диаграмму состояния железо-цементит, установите температуры нормализации, отжига и закалки для стали У12. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали после каждого вида обработки.

Вариант 7

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к железу. Какое практическое значение оно имеет?

2. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве, какие процессы происходят при этом?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,7 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей твердость 20...25 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура образуется в данном случае.

5. Плашки из стали УНА закалены: первая - от температуры 760° С, вторая - от температуры 850° С. Используя диаграмму состояния железо - цементит, укажите температуры закалки, объясните, какая из этих плашек закалена правильно, имеет более высокие режущие свойства и почему.

Варианта 8

1. В чем сущность процесса модифицирования? Приведите пример использования модификаторов для повышения свойств литейных алюминиевых сплавов.

2. В чем различие между холодной и горячей пластической деформацией? Опишите особенности обоих видов деформации.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 5,0 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Углеродистые стали 35 и У8 после закалки и отпуска имеют структуру мартенсит отпуска и твердость: первая 45 HRC, вторая - 60 HRC. Используя диаграмму состояния железо - цементит и учитывая превращения, происходящие при отпуске, укажите температуру закалки и температуру отпуска для каждой стали. Опишите превращения, происходящие в этих сталях в процессе закалки и отпуска, и объясните, почему сталь У8 имеет большую твердость, чем сталь 35.

5. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 760 и 840º С. С помощью диаграммы состояния железо-цементит укажите, какие структуры обра-

зуются в каждом случае. Объясните причины образования разных структур и рекомендуйте оптимальный режим нагрева под закалку данной стали.

Вариант 9

1. Охарактеризуйте особенности металлического типа связи и основные свойства металлов.

2. Какими стандартными характеристиками механических свойств оценивается прочность металлов и сплавов? Как эти характеристики определяются?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 4,8 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. С помощью диаграммы состояния железо-цементит установите температуру полного и неполного отжига и нормализации для стали 20, Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали.

5. Почему для изготовления инструмента применяется сталь с исходной структурой зернистого перлита? В результате какой термической обработки можно получить эту структуру? Приведите конкретный режим для любой инструментальной стали.

Вариант 10

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к титану. Какое практическое значение оно имеет?

2. Каким способом можно восстановить пластичность холоднокатаной медной ленты? Назначьте режим термической обработки и опишите сущность происходящих процессов.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 1,4% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима термической обработки, обеспечивающей получение твердости 60...63 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура при этом получается. Опишите сущность происходящих превращений.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве доэвтектоидной стали. Покажите критические точки АС1 и АС3 для выбранной вами стали. Установите режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

ЛИТЕРАТУРА

Арзамасов Б. Н., Сидорин И. И. и др. Материаловедение: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 648 с.

Батышев А. И., Безпалько В. И., Смолькин А. А. Материаловедение и технология материалов М.: Изд-во Инфра-М, 2012. 288 с.

Богодухов С. И., Козик Е. С.. Материаловедение: учеб. для вузов. М.: Машиностроение, 2015. 504 с.

Бондаренко, Г. Г. Кабанова Т. А., Рыбалко В. В. Материаловедение: учебник для бакалавров / под ред. Г. Г. Бондаренко. 2-е изд. М.: Юрайт, 2014. 359 с.

Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П. Материаловедение: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 2009. 528 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: учебно-практическое пособие. Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

.

ПРИЛОЖЕНИЯ

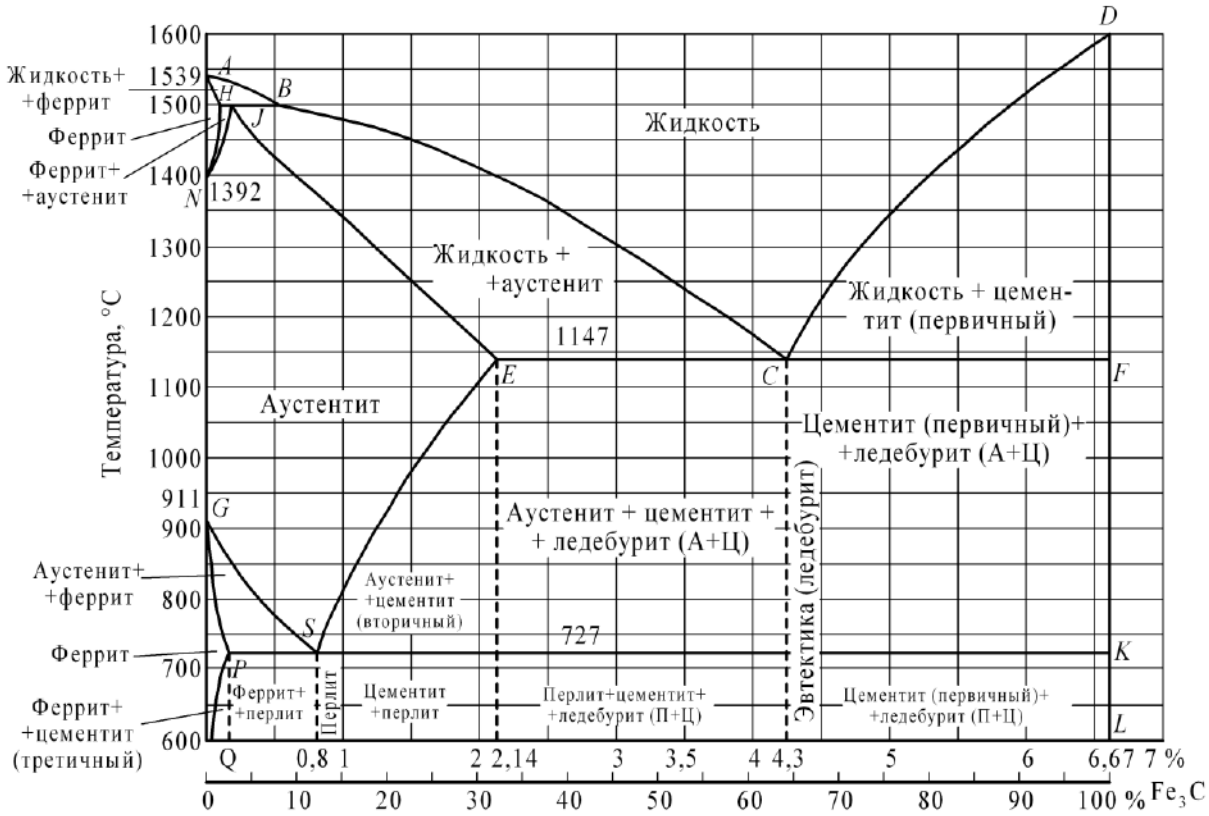


Рисунок 1 – Диаграмма состояния железо-цементит

Перечень ГОСТов на стали и сплавы

1. Сталь

Углеродистая обыкновенного качества – ГОСТ 380-71

Углеродистая качественная – ГОСТ 1050-74

Легированная, конструкционная, качественная, рессорно-пружинная– ГОСТ 1050-74

Углеродистая инструментальная – ГОСТ 1435-74

Легированная инструментальная – ГОСТ 5950-73

Подшипниковая – ГОСТ 801-78

Быстрорежущие стали – ГОСТ 19265-73

Конструкционный повышенной и высокой обрабатываемости резанием – ГОСТ 1414-75

Жаростойкие и жаропрочные – ГОСТ 5632-72

Коррозионностойкие – ГОСТ 5632-72

Сплавы твердые спеченные – ГОСТ 3882-74

Магнитотвердые (для постоянных магнитов) – ГОСТ 6862-71

Электротехнические – ГОСТ 21427.0-75...

ГОСТ 21427.3-75

2. Чугун

Серый – ГОСТ 1412-79

Ковкий – ГОСТ 1215-79

Высокопрочный – ГОСТ 7293-85

Жаростойкий – ГОСТ 7769-75

3. Алюминий и его сплавы

Алюминий – ГОСТ 11069-74
Деформируемые – ГОСТ 4784-74
Литейные – ГОСТ 2685-75
4. Медь и ее сплавы
Медь ГОСТ 859 – 78
Латунь двойная и многокомпонентная
деформируемая – ГОСТ 15527-70
Латунь литейная – ГОСТ 17711-80
Бронза оловяннистая деформируемая – ГОСТ5017-74
Бронза безоловяннистая деформируемая – ГОСТ 18175-78
Бронза оловяннистая литейная – ГОСТ 613-79
Бронза безоловяннистая литейная – ГОСТ 493-79
Медно-никелевые сплавы – ГОСТ 492-73
5. Титановые сплавы – ГОСТ 19807-74
6. Антифрикционные сплавы
Алюминиевые – ГОСТ 14113-78
Цинковые – ГОСТ 21437-75
Баббиты – ГОСТ 1320-74
7. Магний и его сплавы
Магний – ГОСТ 804-72
Деформируемые – ГОСТ 14957-76
Литейные – ГОСТ 2856-79

Учебное издание

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических и
самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений бакалавриата
15.03.01 – «Машиностроение»,
15.03.02 – «Технологические машины и оборудование»
23.03.01 «Технология транспортных процессов»

Редактор Л. В. Устьянцева

Компьютерная верстка автора

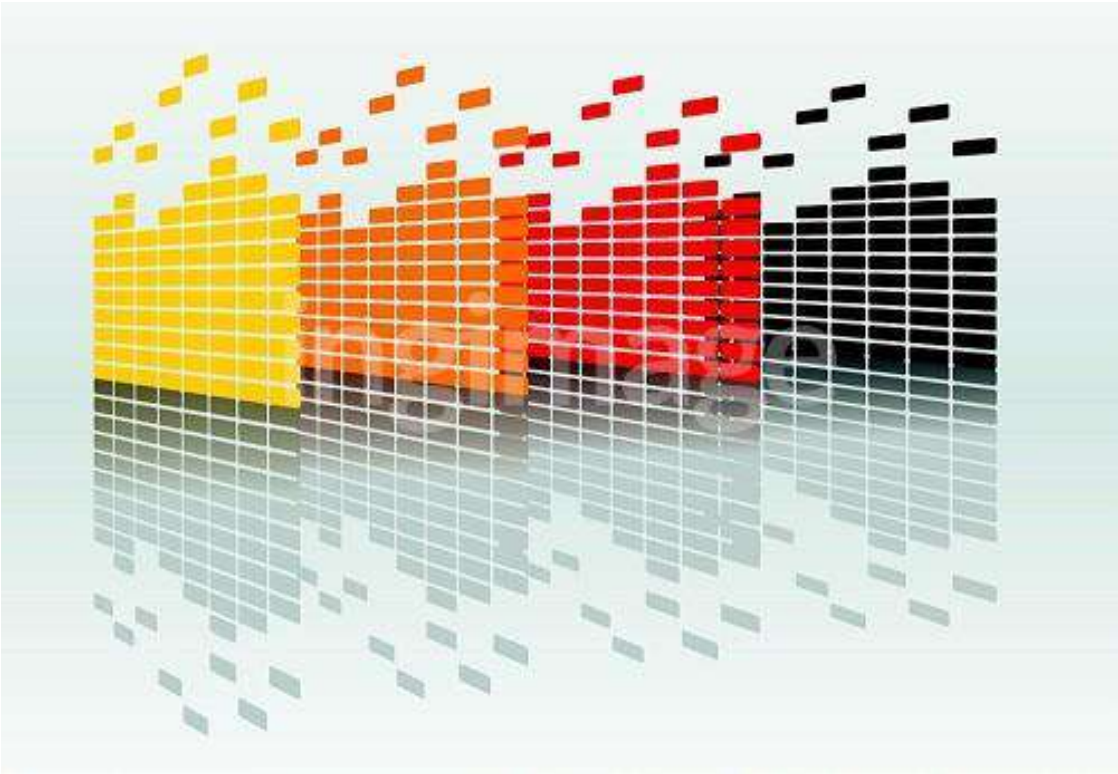
Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,71. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

М. Л. Хазин

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие



Екатеринбург
2019

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горномеханического факультета
«15» декабря 2017 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

М. Л. Хазин

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических
и самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений специалитета
21.05.04 Горное дело
бакалавриата:
15.03.01 – «Машиностроение»,
15.03.02 – «Технологические
машины и оборудование»

Издание УГГУ
Екатеринбург, 2019

Х12

Рецензенты: *Тихонов И. Н.*, к-т. техн. наук, зав. кафедрой «Электронное машиностроение» УрФУ, *Жуков Ю. Н.*, д-р. техн. наук, профессор кафедры «Электронное машиностроение» УрФУ

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры эксплуатации горного оборудования 05 июня 2018 года (протокол № 6) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Хазин М. Л.

Х12 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ: учебно-практическое пособие / М. Л. Хазин, Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

В учебном-практическом пособии приведена последовательность выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Материаловедение», изложена методика решения задач, даны задачи, вопросы для самопроверки по разделам, тесты и кроссворды.

Пособие предназначено для студентов направлений специалитета 21.05.04 Горное дело и бакалавриата: 15.03.01 – «Машиностроение», 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование», подготовка которых требует знаний по свойствам и применению металлических и неметаллических материалов.

© Хазин М. Л., 2019
© Уральский государственный горный университет, 2019

Учебное издание

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических и
самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений
направлений специалитета
21.05.04 Горное дело
бакалавриата
15.03.01 – «Машиностроение»,
15.03.02 – «Технологические
машины и оборудование»

Редактор *Л. В. Устьянцева*

Компьютерная верстка автора

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 11,7. Уч.-изд. л. 13,37. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Предисловие

В ФГОСы технических специальностей машиностроительного профиля включена дисциплина «Материаловедение», изучаемая на 1-м курсе. Уникальность данной учебной дисциплины заключается в ее комплексности с точки зрения широты рассматриваемого учебного материала: от свойств и кристаллического строения металлов до химико-термической обработки и технологических методов формообразования заготовок и деталей машин. При наличии достаточного перечня учебников и учебных пособий по дисциплине «Материаловедение», в настоящее время нет сборника практических заданий и задач, что затрудняет качество проведения занятий.

Курс материаловедения должен дать студентам не только сообщаемые в лекциях знания об основных закономерностях, определяющих строение и свойства материалов, но и научить их самостоятельно пользоваться технической, в том числе справочной, литературой для выбора основных технических материалов и назначения режимов их обработки в зависимости от условий эксплуатации деталей.

Опыт преподавания показал, что большой материал курса усваивается лучше и прочнее, если студенты наряду с выполнением обычно принятых лабораторных работ учатся «чтению» диаграмм состояния и типичных структур металлов и приобретают навыки в характеристике и оценке свойств многочисленных и разнообразных материалов.

В соответствие с этим в настоящем пособии предусмотрены три формы занятий со студентами: 1) анализ в аудитории наиболее трудных для восприятия тем и вопросов; 2) ознакомление и анализ в аудитории типовых задач; 3) выполнение домашних заданий.

Решение задач по материаловедению сопряжено с использованием разнообразных дополнительных данных, разбросанных в технической литературе. В этой связи издание снабжено справочным приложением, содержащим информацию по свойствам материалов, методам расчета технологических процессов и пр.

ВВЕДЕНИЕ

Материаловедение - наука, изучающая закономерности, связывающие состав и структуру материалов с их свойствами и закономерности изменения этих свойств под влиянием внешних воздействий, возникающих в процессе производства, упрочняющей обработки и эксплуатации изделий из этих материалов.

Материаловедение – прикладная наука, ее фундаментом являются разделы физики и химии, посвященные атомному строению химических элементов, свойствам кристаллов, закономерностям процессов кристаллизации и фазовых превращений в твердых телах.

Материаловедение - постоянно развивающаяся наука, непрерывно обогащающаяся за счёт разработки новых сталей и сплавов, в свою очередь стимулирующих прогресс во всех областях науки и техники. Особенно интенсивно развивается материаловедение в последние десятилетия. Это объясняется потребностью в новых материалах для развития машиностроения, космоса, электроники. Основной задачей материаловедения является создание материалов с заранее заданными свойствами для конкретных условий эксплуатации. Большое внимание уделяется изучению металлов в экстремальных условиях (низкие и высокие температуры и давление). Замена ряда металлических деталей оборудования на углепластики из эпоксидной смолы, армированной углеродными волокнами, позволяет уменьшить расход топлива, массу машины на 40 %; повысить её прочность и коррозионную стойкость.

Поэтому любой выпускник технического вуза независимо от специальности должен иметь базовые представления о строении и свойствах основных промышленных материалов и методах целенаправленного изменения этих свойств.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые такими дисциплинами, как «Физика» и «Химия».

Объектом изучения дисциплины «Материаловедение» являются в основном конструкционные и инструментальные материалы.

Задачей освоения дисциплины «Материаловедение» является приобретение знаний:

- закономерностей, связывающих химический состав, структуру и свойства материалов;
- методов целенаправленного изменения их свойств;
- влияния внешней среды на структуру и свойства материалов;
- химического состава, свойств и областей применения основных промышленных материалов, а также способов и режимов их упрочнения.

Цель изучения дисциплины – подготовка специалиста, способного производить оптимальный выбор материалов и упрочняющих технологий для

изготовления качественных изделий различного назначения.

В результате освоения дисциплины студент должен:

1) *знать*:

- общую классификацию материалов, их характерные свойства, области применения;
- типовые методы измерения параметров и свойств материалов;
- закономерности и практические способы воздействия на механические свойства металлических сплавов путем изменения их химического состава и структуры;

2) *уметь*:

- выбирать материалы с необходимым комплексом физико-механических характеристик;
- проводить измерения параметров материалов;
- выбирать способы и режимы упрочняющей обработки для изделий различного назначения;

3) *владеть*:

- навыками использования технической и справочной литературы по материаловедению;
- навыками применения стандартных и оригинальных методик для определения физико-механических свойств и технологических показателей материалов и готовых изделий машиностроения.

Хотя дисциплина «Материаловедение» изучается студентами на первом курсе в базовой части основной образовательной программы, она закладывает основы профессиональных знаний и умений, позволяющих решать производственные, конструкторские и технологические задачи, связанные с оптимизацией выбора материалов и технологий изготовления и упрочнения изделий различного назначения. Дисциплина «Материаловедение» является базовой для таких дисциплин, как «Основы технологии машиностроения», «Теория и технологические методы восстановления и повышения износостойкости деталей машин» и других, связанных с конструированием, технологией производства, эксплуатацией и ремонтом машин и оборудования.

Знания и умения, приобретенные при изучении курса материаловедения, используются в курсовых и выпускных квалификационных работах.

Справочный материал, необходимый для решения задач, приведен в приложении.

1.1. СТРУКТУРА МАТЕРИАЛОВ

1.1. Методические указания

При изучении данной темы необходимо помнить о том, что свойства материалов определяются их строением. Рассмотрите основные типы химической связи в твердых телах, основное внимание обратите на особый тип металлической связи, который обусловливает отличительные свойства металлов.

Необходимо понять, что в природе существует две разновидности твердых тел, различающихся по своим свойствам, – кристаллические и аморфные. Атомно-кристаллическое строение металлов и металлических сплавов, а также наличие в них металлической связи определяют их специфический комплекс свойств: высокую электропроводность и теплопроводность, высокую пластичность и металлический блеск.

Структура реальных кристаллов всегда отличается от идеальных, поэтому при изучении этой темы особое внимание следует обратить на дефекты кристаллического строения. *Дефект* – это любое нарушение идеального кристаллического строения. Дефекты кристаллического строения классифицируют по геометрическому признаку и различают точечные, линейные, поверхностные и объемные.

1.2. Краткие теоретические сведения

В зависимости от соотношения энергии теплового движения частиц (атомов, ионов или молекул), образующих данное вещество, и энергии их взаимодействия все материалы при нормальных условиях могут находиться в газообразном, жидком или твердом состояниях. Переход вещества из газообразного состояния в жидкое и далее в твердое сопровождается ростом упорядоченности в расположении частиц в пространстве, которое характеризуется параметром «порядок».

Нулевой порядок или беспорядок соответствует газообразному состоянию вещества, когда энергия теплового движения частиц превышает энергию их взаимодействия.

Ближний порядок соответствует жидкому состоянию, когда энергия теплового движения частиц, образующих вещество, сравнима с энергией их взаимодействия. В жидкости частицы располагаются в определенном порядке, который сохраняется только на расстоянии не более 8-10 межатомных (межмолекулярных) расстояний. Далее располагается другая группа частиц с иным упорядоченным расположением и т. д.

В твердом состоянии энергия взаимодействия частиц, образующих вещество, значительно превышает энергию их теплового движения. Такими

частицами являются атомы, ионы или молекулы. Твердое состояние реализуется в двух типах структур - кристаллической и аморфной.

Аморфной структуре соответствует ближний порядок, т. е. строение твердых тел, находящихся в аморфном состоянии, сходно со строением жидкостей.

Дальний порядок – соответствует кристаллической структуре. В этом случае частицы, образующие кристалл, располагаются в геометрически правильном порядке, который сохраняется на сколь угодно большом расстоянии.

Свойства элементов в первую очередь определяются электронным строением атомов. В зависимости от электронного строения атомы могут образовывать различные типы связей. Тип связи влияет на механические свойства материала. Различают следующие основные типы связей: ионную, ковалентную, межмолекулярную и металлическую.

Описание физических свойств металлов обусловлено особенностями их кристаллического строения. Атомы (частицы) твердого тела стремятся к такому расположению в пространстве, чтобы энергия их взаимодействия была минимальной. Этому соответствует определенный порядок в пространственном размещении частиц, определяемый понятием «кристаллическая решетка».

Кристаллическая решетка – воображаемая пространственная сетка, в узлах которой располагаются частицы (атомы, ионы или молекулы), образующие кристалл.

Элементарная ячейка – часть кристалла, имеющая минимальный объем, содержащая минимальное количества частиц и сохраняющая все особенности кристаллического строения. Элементарная ячейка повторяется в пространстве и образует кристалл.

Кристаллические решетки характеризуются периодом решетки, координационным числом, плотностью упаковки и базисом.

Базис решетки – количество частиц, приходящихся на одну элементарную ячейку решетки.

Период решетки (*a*, *b*, *c*) - расстояние между центрами двух соседних частиц, располагающихся в параллельных плоскостях.

Координационное число К - количество частиц, находящихся на наиболее близком и равном расстоянии от любой произвольно выбранной частицы в кристаллической решетке.

Коэффициент упаковки - отношение суммарного объема, занимаемого всеми частицами кристалла, к объему этого кристалла $\eta = \Sigma v/V$.

В кристаллических телах атомы правильно располагаются в пространстве, причем по разным направлениям расстояния между атомами неодинаковы, что предопределяет существенные различия в силах взаимодействия между ними. Плотность упаковки атомов в разных плоскостях и по разным направлениям в кристалле разная. Поэтому и

свойства кристаллического тела в разных направлениях будут разные.

Анизотропия – зависимость физических свойств от направления в кристалле.

Изотропия – независимость физических свойств от направления в кристалле.

Некоторые металлы могут существовать в различных кристаллических формах в зависимости от внешних условий (давления, температуры).

Полиморфное превращение или *аллотропия* - это способность металлов изменять кристаллическую структуру в зависимости от внешних термодинамических условий (давления, температуры).

Каждый вид решетки представляет собой *модификацию,* которая обозначается буквами греческого алфавита перед обозначением металла, например γ-Fe или β-Ti.

1.3. Вопросы

1. Каков базис кристаллической решетки Г ЦК?

1) 14; 2) 6; 3) 4.

2. Покажите расположение атомов A и B в элементарной ячейке химического соединения с формулой A_1B_1, если тип решетки ОЦК. (Учтите понятие «базис»).

3. Почему тела с ионной связью не проводят электрический ток?

4. В чем причина хрупкости тел с ковалентным типом связи (алмаза)?

5. Чем можно объяснить электропроводность металлов?

6. Сравнивая ионный, ковалентный и металлический типы связей и считая условно схему на рис. 1.1 кристаллической решеткой металла, попытайтесь объяснить возможность пластической деформации металла (изменение формы кристалла без его разрушения).

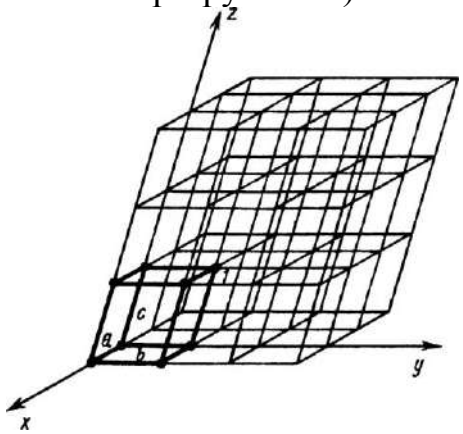


Рис. 1.1. Схема кристаллической решетки

7. В баллон с нагретым газом поместили турбину. Будут ли вращаться лопатки турбины? Если да, то почему?

1) будут, так как частицы газа, ударяясь о лопатки, передадут им свою

энергию, и турбина закрутится; 2) не будут, так как частицы газа хаотично бомбардируют лопатки со всех сторон примерно с одинаковой энергией и направленного действия силы для превращения турбины не будет.

8. Как изменяется энергия кристалла при возрастании количества (плотности) дислокаций?

энергия: 1) возрастает; 2) убывает.

9. Могут ли дислокации перемещаться внутри кристалла без действия внешней нагрузки? Изменяется ли количество дефектов в материале со временем? Могут ли в течение времени одни дефекты превращаться в другие? Какие явления содействуют перекомбинации дефектов?

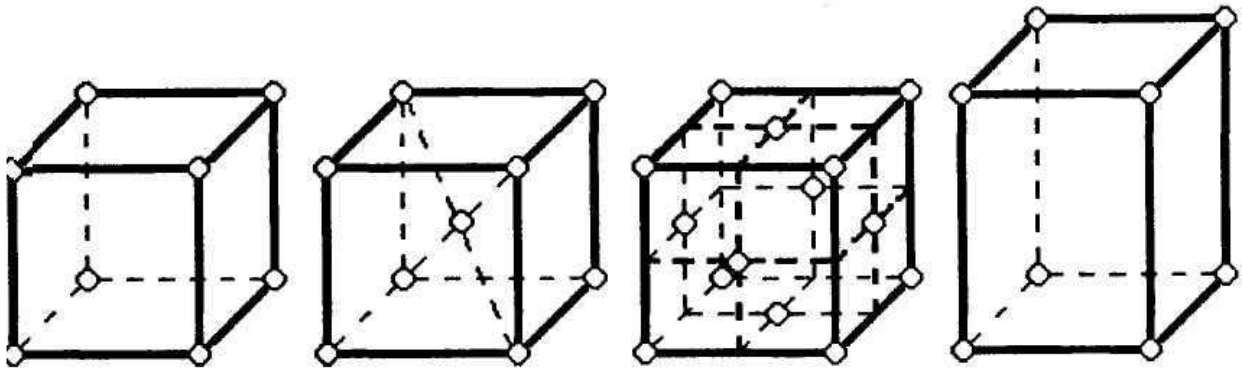
10. Что такое элементарная кристаллическая ячейка?

1) тип кристаллической решетки, характерный для данного химического элемента; 2) минимальный объем кристаллической решетки, при трансляции которого по координатным осям можно воспроизвести всю решетку; 3) кристаллическая ячейка, содержащая один атом; 4) бездефектная (за исключением точечных дефектов) область кристаллической решетки.

11. Что такое базис кристаллической решетки?

1) минимальный объем кристаллической решетки, при трансляции которого по координатным осям можно воспроизвести всю решетку; 2) расстояние между соседними одноименными кристаллическими плоскостями; 3) число атомов, находящихся на наименьшем равном расстоянии от любого данного атома; 4) совокупность значений координат всех атомов, входящих в элементарную ячейку.

12. Какие из представленных на рисунке элементарных ячеек кристаллических решеток относятся к простым (рис. 1.2)?



A *B* *C* *D*

Рис. 1.2. Элементарные ячейки кристаллических решеток

1) *A* и *D*; 2) *B* и *C*); 3) *A* и *C*; 4) *B* и *D*.

13. Сколько атомов принадлежит представленной на рис. 1.3 элементарной ячейке?

14. Какова химическая формула сплава, кристаллическая решетка

которого представлена на рис. 1.4?

1) A_2B; 2) A_8B; 3) A_4B; 4) AB.

15. Как называется свойство, состоящее в способности вещества существовать в различных кристаллических модификациях?

1) полиморфизм; 2) изомерия; 3) анизотропия; 4) текстура.

16. Как называется характеристика кристаллической решетки, определяющая число атомов, находящихся на наименьшем равном расстоянии от любого данного атома?

1) базис решетки; 2) параметр решетки; 3) коэффициент упаковки;

4) координационное число.

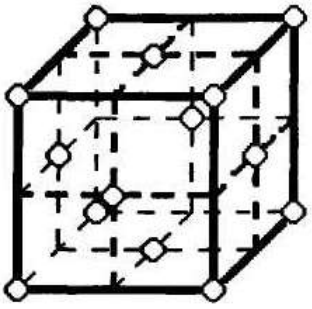


Рис. 1.3. Кристаллическая решетка сплава ○ - компонент A; ● - компонент B

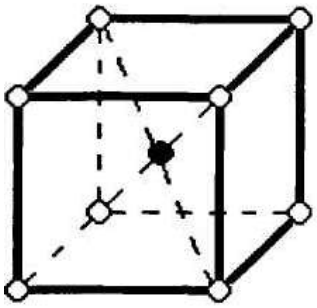


Рис. 1.4. Кристаллическая решетка сплава ○ - компонент A; ● - компонент B

1) 8; 2) 6; 3) 4; 4) 14.

17. Какое из изменений характеристик кристаллической решетки приведет к росту плотности вещества?

1) увеличение параметров решетки; 2) уменьшение количества пор в элементарной ячейке; 3) увеличение числа атомов в ячейке; 4) увеличение координационного числа.

18. Как называется характеристика кристаллической решетки, определяющая отношение объема атомов, приходящихся на элементарную ячейку, к объему ячейки?

1) коэффициент упаковки; 2) координационное число; 3) базис решетки; 4) параметр решетки.

19. Как называется явление, заключающееся в неоднородности свойств материала в различных кристаллографических направлениях?

1) изотропия; 2) анизотропия; 3) текстура; 4) полиморфизм.

20. Какие тела обладают анизотропией?

1) текстурованные поликристаллические материалы; 2) ферромагнитные материалы; 3) поликристаллические вещества; 4) аморфные материалы.

21. Какие тела обладают анизотропией?

1) парамагнетики; 2) монокристаллы; 3) вещества, обладающие полиморфизмом; 4) переохлажденные жидкости.

22. Каким является дефект кристаллической структуры представленного на рис. 1.5 фрагмента кристаллической решетки?

1) точечный; 2) линейный; 3) поверхностный; 4) объемный.

23. Какую группу дефектов представляют собой искажения, охватывающие области в радиусе 6 – 7 периодов кристаллической решетки?

1) поверхностные; 2) объемные; 3) точечные; 4) линейные.

24. Как называется дефект, вызванный отсутствием атома в узле кристаллической решетки?

1) дислокация; 2) пора; 3) вакансия; 4) междоузельный атом.

25. Какого рода дефект кристаллической структуры представлен на рис. 1.6?

1) примесный атом внедрения; 2) междоузельный атом; 3) примесный атом замещения; 4) вакансия.

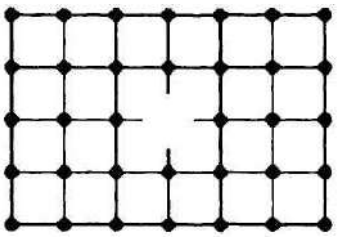


Рис. 1.5. Фрагмент кристаллической решетки

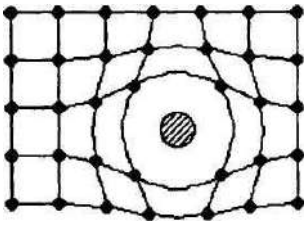


Рис. 1.6. Фрагмент кристаллической решетки

26. Как называется элемент кристаллической структуры, помеченный на рис. 1.7 знаком вопроса?

1) плоскость скольжения; 2) краевая дислокация; 3) цепочка междоузельных атомов; 4) экстраплоскость.

27. Как называются дефекты, измеряемые в двух направлениях несколькими периодами, а в третьем – десятками и сотнями тысяч периодов кристаллической решетки?

1) междоузельные атомы; 2) поверхностные дефекты; 3) дислокации; 4) микротрещины.

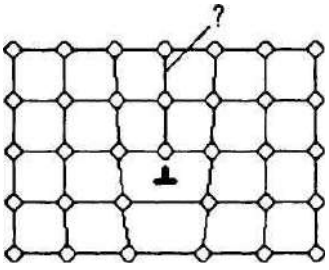


Рис. 1.7. Фрагмент кристаллической структуры

28. Что такое экстраплоскость?

1) плоскость раздела фрагментов зерна или блоков мозаичной структуры; 2) поверхностный дефект кристаллической решетки; 3) атомная полуплоскость, не имеющая продолжения в нижней или верхней частях кристаллической решетки; 4) атомная плоскость, по которой происходит скольжение одной части кристалла относительно другой.

29. Как называется дефект, представляющий собой область искажений кристаллической решетки вдоль края экстраплоскости?

1) винтовая дислокация; 2) цепочка вакансий; 3) краевая дислокация; 4) микротрещина.

30. По какому признаку классифицируются дефекты кристаллического строения?

1) физическому; 2) химическому; 3) геометрическому; 4) алгебраическому.

1.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Ошибаетесь. Вы нечетко уяснили понятие базиса. Разве все 14 атомов принадлежат только одной ячейке?

2) Ошибаетесь.

3) Правильно. К одной ячейке каждый атом в вершинах куба принадлежит на 1/8, атом в каждой грани – на ½. Тогда базис будет равен $⅛ \cdot 8 + ½ \cdot 6 = 4$.

2. Так как в ячейке ОЦК базис равен двум, то атомы *A* в химическом соединении могут занять вершины куба: $⅛ \cdot 8 = 1$; атом *B* будет в центре куба или наоборот.

3. В телах с ионной связью отсутствуют свободные электроны.

4. Чтобы произошла деформация, нужно разрушить связь, обеспечиваемую электронными мостиками между соседними атомами в кристалле алмаза. Это значит, что кристалл разрушится и деформация невозможна.

5. Наличие свободных электронов («электронного газа») создает возможность их направленного движения под влиянием приложенного напряжения, что и представляет собой электропроводность.

6. Кристалл на рис. 1.2 следует представить так, что в узлах решетки расположены положительные ионы металла, все пространство между которыми занимают коллективизированные валентные электроны, каждый из которых не принадлежит никакому конкретному иону и может находиться в разное время в разных местах. Если произвести сдвиг в кристалле по плоскости, где находится, например, ион 1, слева направо на один период решетки, то произойдет смена соседей у ионов, а качество «электронного газа» не претерпит никаких изменений, обеспечивая по-прежнему связь между электронами и ионами. Поэтому при деформировании металлы

проявляют пластичность.

7. 1). Ошибаетесь. Частицы движутся хаотично, поэтому количество толчков от них лопатки турбины получают со всех сторон примерно поровну и турбина вращаться не может. Таким образом, наличие энергии еще не есть возможность выполнить работу. Энергия должна использоваться направленно.

2) Правильно.

8. 1) Правильно.

2) Ошибаетесь.

9. Учитывая, что атомы непрерывно движутся, можно представить, что от края экстраплоскости происходит отток атомов, или наоборот. Это значит, что дислокация перемещается в новые кристаллографические плоскости. Что касается перерождения дефектов, то можно представить превращение вакансии в дислокацию или в раковины, если от вакансии происходит отток атомов. В принципе дислокация может превращаться в серию вакансий, если к краю экстраплоскости поступают атомы из других участков кристалла. Как видно, все эти перерождения сильно зависят от диффузионной подвижности атомов и поэтому усиливаются с ростом температуры. Естественно, что на материал действуют и другие факторы: нагрузка, поверхностно-активные среды и т. д.

10. 1) Неверно. Тип кристаллической решетки сам по себе определяется типом ее элементарной ячейки.

2) Правильно.

3) Неверно. Элементарные ячейки могут содержать многие десятки атомов.

4) Неверно. Бездефектные области кристаллов обычно составляют блоки мозаичной структуры.

11. 1) Неверно. Такую часть кристаллической решетки называют элементарной кристаллической ячейкой.

2) Неверно. Расстояние между соседними одноименными плоскостями называют межплоскостным расстоянием.

3) Неверно. Число атомов, находящихся на наименьшем равном расстоянии от любого данного атома, называют координационным числом.

4) Правильно.

12. 1) Правильно.

2) Неверно. В обеих ячейках атомы занимают места не только в вершинах куба, но и в центре ячейки (*B*) либо в центре каждой грани (*C*).

3) Неверно. В ячейке *C* атомы расположены не только в вершинах куба, но также и в центре каждой грани.

4) Неверно. В ячейке *B* атомы расположены не только в вершинах куба, но также и внутри ячейки.

13. 1) Неверно. Каждый из атомов, лежащих на гранях куба, принадлежит, кроме данной ячейки, еще одной, а в вершинах куба - еще семи соседним ячейкам.

2) Неверно. Каждый из атомов, лежащих на гранях куба, принадлежит, кроме данной ячейки, еще одной, а в вершинах куба еще семи соседним ячейкам.

3) Правильно.

4) Неверно. Каждый из атомов, лежащих на гранях куба, принадлежит, кроме данной ячейки, еще одной, а в вершинах куба - еще семи соседним ячейкам.

14. 1) Неверно. Каждый из атомов, лежащих в вершинах куба, принадлежит восьми элементарным ячейкам.

2) Неверно. Каждый из атомов, лежащих в вершинах куба, принадлежит восьми элементарным ячейкам.

3) Неверно. Каждый из атомов, лежащих в вершинах куба, принадлежит восьми элементарным ячейкам.

4) Правильно.

15. 1) Правильно.

2) Неверно. Изомерия заключается в существовании соединений, главным образом органических, одинаковых по составу, но различающихся по расположению атомов в пространстве.

3) Неверно. Анизотропия - это явление, состоящее в неоднородности свойств материала в различных направлениях.

4) Неверно. Текстура - это преимущественная ориентация элементов структуры материала. Например, закономерная ориентация кристаллитов относительно внешних деформирующих материал сил получила название текстуры деформации.

16. 1) Неверно. Базис - это таблица значений координат всех атомов, входящих в элементарную ячейку.

2) Неверно. Параметры решетки - это совокупность значений длин ребер элементарной ячейки и величин углов между ними.

3) Неверно. Коэффициент компактности - это характеристика, определяющая отношение объема атомов, входящих в элементарную ячейку, к объему ячейки.

4) Правильно.

17. 1) Неверно. Рост параметра решетки (при сохранении ее типа, например при нагреве) приведет к увеличению ее объема и снижению плотности вещества.

2) Неверно. Уменьшение количества пор в ячейке не означает снижение их общего объема. Например, кристаллическая решетка *К*8 (много мелких пор) по компактности занимает промежуточное положение между *К*6 и *К*12, имеющих меньшее количество пор.

3) Неверно. К примеру, решетки Г12 (6 атомов на ячейку) и *К*12 (4 атома на ячейку) компактны одинаково.

4) Правильно.

18 1) Правильно.

2) Неверно. Координационное число - это число атомов, находящихся на наименьшем равном расстоянии от любого данного атома.

3) Неверно. Базис представляет собой совокупность координат

4) Неверно. Параметры решетки - это совокупность значений длин ребер элементарной ячейки и величин углов между ними.

19. 1) Неверно. Изотропность (изотропия) состоит в одинаковости свойств материала во всех направлениях.

2) Правильно.

3) Неверно. Текстура состоит в преимущественной ориентации структуры материала.

4) Неверно. Полиморфизм - это способность материала существовать в различных кристаллических модификациях.

20. 1) Правильно.

2) Неверно. Магнитные свойства определяются электронным строением вещества. Ферромагнитными могут быть и изотропные материалы, например металлические стекла.

3) Неверно. Поскольку в поликристаллических веществах кристаллические решетки в различных зернах ориентированы по-разному, свойства тела во всех направлениях усредняются. Тело становится изотропным (квазиизотропным).

4) Неверно. Аморфные материалы изотропны.

21. 1) Неверно. Магнитные свойства материалов (диамагнетизм, парамагнетизм и т. д.) определяются электронным строением атомов (тонкой структурой). Анизотропия же - свойство, проявляющееся на уровне микроструктуры.

2) Правильно.

3) Неверно. Полиморфизм - это способность вещества иметь различные типы кристаллических решеток. Анизотропия может проявляться и в веществах, не обладающих таким свойством.

4) Неверно. Переохлажденные жидкости, как и всякие жидкости, за исключением жидких кристаллов, аморфны. Такие структуры изотропны.

22. 1) Правильно.

2) Неверно. Такие дефекты предполагают наличие экстраплоскости, либо плоскости, изогнутой по винтовой поверхности.

3) Неверно. Поверхностные дефекты представляют собой дислокационные стенки, либо переходные области между кристаллическими решетками различных ориентации.

4) Неверно. Объемные дефекты имеют протяженность во всех направлениях на многие периоды кристаллической решетки.

23. 1) Неверно. Поверхностные дефекты имеют размеры в одном направлении несколько периодов, а в двух других - десятки и сотни тысяч периодов кристаллической решетки.

2) Неверно. Объемные дефекты охватывают области в радиусе

многих десятков, сотен и тысяч периодов кристаллической решетки.

3) Правильно.

4) Неверно. Линейные дефекты простираются в двух направлениях на несколько периодов, а в третьем - на десятки и сотни тысяч периодов кристаллической решетки.

24. 1) Неверно. Дислокации - это линии, измеряемые десятками и сотнями тысяч периодов кристаллической решетки, вдоль и вблизи которых нарушено правильное периодическое расположение атомных плоскостей кристалла.

2) Неверно. Поры - это пустоты, вызванные отсутствием в данной области кристаллической решетки многих атомов.

3) Правильно.

4) Неверно. Междоузельный атом - это дефект, состоящий в местном увеличении периода кристаллической решетки, образующийся в результате перехода атома из узла решетки в междоузлие.

25. 1) Правильно.

2) Неверно. Междоузельные атомы возникают в результате перехода атомов, образующих данное вещество, из узлов кристаллической решетки в междоузельное пространство.

3) Неверно. Примесные атомы замещения заменяют атомы данного вещества в узлах кристаллической решетки.

4) Неверно. Вакансия - это дефект, состоящий в отсутствии атома в узле кристаллической решетки.

26. 1) Неверно. Плоскость скольжения - это плоскость, по которой происходит сдвиг одной части кристалла относительно другой при его деформировании. Представленный элемент структуры существует независимо от того деформируют кристалл или нет.

2) Неверно. Выделенный элемент структуры обусловливает возникновение краевой дислокации, но сам таковой не является.

3) Неверно. Атомы выделенного элемента структуры расположены в узлах кристаллической решетки.

4) Правильно.

27. 1) Неверно. Дефекты строения, вызванные междоузельными атомами, имеют во всех направлениях размеры в несколько периодов кристаллической решетки.

2) Неверно. Поверхностные дефекты имеют размеры в одном направлении несколько периодов, а в двух других - десятки и сотни тысяч периодов кристаллической решетки.

3) Правильно.

4) Неверно. Микротрещины - это объемные дефекты кристаллической структуры. Ширина микротрещины переменна и лишь у устья ее размеры сопоставимы с межатомными.

28. 1) Неверно. Такие плоскости называют малоугловыми границами.

2) Неверно. Поверхностные дефекты кристаллической решетки называют малоугловыми и большеугловыми границами.

3) Правильно.

4) Неверно. Плоскость кристаллической решетки, по которой происходит скольжение одной части кристалла относительно другой, называют плоскость скольжения.

29. 1) Неверно. При наличии винтовой дислокации кристалл как бы состоит из одной атомной плоскости, закрученной в виде винтовой поверхности. Экстраплоскости в этом случае нет.

2) Неверно. Цепочка вакансий прерывает атомную плоскость, но не создает экстраплоскости.

3) Правильно.

4) Неверно. Микротрещина - это объемный дефект. Искажения вдоль края экстраплоскости - линейный дефект кристаллической структуры.

30. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

1.5. Задачи

1.1. Определите координационное число гранецентрированной кубической решетки.

1.2. Определите координационное число гексагональной плотноупакованной решетки.

1.3. Докажите, что угол α (рис. 1.8) между тетраэдрическими связями в алмазе равен $109^{o}28^{/}$**.**

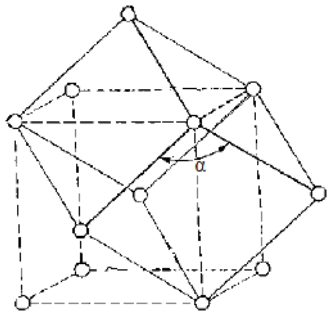


Рис. 1.8. Элементарная решетка алмаза

1.4. Определите коэффициент упаковки гранецентрированной кубической решетки.

1.5. Докажите, что коэффициент упаковки объёмноцентрированной кубической решетки равен 0,68.

1.6. Покажите, что для идеальной гексагональной плотноупакованной решетки отношение c/a $(8/3)^{1/2} = 1{,}633$.

1.7. Докажите, что коэффициент упаковки простой кубической решетки равен 0,52.

1.8. Покажите, что объемноцентрированная кубическая решетка может быть разделена на две простые кубические решетки A и B так, что ни одна пара ближайших соседей исходной решетки не окажется в решетке A (и, соответственно, в решетке B). Показать также, что для соблюдения этого условия простая кубическая решетка должна разделиться на две гранецентрированные решетки, а гранецентрированная, в свою очередь, – на четыре простые кубические решетки.

1.9. Найдите плотноупакованное расположение идентичных бесконечных прямых волокон в круглом поперечном сечении. Определите коэффициент упаковки для этой системы.

1.10. Опишите кристаллические структуры гексагонального ZnO и NiAs. Определите используемую кристаллическую решетку и базис.

2. ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

2.1. Методические указания

Механические свойства характеризуют сопротивление материала деформации, разрушению или особенностям его поведения в процессе разрушения. Эта группа свойств объединяет показатели прочности, пластичности, твердости, вязкости и упругости. Основную группу таких показателей составляют стандартные характеристики механических свойств, которые определяют в лабораторных условиях на образцах стандартных размеров.

Изучите основные методы исследования механических свойств металлов и физический смысл характеристик, определяемых при разных методах испытания. Важно понять, что все эти характеристики определяются структурой материала, его способностью к пластическому деформированию. Уясните связь между основными характеристиками, строением и механическими свойствами. Разберитесь в сущности явления наклепа и его практическом использовании.

Поскольку процесс пластической деформации протекает путем образования и перемещения дислокаций, то большое значение имеет то, насколько легко могут эти дислокаций перемещаться в пределах зерна. Оценка стандартных механических свойств сопровождается разрушением специальных образцов и не позволяет изучить прочностные свойства конкретных деталей на конечном этапе изготовления. Поэтому большое значение имеют неразрушающие методы оценки прочностных свойств. К ним относят различные способы измерения твердости.

Разрушение необходимо рассматривать как двухстадийный процесс:

зарождения и распространения трещины, а конструктивную прочность - как комплекс свойств материала. Следует установить связь прочностных и пластических характеристик со структурным состоянием материала. Необходимо разобраться, что понимается под хрупким и вязким разрушением.

2.2. Краткие теоретические сведения

Материал при приложении к нему внешних сил деформируется. *Деформация* - изменение формы и размеров тела под действием внешних или внутренних сил. Деформация может быть упругой и пластической.

Упругой называется деформация, если после прекращения действия вызвавших ее сил тело сохраняет первоначальные форму и размеры. В этом случае атомы под действием сил притяжения и отталкивания возвращаются в первоначальное положение равновесия (рис. 2.1).

Пластической называется деформация, если после прекращения действия вызвавших ее сил тело приобретает новые форму и размеры. В этом случае атомы под действием сил притяжения и отталкивания переходят в новое ближайшее положение равновесия, вследствие чего деформация становится необратимой (см. рис. 2.1).

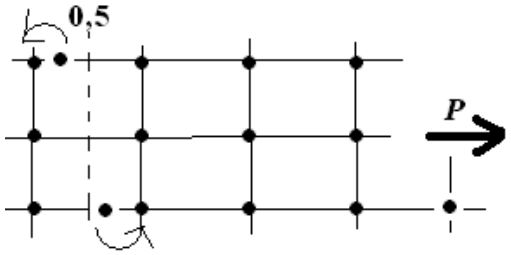


Рис. 2.1. Схема механизма деформации

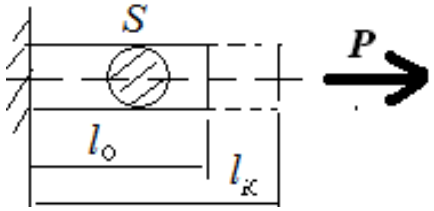


Рис. 2.2. Схема растяжения образца

Механическими называют свойства материала, определяющие его сопротивление действию внешних механических нагрузок.

Относительная деформация (ε) - это отношение удлинения (Δl) образца к его первоначальной длине (l_0) и является безразмерной величиной, или после умножения на 100 % измеряется в процентах.

Относительное сужение ψ определяется аналогично

$$\varepsilon = \frac{(l_к - l_о)}{l_о} = \frac{\Delta l}{l_о}, \qquad \psi = \frac{S_о - S_к}{F_о} 100 \quad \%,$$

где $l_о$, $S_о$ и $l_к$, $S_к$ - начальная и конечная длина и площадь поперечного сечения образца соответственно (рис. 2.2).

Напряжение – сила, действующая на единицу площади сечения образца $\sigma = P/F$ [Па].

Диаграмма деформации – изменение размеров образца под действием приложенной силы в координатах σ – ε (рис. 2.3).

Участок *OA* на диаграмме деформации соответствует упругой деформации. *Предел пропорциональности* ($\sigma_{пц}$) – напряжение, соответствующее окончанию упругой деформации. С дальнейшим увеличением нагрузки начинается пластическая деформация.

Зависимость между упругой деформацией ε и напряжением σ выражается законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E ,$$

где: *E* - модуль упругости.

Модуль упругости является важнейшей характеристикой упругих свойств материала и рассматривается как мера прочности связей между атомами в твердом теле.

Точка *B* соответствует *временному сопротивлению разрыва* или пределу *прочности* $\sigma_в$, т. е. наибольшему напряжению, которое может выдержать материал до разрушения (см. рис. 2.3).

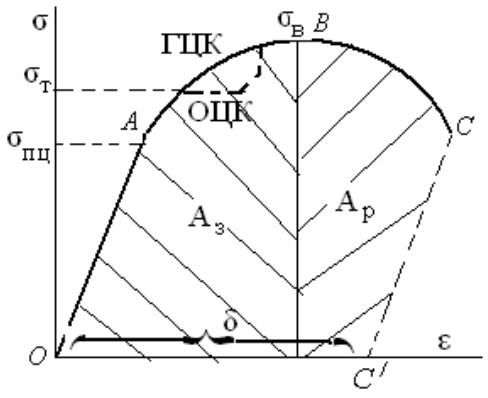


Рис. 2.3. Диаграмма деформации

Гладкая диаграмма соответствует материалам с ГЦК решеткой. В случае материала с ОЦК решеткой диаграмма несколько изменяется. На ней образуется площадка текучести, т. е. напряжение не изменяется, а размеры образца изменяется, как бы текут (см. рис. 2.3).

$\sigma_т$ – *физический предел текучести* или *напряжение течения* соответствует образованию площадки текучести на диаграмме деформации.

Для материалов, не имеющих площадку текучести, используют *условный предел текучести* ($\sigma_{0,2}$), т. е. это напряжение, вызывающее остаточную деформацию ε = 0,2 %.

Поэтому в зависимости от структуры материала используют физический или условный предел текучести.

Отрезок *OC'*, отсекаемый на оси абсцисс (δ) – пластичность, т. е. наибольшая величина относительной деформации, которую может выдержать материал до разрушения.

Процесс деформации при достижении высоких напряжений завершается разрушением. Точка *C* соответствует разрушению образца.

Тело разрушаются по сечению не одновременно, а вследствие развития трещин. Разрушение включает две стадии: зарождение трещины и ее рост.

Площадь диаграммы деформации соответствует работе, которую необходимо совершить для разрушения образца:

$$A = A_З + A_Р ,$$

где $A_З$ и $A_Р$ соответственно работа необходимая для зарождения трещины и ее дальнейшего роста.

Для хрупкого разрушения характерна острая, часто ветвящаяся трещина. Величина зоны пластической деформации в устье трещины мала. Скорость распространения хрупкой трещины близка к скорости звука в данном материале.

Вязкому разрушению всегда предшествует значительная пластическая деформация. Для него характерна тупая раскрывающаяся трещина.

Характер разрушения зависит от многих факторов: материала, температуры, скорости деформации и т. д. Температура $T_К$, при которой происходит смена механизмов деформации называется критической температурой или *порогом хладноломкости*. *Хладноломкость* определяет влияние снижения температуры на склонность материала к хрупкому разрушению.

На порог хладноломкости оказывают влияние величина зерна, химический состав, размеры изделия, концентраторы напряжений, скорость нагружения и т. д. Для эксплуатации в северных условиях необходимы детали из сталей с низким порогом хладноломкости – северного исполнения. Снижение порога хладноломкости достигается легированием стали никелем.

Твердость – это свойство материала оказывать сопротивление пластическим деформациям при контактном воздействии в поверхностном слое.

Наиболее распространенные методы определения твердости связаны с внедрением в испытуемый материал специального тела, называемого *индентором,* с таким усилием, чтобы произошла пластическая деформация. Это методы определения твердости по Бринеллю, Роквеллу и Виккерсу.

Поскольку твердость является прочностным свойством, то между твердостью и временным сопротивлением разрыву (пределом прочности) существует связь:

$$\sigma_В = kH,$$

где k – коэффициент, зависящий от вида материала и метода измерения твердости; H – твердость.

Ударная вязкость определяет надежность материала, его способность

сопротивляться разрушению при динамических нагрузках. Ее определяют как удельную работу разрушения призматического образца с концентратором (надрезом) посередине одним ударом маятникового копра:

$$KC = A/S,$$

где S – площадь поперечного сечения в месте надреза; A – работа разрушения образца.

Ударную вязкость обозначает *KCV, KCU, KCT*. *KC* – символ ударной вязкости, третий символ показывает вид надреза: острый (*V*), с радиусом закругления (*U*), трещина (*T*).

Наклеп – повышение прочности материала под действием холодной пластической деформации.

Конструктивную прочность материала характеризует комплекс механических свойств, обеспечивающих надежную и длительную работу в условиях эксплуатации. Конструктивная прочность определяется критериями прочности, надежности и долговечности.

На свойства металлов большое влияние оказывает их дислокационная структура. При деформации возрастает число дефектов кристаллической структуры, в частности плотность дислокаций, и именно поэтому прочность образца увеличивается, а его пластичность уменьшается (рис. 2.4).

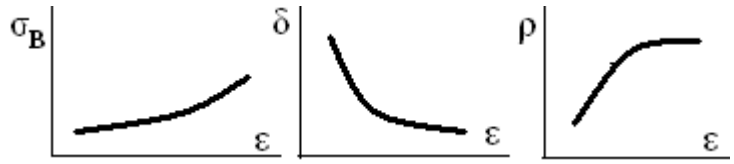


Рис. 2.4. Влияние деформации на структуру и свойства материала

К критериям прочности при статических нагрузках относят предел текучести $\sigma_т$ или $\sigma_{0,2}$. В некоторых случаях имеют значение удельные характеристики, критерии жаропрочности.

Жаропрочные материалы характеризуются длительной прочностью и ползучестью. *Предел длительной прочности* – напряжение, вызывающее разрушение материала при заданной температуре за определенное время.

Предел ползучести – напряжение, вызывающее заданную скорость деформации при заданной температуре.

Надежность – способность материала противостоять разрушению. Важными критериями надежности являются пластичность (относительное удлинение ε, относительное сужение ψ), вязкость разрушения K_{1c}, ударная вязкость (*KCV, KCV, KCT*), хладноломкость.

ε и ψ характеризуют изменения геометрических параметров стандартных образцов при напряжении, вызывающем разрушение. K_{1c} показывает, какой интенсивности достигает напряжение вблизи вершины

трещины в момент разрушения.

Ударная вязкость – это сопротивление разрушению при динамических нагрузках.

Долговечность – способность материала детали сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая ее работоспособность в течение заданного времени.

Одним из критериев долговечности является выносливость. *Выносливость* – способность материала сопротивляться усталости. У*сталость* – процесс накопления повреждений под действием циклически повторяющихся нагрузок. Выносливость зависит от живучести, определяющей продолжительность работы детали от момента зарождения первой макроскопической трещины усталости (размером 0,5 - 1,0 мм) до разрушения.

2.3. Вопросы

1. Медь имеет решетку ГЦК а цинк – ГПУ. Какой из этих материалов пластичней?

2. Почему растет плотность дислокаций при пластической деформации?

3. Металлы с каким типом решетки наиболее упрочняемы наклепом?

4. Какой из металлов, железо или медь, более пригоден для изготовления нагруженных деталей машин. Почему вы так думаете?

5. Стальная проволока для тросов производится методом холодной вытяжки. Чем объясняется высокая прочность тросов?

6. Как можно оценивать явление наклепа металла с точки зрения машиностроителей?

1) положительно; 2) отрицательно.

7. Как следует оценивать дефекты типа дислокаций с точки зрения влияния на свойства металлов?

эти дефекты свойства металлов: 1) ухудшают; 2) улучшают; 3) категорически ответить на этот вопрос нельзя, так как в ряде случаев эти дефекты улучшают свойства материалов, в других ситуациях – ухудшают.

8. Учитывая явление анизотропии, подумайте, будут ли все зерна в структуре образца при напряжениях $\sigma < \sigma_{пц}$ деформироваться только упруго?

9. Из рис. 2.3 видно, что деформация, когда напряжение достигло значения $\sigma_в$, происходит при понижающих напряжениях. Подумайте, значит ли это, что действительное сопротивление материала деформированию начиная от $\sigma_в$ уменьшается.

Для полухрупких материалов диаграмма растяжения представляется участком *OAB*.

10. В чем особенность диаграммы растяжения для хрупкого материала.

диаграмма растяжения: 1) не имеет максимума; 2) короче; 3) представляется только прямолинейным участком, характеризующим

зависимость упругой деформации от напряжения.

11. Чем можно объяснить отсутствие связи между твердостью и пределом прочности на разрыв хрупких материалов. (За основу следует взять физическую сущность этих характеристик материала.)

1) различными условиями напряженного состояния при этих методах испытания материала; 2) для хрупких материалов предел прочности характеризует совершенно отличное по характеру свойство материала – сопротивление разрушению, а не сопротивление пластическим деформациям.

12. Подумайте, как должно влиять на сопротивление ползучести увеличение предела текучести $\sigma_т$ материала.

13. Решите, при каком виде нагружения (изгибе или растяжении) наиболее вероятно ожидать хрупкого разрушения деталей?

14. При выборе материала расчетной характеристикой является предел текучести, чем обеспечивается недеформируемость детали. Какие дополнительные испытания необходимо провести, чтобы была обеспечена надежность детали в работе?

15. Какое свойство материала характеризует его сопротивление упругому и пластическому деформированию при вдавливании в него другого, более твердого тела?

1) выносливость. 2) прочность. 3) упругость. 4) твердость.

16. При испытании на растяжение образец нагрузили до напряжения *R* после чего нагрузку сняли. Какова величина относительного удлинения образца (рис. 2.5)?

1) 6 %; 2) 4 %; 3) 3 %; 4) 8 %.

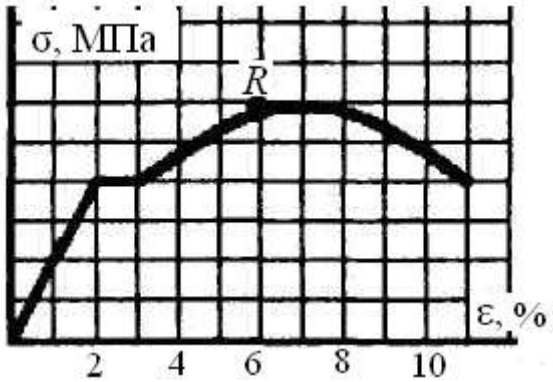


Рис. 2.5. Результаты испытания образца

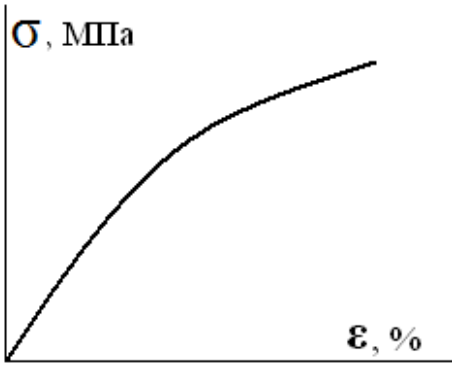


Рис. 2.6. Диаграмма деформации

17. На рис. 2.6 изображена диаграмма деформации для условных напряжений. Поведение каких металлов она отражает? σ ε

1) пластичных; 2) она может принадлежать любому металлу; 3) металлы не могут иметь такую диаграмму. Это неметаллический материал; 4) хрупких.

18. Вдоль какой плоскости ГЦК решетки легче всего происходит

скольжение?

1) (111); 2) (100); 3) (200); 4)(110).

19. Какие факторы строения реальных кристаллов вызывают пластические деформации при напряжениях меньших, чем рассчитанные для идеальной модели кристаллической решетки?

1) точечные дефекты; 2) дислокации; 3) поверхностные дефекты; 4) дефекты кристаллического строения.

20. При каком виде излома в зоне разрушения хорошо просматриваются форма и размер зерен?

1) при транскристаллитном; 2) при хрупком; 3) при вязком; 4) при усталостном.

21. При каком виде излома в области разрушения видны две зоны (предварительного разрушения и долома)?

1) при интеркристаллитном; 2) при усталостном; 3) при транскристаллитном; 4) при вязком.

22. Как называется механическое свойство, определяющее способность металла сопротивляться деформации и разрушению при статическом нагружении?

1) прочность; 2) вязкость разрушения; 3) ударная вязкость; 4) живучесть.

23. Что называют конструктивной прочностью материала?

1) способность противостоять усталости. 2) способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины. 3) способность сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность деталей в течение заданного времени. 4) комплекс механических свойств, обеспечивающих надежную и длительную работу в условиях эксплуатации.

24. Какое свойство материала называют надежностью?

1) способность противостоять усталости; 2) способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины; 3) способность сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность деталей в течение заданного времени; 4) способность противостоять хрупкому разрушению.

25. Какое свойство материала называют долговечностью?

1) способность оказывать в определенных условиях трения сопротивление изнашиванию; 2) способность сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность деталей в течение заданного времени; 3) способность противостоять хрупкому разрушению; 4) способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины.

26. Какое свойство материала называют выносливостью?

1) способность сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность деталей в течение заданного времени; 2) способность противостоять усталости; 3) способность работать в

поврежденном состоянии после образования трещины; 4) способность противостоять хрупкому разрушению.

27. Что такое живучесть?

1) продолжительность работы детали от момента зарождения первой макроскопической трещины усталости размером 0,5 - 1,0 мм до разрушения; 2) способность сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность деталей в течение заданного времени; 3) способность материала оказывать в определенных условиях трения сопротивление изнашиванию; 4) способность противостоять хрупкому разрушению.

28. Что такое порог хладноломкости?

1) максимальная ударная вязкость при температурах хрупкого состояния; 2) максимальная прочность при температурах хрупкого состояния; 3) относительное снижение ударной вязкости при переходе из вязкого состояния в хрупкое; 4) температура перехода в хрупкое состояние.

29. Как влияет поверхностное упрочнение на чувствительность металла к концентраторам напряжений?

1) не влияет на чувствительность; 2) характер влияния зависит от вида упрочнения; 3) понижает чувствительность; 4) повышает чувствительность.

30. Что такое длительная прочность?

1) напряжение, вызывающее разрушение при определенной температуре за данный отрезок времени; 2) свойство материала сопротивляться развитию постепенного разрушения, обеспечивая работоспособность детали в течение заданного времени; 3) долговечность детали от момента зарождения первой макроскопической трещины усталости до разрушения; 4) напряжение, вызывающее заданную скорость деформации при данной температуре.

2.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. Так как цинк имеет решетку ГПУ, а медь – ГЦК, то медь более пластична, чем цинк (у меди больше систем скольжения).

2. За счет работы источника Франка-Рида.

3. Наиболее упрочняемые металлы, кристаллическая решетка которых имеет большое количество систем скольжения, т. е. Г Ц К.

4. Железо – переходный, а медь – простой металл. Железо является более прочным, так как связь между ионами железа осуществляется не только *s*-электронами, но и частью электронов *d*-орбитали.

5. Холодная вытяжка проволок для тросов приводит к их упрочнению наклепом. Поэтому трос имеет очень высокую прочность

6. 1) Вы слишком категоричны. Например, при изготовлении деталей методом холодной вытяжки наклеп, упрочняющий материал, – явление

вредное (требуется больше затратить работы).

2) Такой ответ не всегда правильный. Например, возможность упрочнения материала наклепом позволяет уменьшить массу детали. В этом случае наклеп – явление полезное.

7. 1) Такой ответ нельзя считать правильным всегда. Например, при изготовлении деталей пластической деформацией дислокации следует читать полезными.

2) Ответ нельзя считать правильным в любом случае. Так, дислокации облегчают деформацию детали под нагрузкой, что практически нежелательно.

3) Правильно. Подход должен быть диалектическим с учетом реальной потребности.

8. Так как отдельные кристаллы по-разному ориентированы, то в них может происходить пластическая деформация, когда среднее напряжение, действующее на деталь, меньше $\sigma_{пц}$.

9. Уменьшение напряжения, необходимого для деформирования в условиях развития шейки по диаграмме $\delta = f(\sigma)$, связано с особенностями вычисления напряжения делением действующей силы $P_в$ на площадь поперечного сечения образца F_0 в исходном состоянии. Но так как сечение образца при пластической деформации уменьшается, особенно при развитии шейки, то истинные напряжения, необходимые для деформирования, все время возрастают.

10. 1) Ответ далеко не точный. Подумайте, что показывает участок *AB* диаграммы растяжения на рис. 2.3.

2) Ответ неточный.

3) Правильно. Для абсолютно хрупкого материала возможна только упругая деформация и диаграмма растяжения имела бы только участок АО.

11. 1) Неправильно. Продумайте суть процессов, происходящих в пластичном материале при вдавливании индентора. Может ли это быть у хрупкого материала?

2) Правильно.

12. Так как $\sigma_т$ характеризует сопротивление перемещению дислокаций, т. е. пластической деформации, то увеличение предела текучести от материала увеличивает сопротивление ползучести.

13. Так как при растяжении $\alpha = \tau_{max}/\sigma_{max} = 0{,}5$, то при этом виде нагружения нормальные напряжения максимальны, что содействует хрупкому разрушению.

14. Для обеспечения надежности нужно для предполагаемых к использованию материалов определить значение $a_р$ или температурные пороги хладноломкости.

15. 1) Неверно. Выносливостью называют способность материала противостоять усталости.

2) Неверно. Прочностью называют способность материала сопротивляться деформации и разрушению.

3) Неверно. Упругостью называют способность материала обратимо деформироваться под действием приложенной нагрузки.

4) Правильно.

16. 1) Неверно. В ответе не учтена упругая деформация образца.

2) Неверно. В ответе не точно определена величина упругой деформации.

3) Правильно.

4) Неверно.

17. 1) Неверно. При растяжении пластичных образцов перед разрушением деформация сосредоточивается в одной зоне, что приводит к появлению на диаграмме ниспадающего участка.

2) Неверно. При растяжении пластичных образцов перед разрушением деформация сосредоточивается в одной зоне, что приводит к появлению на диаграмме ниспадающего участка.

3) Неверно.

4) Правильно.

разрушения сильно искажены.

18. 1) Правильно.

2) Неверно. Сдвиг одной части кристалла относительно другой легче всего протекает по плоскостям с наиболее плотным расположением атомов. Эта плоскость таковой не является.

3) Неверно. Сдвиг одной части кристалла относительно другой легче всего протекает по плоскостям с наиболее плотным расположением атомов. Эта плоскость таковой не является.

4) Неверно. Сдвиг одной части кристалла относительно другой легче всего протекает по плоскостям с наиболее плотным расположением атомов. Эта плоскость таковой не является.

19. 1) Конечно, эти дефекты оказывают некоторое разупрочняющее действие, но не они, в этом смысле, наиболее эффективны.

2) Правильно.

3) Конечно, эти дефекты оказывают некоторое разупрочняющее действие, но не они, в этом смысле, наиболее эффективны.

4) Безусловно, дефекты кристаллического строения оказывают разупрочняющее действие. Но какой вид дефектов, в этом смысле, наиболее эффективен?

20. 1) Форма и размер зерен в зоне излома при транскристаллитном разрушении могут быть как искаженными, так и ненарушенными.

2) Правильно

3) Неверно. При вязком изломе форма и размер зерен в зоне разрушения сильно искажены.

4) Усталостный излом имеет две зоны: зону предварительного

разрушения (в ней зерна сильно искажены) и зону долома, в которой форма и размер зерен не нарушены.

21. 1) Неверно. При интеркристаллитном разрушении в зоне излома хорошо просматриваются форма и размер зерен.

2) Правильно

3) Форма и размер зерен в зоне излома при транскристаллитном разрушении могут быть как искаженными, так и ненарушенными.

4) Неверно. При вязком изломе форма и размер зерен в зоне разрушения сильно искажены.

22. 1) Правильно.

2) Неверно. Вязкость разрушения характеризует сопротивление материала распространению вязкой трещины.

3) Неверно. Ударная вязкость характеризует сопротивление материала разрушению при динамических нагрузках.

4) Неверно. Под живучестью понимают долговечность детали от момента зарождения первой макроскопической трещины усталости размером 0,5 - 1,0 мм до окончательного разрушения.

23. 1) Неверно. Способность материала противостоять усталости называют выносливостью.

2) Неверно. Способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины определяет живучесть материала.

3) Неверно. Такое свойство материала называют долговечностью.

4) Правильно.

24. 1) Неверно. Способность материала противостоять усталости называют выносливостью.

2) Неверно. Способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины определяет живучесть материала.

3) Неверно. Такое свойство материала называют долговечностью.

4) Правильно.

25. 1) Неверно. Такое свойство материала называют износостойкостью.

2) Правильно.

3) Неверно. Способность материала противостоять хрупкому разрушению называют надежностью.

4) Неверно. Способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины определяет живучесть материала.

26. 1) Неверно. Такое свойство материала называют долговечностью.

2) Правильно.

3) Неверно. Способность работать в поврежденном состоянии после образования трещины определяет живучесть материала.

4) Неверно. Способность материала противостоять хрупкому разрушению называется надежностью.

27. 1) Правильно.

2) Неверно. Такое свойство материала называют долговечностью.

3) Неверно. Такое свойство материала называют износостойкостью.

4) Неверно. Способность материала противостоять хрупкому разрушению называют надежностью.

28. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

29. 1) Неверно. Влияние концентраторов сказывается в основном при растягивающих напряжениях при знакопеременном изгибающем нагружении. Поверхностное упрочнение создает на поверхности напряжения сжатия, снимающие часть внешней нагрузки.

2) Неверно. От вида упрочнения зависят лишь количественные характеристики. Направление же влияния для всех видов упрочнения постоянно.

3) Правильно.

4) Неверно. Влияние концентраторов сказывается в основном при растягивающих напряжениях при знакопеременном изгибающем нагружении. Поверхностное упрочнение создает на поверхности напряжения сжатия, снимающие часть внешней нагрузки.

30. 1) Правильно.

2) Неверно. Такое свойство материала называют долговечностью.

3) Неверно. Такую характеристику материалов называют живучестью.

4) Неверно. Такую характеристику называют пределом ползучести.

2.5. Задачи

При решении задач этого и последующих разделов, следует воспользоваться данными приложений.

2.1. Дайте определение физического $\sigma_т$ и условного $\sigma_{0,2}$ пределов текучести. В каких случаях определяется та или иная прочностная характеристика?

2.2. Твёрдость малоуглеродистой стали равна 180 НВ. Чему примерно равен предел прочности этой стали? Как можно, используя эту информацию, определить марку стали по ГОСТ 1050 - 88?

2.3. Какие прочностные свойства металла определяют при испытании растяжением? В чем различие при обработке результатов испытания образцов из низко - и высокоуглеродистой стали?

2.4. Какие пластические свойства металла определяют при испытании растяжением? Как влияют абсолютные размеры образцов на численные значения характеристик пластичности? Обоснуйте свою точку зрения.

2.5. Какая из приведённых диаграмм деформации (рис. 2.7) соответствует наиболее хрупкому материалу? Из какого материала, по

Вашему мнению, целесообразно изготавливать детали, работающие в условиях растяжения, сжатия, интенсивного изнашивания?

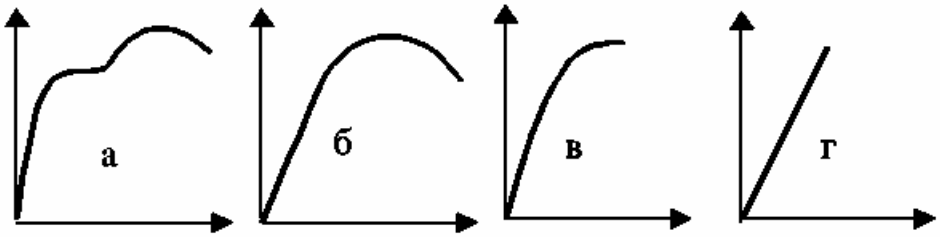


Рис. 2.7. Диаграммы деформации материалов

№ 2.6. Твердость образца *A* равна 800 НВ, а твердость образца *B* – 80 HR. Какой материал тверже и почему?

2.7. Сравните методы измерения твёрдости по Бринеллю и Роквеллу с точки зрения универсальности. Как, имея в распоряжении твердомер, определить примерно прочность отожженной стали?

2.8. Два материала имеют равную прочность, но различную пластичность. Какому из них следует отдать предпочтение с точки зрения надёжности при работе в условиях растяжения?

2.9. При испытании «десятикратных» образцов диаметром 6 мм для малоуглеродистой стали получено относительное удлинение δ_{10} = 20 %. Пересчитайте δ_{10} в δ_5, если известно, что 25 % удлинения «десятикратного» и 40 % - «пятикратного» образца локализовано в шейке, т. е. $\Delta I_{Ш}/\Delta I_{10}$ = 0,25 и $\Delta I_{Ш}/\Delta I_5$ = 0,4.

2.10. При испытании «десятикратных» образцов диаметром 6 мм для среднеуглеродистой стали получено относительное удлинение δ_{10} = 10 %. Пересчитайте δ_{10} в δ_5, если известно, что 30 % удлинения «десятикратного» и 46 % - «пятикратного» образца локализовано в шейке, т. е. $\Delta I_{Ш}/\Delta I_{10}$ = 0,3 и $\Delta I_{Ш}/\Delta I_5$ = 0,46.

2.11. Известно, что при испытании на растяжение одной партии металла у коротких «пятикратных» образцов относительное удлинение δ_5 (%) всегда больше, чем относительное удлинение длинных «десятикратных» образцов δ_{10}. Проводили определение пластичности металла на коротких образцах. Пересчитайте значение δ_5 в δ_{10}, если известна равномерная деформация металла $\delta_{равн.}$ (%) в пределах базовой длины образца.

Пересчет выполнить в предположении, что развитие шейки на обоих видах образцов одинаково. Покажите схематично распределение локальной деформации по базовой длине образца.

Варианты исходных данных для задачи 2.9

Вариант	δ_5	$\delta_{равн.}$		Вариант	δ_5	$\delta_{равн.}$
1	10	6		11	20	12
2	11	7		12	21	12

3	12	8	13	22	14
4	13	8	14	23	15
5	14	9	15	24	16
6	15	9	16	25	17
7	16	10	17	26	18
8	17	10	18	27	19
9	18	11	19	28	20
10	19	11	20	29	21

2.12. Нарисуйте схематично кривые растяжения двух металлов:

а) с одинаковой прочностью, но с разной пластичностью;

б) с одинаковой пластичностью, но с разной прочностью.

В качестве показателя пластичности принять абсолютное удлинение.

2.13. Известно, что при испытании на растяжение одной партии металла у длинных «десятикратных» образцов относительное удлинение δ_{10} (%) всегда меньше, чем относительное удлинение коротких «пятикратных» образцов δ_5. Проводили определение пластичности металла на длинных образцах. Пересчитайте значение δ_{10} в δ_5, если известна равномерная деформация металла $\delta_{равн.}$ (%) в пределах базовой длины образца.

Пересчет выполнить в предположении, что развитие шейки на обоих видах образцов одинаково. Покажите схематично распределение локальной деформации по базовой длине образца.

Варианты исходных данных для задачи 2.14

Вариант	δ_{10}	$\delta_{равн.}$	Вариант	δ_{10}	$\delta_{равн.}$
1	28	20	11	27	18
2	27	19	12	26	17
3	26	18	13	25	16
4	25	17	14	24	15
5	24	16	15	23	14
6	23	15	16	22	13
7	22	14	17	21	12
8	21	13	18	20	11
9	20	12	19	28	21
10	28	19	20	27	20

2.14. Ударная вязкость металла *A* определена на образцах с *U*-образным надрезом; металлов *B* на образцах с *V*-образным надрезом. Оказалось, что ударная вязкость металлов *A* и *B* почти одинаковы. Исходя из этого факта, какой металл надежнее? Докажите свою точку зрения расчетом.

2.15. Из толщиной 15 мм вырезали образцы для испытания ударным изгибом (рис. 2.8). У каких образцов и почему предполагается наибольшая и

наименьшая ударная вязкость?

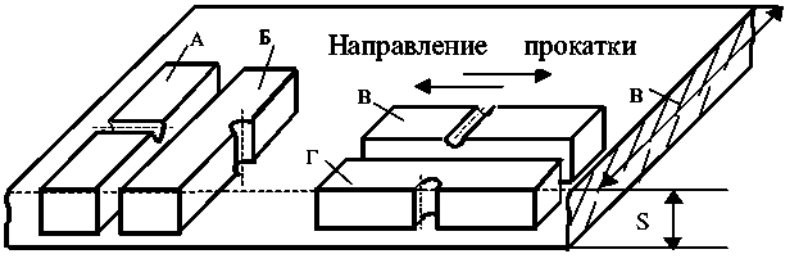


Рис. 2.8. Котельный лист, S = 15 мм; B = 1250 мм

При ответе на вопрос задачи соотнесите направление прокатки металла и направление вырезки образцов.

2.16. Твердость образца равна 1200 НВ. Чему будет равна твердость в единицах HR?

2.17. При выборе материала по справочнику установлено, что ударная вязкость одного материала равна 90 МДж/м^2, другого – 70 МДж/м^2. Подумайте, какой из этих материалов будет более надежен в работе (имеет большее сопротивление хрупкому разрушению).

2.18. Болт изготовлен из стали с $\sigma_в$ = 600 МПа, имеет резьбу с глубиной витка 2 мм и радиусом закругления 0,5 мм. Что будет происходить с болтом, если от действующей нагрузки в нем возникает напряжение $\sigma_{ср}$ = 200 МПа?

2.19. Температурные пороги T_{50} у двух материалов соответственно равны +5 °С и –20 °С. Какой из этих материалов надежней в работе при +20 °С? Ответ: материал, у которого: 1) T_{50} = +5 °С; 2) T_{50} = –20 °С.

2.20. Два материала имеют ударную вязкость *KCV* 0,5 и 0,7 МДж/м^2 соответственно. Какой из этих материалов надежней в работе?

3. КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

3.1. Методические указания

Переход металла из жидкого состояния в твердое (кристаллизация) совершается в условиях, когда система переходит в термодинамически более устойчивое состояние с меньшей свободной энергией. Для этого перехода необходимо наличие разницы в свободных энергиях твердой и жидкой фаз, причем энергия твердой фазы должна иметь более низкое значение. Процесс кристаллизации начинается с образования зародышей твердой фазы и продолжается в процессе роста их числа и размеров.

Необходимо понимать, что применение чистых металлов в промышленности крайне ограниченно. Их использование не всегда экономически выгодно, а часто и не оправдано, так как они не могут обеспечить требуемый комплекс свойств. Поэтому более перспективным

материалом являются сплавы, которые позволяют реализовать как любое достижимое свойство, так и целую группу требуемых свойств.

Следует четко определять понятия: «термодинамическая система», «свободная энергия системы», «компонент», «фаза», «термодинамическое равновесие системы».

Движущей силой процесса кристаллизации является разница свободных энергий жидкой и твердой фаз, возникающая при переохлаждении расплава ниже равновесной температуры кристаллизации. Конечная структура затвердевшего сплава определяется условиями кристаллизации: скоростью охлаждения. Каждое зерно, образующееся в результате кристаллизации, представляет собой дендритный кристалл, химический состав которого изменяется от центра к периферии. Разберите строение металлического слитка в зависимости от условий кристаллизации.

Для описания кристаллизации чистого металла достаточным является построение термической кривой. При кристаллизации двухкомпонентных сплавов в равновесном состоянии используются диаграммы состояния, которые в удобной графической форме позволяют судить о их фазовом составе в любой точке диаграммы. Оценка количества фаз в двухфазной области производится в соответствии с правилом отрезков (рычага). Особое внимание уделите разбору правила фаз и рассчитайте число степеней свободы при кристаллизации чистого металла и двухкомпонентного сплава.

Необходимо отчетливо представлять строение металлов и сплавов в твердом состоянии. Уясните, что такое твердый раствор, химическое соединение, механическая смесь. Нужно усвоить общую методику построения диаграмм состояния для различных случаев взаимодействия компонентов в твердом состоянии.

Весьма важным следует считать изучение диаграмм «состав-свойство». С помощью правил Курнакова нужно уметь установить связь между составом, строением и свойствами сплава.

3.2. Краткие теоретические сведения

Кристаллизация – это переход материала из жидкого состояния в твердое кристаллическое.

В природе все самопроизвольно протекающие процессы, в том числе и кристаллизация, обусловлены тем, что новое состояние является энергетически более устойчивым, так как обладает меньшей свободной энергией (энергией Гиббса).

Процесс кристаллизации состоит из двух этапов: образования центров кристаллизации (зародышей) и их дальнейшего роста.

Скорость каждого из процессов зависит от степени переохлаждения (ΔT) жидкости относительно равновесной температуры (T_s), т. е. температуры, при которой энергии Гиббса жидкого и кристаллического

состояний равны. При $\Delta T = 0$ образование зародышей кристаллов (центров кристаллизации) невозможно, поскольку движущий фактор процесса (разность энергий Гиббса жидкого и твердого состояний) равен нулю. С увеличением переохлаждения эта разность растет, вызывая увеличение скорости возникновения центров кристаллизации ($v_З$) и скорости роста кристаллов ($v_Р$). Однако при этом снижается диффузионная подвижность атомов, что вызывает торможение обоих элементарных процессов. При небольших значениях степени переохлаждения ΔT ($v_З << v_Р$) образуются крупнозернистые структуры. С увеличением степени переохлаждения структуры измельчаются ($v_З >> v_Р$). При значительном переохлаждении атомы становятся столь малоподвижными, что кристаллизация полностью подавляется и образуется аморфная структура.

Сплав – это вещество, полученное сплавлением, спеканием, электролизом или каким-либо другим способом из двух или более компонентов.

Сплавы обладают более разнообразным комплексом свойств, которые изменяются в зависимости от состава и метода обработки.

Строение металлического сплава зависит от того, в какие взаимодействия вступают компоненты, составляющие сплав. Почти все металлы в жидком состоянии растворяются друг в друге в любых соотношениях. При образовании сплавов в процессе их затвердевании возможно различное взаимодействие компонентов. По характеру взаимодействия компонентов различают следующие виды сплавов: механические смеси, твердые растворы, химические соединения, промежуточные фазы.

Кристаллизация сплавов подчиняется тем же закономерностям, что и кристаллизация чистых металлов. Основным отличием является большая роль диффузионных процессов между жидкостью и кристаллизующейся фазой. Кроме того, в сплавах в твердых состояниях, имеют место процессы перекристаллизации, обусловленные аллотропическими превращениями компонентов сплава, распадом твердых растворов, выделением из твердых растворов вторичных фаз, когда растворимость компонентов в твердом состоянии меняется с изменением температуры. Эти превращения называют фазовыми превращениями в твердом состоянии.

3.3. Вопросы

1. Из скольких фаз состоит система вода – лед, когда наряду с водой существует пять кусков льда разной формы и размеров?

число фаз: 1) шесть; 2) две.

2. Опираясь на чисто логические соображения, подумайте, возможны ли процессы диффузии при отрицательных температурах?

1) возможны; 2) невозможны.

3. В сплавах Fe – Cr разного состава установлена фаза с одним и тем же типом кристаллической решетки о. ц. к., но имеющим разные периоды. Какой следует считать эту фазу?

1) химическое соединение; 2) твердый раствор.

4. Исходя из характеристики основных фаз в сплавах установите по какому основному признаку можно судить, является ли фаза твердым раствором, химическим соединением или чистым компонентом.

кристаллизация сплавов происходит: 1) при $T \neq \text{const}$, так как при кристаллизации число степеней свободы $C \neq 0$; 2) в таких же температурных условиях, как и чистых веществ, так как $C \neq 0$.

5. Возможна ли кристаллизация двухкомпонентного сплава при постоянной температуре? Если да, то при каких условиях?

1) невозможна; 2) возможна, если при кристаллизации образуются две твердые фазы.

6. Диаграмма состояния представляет собой графическое изображение зависимости температур фазовых превращений в сплавах от их состава. Исходя их этого определения установите, в каких координатах должна строиться диаграмма состояния двухкомпонентного сплава.

в координатах: 1) температура – концентрация (состав); 2) температура – время.

7. При какой (каких) температуре(ах) возможен процесс кристаллизации (рис. 3.3)?

1) T_2 и T_3; 2) T_1 и T_2; 3) T_1; 4) T_3.

8. На рис. 3.4 представлено изменение энергии Гиббса при образовании зародышей кристалла. Возможен ли рост кристалла из зародыша размером r?

1) к росту способен любой зародыш; 2) рост маловероятен, так как он сопровождается повышением энергии Гиббса; 3) рост возможен, поскольку размер зародыша превышает критический; 4) рост такого зародыша возможен только при гетерогенном образовании.

9. Чем определяется форма зерен металла?

1) условиями столкновения растущих зародышей правильной формы; 2) формой частиц нерастворимых примесей, на которых протекает кристаллизация; 3) интенсивностью тепловых потоков; 4) формой кристаллических зародышей.

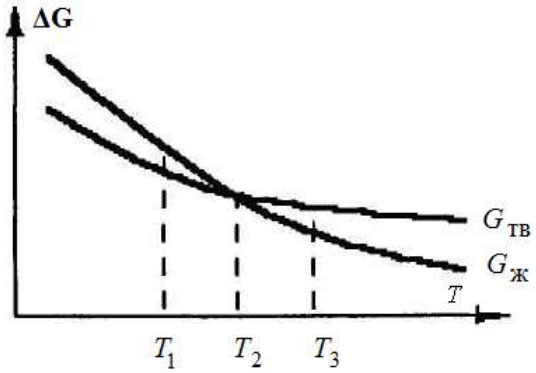


Рис. 3.3. Изменение энергии Гиббса от температуры

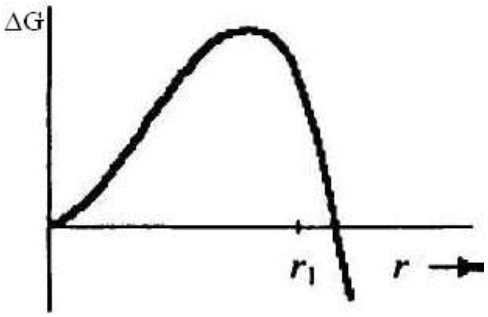


Рис. 3.4. Изменение энергии Гиббса при образовании зародышей кристалла

10. Как зависит размер зерен металла от степени переохлаждения его при кристаллизации?

1) чем больше степень переохлаждения, тем крупнее зерно; 2) размер зерна не зависит от степени переохлаждения; 3) чем больше степень переохлаждения, тем мельче зерно; 4) зависимость неоднозначна: с увеличением переохлаждения зерно одних металлов растет, других - уменьшается.

11. Какую структуру можно ожидать, если при кристаллизации достигнута степень переохлаждения n_1 (рис. 3.5)?

1) любую. Характер структуры мало зависит от степени переохлаждения; 2) аморфную; 3) крупнокристаллическую; 4) мелкокристаллическую.

12. Как называется структура, схема которой представлена на рис. 3.6?

1) дендрит; 2) блок мозаичной структуры; 3) сложная кристаллическая решетка; 4) ледебурит.

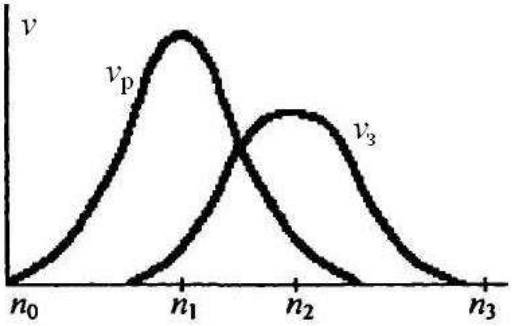


Рис. 3.5. Степень переохлаждения сплава

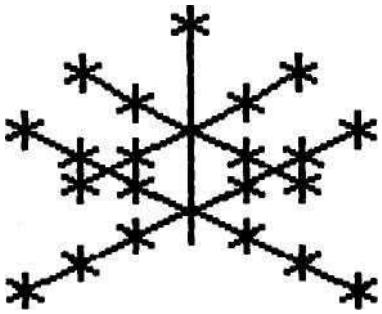


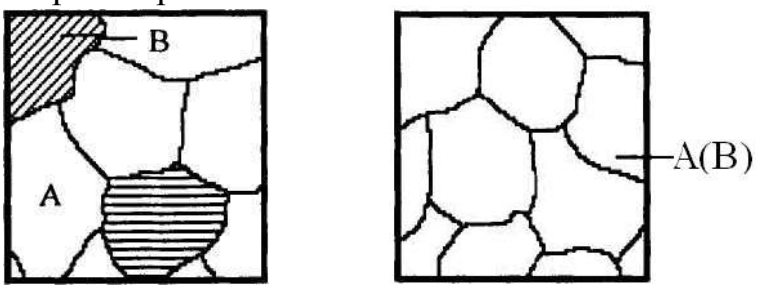
Рис. 3.6. Структура сплава

13. Микроструктура какого сплава представлена на рис. 3.7, *а*?

1) твердого раствора внедрения; 2) твердого раствора замещения; 3) механической смеси; 4) химического соединения.

14. Микроструктура какого сплава представлена на рис. 3.7, *б*?

1) механической смеси; 2) чистого металла; 3) химического соединения; 4) твердого раствора.



а *б*

Рис. 3.7. Микроструктура сплава

15. Кристаллическая решетка какого сплава представлена на рис. 3.8, *а*?

1) механической смеси; 2) твердого раствора внедрения; 3) химического соединения; 4) твердого раствора замещения.

16. Какому типу сплавов принадлежит кристаллическая решетка, представленная на рис. 3.8б?

1) твердому раствору внедрения; 2) твердому раствору замещения; 3) химическому соединению; 4) механической смеси.

а *б*

Рис. 3.8. Кристаллическая решетка сплава:

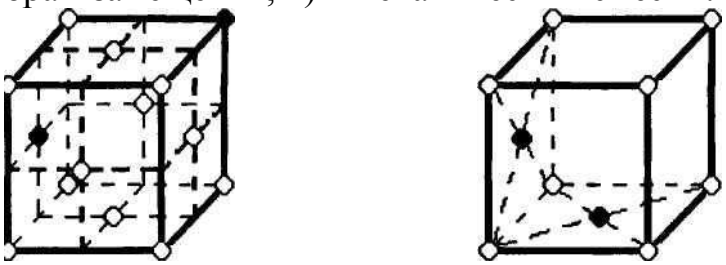
○ - компонент *A*; ● - компонент *B*

17. К какому типу принадлежит сплав, кристаллическая решетка которого представлена на рис. 3.9, *а*?

1) к химическим соединениям; 2) к твердым растворам замещения; 3) к твердым растворам внедрения; 4) к механическим смесям.

18. К какому типу принадлежит сплав, кристаллическая решетка которого представлена на рис. 3.9, *б*?

1) к химическим соединениям; 2) к твердым растворам внедрения; 3) к твердым растворам замещения; 4) к механическим смесям.



а *б*

Рис. 3.9. Кристаллическая решетка сплава:
○ - компонент *A*; ● - компонент *B*

19. На рис. 3.10 представлены кристаллические решетки, принадлежащие сплавам одной системы. Какая это система?

В системе...1) компоненты ограниченно растворяются друг в друге; 2) компоненты неограниченно растворяются друг в друге; 3) отсутствует взаимная растворимость компонентов; 4) компоненты образуют устойчивое химическое соединение.

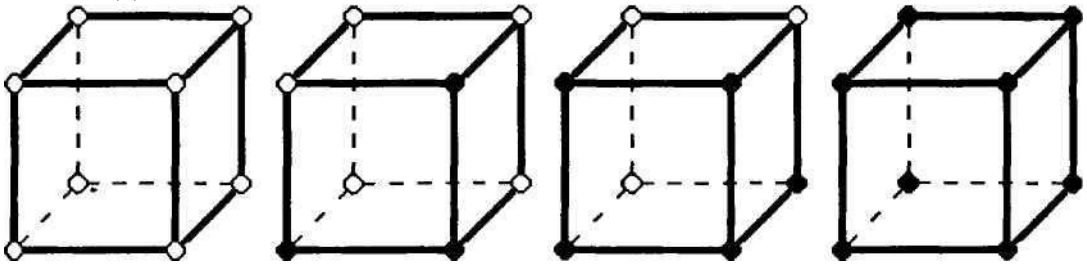


Рис. 3.10. Кристаллические решетки сплавов:
○ - компонент *A*; ● - компонент *B*

20. Для каких сплавов компонентов *A* и *B* характерно равенство $A(B) = B(A)$?

1) для твердых растворов внедрения; 2) для механических смесей; 3) для химических соединений; 4) для неограниченных твердых растворов.

21. Возможна ли 100-процентная концентрация растворяемого компонента в решетке растворителя?

1) возможна в системе с химическими соединениями; 2) нет; 3) возможна в системе механических смесей; 4) возможна в системе неограниченных твердых растворов.

22. Где правильно записано уравнение правила фаз?

1) $C = K+F-1$; 2) $C = F+K+1$; 3) $C = F-K+1$; 4) $C = K-F+1$.

23. Что такое эвтектика?

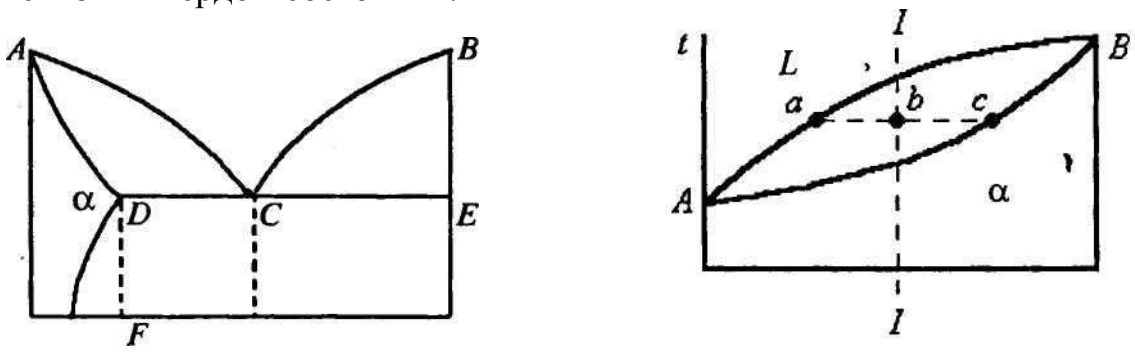
1) вещество, образующееся при некотором соотношении компонентов и имеющее кристаллическую решетку, отличную от решеток, составляющих эвтектику веществ; 2) механическая смесь двух компонентов; 3) неограниченный твердый раствор компонентов друг в друге; 4) механическая смесь, образующаяся в результате одновременной кристаллизации компонентов или твердых растворов из жидкого раствора.

24. Диаграмма состояния какого типа представлена на рис. 3.11, *а*?

1) с неограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии; 2) с ограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии; 3) с неустойчивым химическим соединением; 4) с отсутствием растворимости компонентов в твердом состоянии.

25. Какая диаграмма состояния представлена на рис. 3.11, *а*?

1) с неограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии; 2) с ограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии; 3) с химическим соединением; 4) с отсутствием растворимости компонентов в твердом состоянии.



а *б*

Рис. 3.11. Диаграмма состояния сплава

26. Отношением каких отрезков определяется количество кристаллической фазы в сплаве $I - I$ в точке b (рис. 3.12, *б*)?

1) bc/ac; 2) bc/ab; 3) ab/ac; 4) ab/bc.

27. При каких температурных условиях кристаллизуются чистые металлы?

1) в зависимости от природы металла температура может снижаться в одних случаях, повышаться в других и оставаться постоянной в третьих; 2) при снижающейся температуре; 3) при растущей температуре; 4) при постоянной температуре.

28. При каких температурных условиях кристаллизуются сплавы в системе с неограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии?

1) все сплавы кристаллизуются при снижающейся температуре; 2) кристаллизация сплавов протекает при снижающейся температуре, завершается - при постоянной; 3) все сплавы кристаллизуются при

постоянной температуре; 4) сплавы кристаллизуются при растущей температуре (из-за выделения скрытой теплоты кристаллизации).

29. При каких температурных условиях кристаллизуются эвтектики в двухкомпонентных сплавах?

1) при снижающейся температуре; 2) в зависимости от вида сплава температура может расти в одних случаях, снижаться в других и оставаться постоянной в третьих; 3) при постоянной температуре; 4) при растущей температуре.

30. Как меняется температура сплавов системы с отсутствием растворимости компонентов в твердом состоянии в процессе кристаллизации?

1) снижается (кроме эвтектического сплава), завершается кристаллизация всех сплавов при постоянной температуре; 2) остается постоянной; 3) снижается; 4) снижается (кроме эвтектического сплава), завершается кристаллизация некоторых сплавов при постоянной температуре.

3.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Неверно. Ведь форма и размер разных кусков льда не является признаком разных фаз.

2) Правильно. Одна фаза – вода, другая – пять кусков льда.

2. 1) Правильно. Атомы движутся при любой температуре.

2) Ошибаетесь. Разве при $T < 0$ °С атомы не движутся?

3. Чтобы осуществить закалку, нужен нагрев в аустенитную область, т. е. превращение П → А; после этого при охлаждении происходит превращение А → М; при отпуске мартенсит подвергается распаду, т. е. М → продукты распада.

4. Получение мелкого зерна аустенита обеспечивает применение наследственно-мелкозернистых сталей, сталей, легированных Ti, Zr, V, W; повышенную скорость нагрева; предотвращение перегрева; оптимальное время нагрева.

5. Увеличение времени превращения связано с уменьшением скорости диффузии углерода при температурах ниже 550 °С.

6. Чем выше степень переохлаждения, тем более мелкокристаллическими являются продукты превращения (как и при кристаллизации жидкой фазы). Поэтому следует ожидать, что кристаллы феррита и цементита, которые образовались при 550 °С, будут мельче, чем образовавшиеся при 700 °С.

7. 1) Неверно. Любой спонтанный процесс протекает лишь тогда, когда уровень энергии нового состояния ниже, чем у исходного состояния. При температуре T_3 энергия кристаллического состояния выше, чем энергия жидкости, а при T_2 они равны.

2) Неверно. При температуре T_2 кристаллизация невозможна,

поскольку уровень энергии жидкого и кристаллического состояний одинаков.

3) Правильно.

4) Неверно. Любой спонтанный процесс протекает лишь тогда, когда уровень энергии нового состояния ниже, чем исходного. При температуре T_3 энергия кристаллического состояния выше уровня энергии жидкости.

8. 1) Безусловно, выбранный вами фактор оказывает существенное влияние на процесс кристаллизации, однако он проявляется в более общих закономерностях, установленных Д. К. Черновым.

2) Правильно.

3) Безусловно, выбранный вами фактор оказывает существенное влияние на процесс кристаллизации, однако он проявляется в более общих закономерностях, установленных.

4) Неверно. Вне зависимости от того, образуется ли зародыш внутри жидкости или на частицах примеси, его рост возможен лишь тогда, когда он будет сопровождаться снижением энергии системы.

9. 1) Правильно.

2) Неверно. Форма частиц, а точнее форма их кристаллов оказывает влияние на форму растущих зерен, лишь пока зерна находятся в контакте с жидкостью, а не друг с другом.

3) Тепловые потоки, безусловно, влияют на ориентацию и форму растущих кристаллов, однако это влияние по сути - лишь проявление более общих закономерностей.

4) Неверно. Форма зародышей определяет форму растущих кристаллов, лишь пока они окружены жидкостью.

10. 1) Неверно. При больших степенях переохлаждения в единицу времени образуется большое количество мелких центров кристаллизации, к тому же скорость роста кристаллов из этих центров в таких условиях невысока.

2) Неверно. Поскольку пики кривых числа возникающих центров кристаллизации и скорости роста из них кристаллов не совпадают по температуре, вид структуры не может не зависеть от степени переохлаждения сплава.

3) Правильно.

4) Неверно. При малых степенях переохлаждения возможно возникновение лишь достаточно крупных центров кристаллизации и, следовательно, не очень большого их количества. Эта закономерность характерна для всех металлов.

11. 1) Неверно. Поскольку пики кривых числа возникающих центров кристаллизации и скорости роста из них кристаллов не совпадают по температуре, вид структуры не может не зависеть от степени переохлаждения сплава.

2) Неверно. Аморфная структура может быть получена при таких переохлаждениях, когда подвижность атомов становится недостаточной для

образования центров кристаллизации.

3) Правильно.

4) Неверно. Мелкокристаллическая структура может возникнуть тогда, когда образуется большое количество центров кристаллизации при малой скорости роста из них кристаллов.

12. 1) Правильно.

2) Неверно. Блоки мозаичной структуры представляют собой бездефектные (за исключением точечных дефектов) участки кристалла, окруженные малоугловыми границами.

3) Неверно. Сложными называют решетки, у которых атомы находятся не только в вершинах элементарной ячейки, но также и внутри ее или на ее гранях или ребрах.

4) Неверно. Ледебурит - это структурная составляющая железоуглеродистых сплавов, представляющая собой механическую смесь аустенита и цементита или перлита и цементита.

13. 1) Неверно. Твердые растворы обозначают буквами греческого алфавита, либо выражениями вида $A(B)$ - раствор компонента B в A. Зерна растворов однородны. К какому виду растворов относится сплав, можно установить лишь на атомном уровне.

2) Неверно. Твердые растворы обозначают буквами греческого алфавита, либо выражениями вида $A(B)$ - раствор компонента B в A. Зерна растворов однородны. К какому виду растворов относится сплав, можно установить лишь на атомном уровне.

3) Правильно.

4) Неверно. Зерна химических соединений однородны. Химические соединения обозначают выражениями вида A_mB_n, где A и B - компоненты соединения, а m и n - их стехиометрические коэффициенты.

14. 1) Неверно. Микроструктура сплава типа механическая смесь состоит из разнородных зерен.

2) Неверно. Чистые металлы обозначают их химическими символами или, в общем виде, буквами латинского алфавита.

3) Неверно. Химические соединения обозначают выражениями вида A_mB_n, где A и B - компоненты соединения, а m и n - их стехиометрические коэффициенты.

4) Правильно.

15. 1) Неверно. Механическая смесь выявляется на уровне отдельных зерен или их частей, т.е. на уровне микроструктуры, а не тонкой структуры, как в данном случае.

2) Неверно. В растворах внедрения атомы растворенного компонента находятся в междоузлиях кристаллической решетки.

3) Неверно. В кристаллической решетке химического соединения атомы компонентов расположены закономерно - каждый атом одного компонента окружен вполне определенным количеством атомов другого

компонента.

4) Правильно.

16. 1) Правильно.

2) Неверно. В твердых растворах замещения атомы растворенного компонента занимают места в узлах кристаллической решетки вместо атомов компонента-растворителя.

3) Неверно. В кристаллической решетке химического соединения атомы компонентов расположены закономерно - каждый атом одного компонента окружен вполне определенным количеством атомов другого компонента.

4) Неверно. Механическая смесь выявляется на уровне отдельных зерен или их частей, т.е. на уровне микроструктуры, а не тонкой структуры, как в данном случае.

17. 1) Неверно. В кристаллической решетке химического соединения атомы компонентов расположены закономерно - каждый атом одного компонента окружен вполне определенным количеством атомов другого компонента.

2) Правильно.

3) Неверно. В растворах внедрения атомы растворенного компонента находятся в междоузлиях кристаллической решетки.

4) Неверно. Механическая смесь выявляется на уровне отдельных зерен или их частей, т. е. на уровне микроструктуры, а не тонкой структуры, как в данном случае.

18. 1) Неверно. В кристаллической решетке химического соединения атомы компонентов расположены закономерно - каждый атом одного компонента окружен вполне определенным количеством атомов другого компонента.

2) Правильно.

3) Неверно. В твердых растворах замещения атомы растворенного компонента занимают места в узлах кристаллической решетки вместо атомов компонента-растворителя.

4) Неверно. Механическая смесь выявляется на уровне отдельных зерен или их частей, т. е. на уровне микроструктуры, а не тонкой структуры, как в данном случае.

19. 1) Неверно. На схеме четко просматривается плавный переход от решетки чистого компонента *A* к чистому компоненту *B*.

2) Правильно.

3) Неверно. В кристаллических ячейках сплавов находится переменное количество атомов как компонента *A*, так и *B*.

4) Неверно. Химическое соединение имеет постоянную решетку, в которой местоположение всех атомов вполне определенно.

20. 1) Неверно. В твердых растворах внедрения атомы растворенного компонента находятся в междоузлиях решетки растворителя. В этом случае

растворы $A(B)$ и $B(A)$ существенно различны.

2) Неверно. Выражения вида $A(B)$ означают твердый раствор компонента B в A. Механические смеси растворов не образуют.

3) Неверно. Выражения вида $A(B)$ означают твердый раствор компонента B в A, но не химическое соединение.

4) Правильно.

21. 1) Возможны химические соединения, неограниченно растворяющиеся друг в друге. Однако если все атомы соединения заменить атомами одного растворяемого компонента, то оно перестанет быть соединением.

2) Неверно. Если все атомы в кристаллической решетке одного компонента могут быть замещены атомами другого компонента, то это и будет раствор со 100-процентной концентрацией.

3) Неверно. В системе механических смесей не образуется твердых растворов.

4) Правильно.

22. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

23. 1) Неверно. Выбранный ответ описывает признаки химического соединения, но не эвтектики.

2) Ответ неполон. Механической смесью является, например, эвтектоид, имеющий определенные отличия от эвтектики.

3) Неверно. Там, где имеют место неограниченные твердые растворы, эвтектики быть не может.

4) Правильно.

24. 1) Правильно.

2) Неверно. В системе в твердом состоянии нет механических смесей, нет химических соединений и нет иного раствора, кроме α .

3) Неверно. В системе в твердом состоянии нет механических смесей, нет химических соединений и нет иного раствора, кроме α

4) Неверно. В системе в твердом состоянии нет механических смесей, нет химических соединений и нет иного раствора, кроме α.

25. 1) Неверно. При охлаждении сплавов, лежащих между точками D и E, образуется механическая смесь (эвтектика) из твердого раствора a и компонента B.

2) Правильно.

3) Неверно. Диаграммы с химическим соединением состоят как бы из двух диаграмм, приложенных друг к другу по линии химического соединения.

4) Неверно. В области, лежащей левее линии ADF, в диаграмме присутствует твердый раствор α.

26. 1) Неверно. Выражение *bclac* определяет относительное количество жидкой фазы сплава.

2) Неверно. Выражение *bclab* определяет соотношение жидкой и твердой фаз сплава.

3) Правильно.

4) Неверно. Выражение *ablbc* определяет соотношение твердой и жидкой фаз сплава.

27. 1) Неверно. Поведение системы в различных термодинамических условиях определяется законом Гиббса. Примените правило фаз, и вы получите однозначный ответ на поставленный вопрос.

2) Неверно. Поведение системы в различных термодинамических условиях определяется законом Гиббса. Примените правило фаз, и вы получите однозначный ответ на поставленный вопрос.

3) Неверно. Поведение системы в различных термодинамических условиях определяется законом Гиббса. Примените правило фаз, и вы получите однозначный ответ на поставленный вопрос.

4) Правильно.

28. 1) Правильно.

2) Неверно. Температура может меняться подобным образом, если кристаллизация завершается образованием эвтектики, чего в рассматриваемой системе нет.

3) При постоянной температуре кристаллизуются лишь нонвариантные системы. В рассматриваемом случае кристаллизация всех сплавов (кроме чистых компонентов) протекает при степенях свободы, отличных от нуля.

4) Неверно. Некоторый рост температуры в начале кристаллизации возможен лишь при значительном переохлаждении сплава.

29. 1) Неверно. Отвод тепла при эвтектическом превращении полностью компенсируется скрытой теплотой кристаллизации. Для ответа на поставленный вопрос примените правило фаз.

2) Правильно.

3) Неверно. Применив правило фаз к рассматриваемой системе, вы получите однозначный ответ на поставленный вопрос.

4) Неверно. Рост температуры возможен лишь на начальной стадии кристаллизации при сильном переохлаждении жидкости.

30. 1) Правильно.

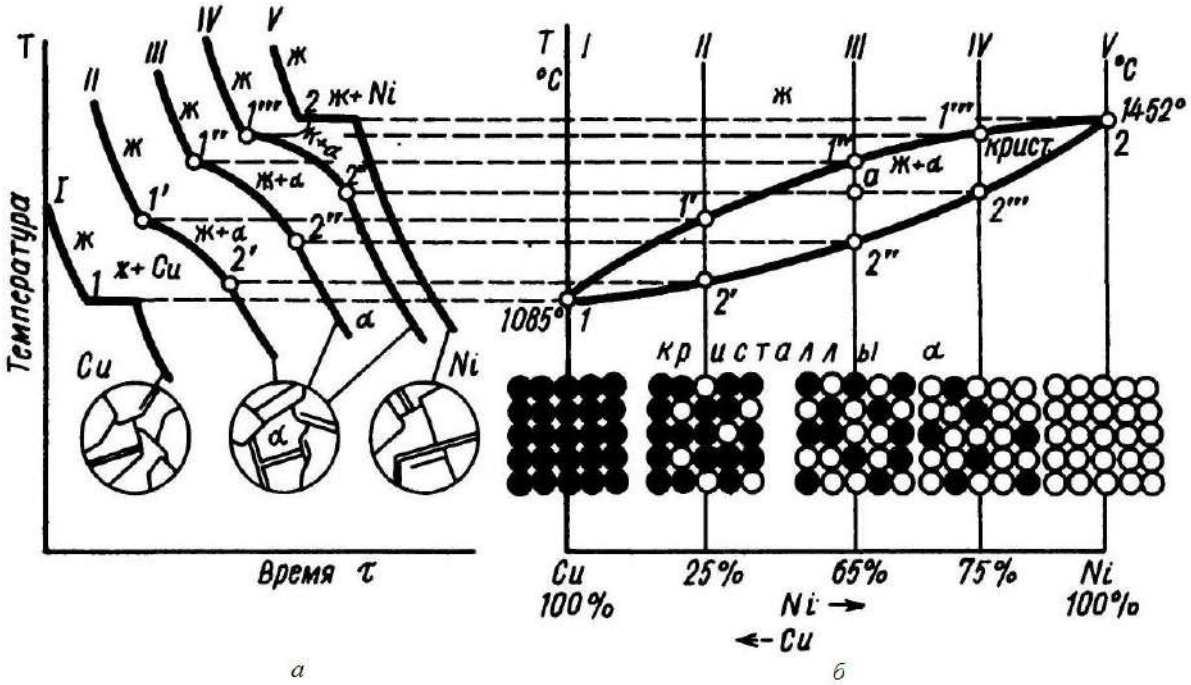
2) Неверно. При постоянной температуре в таких системах кристаллизуется лишь один сплав - эвтектический.

3) Неверно. Для большинства сплавов системы это лишь один из этапов процесса кристаллизации.

4) Неверно. Так кристаллизуются сплавы в системах с ограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии.

3.5. Задачи

3.1. Определите количество жидкой фазы у сплава состава 65 % Ni и 35 % Cu (рис. 3.12, б) в точке $2^{//}$.

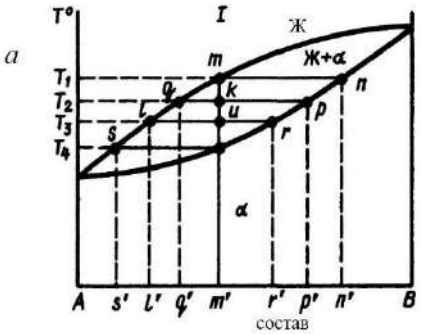


а *б*

Рис. 3.12. Диаграмма состояния для сплавов Cu – Ni :
а – кривые охлаждения сплавов *I*...*V*; *б* – диаграмма состояния сплавов Cu –Ni и схемы расположения атомов меди (черные) и никеля (белые) в кристаллической решетке разных сплавов

3.2. Определите количество кристаллов α при температуре T_1 в точке *b* (рис. 3.12, *а*), если общее количество сплава равно 100 кг.

3.3. Каков состав всех кристаллов, образовавшихся у сплава состава *m*' (рис. 3.13) при кристаллизации и охлаждении в интервале температур $T_1 - T_4$ после завершения равновесной кристаллизации? (Равновесной кристаллизацией называем такой процесс, когда все превращения в сплаве успели совершиться.)



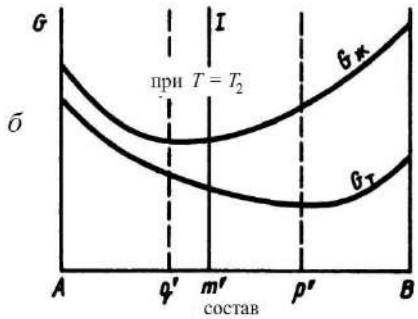
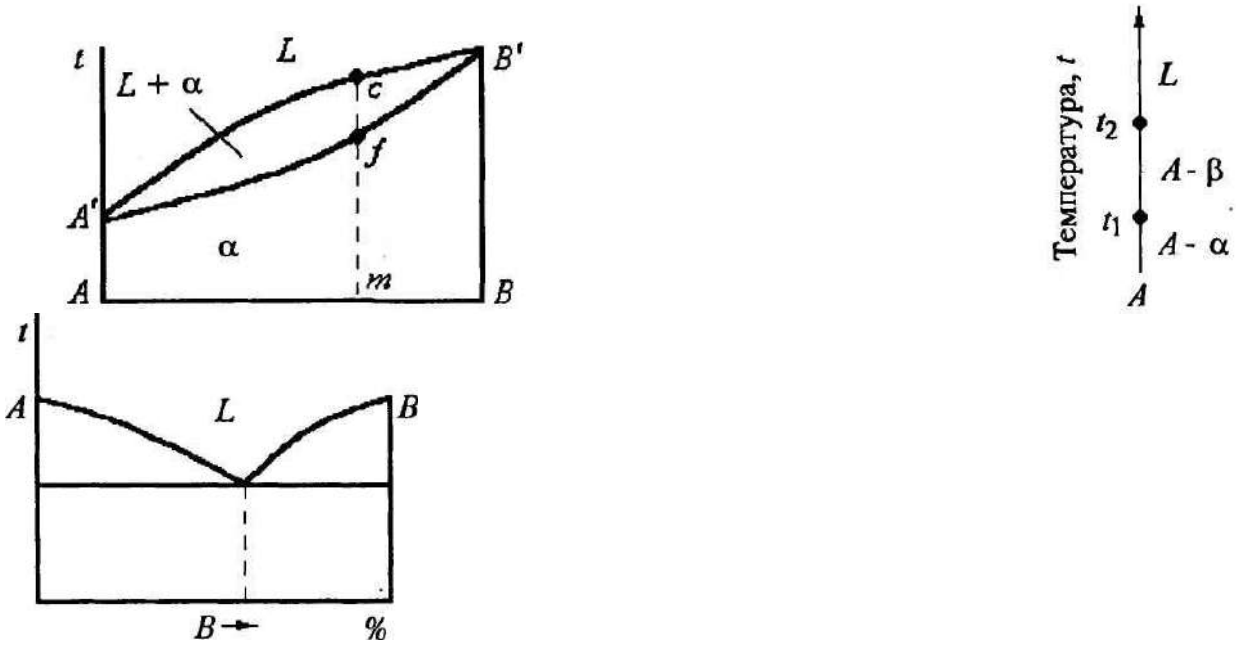


Рис. 3.13. Диаграмма состояния *(а);* изменение термодинамического потенциала жидкой $G_Ж$ и твердой $G_Т$ фаз в зависимости от состава при температуре T_2 (б)

3.4. Каким отрезком определяется концентрация компонента *A* в точке *m* диаграммы состояния (рис. 3.14, *а*)?

3.5. Какая диаграмма состояния представлена на рис. 3.14, *б*?



а *б* *в*

Рис. 3.14. Диаграмма состояния сплава

3.6. Какая диаграмма состояния представлена на рис. 3.14, *в*?

3.7. В каком из сплавов эвтектическая реакция займет больше времени, если скорость кристаллизации во всех сплавах одинакова (рис. 3.15)?

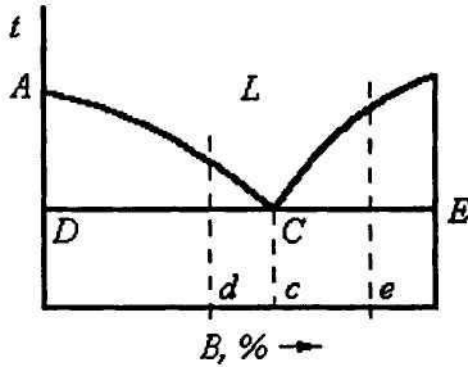


Рис. 3.15. Диаграмма состояния сплава

3.8. Какому сплаву (каким сплавам) принадлежит кривая охлаждения *B* (рис. 3.16)?

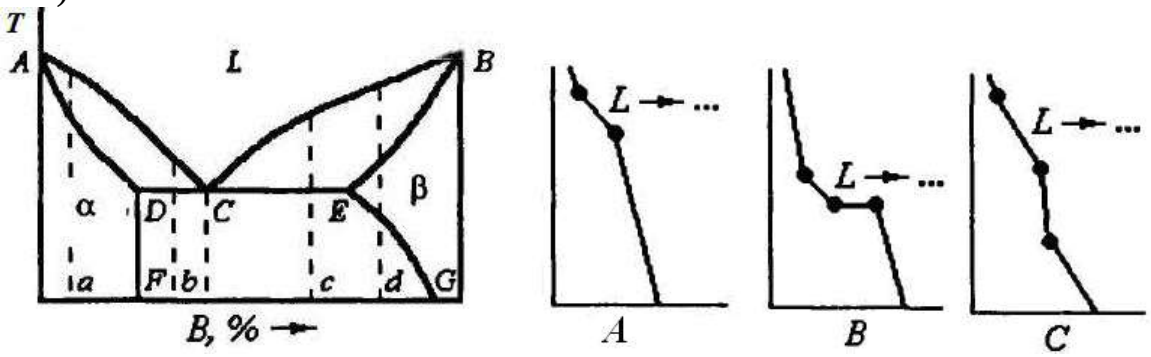


Рис. 3.16. Кривые охлаждения сплавов

3.9. Какая из приведенных структур принадлежит сплаву *I – I* при комнатной температуре (рис. 3.17)?

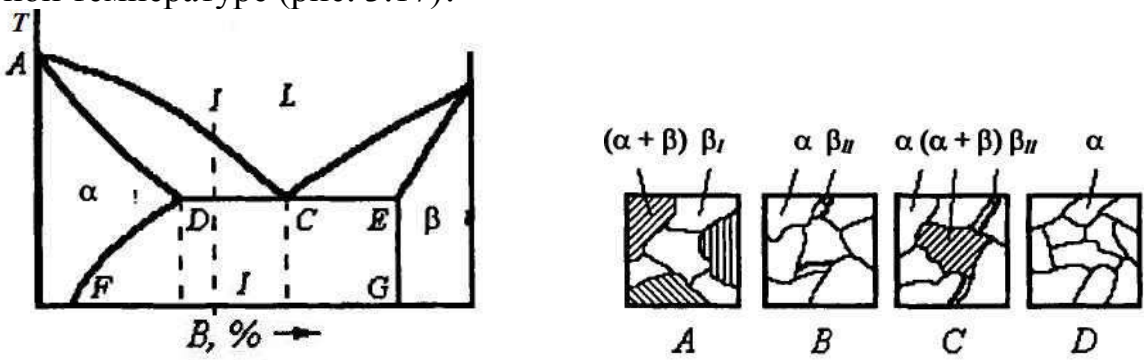


Рис. 3.17. Диаграмма состояния и структуры сплавов

3.10. В какой из диаграмм (рис. 3.18) имеется неустойчивое химическое соединение?

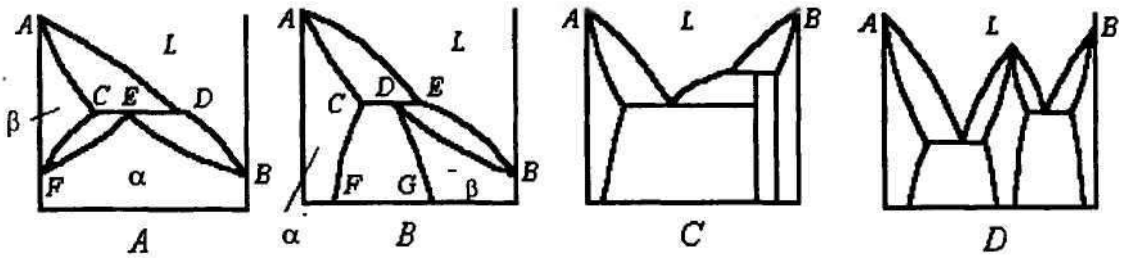


Рис. 3.18. Диаграммы состояния сплавов

№ 3.11. В какой диаграмме (каких диаграммах) состояния есть полиморфное превращение (рис. 3.19)?

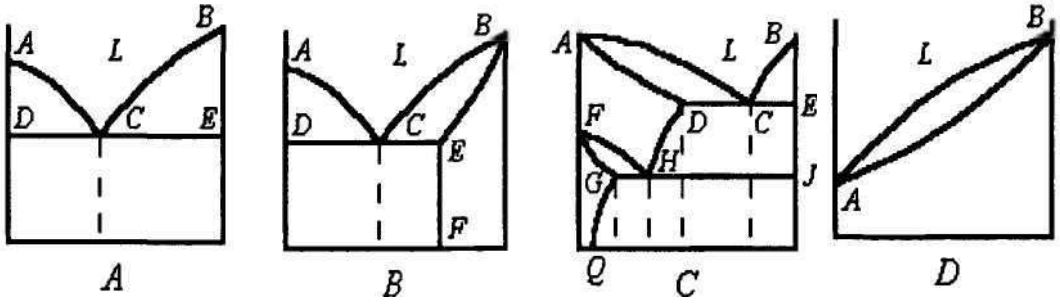


Рис. 3.19. Диаграммы состояния сплавов

4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СТАЛИ

4.1. Методические указания

Термическая обработка - один из основных способов влияния на структуру, а следовательно, и на свойства материалов. В зависимости от температуры нагрева и скорости охлаждения различают следующие основные виды термический обработки: отжиг, закалку и отпуск. Нужно знать цель и сущность каждого вида термической обработки, его технологию, а главное - какую структуру и свойства приобретает сталь в результате проведения каждого вида термической обработки. Следует иметь в виду, что иногда брак, полученный при термической обработке, может проявиться только при эксплуатации деталей.

При изучении данной темы необходимо особое внимание уделить основным превращениям в стали при нагреве и охлаждении, связав между собой характер изменения структуры и свойств. Важно иметь четкое представление о критической скорости закалки, закаливаемости и прокаливаемости материала, критическом диаметре закалки.

При изучении превращений переохлажденного аустенита обратите внимание на диаграмму изотермического распада, устанавливающую связь между температурными условиями превращения, интенсивностью распада и строением продуктов превращения. Разберитесь в особенностях перлитного, бейнитного и мартенситного превращений, происходящих соответственно в верхней, средней и нижней температурных областях. Уясните строение и свойства перлита, сорбита, троостита, бейнита, мартенсита.

Изучите влияние легирующих элементов на кинетику и характер превращения аустенита. Запомните, что легирующие элементы, как правило, затормаживают процессы превращений.

Процессы, протекающие при термической обработке легированных сталей, те же, что и в углеродистых, но при назначении режима термической обработки необходимо учитывать ряд факторов. Легированные стали можно закаливать в масле, расплавленных солях и т. п.; у них меньше критическая скорость закалки (так как почти все легирующие элементы сдвигают кривые изотермического распада аустенита вправо). Это является их большим достоинством, так как при одинаковой прочности получается повышенная вязкость. Следует отчетливо понять, что чем меньше критическая скорость закалки, тем больше прокаливаемость стали, и при одной и той же скорости охлаждения, например в масле, будет больше глубина закаленного слоя. Поэтому у легированных сталей можно получить одинаковую по строению равнопрочную структуру в значительно большем сечении.

В результате изучения данной темы студент, помимо усвоения теоретических основ, должен уметь правильно выбрать все элементы цикла термической обработки в зависимости от требуемых свойств и химического состава обрабатываемого материала.

4.2. Краткие теоретические сведения

Разнообразие условий работы деталей машин и механизмов определяет требования, предъявляемые к свойствам материала. Одним из способов получения требуемых свойств является термическая обработка стали как самого распространенного конструкционного материала. При термической обработке стали наблюдаются 4 основных превращения.

1. Превращение перлита в аустенит (П→А) при нагреве. В этом случае происходит два процесса:

а) перестройка решетки $\alpha \rightarrow \gamma$;

б) растворение цементита в аустените.

Превращение начинается с зарождения центров аустенитных зерен на поверхности раздела феррит – цементит, кристаллическая решетка α-Fe перестраивается в решетку γ-Fe. Образующиеся зерна аустенита получаются мелкими. При повышении температуры или выдержке происходит рост зерна аустенита. При последующем охлаждении размеры зерен аустенита не изменяется. Это следует учитывать при назначении режимов термической обработки, так как от размера зерна зависят механические свойства. Крупное

зерно снижает сопротивление отрыву, ударную вязкость, повышает порог хладноломкости.

Неправильный выбор режима нагрева может привести либо к *перегреву*, либо к *пережогу* стали.

Перегрев стали значительно выше температуры A_3 (линия *GS*) приводит к интенсивному росту зерна аустенита и понижению механических свойств. Перегрев можно исправить повторным нагревом до оптимальных температур с последующим медленным охлаждением.

Пережог имеет место, когда температура нагрева приближается к температуре плавления. При этом наблюдается окисление границ зерен, что резко снижает прочность стали. Пережог – неисправимый брак.

2. Превращение аустенита в перлит (А→П) при медленном охлаждении. В этом случае происходит два процесса:

а) перестройка решетки γ→α;

б) выделение углерода из аустенита и образование кристаллов цементита.

В зависимости от степени переохлаждения различают три области превращения, протекающие с разной скоростью и описываемые С-образной диаграммой (рис. 4.1). Вначале с увеличением переохлаждения скорость превращения возрастает и достигает максимума при температуре примерно 550 °С, а затем убывает и постепенно затухает. При температуре 727 и ниже 200 °С скорость превращения равна нулю.

3. Превращение аустенита в мартенсит (А→М) при быстром охлаждении. При охлаждении стали с большой скоростью превращение аустенита в феррит произойти не успевает и весь аустенит превращается в мартенсит.

Мартенсит – пересыщенный по углероду твердый раствор углерода в α-Fe, концентрация которого равна содержанию углерода в исходном аустените.

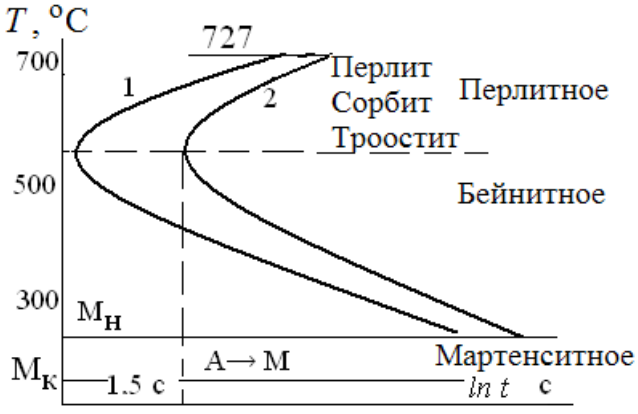


Рис. 4.1. С-образная диаграмма – распад переохлажденного аустенита

Принципиальное отличие превращения А→М от А→П заключается в том, что превращение А→М протекает бездиффузионно. Температуру начала мартенситного превращения обозначают $M_н$, а температуру окончания

превращения – $M_К$. Температуры $M_Н$ и $M_К$ зависят от содержания углерода (чем его больше, тем ниже $M_Н$), но не зависят от скорости охлаждения.

Мартенсит характеризуется высокой твердостью и низкой пластичностью, что обусловливает его хрупкость. Твердость составляет до 65 HRC или 600 НВ. Высокая твердость вызвана влиянием внедренных атомов углерода в решетку α-фазы, что вызывает ее искажение и возникновение напряжений.

Критическая скорость закалки – минимальная скорость охлаждения, при которой весь аустенит превращается в мартенсит.

4. Превращение М→П при нагреве. Мартенсит - структура неравновесная, сохраняющаяся при низких температурах, поэтому если сталь с мартенситной структурой нагреть, то практически мгновенно произойдет обратное превращение мартенсита в перлит.

Технологически различают следующие виды термической обработки: отжиг, закалку и отпуск (основные), а также улучшение и старение.

❖ *Отжиг* – вид термической обработки, заключающийся в нагреве стали до заданной температуры, выдержки и последующего медленного охлаждения. При отжиге снижаются прочность и твердость, повышаются пластичность и вязкость. В зависимости от происходящих фазовых изменениях в стали различают отжиг I и II родов.

При отжиге I рода в стали не происходят фазовые превращения. Отжиг I рода частично или полностью устраняет химическую неоднородность, уменьшает внутренние напряжения.

К отжигу I рода относятся:

- отжиг для снятия внутренних напряжений после ковки, сварки, литья и обработки резанием, когда требуется высокая точность размеров. Температура нагрева в диапазоне 200-300 ºС выбирается в зависимости от назначения. Продолжительность обработки зависит от габаритов изделия.
- *Рекристаллизационный отжиг* проводится для устранения последствий холодной пластической деформации. Температура нагрева превышает температуру рекристаллизации 600-700 ºС.
- *Диффузионный* (*гомогенизирующий*) *отжиг*. Применяется для устранения ликвации, выравнивания химического состава сплава за счет процессов диффузии. Поэтому требуется высокая температура нагрева 1100-1200 ºС. В результате нагрева выравнивается химический состав, растворяются избыточные карбиды.
- При отжиге II рода в стали происходят фазовые превращения. К отжигу II рода относятся (рис. 4.2):

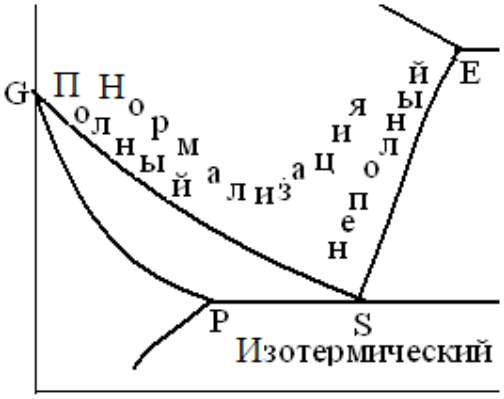


Рис. 4.2. Схема отжига II рода

- *Полный* отжиг с температурой нагрева на 30-50 °С выше температуры A_3 (линия *GS*). Проводится для доэвтектоидных сталей для исправления структуры. При этом происходит полная перекристаллизация стали. При нагреве получается мелкозернистый аустенит, и после охлаждения сталь сохраняет мелкозернистую структуру.
- *Неполный* отжиг с температурой нагрева на 30-50 °С выше температуры A_1 (линия *PSK*). Проводится для эвтектоидных сталей. При этом в структуре сохраняется вторичный цементит, который в результате отжига приобретает сферическую форму. Иногда неполный отжиг применяют для доэвтектоидных сталей, если не требуется исправление структуры, а необходимо только понизить твердость для улучшения обрабатываемости резанием. Для инструментальных сталей неполный отжиг является обязательным.
- *Изотермический отжиг* – после нагрева до температуры на 30-50 °С выше температуры A_3, чтобы прошло $\alpha \rightarrow \gamma$ превращение, изделие быстро охлаждают на 100-150 °С ниже температуры A_1, и выдерживают до полного превращения аустенита в перлит. Затем охлаждают на воздухе. В результате получают более однородную структуру, так как превращение происходит при одинаковой степени переохлаждения. Значительно сокращается длительность процесса. Применяют для легированных сталей.
- *Нормализация* – термическая обработка, обеспечивающая получение нормального зерна в стали с температурой нагрева на 30-50 °С выше температуры A_3 или A_{cm} с последующим охлаждением на воздухе. При этом происходит полная перекристаллизация стали. Применяется для всех сталей (до-, за– и эвтектоидных).

В результате нормализации уменьшаются внутренние напряжения, устраняется цементитная сетка вокруг зерен. Часто используется вместо более сложных технологических операций (закалки с высоким отпуском).

Особенностью нормализации, по сравнению с другими видами отжига, является одинаковая скорость охлаждения на воздухе для всех сталей.

Поэтому после нормализации у разных сталей получается разная структура, которая зависит от критической скорости закалки. В углеродистой стали после нормализации структура практически получается такая же, как и после отжига, но более мелкая, поэтому прочность нормализованных сталей несколько выше, чем отожженных, но изделие подвергается меньшей деформации, исключаются трещины.

❖ *Закалка* – вид термической обработки, заключающийся в нагреве стали до температуры, обеспечивающей получение структуры аустенита, выдержки и последующего быстрого охлаждения. Закалку проводят для повышения прочности, твердости и износостойкости. Цель закалки – получение структуры мартенсита.

Основными параметрами являются температура нагрева и скорость охлаждения. Для получения требуемой структуры изделия охлаждают с различной скоростью, которая определяется охлаждающей средой, формой изделия и теплопроводностью стали. В качестве охлаждающих сред при закалке используют воду, технические масла, растворы солей и щелочей, расплавленные металлы. Наиболее высокой и равномерной охлаждающей способностью отличаются холодные 8…12 %-ные водные растворы NaCl и NaOH.

Характеристиками процесса закалки являются закаливаемость и прокаливаемость стали. С введением в сталь легирующих элементов закаливаемость и прокаливаемость стали увеличиваются.

Закаливаемость – способность стали повышать твердость при закалке. Закаливаемость определяется содержанием углерода. Стали с содержанием углерода менее 0,20 % не закаливаются.

Прокаливаемость – способность получать закаленный слой с мартенситной структурой, обладающей высокой твердостью на определенную глубину. Характеристикой прокаливаемости является критический диаметр.

Критический диаметр – максимальное сечение, при котором в изделии образуется мартенситная структура по всему сечению. Если мартенситная структура образуется по всему сечению изделия, то это полная прокаливаемость. Если мартенситная структура образуется не по всему сечению изделия, то это неполная прокаливаемость.

Величина критического диаметра для углеродистых сталей 10-20 мм,
для легированных сталей 250-300 мм.

❖ *Отпуск* является заключительной операцией термической обработки. Цель отпуска - повышение вязкости и пластичности, снижение твердости и уменьшение внутренних напряжений закаленных сталей.

С повышением температуры нагрева прочность обычно снижается, а пластичность и вязкость растут. Температуру отпуска ($T_н$) выбирают, исходя из требуемой прочности конкретной детали.

Различают три вида отпуска:

1. *Низкий отпуск* $T_н$ = 150…300 °С. При этом несколько снижаются внутренние напряжения. Твердость остается высокой (58...62 HRC). Получают структуру – *мартенсит отпуска*. Рекомендуется для деталей из сталей обыкновенного качества и малоуглеродистых легированных.

2. Средний отпуск $T_н$ = 350…500 °С. Получают структуру – *троостит отпуска,* сочетающую высокую твердость 40…45HRC с хорошей упругостью и вязкостью. Используется для изделий типа пружин, рессор.

3. Высокий отпуск $T_н$ = 550…650 °С. Получают структуру – *сорбит отпуска*, сочетающую достаточно высокую твердость и повышенную ударную вязкость (оптимальное сочетание свойств). Используется для деталей машин, испытывающих ударные нагрузки.

❖ *Улучшение* - закалка с высоким отпуском.

❖ *Старение* – термическая обработка, при которой главным процессом является распад пересыщенного твердого раствора. Старение сплавов связано с переменной растворимостью избыточной фазы, а упрочнение происходит в результате дисперсионных выделений при распаде пересыщенного твердого раствора и возникающих при этом внутренних напряжений. В отличие от отпуска, после старения увеличиваются прочность, твердость и уменьшается пластичность. Назначение старения – повышение прочности и стабилизация свойств. Старение является основным способом упрочнения алюминиевых и медных сплавов, а также многих жаропрочных сплавов.

❖ *Термомеханическая обработка* (ТМО) относится к комбинированным способам изменения строения и свойств материалов и заключается в нагреве стали до температуры аустенитного состояния, пластической деформации стали и последующей закалке. При этом формирование структуры закаленной стали происходит в условиях повышенной плотности дислокаций.

В зависимости от температуры, при которой проводят деформацию, различают высокотемпературную термомеханическую обработку (ВТМО) и низкотемпературную термомеханическую обработку (НТМО).

Сущность высокотемпературной термомеханической обработки заключается в нагреве стали до температуры аустенитного состояния (выше A_3), выдержке, деформации стали и последующей закалке. ВТМО эффективно использовать для углеродистых, легированных, конструкционных, пружинных и инструментальных сталей. Последующий отпуск при температуре 100…200 °С проводится для сохранения высоких значений прочности.

Сущность низкотемпературной термомеханической обработки заключается в нагреве стали до температуры аустенитного состояния (выше A_3) и выдержке. Затем сталь охлаждают до температуры выше температуры начала мартенситного превращения (400-600 °С), но ниже температуры рекристаллизации и проводят пластическую деформацию и последующую закалку. НТМО применяют к среднеуглеродистым легированным сталям.

Высокотемпературной термомеханической обработке можно подвергать любые стали, а низкотемпературной - только те, у которых переохлажденный аустенит обладает повышенной устойчивостью, т. е. легированные.

Повышение прочности и пластичности при ТМО связано с тем, что в результате деформации увеличивается плотность дислокаций и других дефектов кристаллической структуры. При последующей закалке такого аустенита образуются более мелкие пластинки мартенсита, снижаются напряжения. В результате происходит существенное увеличение прочности при незначительном понижении пластичности. Кроме того, ударная вязкость в 1,5-2 раза выше, по сравнению с обычной закалкой.

4.3. Вопросы

1. Какие сплавы системы *A-B* (рис. 4.1) могут быть закалены?

1) любой сплав; 2) сплавы, лежащие между *E* и *b;* 3) ни один из сплавов; 4) сплавы, лежащие между *a* и *c*.

2. Как называется склонность (или отсутствие таковой) аустенитного зерна к росту?

1) отпускная хрупкость; 2) наследственная или природная зернистость; 3) аустенизация; 4) действительная зернистость.

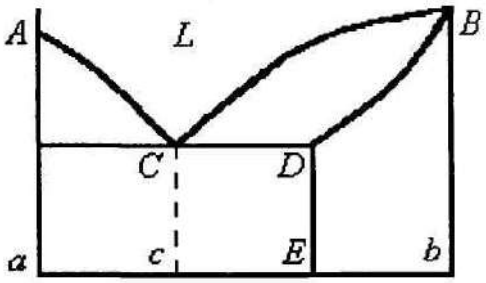


Рис. 4.1. Сплавы системы *A-B*

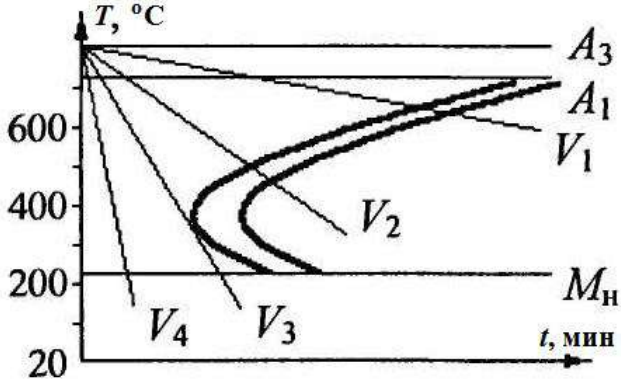


Рис. 4.2. Диаграмма изотермического распада аустенита

3. Какую кристаллическую решетку имеет мартенсит?

1) кубическую; 2) ГПУ; 3) тетрагональную; 4) ГЦК.

4. Какая из скоростей охлаждения, нанесенных на диаграмму изотермического распада аустенита (рис. 4.2), критическая?

1) V_1.;2) V_4;3) V_3;.4)V_2.

5. Как называется структура, представляющая собой пересыщенный твердый раствор углерода в α-железе?

1) мартенсит; 2) цементит; 3) Феррит; 4) аустенит.

6. Какую скорость охлаждения при закалке называют критической?

1) максимальную скорость охлаждения, при которой еще протекает распад аустенита на структуры перлитного типа; 2) минимальную скорость охлаждения, необходимую для получения мартенситной структуры; 3) минимальную скорость охлаждения, необходимую для фиксации аустенитной структуры; 4) минимальную скорость охлаждения, необходимую для закалки изделия по всему сечению.

7. Каковы основные признаки мартенситного превращения?

1) диффузионный механизм превращения и четкая зависимость температуры превращения от скорости охлаждения сплава; 2) зависимость полноты превращения от температуры аустенизации и малые искажения в кристаллической решетке; 3) слабовыраженная зависимость температуры превращения от состава сплава и малые напряжения в структуре; 4) бездиффузионный механизм превращения и ориентированная структура.

8. Как влияет скорость охлаждения при закалке на температуру начала мартенситного превращения?

1) чем выше скорость охлаждения, тем ниже температура; 2) температура начала мартенситного превращения не зависит от скорости охлаждения; 3) чем выше скорость охлаждения, тем выше температура; 4) зависимость температуры начала мартенситного превращения от скорости охлаждения неоднозначна.

9. От чего зависит количество остаточного аустенита?

1) от температуры точек начала и конца мартенситного превращения; 2) от скорости нагрева при аустенизации; 3) от однородности исходного аустенита; 4) от скорости охлаждения сплава в области изгиба С-образных

кривых.

10. Какой температуре (каким температурам) отвечают критические точки A_3 железоуглеродистых сплавов?

1) 727 °С; 2) 727 ... 1147 °С (в зависимости от содержания углерода); 3) 727 ... 911 °С (в зависимости от содержания углерода); 4) 1147 °С.

11. Что означает точка A_{c3}?

1) температурную точку начала распада мартенсита; 2) температурную точку начала превращения аустенита в мартенсит; 3) температуру критической точки перехода перлита в аустенит при неравновесном нагреве; 4) температуру критической точки, выше которой при неравновесном нагреве доэвтектоидные стали приобретают аустенитную структуру.

12. На какой линии диаграммы состояния Fe-C расположены критические точки A_m.

1) *PSK*; 2) *SE*; 3) *ECF*; 4) *GS*.

13. Как называется термическая обработка стали, состоящая в нагреве ее выше A_3 или A_m, выдержке и последующем быстром охлаждении?

1) истинная закалка; 2) полная закалка; 3) неполная закалка; 4) нормализация.

14. Какой структурный состав приобретет доэвтектоидная сталь после закалки от температуры выше A_{c1} но ниже A_{c3}.

1) мартенсит + феррит; 2) перлит + вторичный цементит; 3) мартенсит + вторичный цементит; 4) феррит + перлит.

15. От какой температуры (*T*) проводят закалку углеродистых заэвтектоидных сталей?

1) от *T* на 30 ... 50 °С выше A_m; 2) от *T* на 30 ... 50 °С ниже линии *ECF* диаграммы Fe-C; 3) от *T* на 30 ... 50 °С выше эвтектической; 4) от *T* на 30 ... 50 °С выше A_1.

16. Почему для доэвтектоидных сталей (в отличие от заэвтектоидных) не применяют неполную закалку?

1) образуется мартенсит с малой степенью пересыщения углеродом; 2) образуются структуры немартенситного типа (сорбит, троостит); 3) изделие прокаливается на недостаточную глубину; 4) в структуре, наряду с

мартенситом, остаются включения феррита.

17. Какова температура закалки стали 50 (сталь содержит 0,5 % углерода)?

1) 600 ... 620 °С; 2) 810 ... 830 °С; 3) 740 ... 760 °С; 4) 1030 ... 1050 °С.

18. Какова температура закалки стали У12?

1) 760 ... 780 °С; 2) 600 ... 620 °С; 3) 1030 ... 1050 °С; 4) 820 ... 840 °С.

19. Сколько процентов углерода содержится в мартенсите закаленной стали марки 45?

1) 0,45 %; 2) 2,14 %; 3) 0,02 %; 4) 0,80 %.

20. Что такое закаливаемость?

1) глубина проникновения закаленной зоны; 2) процесс образования мартенсита; 3) способность металла быстро прогреваться на всю глубину; 4) способность металла повышать твердость при закалке.

21. В чем состоит отличие сталей У10 и У12, закаленных от температуры 760 °С?

1) в структуре сплава У12 больше вторичного цементита; 2) отличий нетУ 3) мартенсит сплава У12 содержит больше углеродаУ 4) мартенсит сплава У10 дисперснее, чем У12.

22. Как влияет большинство легирующих элементов на мартенситное превращение?

1) не влияют на превращение; 2) сдвигают точки начала и конца превращения к более высоким температурам; 3) сдвигают точки начала и конца превращения к более низким температурам; 4) сужают температурный интервал превращения.

23. Какова концентрация углерода в мартенсите закаленной стали марки У12?

1) ~ 0,02 %; 2) 0,8 %; 3) ~ 2,14 %; 4) ~ 1,2 %.

24. Что называют критическим диаметром?

1) диаметр изделия, при закалке которого в центре обеспечивается критическая скорость закалки; 2) максимальный диаметр изделия, принимающего сквозную закалку; 3) диаметр изделия, при закалке которого в центре образуется полумартенситная структура. 4) Максимальный диаметр изделия, прокаливающегося насквозь при охлаждении в данной закалочной среде.

25. Как зависит прокаливаемость стали от интенсивности охлаждения

при закалке?

1) взаимосвязь между интенсивностью охлаждения и прокаливаемостью неоднозначна; 2) чем интенсивнее охлаждение, тем меньше прокаливаемость; 3) прокаливаемость не зависит от интенсивности охлаждения; 4) чем интенсивнее охлаждение, тем больше прокаливаемость.

26. Расположите образцы стали, закаленные в воде, в масле и на воздухе, по степени убывания глубины закаленного слоя, если образец, закаленный в воде, насквозь не прокалился.

1) в масле - на воздухе - в воде; 2) на воздухе - в масле - в воде; 3) в масле - в воде - на воздухе; 4) в воде - в масле - на воздухе.

27. В чем состоит значение полной прокаливаемости сталей?

Полное прокаливание обеспечивает...

1) повышение твердости термообработанного изделия, однако при этом ударная вязкость в сердцевине ниже, чем в наружных слоях; 2) получение после термообработки зернистых структур во всем объеме изделия и высоких однородных по сечению механических свойств; 3) получение одинаковой твердости по сечению изделия; 4) сокращение количества остаточного аустенита, что приводит к повышению механических свойств стали.

28. Как влияют большинство легирующих элементов, растворенных в аустените, на прокаливаемость стали?

1) увеличивают прокаливаемость; 2) уменьшают прокаливаемость; 3) не влияют на прокаливаемость; 4) влияние неоднозначно. Велика зависимость от режимов отпуска.

29. У сплава А критическая скорость закалки больше, чем у сплава Б. У какого сплава больше критический диаметр?

1) у сплава А; 2) у сплава Б; 3) зависимость между критической скоростью закалки и критическим диаметром неоднозначна; 4) критический диаметр не зависит от критической скорости закалки.

30. Чем достигается полная прокаливаемость крупных деталей?

1) многократной закалкой; 2) применением при закалке быстродействующих охладителей; 3) обработкой после закалки холодом; 4) применением для их изготовления легированных сталей.

31. При каком виде отпуска закаленное изделие приобретает наибольшую пластичность?

1) при низком отпуске; 2) при высоком отпуске; 3) пластичность стали является ее природной характеристикой и не зависит от вида отпуска; 4) при среднем отпуске.

32. При каком виде термической обработки доэвтектоидных сталей возникают зернистые структуры?

1) при изотермической закалке; 2) при закалке со скоростью выше критической; 3) при полном отжиге. 4) при отпуске на сорбит, или троостит.

33. Как влияет температура нагрева при отпуске на твердость изделий из углеродистой стали?

1) влияние температуры отпуска на твердость неоднозначно; 2) чем выше температура нагрева, тем выше твердость; 3) чем выше температура нагрева, тем ниже твердость; 4) твердость не зависит от температуры отпуска.

34. Как называется термическая обработка, состоящая из закалки и высокого отпуска?

1) нормализация; 2) улучшение; 3) сфероидизация; 4) полная закалка.

35. Как называется обработка, состоящая в длительной выдержке закаленного сплава при комнатной температуре или при невысоком нагреве?

1) рекристаллизация; 2) нормализация; 3) высокий отпуск; 4) старение.

36. Какой отжиг следует применить для снятия деформационного упрочнения?

1) рекристаллизационный; 2) полный (фазовую перекристаллизацию); 3) сфероидизирующий; 4) диффузионный.

37. Какова цель диффузионного отжига?

1) гомогенизация структуры; 2) снятие напряжений в кристаллической решетке; 3) улучшение ферритной составляющей структуры; 4) получение зернистой структуры.

38. Как называется термическая обработка стали, состоящая из нагрева ее до аустенитного состояния и последующего охлаждения на спокойном воздухе?

1) истинная закалка; 2) улучшение; 3) неполный отжиг; 4) нормализация.

39. В чем сущность технологии ТМО?

при ТМО: 1) производится нагрев стали до аустенитного состояния; деформация металла в аустенитом состоянии, закалка и низкий отпуск; 2) осуществляется закалка деформированной стали.

40. Какой из видов ТМО может быть в современных условиях более перспективен для использования на машиностроительных заводах?

1) НТМО; 2) ВТМО.

4.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Неверно. Ни один из сплавов системы не претерпевает при нагреве вплоть до температуры плавления фазовых превращений и, следовательно, не может быть закален.

2) Неверно. Ни один из сплавов, лежащих в этом интервале, не претерпевает при нагреве вплоть до температуры плавления фазовых превращений и, следовательно, не может быть закален.

3) Правильно.

4) Неверно. Ни один из сплавов, лежащих в этом интервале, не претерпевает при нагреве вплоть до температуры плавления фазовых превращений и, следовательно, не может быть закален.

2. 1) Неверно. Отпускной хрупкостью называют снижение вязкости некоторых легированных сталей при отпуске при температурах 250 … 400 °С и 500… 550 °С.

2) Правильно.

3) Неверно. Аустенизацией называют процесс превращения исходной структуры сталей в аустенит при нагреве выше критических точек.

4) Неверно. Действительным зерном называют зерно, существующее в стали при данной температуре.

3. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

4. 1) Неверно. Эта скорость охлаждения ниже критической.

2) Неверно. Скорость охлаждения V_4 выше критической.

3) Правильно.

4) Неверно. Эта скорость охлаждения ниже критической.

5. 1) Правильно.

2) Неверно. Цементит – это химическое соединение – карбид железа с формулой Fe_3C.

3) Неверно. Феррит – это равновесный твердый раствор углерода в α-железе.

4) Неверно. Аустенит – это твердый раствор углерода в γ-железе.

6. 1) Неверно. Скорости охлаждения, при которых протекает аустенитно-перлитное превращение, ниже критических.

2) Правильно.

3) Неверно. В углеродистых сталях при закалке фиксируется не аустенит, а промежуточная фаза – мартенсит.

4) Неверно. Критическая скорость закалки зависит от состава стали, но не от сечения изделия.

7. 1) Неверно. Оба фактора имеют прямо противоположный характер.

2) Неверно. Мартенситное превращение сопровождается максимальными искажениями кристаллической решетки. Полнота аустенитно-мартенситного превращения не зависит от температуры аустенизации.

3) Неверно. Оба фактора имеют прямо противоположный характер.

4) Правильно.

8. 1) Неверно. Такая закономерность свойственна фазовым превращениям, протекающим при значительной диффузии атомов.

2) Правильно.

3) Неверно. Фазовые превращения не могут подчиняться подобным закономерностям.

4) Неверно. Учтите, что мартенситное превращение протекает по бездиффузионному механизму.

9. 1) Правильно.

2) Неверно. От скорости нагрева при аустенизации зависит температура перлитно-аустенитного превращения. На количество остаточного аустенита скорость нагрева не влияет.

3) Неверно. Однородность исходного аустенита влияет на характер аустенитно-перлитного превращения (образование зернистых или пластинчатых структур).

4) Неверно. Скорость охлаждения в области изгиба С-образных кривых определяет, какие структуры образуются при закалке (пластинчатые или игольчатые).

10. 1) Неверно. Температуре 727 °С отвечают критические точки A_1.

2) Температуры 727 … 1147 °С иногда относят к критическим точкам A_3. Однако обычно их называют A_m.

3) Правильно.

4) Неверно.

11. 1) Неверно.

2) Неверно. Такую температурную точку обычно обозначают $M_н$.

3) Неверно. Такому переходу соответствуют критические точки A_{c1}.

4) Правильно.

12. 1) Неверно. На линии *PSK* расположены критические точки A_1.

2) Правильно.

3) Неверно.

4) Неверно. На линии *GS* расположены критические точки A_3.

13. 1) Неверно. При истинной закалке фиксируется при нормальной температуре высокотемпературное состояние сплава. Для сталей истинная закалка не характерна.

2) Правильно.

3) Неверно. При неполной закалке нагрев ведут выше A_1 но ниже A_3 или A_m.

4) Неверно. При нормализации охлаждение ведут на спокойном воздухе.

14. 1) Правильно.

2) Неверно. Такую структуру имеет отожженная заэвтектоидная сталь.

3) Неверно. Такую структуру приобретает после закалки заэвтектоидная сталь.

4) Неверно. Такую структуру имеет доэвтектоидная сталь в отожженном состоянии.

15. 1) Неверно. Такие температуры отвечают полной закалке, заэвтектоидные же стали подвергают неполной закалке.

2) Неверно. Линия *ECF* лежит в области чугунов, а не сталей.

3) Неверно. Эвтектическая температура в системе Fe-Fe_3C 1147 °С. В сталях при температурах около 1200 °С наблюдается интенсивный рост аустенитного зерна.

4) Правильно.

16. 1) Неверно. Образующийся при неполной закалке доэвтектоидных сталей мартенсит богаче углеродом, чем при полной.

2) Неверно. Тип образующихся при закалке структур зависит от скорости охлаждения стали.

3) Неверно. Глубина прокаливания стали зависит от ее состава и интенсивности охлаждения при закалке.

4) Правильно.

17. 1) Неверно. Эти температуры лежат ниже критических точек.

2) Правильно.

3) Неверно. При закалке от таких температур в структуре закаленной стали сохраняется некоторое количество феррита.

4) Неверно. При таких температурах интенсивно растет аустенитное зерно.

18. 1) Правильно.

2) Неверно. Эти температуры лежат ниже критических точек.

3) Неверно. При таких температурах интенсивно растет аустенитное зерно.

4) Неверно. Эти температуры несколько выше оптимальных температур закалки заэвтектоидных углеродистых сталей.

19. 1) Правильно.

2) Неверно. Мартенсит не может содержать углерода больше, чем исходный аустенит.

3) Неверно. Структура закаленной стали 45 почти полностью состоит из мартенсита. Куда же мог деться углерод ?

4) Неверно. Мартенсит не может содержать углерода больше, чем исходный аустенит.

20. 1) Неверно. Глубина проникновения закаленной зоны характеризует не закаливаемость, а прокаливаемость.

2) Неверно. Мартенситная структура не всегда характеризует закаливаемость, например не закаливаются низкоуглеродистые стали, тем

более не характеризует закаливаемость процесс образования мартенсита.

3) Неверно. Способность металла быстро прогреваться определяется его теплоемкостью и теплопроводностью.

4) Правильно.

21. 1) Правильно.

2) Неверно. При температуре 760 °С сплавы имеют качественно одинаковые, но количественно разнящиеся структуры. Это различие сохраняется и после закалки.

3) Неверно. При 760 °С оба сплава имеют двухфазную структуру с аустенитом одинакового состава, следовательно, и мартенсит в обоих сплавах одинаков.

4) Неверно. При 760 °С оба сплава имеют двухфазную структуру с аустенитом одинакового состава, следовательно, и мартенсит в обоих сплавах одинаков.

22. 1) Не влияет на температурный интервал мартенситного превращения, например, Si. Влияние же большинства легирующих элементов проявляется весьма отчетливо.

2) Некоторые элементы (A1, Co) действительно повышают мартенситную точку, однако большинство легирующих влияют на мартенситное превращение иначе.

3) Правильно.

4) Неверно.

23. 1) Неверно. В мартенсите столько же углерода, сколько в исходном аустените. Концентрация углерода 0,02 % соответствует техническому железу, но не заэвтектоидной стали.

2) Правильно.

3) Неверно. Мартенсит не может содержать углерода больше, чем исходный аустенит.

4) Неверно. Мартенсит не может содержать углерода больше, чем исходный аустенит (следует иметь в виду, что при температуре закалки заэвтектоидных сталей углерод распределен между аустенитом и вторичным цементитом).

24. 1) Неверно. Для различных охладителей (различных скоростей охлаждения) это окажутся различные диаметры.

2) Неверно. Для различных охладителей (различных скоростей охлаждения) это окажутся различные диаметры.

3) Неверно. Для различных охладителей (различных скоростей охлаждения) это окажутся различные диаметры.

4) Правильно.

25. 1) Распределение скорости охлаждения по сечению изделия определяется интенсивностью охлаждения его поверхности. Отсюда следует, что зависимость между интенсивностью охлаждения и прокаливаемостью вполне однозначна.

2) Неверно. Чем интенсивнее охлаждается поверхность изделия, тем на большей глубине вероятно достижение закритической скорости охлаждения и получение до этой глубины мартенситной структуры.

3) Распределение скорости охлаждения по сечению изделия определяется интенсивностью охлаждения его поверхности. Отсюда следует, что зависимость между интенсивностью охлаждения и прокаливаемостью вполне однозначна.

4) Правильно.

26. 1) Неверно. Глубина закаленного слоя зависит от скорости охлаждения стали. Максимальна скорость охлаждения в воде, минимальна – на воздухе.

2) Неверно. Глубина закаленного слоя зависит от скорости охлаждения стали. Максимальна скорость охлаждения в воде, минимальна – на воздухе.

3) Неверно. Глубина закаленного слоя зависит от скорости охлаждения стали. Максимальна скорость охлаждения в воде, минимальна — на воздухе.

4) Правильно.

27. 1) Неверно. При сквозном прокаливании по сечению изделия образуются однородные структуры, а следовательно, однородны и свойства.

2) Правильно.

3) Неверно. Однородную твердость по сечению изделия можно получить отпуском и в отсутствие сквозной прокаливаемости.

4) Неверно. Сокращение количества остаточного аустенита достигается обработкой холодом или многократным отпуском.

28. 1) Правильно.

2) Из элементов, растворенных в аустените, уменьшает прокаливаемость только Co. Уменьшают прокаливаемость нерастворенные в аустените карбиды Ti, Nb, V и др. Большинство легирующих элементов, растворенных в аустените, влияют иначе.

3) Неверно. Состав стали – фактор, в наибольшей степени влияющий на прокаливаемость.

4) Неверно. Прокаливаемость определятся составом стали и режимами закалки. Отпуск на прокаливаемость не влияет.

29. 1) Неверно.

2) Правильно.

3) Неверно. Обе характеристики связаны с прокаливаемостью сплавов. Связь между ними вполне однозначна.

4) Неверно. Обе характеристики связаны с прокаливаемостью сплавов. Связь между ними вполне однозначна.

30. 1) Неверно. При повторной закалке прокаливаемость не увеличивается, так как каждая последующая обработка снимает результаты предыдущей.

2) Неверно. При охлаждении крупных деталей в быстродействующих охладителях высока вероятность трещинообразования.

3) Неверно. При обработке холодом возрастает количество мартенсита, вследствие превращения остаточного аустенита. Прокаливаемость при этом не увеличивается.

4) Правильно.

31. 1) Неверно. Низкий отпуск дает наименьший прирост пластичности закаленной стали.

2) Правильно.

3) Неверно. Пластичность – структурно-чувствительное свойство. Характер же структуры отпущенной стали зависит от вида отпуска.

4) Неверно. Средний отпуск обычно сопровождается некоторым спадом нарастающей при нагреве пластичности стали.

32. 1) Неверно. При изотермической закалке образуется бейнит, имеющий игольчатую структуру.

2) Неверно. При закалке со скоростью выше критической образуется

мартенсит, обладающий игольчатой структурой.

3) Неверно. Нагрев при полном отжиге приводит к образованию однородного аустенита, превращающегося при охлаждении в пластинчатый перлит.

4) Правильно.

33. 1) Неверно. У углеродистых сталей влияние температуры отпуска на твердость прослеживается достаточно отчетливо.

2) Неверно. Чем выше температура отпуска, тем полнее протекает мартенситно-перлитное превращение. Мартенсит закаливаемых сталей значительно тверже перлита.

3) Правильно.

4) Неверно. При отпуске в стали протекают фазовые и структурные превращения, а изменение структуры всегда влечет за собой изменение свойств.

34. 1) Неверно. Нормализация состоит в нагреве сталей выше критических точек и охлаждении на спокойном воздухе.

2) Правильно.

3) Неверно. Сфероидизация – это одна из разновидностей отжига. Сфероидизацию применяют для получения структур с зернистым цементитом.

4) Неверно. Полная закалка стали – закалка из аустенитного состояния. Понятие полная закалка отпуска не включает.

35. 1) Неверно. Рекристаллизация состоит в обновлении структуры пластически деформированного металла путем рекристаллизационного отжига.

2) Неверно. Нормализация состоит в нагреве сталей выше критических точек и охлаждении на спокойном воздухе.

3) Неверно. Высокий отпуск состоит в нагреве закаленной стали до 600 … 650 °С, выдержке и охлаждении.

4) Правильно.

36. 1) Правильно.

2) Неверно. Полный отжиг применяют, как показывает название, для полной фазовой перекристаллизации.

3) Неверно. Сфероидизирующий отжиг применяют для получения структур с цементитом сферической формы.

4) Неверно. Диффузионный отжиг обычно применяют для

устранения дендритной ликвации.

37. 1) Правильно.

2) Неверно. Для снятия напряжений проводят низкий отжиг.

3) Неверно. Для этой цели, например для устранения Видманштеттовой структуры, применяют полный отжиг.

4) Неверно. Зернистые структуры получают в результате сфероидизирующего отжига либо в результате закалки и высокого или среднего отпуска.

38. 1) Неверно. При истинной закалке фиксируется при нормальной температуре высокотемпературное состояние сплава. Для сталей истинная закалка не характерна.

2) Неверно. Улучшением называют термическую обработку сталей, состоящую в закалке и последующем высоком отпуске.

3) Неверно. При неполном отжиге сталь нагревают выше A_1, но ниже A_3 или A_m. Охлаждение ведут вместе с печью.

4) Правильно.

39. 1) Правильно. В этом основная сущность процесса ТМО.

2) Ответ неточный. Этот ответ допускает деформацию материала в любых условиях.

40. 1) По-видимому, вы ошибаетесь. Для НТМО необходимо деформирование при пониженных температурах, что требует мощного прессового оборудования.

2) Правильно. Для реализации ВТМО главная проблема – обеспечить необходимую скорость охлаждения после изготовления деталей методом горячего прессования.

4.5. Задачи

4.1. Начертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 45-50 HRC. Укажите, как этот режим называется, опишите сущность превращений и какая структура получается в данном случае.

4.2. Как изменяются структура и свойства стали 40 и У12 в результате

закалки от температуры 750 и 850 °С. Объясните с применением диаграммы состояния железо-цементит. Выберите оптимальный режим нагрева под закалку каждой стали.

Используя диаграмму состояния железо-цементит и кривую изменения твердости в зависимости от температуры отпуска, назначьте для углеродистой стали 40 температуру закалки и температуру отпуска, необходимые для обеспечения твердости 400 НВ. Опишите превращения на всех этапах термической обработки и получаемую структуру.

4.5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит обоснуйте выбор режима термической обработки, применяемой для устранения цементитной сетки в заэвтектоидной стали. Дайте определение выбранного режима обработки и опишите превращения, которые происходят при нагреве и охлаждении.

4.6. После термической обработки углеродистой стали получена структура цементит + мартенсит отпуска. Нанесите на диаграмму состояния железо-цементит ординату заданной стали (примерно) и обоснуйте температуру нагрева этой стали под закалку. Также укажите температуру отпуска. Опишите превращения, которые произошли при термической обработке.

4.7. При непрерывном охлаждении стали У8 получена структура троостит + мартенсит. Нанесите на диаграмму изотермического превращения аустенита кривую охлаждения, обеспечивающую получение данной структуры. Укажите интервалы температур превращений и опишите характер превращения в каждом из них.

4.8. С помощью диаграммы состояния железо - цементит установите температуру полной и неполной закалки для стали 45 и опишите структуру и свойства стали после каждого вида термической обработки.

4.9. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 200 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в этом случае.

4.10. Используя диаграмму состояния железо-цементит, установите температуры нормализации, отжига и закалки для стали У12. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и

свойства стали после каждого вида обработки.

4.11. Углеродистые стали 35 и У8 после закалки и отпуска имеют твердость 45 HRC и 60 HRC соответственно, и структуру мартенсит отпуска. Используя диаграмму состояния железо - цементит и учитывая превращения, происходящие при отпуске, укажите температуру закалки и температуру отпуска для каждой стали. Опишите превращения, происходящие в этих сталях в процессе закалки и отпуска, и объясните, почему сталь У8 имеет большую твердость, чем сталь 35.

4.12. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 760 и 840 ºС. С помощью диаграммы состояния железо-цементит укажите, какие структуры образуются в каждом случае. Объясните причины образования разных структур и рекомендуйте оптимальный режим нагрева под закалку данной стали.

4.13. С помощью диаграммы состояния железо-цементит установите температуру полного и неполного отжига и нормализации для стали 20. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали.

4.14. Почему для изготовления инструмента применяется сталь с исходной структурой зернистого перлита? В результате какой термической обработки можно получить эту структуру? Приведите конкретный режим для любой инструментальной стали.

4.15. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима термической обработки, обеспечивающей получение твердости 60-63 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура при этом получается. Опишите сущность происходящих превращений.

4.16. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве доэвтектоидной стали. Покажите критические точки A_1 и A_3 для выбранной вами стали. Установите режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

4.17. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 50 HRC. Укажите, как этот режим

называется, опишите сущность превращения и какая структура получается в данном случае.

4.18. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве стали У12. Укажите критические точки и выберите оптимальный режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

4.19. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита эвтектоидной стали и нанесите на нее кривую режима изотермического отжига. Опишите превращения и получаемую после такой обработки структуру, ее свойства.

4.20. Используя диаграмму состояния железо-цементит, определите температуру полной и неполной закалки для стали 40. Дайте описание структуры и свойств стали после каждого вида термической обработки.

4.21.Режущий инструмент требуется обработать на максимальную твердость. Для его изготовления выбрана сталь У13А. Назначьте режим термической обработки, опишите структуру и свойства стали.

5. СИСТЕМА ЖЕЛЕЗО – УГЛЕРОД

5.1. Методические указания

Железоуглеродистые сплавы являются наиболее часто применяемым в промышленности конструкционным материалом. Поэтому знание диаграммы состояния системы «железо-углерод», описывающей строение сталей и чугунов, является необходимым. Рассмотрение диаграммы следует начать с анализа всех превращений, протекающих в железоуглеродистых сплавах при медленном охлаждении и получающихся при этом структур. Особое внимание следует обратить на превращения в твердом состоянии. Научитесь определять все фазы и структурные составляющие этой системы.

Легирующим элементом в рассматриваемой системе является углерод. Его содержание во многом определяет свойства сплавов. Разберитесь в классификации железоуглеродистых сплавов и усвойте, что различие между тремя классами (техническое железо, сталь, чугун) не является формальным (по содержанию углерода). Разные классы сплавов принципиально различны по структуре и свойствам. Технические железоуглеродистые сплавы состоят не только из железа и углерода, но и обязательно содержат постоянные примеси, попадающие в сплав в результате предыдущих операций при выплавке.

Изучите влияние легирующих элементов на критические точки железа и стали и объясните, при каком сочетании углерода и соответствующего легирующего элемента могут быть получены легированные стали ферритного, перлитного, аустенитного и ледебуритного классов.

Изучая часть диаграммы с образованием чугуна, уясните для себя, какие чугуны называются белыми, а какие - серыми. Содержание углерода в них может быть одинаковым, однако состояние углерода различно. Металлическая основа может быть перлитной или ферритной. Для чугунов важно представлять влияние формы графитовых включений на их свойства.

Особое внимание нужно уделить маркировке сталей и чугунов по ГОСТ. Ее знание позволяет правильно и оперативно осуществлять подбор материала для восстановления или изготовления детали.

5.2. Краткие теоретические сведения

Сплавы на основе железа в настоящее время остаются основными конструкционными материалами, из которых изготовляется более 90 % деталей.

Железо является переходным металлом, имеет недостроенную *d*-электронную оболочку. Поэтому для железа характерен смешанный тип связей между атомами, что проявляется в высокой температуре плавления и высоком значении модуля упругости. Наличие высокого модуля упругости железа проявляется и в сплавах на его основе, обеспечивая высокую жесткость деталей из этих сплавов.

Технически чистым считается железо чистотой 99,8 % .

В твердом состоянии железо может находиться в двух модификациях: при комнатной температуре железо имеет ОЦК решетку и обозначается как α-Fe. При температуре 911 °С происходит первое полиморфное превращение. Решетка железа перестраивается в ГЦК решетку. Это модификация обозначается γ- Fe. Критическую температуру 911 °С превращения α↔γ обозначают A_3, а температуру 1392 °С превращения α↔γ обозначают A_4.

При температуре 1392 °С происходит второе полиморфное превращение. Решетка железа снова перестраивается в О. Ц. К. решетку, но с другими параметрами. Высокотемпературная модификация не представляет собой новой аллотропической формы и обозначается δ- Fe.

Железо образует сплавы со многими элементами, но во всех сплавах железа всегда присутствует углерод.

Основными фазами в сплавах железа являются:

1. *Железо* – металл серого цвета с температурой плавления 1539 °С. Железо технической чистоты обладает невысокой твердостью (80 НВ) и прочностью ($\sigma_в$ = 250 МПа, $\sigma_т$ = 120 МПа) и высокими характеристиками пластичности (δ = 50 %, ψ = 80 %). Свойства могут изменяться в некоторых пределах в зависимости от величины зерна.

2. *Феррит* (Ф) – твердый раствор углерода в α-Fe. Это наиболее пластичная, но малопрочная фаза ($\sigma_в$ = 250-300 МПа; δ = 50 %, твердость – 130 *НВ*). Содержание углерода в феррите 0,006 – 0,02 %.

3. *Аустенит* (А) – твердый раствор углерода в γ-Fe и существует

только при температурах выше 727 °С. Это наиболее пластичная фаза после феррита ($\sigma_в$ = 300 МПа; твердость ≈ 250 НВ, δ = 40 %). Содержание углерода в аустените 0,8 – 2,14 %.

4. *Цементит* (Ц) – химическое соединение железа с углеродом (карбид железа – Fe_3C). Цементит имеет высокую твердость (более 800 НВ), но чрезвычайно низкую, практически нулевую, пластичность, содержит 6,67 % углерода. Температура плавления цементита 1550 °С.

5. *Перлит* (П) – механическая смесь феррита и цементита. Характеризуется небольшой твердостью 200 НВ и пластичностью $\delta \approx 15$ % , но хорошей прочностью $\sigma_в$ = 600-800 МПа. Содержание углерода 0,83 %.

6. *Ледебурит* (Л) – механическая смесь аустенита и цементита. Характеризуется высокой твердостью 500 *НВ* и малой пластичностью. Содержание углерода 4,3 %. В системе железо-углерод является эвтектикой.

Первичная кристаллизация.

1. Сплав с содержанием углерода 0 – 2,14 %. При пересечении линии ликвидус *AC* начинается кристаллизация и образуется первый кристалл аустенита. В области *AEC* находится смесь жидкого раствора и твердого раствора - аустенита. Состав жидкой фазы изменяется по линии ликвидус *AC*, а состав твердой фазы – по линии солидус *AE*. При пересечении линии солидус *AE* первичная кристаллизация заканчивается и далее охлаждается твердая фаза – кристаллы твердого раствора аустенита.

2. Сплав с содержанием углерода 2,14 – 4,3 %. При пересечении линии ликвидус *AC* начинается кристаллизация и образуется первый кристалл аустенита. В области *AEC* находится смесь жидкого раствора и твердого раствора - аустенита. Состав жидкой фазы изменяется по линии ликвидус *AC*, и последняя капля жидкости затвердевает в точке *C* с образованием эвтектики – ледебурита. Состав твердой фазы изменяется по линии солидус *AE* и заканчивается в точке *E* с образованием кристаллов аустенита, содержащих максимальное количество углерода. При пересечении линии солидус *AEC* первичная кристаллизация заканчивается и окончательно имеем сплав состава А + Л.

3. Сплав с содержанием углерода – 4,3 %. Первичная кристаллизация начинается и заканчивается в точке *C* с образованием эвтектики – ледебурита.

4. Сплав с содержанием углерода 4,3 – 6,67 %. При пересечении линии

ликвидус *CD* начинается кристаллизация и образуется первый кристалл цементита. В области *CDF* находится смесь жидкого раствора и кристаллов цементита. Состав жидкой фазы изменяется по линии ликвидус *CD* и последняя капля жидкости затвердевает в точке *C* с образованием эвтектики – ледебурита. Состав твердой фазы – химического соединения цементит не изменяется.

При пересечении линии солидус *CF* первичная кристаллизация заканчивается, и окончательно имеем сплав состава Ц + Л.

5. Сплав с содержанием углерода 6,67 %. Сплав соответствует химическому соединению цементит.

Вторичная кристаллизация.

После окончания первичной кристаллизации охлаждение сплавов продолжается.

1.1. Сплав с содержанием углерода 0 – 0,02 %. Аустенит охлаждается до точки *G*. В точке *G* начинается и заканчивается вторичная кристаллизация с образованием феррита, который далее охлаждается до комнатной температуры.

1.2. Сплав с содержанием углерода 0,02 – 0,83 %. Аустенит охлаждается до пересечения с линией *GS*. При пересечении линии *GS* начинается вторичная кристаллизация и образуется первый кристалл феррита. В области *GPS* находится смесь твердого раствора и твердого раствора феррита. Состав аустенита изменяется по линии *GS* и последний кристалл аустенита в точке *S* превращается в перлит. Состав феррита изменяется по линии *GP* и заканчивается в точке *P* с образованием кристаллов феррита, содержащих максимальное количество углерода. При пересечении линии *PSK* вторичная кристаллизация заканчивается, и окончательно имеем Ф + П.

1.3. Сплав с содержанием углерода 0,83 %. Вторичная кристаллизация начинается и заканчивается в точке *S* , а весь аустенит превращается в перлит.

1.4. Сплав с содержанием углерода 0,83 – 2,14 %. Аустенит охлаждается. При понижении температуры растворимость углерода в аустените уменьшается в соответствии с линией предельной растворимости углерода в аустените *ES* и раствор становится пересыщенным по углероду. Лишний углерод выделяется из аустенита в виде цементита вторичного ($Ц_{II}$). Состав аустенита обедняется по углероду и изменяется по линии *ES*. Последний кристалл аустенита в точке *S* превращается в перлит. При

пересечении линии *PSK* вторичная кристаллизация заканчивается, и окончательно имеем сплав состава П + $Ц_{II}$.

2.1. Сплав с содержанием углерода 2,14 – 4,3 %. Сплав состава А + Л охлаждается. При понижении температуры растворимость углерода в аустените уменьшается в соответствии с линией предельной растворимости углерода в аустените *ES* и раствор становится пересыщенным по углероду. Лишний углерод выделяется из аустенита в виде цементита вторичного ($Ц_{II}$). Состав аустенита обедняется по углероду и изменяется по линии *ES*. Последний кристалл аустенита в точке *S* превращается в перлит. При пересечении линии *PSK* вторичная кристаллизация заканчивается и окончательно имеем сплав состава П + Л + $Ц_{II}$.

3.1. Сплав с содержанием углерода – 4,3 %. При пересечении линии *PSK* вторичная кристаллизация начинается и заканчивается. Ледебурит охлаждается до комнатной температуры.

4.1. Сплав с содержанием углерода 4,3 – 6,67 %. При пересечении линии *PSK* вторичная кристаллизация начинается и заканчивается. Сплав состава Ц + Л охлаждается до комнатной температуры.

5.1. Сплав химическое соединение – цементит охлаждается до комнатной температуры.

Классификация сплавов в системе железа.

Все сплавы в системе железа делятся по содержанию углерода. Сплавы с содержанием углерода до 2,14 % – стали. Сплавы с содержанием углерода более 2,14 % – чугуны.

В свою очередь, стали и чугуны подразделяются относительно положения эвтектоидной и эвтектической точек:

Сталь:

до точки *S* – доэвтектоидная сталь;

соответствует точке *S* – эвтектоидная сталь;

за точкой *S* – заэвтектоидная сталь.

Чугун:

до точки *C* – доэвтектический чугун;

соответствует точке *C* – эвтектический чугун;

за точкой *C* – заэвтектический чугун.

5.3. Вопросы

1. Как называется структура, представляющая собой твердый раствор углерода в α-железе?

1) перлит; 2) цементит; 3) феррит; 4) аустенит.

2. Как называется структура, представляющая собой твердый раствор углерода в γ-железе?

1) цементит; 2) феррит; 3) аустенит; 4) ледебурит.

3. Как называется структура, представляющая собой карбид железа - Fe_3C?

1) феррит; 2) аустенит; 3) ледебурит; 4) цементит.

4. Как называется структура, представляющая собой механическую смесь феррита и цементита?

1) перлит; 2) δ-феррит; 3) аустенит; 4) ледебурит.

5. Как называется структура, представляющая собой механическую смесь аустенита и цементита?

1) перлит; 2) феррит; 3) ледебурит; 4) δ-феррит.

5. На каком участке диаграммы железо-цементит протекает эвтектоидная реакция?

1) в области *QPSKL;* 2) в области *SECFK;* 3) на линии *ECF;* 4) на линии *PSK.*

7. На каком участке диаграммы железо-цементит протекает эвтектическая реакция?

1) на линии *ECF*; 2) в области *SECFK*; 3) в области *EAC*; 4) на линии *PSK.*

8. Какая из структурных составляющих железоуглеродистых сплавов обладает при комнатной температуре наибольшей пластичностью?

1) аустенит; 2) феррит; 3) цементит; 4) перлит.

9. Какая из структурных составляющих железоуглеродистых сплавов обладает наибольшей твердостью?

1) аустенит; 2) перлит; 3) феррит; 4) цементит.

10. Сколько процентов углерода (С) содержится в углеродистой заэвтектоидной стали ?

1) $0,02 < C < 0,8$; 2) $4,3 < C < 6,67$; 3) $2,14 < C < 4,3$; 4) $0,8 < C < 2,14$.

11. Каков структурный состав заэвтектоидной стали при температуре ниже 727 °С?

1) ледебурит + первичный цементит; 2) феррит + третичный цементит; 3) перлит + вторичный цементит; 4) феррит + перлит.

12**.** На рис. 5.1. представлена схема структуры стали. Какая это сталь?

1) техническое железо; 2) эвтектоидная; 3) заэвтектоидная; 4) доэвтектоидная.

13. На рис. 5.2. представлена схема структуры доэвтектоидной стали. Как называется структурная составляющая, помеченная знаком вопроса?

1) феррит; 2) аустенит;. 3) вторичный цементит; 4) перлит.

14. Какие железоуглеродистые сплавы называют чугунами?

1) содержащие углерода более 0,8 %*;* 2) содержащие углерода более 4,3 %; 3) содержащие углерода более 0,02 %; 4) содержащие углерода более 2,14 %.

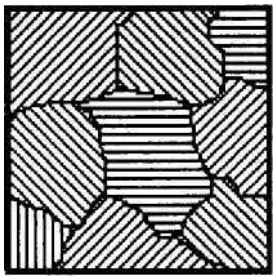


Рис. 5.1. Схема структуры стали

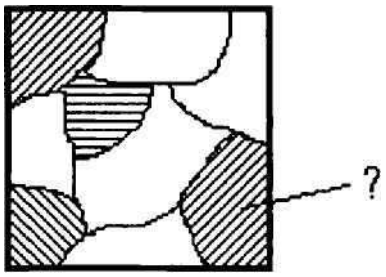


Рис. 5.2. Схема структуры доэвтектоидной стали

15. Какой чугун называют белым?

1) в котором весь углерод или часть его содержится в виде графита; 2) в котором весь углерод находится в химически связанном состоянии; 3) в котором металлическая основа состоит из феррита; 4) в котором наряду с графитом содержится ледебурит.

16. Какова форма графита в белом чугуне?

1) хлопьевидная; 2) в белом чугуне графита нет; 3) шаровидная; 4) пластинчатая.

17. В доэвтектических белых чугунах при температуре ниже 727 °С присутствуют две фазовые составляющие: цементит и ... . Как называется вторая фаза?

1) феррит; 2) аустенит; 3) ледебурит; 4) перлит.

18. В каком из перечисленных в ответе сплавов одной из структурных составляющих является ледебурит?

1) доэвтектический белый чугун; 2) сталь при температуре, выше температуры эвтектоидного превращения; 3) ферритный серый чугун; 4) техническое железо.

19. Как по микроструктуре чугуна определяют его вид (серый, ковкий, высокопрочный)?

1) по размеру графитных включений; 2) по характеру металлической основы; 3) по форме графитных включений; 4) по количеству графитных включений.

20. Как по микроструктуре чугуна определяют его вид (ферритный, ферритно-перлитный, перлитный)?

1) по размеру графитных включений; 2) по количеству графитных включений; 3) по форме графитных включений; 4) по характеру металлической основы.

21. Какие железоуглеродистые сплавы называют ферритными чугунами?

1) сплавы, в которых весь углерод (более 2,14 %) находится в виде графита; 2) чугуны, в структуре которых наряду с цементитом имеется феррит; 3) сплавы с ферритной структурой; 4) чугуны, в которых графит имеет пластинчатую форму.

22. Сколько содержит связанного углерода ферритный серый чугун?

1) 4,3 %; 2) 0,0 %; 3) 2,14 %; 4) 0,8 %.

23. Сколько связанного углерода содержит перлитный серый чугун?

1) 2,14 %; 2) 0,8 %; 3) 4,3 %; 4) 0 %.

24. В каком из ответов чугуны с одинаковой металлической основой размещены в порядке возрастания прочности при растяжении?

1) высокопрочный-ковкий-серый; 2) серый-высокопрочный-ковкий; 3) ковкий-высокопрочный-серый; 4) серый-ковкий-высокопрочный.

25. На рис. 5.3. представлена схема структуры железоуглеродистого сплава. Какой это сплав?

1) техническое железо; 2) ферритный серый чугун; 3) заэвтектический белый чугун; 4) эвтектоидная сталь.

26. В поле микроскопа (рис. 5.4) на фоне равноосных светлых зерен

видны шаровидные включения графита. О каком сплаве идет речь?

1) о ферритном высокопрочном чугуне; 2) о текстурованном техническом железе; 3) о ферритно-перлитном ковком чугуне; 4) о доэвтектическом белом чугуне.

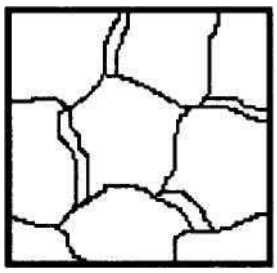


Рис. 5.3. Схема структуры железоуглеродистого сплава

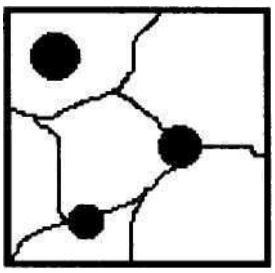


Рис. 5.4. Шаровидные включения графита

27. Какой чугун получают путем длительного отжига белого чугуна?

1) ковкий; 2) отбеленный; 3) серый; 4) высокопрочный.

28. Какой чугун получают путем модифицирования жидкого расплава магнием или церием?

1) серый; 2) белый; 3) высокопрочный; 4) ковкий.

29. У какого чугуна будут лучшие механические свойства?

Чугун с 1) хлопьевидным графитом; 2) без графита; 3) шаровидным графитом; 4) пластинчатым графитом.

30. Как зависит температура рекристаллизации металла от его чистоты?

1) чем чище металл, тем выше температура рекристаллизации; 2) температура рекристаллизации не зависит от чистоты металла; 3) для металлов зависимость имеет знак плюс (чем чище металл, тем выше температура), для легированных сплавов – минус; 4) Чем чище металл, тем ниже температура рекристаллизации.

5.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Неверно. Перлит - это эвтектоидная смесь, одной из составляющих которой является твердый раствор углерода в α-Fe.

2) Неверно. Цементит - это химическое соединение - карбид железа с

формулой Fe_3C.

3) Правильно.

4) Неверно. Аустенит - это твердый раствор углерода в γ-железе.

2. 1) Неверно. Цементит - это химическое соединение - карбид железа с формулой Fe_3C.

2) Неверно. Феррит - это твердый раствор углерода в α-железе.

3) Правильно.

4) Неверно. Ледебурит - это эвтектика, одной из составляющих которой является твердый раствор углерода в γ-железе (при температурах выше 727 °С).

3. 1) Неверно. Феррит - это твердый раствор углерода в α-Fe.

2) Неверно. Аустенит - это твердый раствор углерода в γ-железе.

3) Неверно. Ледебурит - это эвтектическая смесь, состоящая из аустенита и цементита (в интервале температур 1147 ... 727 °С) или из перлита и цементита (ниже 727 °С).

4) Правильно.

4. 1) Правильно.

2) Неверно. 6-феррит - это твердый раствор углерода в δ-железе.

3) Неверно. Аустенит - это твердый раствор углерода в γ-железе.

4) Неверно. Ледебурит - это эвтектическая смесь, состоящая из аустенита и цементита (в интервале температур 1147 ... 727 °С) или из перлита и цементита (ниже 727 °С).

5. 1) Неверно. Перлит - это механическая смесь феррита и цементита.

2) Неверно. Феррит.- это твердый раствор углерода в α-железе.

3) Правильно.

4) Неверно, δ-феррит - это твердый раствор углерода в δ-железе.

6. 1) Неверно. В этой области диаграммы эвтектоидная реакция уже завершена.

2) Неверно. В области *SECFK* эвтектоидная реакция еще не начинается.

3) Неверно. На линии *ECF* протекает эвтектическая реакция.

4) Правильно.

7. 1) Правильно.

7. 2) Неверно. В этой области диаграммы эвтектическая реакция уже

завершена.

7. 3) Неверно. *EAC* - область диаграммы, в которой находятся в равновесии жидкость и кристаллы аустенита.

7. 4) Неверно. На линии *PSK* протекает эвтектоидная реакция.

8. 1) Аустенит действительно наиболее пластичная структурная составляющая железоуглеродистых сплавов, но он существует лишь при температурах, выше 727 °С.

8. 2) Правильно.

3) Неверно. Цементит – самая хрупкая структурная составляющая железоуглеродистых сплавов.

4) Неверно. Перлит - это механическая смесь двух фаз, одна из которых весьма пластична, а другая - хрупкая.

9. 1) Неверно. Твердость аустенита 1600 ... 2000 НВ, а самой твердой структурной составляющей - 8000 *HB*.

2) Неверно. Твердость перлита около 3000 НВ, а самой твердой структурной составляющей - 8000 *HB*.

3) Неверно. Феррит - самая мягкая структурная составляющая железоуглеродистых сплавов. Его твердость 650 ... 1300 НВ.

4) Правильно.

10. 1) Неверно. Таково содержание углерода в доэвтектоидных сталях.

2) Неверно. Таково содержание углерода в заэвтектических чугунах.

3) Неверно. Таково содержание углерода в доэвтектических чугунах.

4) Правильно.

11. 1) Неверно. Таким структурным составом обладают заэвтектические белые чугуны.

2) Неверно. Такой структурный состав имеют сплавы типа технического железа.

3) Правильно.

4) Неверно. Такой структурный состав имеют доэвтектоидные стали.

12. 1) Неверно. Структура технического железа состоит из феррита и третичного цементита. Перлита в ней нет.

2) Правильно.

3) Неверно. В структуре заэвтектоидной стали кроме перлита присутствует вторичный цементит.

4) Неверно. В структуре доэвтектоидной стали кроме перлита присутствует феррит.

13. 1) Неверно. Феррит после травления сплава выглядит как светлая структурная составляющая.

2) Неверно. В железоуглеродистых сплавах аустенит существует лишь при температурах, выше 727 °С.

3) Неверно. В доэвтектоидных сталях нет структурно свободного цементита.

4) Правильно.

14. 1) Неверно. Сплавы с концентрацией углерода в интервале от 0,8 до 2,14 % называют заэвтектоидными сталями.

2) Действительно, такие сплавы относятся к чугунам, однако интервал возможных в чугунах концентраций углерода занижен. Ищите более полный ответ.

3) Неверно. Сплавы с концентрацией углерода в интервале 0,02 ... 0,8 % называют доэвтектоидными сталями.

4) Правильно.

15. 1) Неверно. Весь углерод или часть его содержится в виде графита в чугунах со структурно свободным углеродом (сером, ковком, высокопрочном, половинчатом).

2) Правильно.

3) Неверно. Металлическая основа состоит из феррита в ферритных чугунах со структурно свободным углеродом.

4) Неверно. Чугуны, в которых наряду с графитом содержится ледебурит, называются половинчатыми.

16. 1) Неверно. Графит хлопьевидной формы содержится в ковких чугунах.

2) Правильно.

3) Неверно. Графит шаровидной формы содержится в высокопрочных чугунах.

4) Неверно. Графит пластинчатой формы содержится в серых чугунах.

17. 1) Правильно.

2) Неверно. В железоуглеродистых сплавах аустенит существует лишь при температурах выше 727 °С.

3) Неверно. Ледебурит - это структурная составляющая железоуглеродистых сплавов, состоящая из двух фаз: аустенита и цементита или феррита и цементита.

4) Неверно. Перлит - это структурная составляющая железоуглеродистых сплавов, состоящая из двух фаз: феррита и цементита.

18. 1) Правильно.

2) Неверно. При температуре выше эвтектоидного превращения сталь состоит из феррита и аустенита, аустенита или аустенита и цементита.

3) Неверно. Структурными составляющими ферритного серого чугуна являются феррит и пластинчатый графит.

4) Неверно. Структурными составляющими технического железа являются феррит и третичный цементит.

19. 1) Неверно. Размер или количество графитовых включений определяют свойства чугунов, но не их вид.

2) По характеру металлической основы определяют разновидность чугунов (ферритный, ферритно-перлитный, перлитный).

3) Правильно.

4) Неверно. Размер или количество графитовых включений определяют свойства чугунов, но не их вид.

20. 1) Неверно. Размер или количество графитовых включений определяют свойства чугунов, но не их вид.

2) Неверно. Размер или количество графитовых включений определяют свойства чугунов, но не их вид.

3) Неверно. По форме графитных включений определяют разновидность чугунов (серый, ковкий, высокопрочный).

4) Правильно.

20. 1) Правильно.

2) Чугуны со структурно свободным цементитом относятся к белым чугунам. Феррит в них может появиться в результате отжига, но такой чугун не относится к ферритным.

3) Неверно. В структуре чугуна помимо металлической основы

должна быть высокоуглеродистая фаза.

4) Чугуны, в которых графит имеет пластинчатую форму, называют серыми.

22. 1) Неверно. В ферритных чугунах нет связанного углерода.

2) Правильно.

3) Неверно. В ферритных чугунах нет связанного углерода.

4) Неверно. 0,8 % связанного углерода содержится в перлитных чугунах. В ферритных чугунах связанного углерода нет.

23. 1) Неверно. Перлит не может содержать такого количества углерода.

2) Правильно.

3) Неверно. Перлит не может содержать такого количества углерода.

4) Неверно. Не содержат связанного углерода ферритные чугуны.

24. 1) Неверно. Вы выбрали порядок, при котором прочность чугунов на растяжение... убывает.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

25. 1) Правильно.

2) Неверно. В структуре серых чугунов присутствует пластинчатый графит.

3) Неверно. Характерной структурной составляющей белых чугунов является ледебурит.

4) Неверно. Структура эвтектоидной стали состоит из перлита.

26. 1) Правильно.

2) Неверно. В техническом железе нет графита.

3) Неверно. В ковких чугунах графит имеет хлопьевидную форму, к тому же при ферритно-перлитной металлической основе фон состоит не только из светлых зерен.

4) Неверно. В белых чугунах нет графита.

27. 1) Правильно.

2) Неверно. Отбеленный чугун получают при ускоренном охлаждении отливок в поверхностных слоях и более медленном - в сердцевинных участках.

3) Неверно. Серый чугун получают путем замедленного охлаждения

жидкости.

4) Неверно. Высокопрочные чугуны получают путем модифицирования жидкости магнием или церием.

28. 1) Неверно. Серый чугун получают путем замедленного охлаждения жидкости.

2) Неверно. Белый чугун получают путем ускоренного охлаждения жидкости.

3) Правильно.

4) Неверно. Ковкие чугуны получают путем длительного отжига низкокремнистых белых чугунов.

29. 1) Неверно

2) Неверно. Чугун без графита (белый) характеризуется высокой прочностью, твердостью и хрупкостью.

3) Правильно.

4) Неверно. Чугун с пластинчатым графитом имеет самые низкие механические свойства из всех чугунов с графитом.

30. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Неверно.

5.5. Задачи

5.1. При изучении микроструктуры сплава под микроскопом установлено, что структура состоит из 40 % феррита и 60 % перлита. Сколько примерно углерода в составе сплава?

5.2. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,7 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.4. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для

сплава железа, содержащего 4,8 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.5. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 1,4 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.6. Начертите диаграмму состояния железо - углерод, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 4,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.7. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 750 и 830 ^{o}С. Используя диаграммы состояния железо-цементит, укажите выбранные температуры нагрева и опишите превращения, которые произошли при двух режимах закалки. Какому режиму следует отдать предпочтение и почему?

5.8. Вычертите диаграмму состояния железо-карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 5,2 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.9. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,45 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.10. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 3,2 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

5.11. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей твердость 20...25 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура образуется в данном случае.

6. ПОВЕРХНОСТНАЯ ОБРАБОТКА СТАЛИ

6.1. Методические указания

При изучении темы необходимо обратить внимание, какое влияние оказывают различные внешние воздействия на материал поверхностного слоя детали и механизм формирования структуры металла при разных методах упрочнения.

Обратите внимание на различие процессов объемной и поверхностной закалки.

Каждый вид химико-термической обработки имеет свою область применения, определенные достоинства и недостатки. Разберитесь в технологии проведения отдельных видов химико-термической обработки. Уясните преимущества и области использования цементации, азотирования, цианирования и различных видов диффузионной металлизации. Следует понимать принципиальное отличие диффузионного насыщения поверхности металлами от нанесения гальванических покрытий, а главное - назначение каждого метода. При изучении каждого вида химико-термической обработки следует обратить внимание на возможные виды брака, способы его предотвращения и устранения, а также на наиболее удачные варианты для каждого метода химико-термической обработки и конечные результаты.

Рассмотрите сущность и назначение пластической деформации поверхностного слоя и его влияния на эксплуатационные свойства деталей.

Нужно иметь представление о новых методах упрочнения деталей: термомеханическом, ультразвуковом, магнитной обработке.

6.2. Краткие теоретические сведения

Между физико-механическими характеристиками рабочих поверхностей деталей и долговечностью этих деталей существует тесная взаимосвязь. Часто бывает необходимо иметь прочную, твердую, износостойкую поверхность и мягкую, вязкую сердцевину.

Упрочнение пластической деформацией заключается в наклепе поверхностного слоя на глубину 0,2…0,4 мм. Цель – повышение усталостной прочности.

Обкатка роликами или шариками. Деформация осуществляется давлением ролика из твердого металла на поверхность обрабатываемого изделия. При усилиях на ролик, превышающих предел текучести

обрабатываемого материала, происходит наклеп на нужную глубину. Обработка повышает предел усталости и долговечность изделия. Обкатка роликами применяется при обработке шеек валов, проволоки, при калибровке труб, прутков. Не требуется специальное оборудование, можно использовать токарные станки.

Дробеструйная обработка – обработка стальной или чугунной дробью поверхности деталей. Применяют для упрочнения пружин, рессор, зубчатых колес, а также для упрочнения деталей в канавках и на выступах.

Поверхностная закалка заключается в создании на поверхности детали слоя с мартенситной структурой. В результате увеличивается твердость, износостойкость и предел выносливости.

Общим для всех видов поверхностной закалки является нагрев поверхностного слоя детали до температуры закалки с последующим быстрым охлаждением. Особенностью процесса является проведение быстрого нагрева поверхности, чтобы внутренние слои детали не успели нагреться.

Способы поверхностной закалки различаются методами нагрева деталей. В зависимости от способа нагрева и габаритов детали толщина закаленного слоя при поверхностной закалке составляет 0,1-10 мм.

Наибольшее распространение имеют электротермическая закалка с нагревом изделий токами высокой частоты (ТВЧ), сканирование поверхности лучом лазера и газопламенный нагрев для крупногабаритных деталей.

Химико-термическая обработка (ХТО) – процесс изменения химического состава, структуры и свойств поверхностного слоя детали. Изменение химического состава поверхностных слоев достигается в результате его насыщения элементами в атомарном состоянии путем их диффузии из внешнего источника при высокой температуре. ХТО может проводиться в твердой, жидкой и газовой средах. Толщина обработанного слоя определяется температурой, временем и природой насыщающего элемента.

Цементация – процесс насыщения поверхностного слоя стали атомами углерода, содержание которого в поверхностном слое достигает до 1 %. Поэтому цементации подвергают стали с низким содержанием углерода (до 0,25 %). На практике применяют цементацию в твердом, жидком и газовом карбюризаторе. Глубина цементации составляет 1-2 мм, температура процесса 900-950 ^{o}C, время 6-15 часов. Подобрав режимы обработки, поверхностный слой насыщают углеродом до требуемой глубины.

После цементации обязательно проводится закалка с низким отпуском. Твердость поверхностного слоя после цементации повышается только при последующей закалке, сердцевина при этом остается вязкой, так как стали с малым содержанием углерода практически не закаливаются.

Азотирование – процесс насыщения поверхностного слоя стали атомами азота. Азотирование проводят для повышения твердости, износостойкости и коррозионной стойкости. Обычно азотирование проводят в печах в атмосфере аммиака. Охлаждение проводят вместе с печью в потоке аммиака. При азотировании образуется несколько фаз: твердый раствор азота в α-Fe, нитрид железа Fe_3N, твердый раствор азота в нитриде железа.

Содержание азота в поверхностном слое составляет 10…12 %, толщина слоя (h) – 0,3…0,6 мм, температура процесса 500…550 °С в течение 30…90 часов. На поверхности получают твердость ≈ 1000 HV.

Перед азотированием проводят закалку с высоким отпуском. После азотирования в сердцевине изделия сохраняется структура сорбита, которая обеспечивает повышенную прочность и вязкость.

Достоинства азотирования в том, что свойства слоя формируются в процессе насыщения и твердость не снижается при повторных нагревах до температуры азотирования (500-600 °С), при этом увеличивается сопротивление износу и коррозии в средах слабой агрессивности. Недостатки - малая глубина упрочненного слоя и длительность обработки.

Цианирование – процесс насыщения поверхностного слоя стали одновременно атомами углерода и азота в жидкой среде. Осуществляется в ваннах с расплавленными цианистыми солями, например NaCN с добавками солей NaCl, BaCl и др. Глубина слоя 0,15-2 мм, температура процесса 800-950 °С, время 0,5-2 часа. Цианированный слой обладает высокой твердостью 5-62 HRC и хорошо сопротивляется износу. Повышаются усталостная прочность и коррозионная стойкость.

По сравнению с цементацией цианирование происходит с большей скоростью, приводит к меньшей деформации деталей, обеспечивая большую твердость и сопротивление износу.

Недостаток - высокая токсичность цианистых солей.

Нитроцементация – процесс насыщения поверхностного слоя стали одновременно атомами углерода и азота в газовой среде в атмосфере из углеродсодержащих газов и аммиака.

Глубина слоя 0,2-0,3 мм, температура процесса 530…570 °С, время 1,5…3 часа. Структура нитроцементованного слоя состоит из мелкокристаллического мартенсита, мелких, равномерно распределенных карбонитридов и остаточного аустенита. Твердость поверхностного слоя 900-1200 *HV*.

Нитроцементация характеризуется безопасностью в работе. Завершающей термической обработкой является закалка с низким отпуском.

Борирование – процесс насыщения поверхностного слоя стали атомами бора. Проводится в жидкой и газовой средах. Жидкая среда – при электролизе расплава буры. Газовая – в смеси 3-хлоритового бора BCl_3 и водорода H_2 или в диборане H_2B при температуре 930-950 °С.

Диффузионный слой состоит из боридов FeB и Fe_2B толщиной 0,1-0,2 мм с очень высокой твердостью 1800-2000 HB, что обеспечивает высокую износостойкость при абразивном износе и коррозионную стойкость. Применяется для обработки втулок грязевых насосов и других деталей, подвергающихся истирающему абразивному износу.

Диффузионная металлизация – химико-термическая обработка, при которой поверхность стальных изделий насыщается атомами металлов. Диффузионную металлизацию можно проводить в твердых, жидких и газообразных средах.

Алитирование – процесс насыщения поверхности стали атомами алюминия. Алитирование в твердой среде проводится в смеси порошков ферроалюминия, оксида алюминия AlO_3 и хлористого аммония NH_4C1 при температуре 950-1000 °С. Жидкое алитирование проводится в расплавленном алюминии при 750-800 °С. Толщина слоя 0,2-0,5 мм, время 3-12 часов, концентрация алюминия в поверхностном слое достигает до 30 %. Образующийся атомарный алюминий диффундирует в металл, образуя в поверхностном слое твердый раствор алюминия с железом. Алюминий на поверхности окисляется, образуя пленку Al_2O_3.

В результате алитирования сталь приобретает высокую окалиностойкость (до 850-900 °С) и коррозионную стойкость в атмосфере и ряде агрессивных сред. Механические свойства поверхности при алитировании не изменяются.

Хромирование – процесс насыщения поверхности стали атомами хрома. Хромирование средне- и высокоуглеродистых сталей повышает твердость и износостойкость, а также коррозионную стойкость и окалиностойкость (до 800 °С). Проводят хромирование чаще всего в порошкообразных смесях при температуре 1000-1050 °С. Диффузионный слой, получаемый при хромировании углеродистых сталей, состоит из карбидов хрома, в которых растворено некоторое количество атомов железа. Этот слой имеет высокую твердость 1200-1300 HV. Толщина хромированного слоя достигает 0,15-0,20 мм при длительности процесса 6-15 ч. Концентрация хрома в поверхностном слое достигает 30-40 %.

Силицирование – процесс насыщения поверхности стали атомами кремния. Силицирование повышает коррозионную стойкость стали в морской воде, в азотной и соляной кислотах и окалиностойкость до 700-750 °С. Структура слоя - твердый раствор кремния в α-Fe. Толщина силицированного слоя 0,3-1 мм. Этот слой имеет невысокую твердость 200-300 HV, но после пропитки маслом обладает высокой износостойкостью.

6.3. Вопросы

1. Какими особенностями должна обладать диаграмма состояния системы насыщаемый металл - насыщающий компонент для осуществления химико-термической обработки?

1) ХТО возможна только для систем, образующих механические смеси кристаллов компонентов; 2) должна быть высокотемпературная область значительной растворимости компонента в металле; 3) ХТО возможна только для систем, образующих непрерывные твердые растворы; 4) в диаграмме должны присутствовать устойчивые химические соединения.

2. Как называется обработка, состоящая в насыщении поверхности стали углеродом?

1) цементация; 2) нормализация; 3) улучшение; 4) цианирование.

3. Какова конечная цель цементации стали?

1) создание мелкозернистой структуры сердцевины; 2) повышение содержания углерода в стали; 3) получение в изделии твердого поверхностного слоя при сохранении вязкой сердцевины; 4) увеличение пластичности поверхностного слоя.

4. Что такое карбюризатор?

1) вещество, служащее источником углерода при цементации; 2) карбиды легирующих элементов. 3) устройство для получения топливовоздушной среды. 4) смесь углекислых солей.

5. Какова структура диффузионного слоя, полученного в результате цементации стали?

Начиная от поверхности, следуют структуры ...

1) цементит + перлит; перлит; перлит + феррит; 2) цементит + феррит; перлит; феррит; 3) перлит + феррит; феррит; феррит + цементит; 4) перлит; перлит + цементит; цементит + феррит.

6. Чем отличается мартенсит, полученный после закалки цементованного изделия, в сердцевинных участках от мартенсита в наружных слоях?

1) в сердцевине из-за низкой прокаливаемости сталей образуются структуры перлитного типа; 2) в наружных слоях мартенсит

высокоуглеродистый, в сердцевине – низкоуглеродистый; 3) в сердцевине мартенсита нет; 4) в наружных слоях мартенсит мелкоигольчатый, в сердцевине - крупноигольчатый.

7. Как называется обработка, состоящая в насыщении поверхности стали азотом и углеродом в расплавленных солях, содержащих группу CN?

1) нитроцементация. 2) улучшение. 3) цианирование. 4) модифицирование.

8. Как называется обработка, состоящая в насыщении поверхности стали азотом и углеродом в газовой среде?

1) цианирование; 2) улучшение; 3) модифицирование; 4) нитроцементация.

9. Какие стали называют цементуемыми?

1) высокоуглеродистые (более 0,7 % С). 2) высоколегированные. 3) низкоуглеродистые (0,1-0,25 % С). 4) среднеуглеродистые (0,3-0,5 % С).

10. За счет каких параметров можно изменять глубину прогреваемого слоя стальных деталей при нагреве ТВЧ?

11. Поверхностная закалка с использованием ТВЧ очень повышает усталостную прочность, например для стали 45 на 280 %. Чем это можно объяснить?

1) улучшением структуры стали; 2) возникновением остаточных напряжений сжатия в поверхностных слоях детали, где обычно начинается развитие усталостных явлений.

12. Будет ли достигнута после цементации высокая износостойкость детали?

13. Ответственное изделие было изготовлено из крупнозернистой углеродистой стали с 0,15% С. Подумайте, какой режим термообработки обеспечит оптимальные свойства изделия, если цементация проводилась при 950 °С и содержание углерода в поверхностном слое 0,9 %.

14. В чем принципиальное отличие диффузионной металлизации от цементации и азотирования и как это должно отразиться на технологии проведения процесса металлизации?

15. Какой способ обработки рационально использовать для повышения окалиностойкости чугунных колосников топок котлов?

1) алитирование в твердой среде; 2) алитирование в жидкой ванне.

6.4. Пояснения к ответам на вопросы

1) Неверно. В системах механических смесей невозможен диффузионный перенос из-за отсутствия в фазах постоянного состава градиента концентраций.

2) Правильно.

3) Действительно, в таких системах ХТО возможна, однако требования к системе завышены. Ищите более точный ответ.

4) Неверно. Химико-термическая обработка предполагает диффузионное насыщение поверхностных слоев изделия насыщающим компонентом. Наличие в диаграмме состояния устойчивых химических соединений не предопределяет возможность диффузии.

2. 1) Правильно.

2) Неверно. Нормализация состоит в нагреве сталей выше критических точек и охлаждении на спокойном воздухе.

3) Неверно. Улучшением называют термическую обработку сталей, состоящую в закалке и последующем высоком отпуске.

4) Неверно. Цианированием называют ХТО стальных изделий, состоящую в насыщении азотом и углеродом.

3. 1) Неверно. Изменение структуры по сечению стального изделия достигается термообработкой и в отсутствие цементации.

2) Неверно. В таком случае было бы проще изготовить изделие из стали с более высоким содержанием углерода.

3) Правильно.

4) Неверно. При цементации поверхностный слой насыщается углеродом. При этом пластичность падает, а не возрастает.

4. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно. Устройства для получения топливовоздушной среды применяют в двигателях внутреннего сгорания, и называются они не карбюризаторами, а карбюраторами.

4) Неверно. Углекислые соли являются лишь одной из составных частей твердых карбюризаторов.

5. 1) Правильно.

2) Неверно. Структуры феррит и феррит + цементит встречаются в сплавах, содержащих углерода меньше, чем в сплавах, применяемых для цементации.

3) Неверно. Структуры феррит и феррит + цементит встречаются в сплавах, содержащих углерода меньше, чем в сплавах, применяемых для цементации.

4) Неверно. Поверхностный слой (перлит) оказался беднее углеродом, чем глубже лежащий (перлит + цементит). Структура цементит + феррит встречается в сплавах, содержащих углерода меньше, чем в применяемых для цементации.

6. 1) Несостоятельность однозначности такого утверждения очевидна. Изделия с малыми сечениями, даже при низкой прокаливаемости, примут сквозную закалку.

2) Правильно.

3) Однозначность такого утверждения неправомерна. Образуется мартенсит в сердцевине или нет, зависит от состава стали, величины сечения изделия и интенсивности охлаждения его при закалке.

4) Однозначность такого утверждения неправомерна. Размер зерна по сечению изделия определяется характером термической обработки.

7. 1) Неверно. При нитроцементации источником атомов углерода и азота является газовая фаза.

2) Неверно. Улучшением называют термическую обработку сталей, состоящую в закалке и последующем высоком отпуске.

3) Правильно.

4) Неверно. Модифицирование состоит в введении в жидкий металл специальных добавок для получения мелкого зерна.

8. 1) Неверно. При цианировании источником атомов азота и углерода является расплав солей, содержащих группу CN.

2) Неверно. Улучшением называют термическую обработку сталей, состоящую в закалке и последующем высоком отпуске.

3) Неверно. Модифицирование состоит в введении в жидкий металл специальных добавок для получения мелкого зерна.

4) Правильно.

9. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

10. Наиболее доступно изменение частоты тока, поэтому глубина прогрева регулируется изменением частоты тока.

1) Это верно, но не единственная причина. Посмотрите эпюру напряжений после поверхностной закалки.

2) Правильно.

12. Несмотря на увеличение содержания углерода в поверхностном слое и некоторое повышение от этого твердости, требуемая износостойкость после цементации не достигается. Поэтому после цементации требуется закалка стальных деталей.

13. В этом случае после цементации проводят нормализацию для получения мелкозернистой структуры во внутренних слоях. После этого проводят закалку с нагрева на 770 °С и отпуск при 160 °С, что обеспечивает износостойкость.

14. Так как атомы металлов с железом образуют твердые растворы замещения, то диффузия этих атомов происходит медленно. Поэтому для металлизации требуются более высокие температуры и большая длительность процесса.

15. 1) Решение плохое, так как процесс очень длительный.

2) Решение оптимальное, процесс реализуется просто и быстро.

3) Решение не лучшее, так как процесс длительный и сложный.

6.5. Задачи

6.1. Завод проводит химико-термическую обработку массовых партий зубчатых колес диаметром 50 мм из стали 20 в термическом цехе. Зубчатые колеса поступали в термический цех из механического цеха, а затем вновь возвращались для окончательной обработки в механический цех. Для повышения производительности и сокращения длительности производственного цикла завод изменил марку стали и начал выполнять закалку с индукционного нагрева. Это позволило проводить термическую

обработку непосредственно в потоке механического цеха. Приведите марку стали, из которой следует изготавливать зубчатые колеса, закаливаемые с индукционного нагрева. Укажите технологический режим обоих процессов термической обработки и сравните их по продолжительности операций.

6.2. Для повышения износостойкости стаканов цилиндров мощных двигателей внутреннего сгорания применяют азотирование. Выберите сталь, пригодную для азотирования, приведите химический состав, рекомендуйте режим термической обработки и режим азотирования и укажите твердость поверхностного слоя и механические свойства нижележащих слоев в готовом изделии. Сравните: твердость, получаемую при азотировании с получаемой при цементации; температуры, до которых может быть сохранена высокая твердость азотированного и цементованного слоев, при каком из этих процессов меньше деформация детали. Укажите возможный состав и толщину азотированного слоя.

6.3. Зубчатые колеса грузовых автомобилей изготавливают из стали 25ХГТ. Какой вид упрочняющей химико-термической обработки (цементацию или нитроцементацию) целесообразно применить? Расшифруйте химический состав стали, укажите достоинства и недостатки указанных способов упрочнения. Опишите структуру и свойства упрочненных зубчатых колес.

№ 6.4. В термическом цехе обрабатывают зубчатые колеса диаметром 30 мм из стали 20Х. Цех отказался от выполнения цементации в твердом карбюризаторе и наметил более прогрессивный процесс газовой нитроцементации. Сравните условия и режим всего цикла химико-термической и термической обработки зубчатых колес в случае выполнения цементации в твердом карбюризаторе и газовой нитроцементации. Требуемая толщина поверхностного слоя 0,4-0,6 мм. Укажите микроструктуру и твердость на поверхности и механические свойства в сердцевине после окончательной обработки.

6.5. Предложите марку недорогой стали для изготовления тяжелонагруженных зубчатых колес с модулем зуба 6-7, а также технологию ее упрочнения, обеспечивающую твердость поверхностного слоя 58-62 HRC и сердцевины не менее 35 HRC. Следует учесть, что колесо имеет диаметр 350 мм, высоту 50 мм и эксплуатируется в условиях запыленности при

воздействии слабоагрессивных сред.

6.6. Конические зубчатые колеса диаметром 50 мм в электротележке работают в условиях динамических нагрузок и повышенного износа. По требованию конструктора сталь должна обладать высоким сопротивлением вязкому и хрупкому разрушению изделия в сердцевине. Выберите углеродистую цементуемую сталь, укажите состав, рекомендуйте режим термической обработки для получения максимальной вязкости в сердцевине изделия, если цементация выполняется в твердом карбюризаторе. Одновременно для сравнения укажите режим химико-термической обработки и в газовой среде. Укажите механические свойства стали в сердцевине изделия и твердость на поверхности после окончательной термической обработки и объясните, целесообразно ли применение для этой цели стали обыкновенного качества.

6.7. В термическом цехе обрабатывают зубчатые колеса диаметром 30 мм, изготовленные из стали 20Х. Цех отказался от выполнения цементации в твердом карбюризаторе и наметил более производительный процесс газовой нитроцементации. Сравните условия и режим всего цикла химико-термической и термической обработки зубчатых колес в случае выполнения цементации в твердом карбюризаторе в нитроцементации. Требуемая толщина поверхностного твердого слоя 0,4-0,6 мм. Укажите микроструктуру и твердость поверхности и механические свойства в сердцевине после окончательной обработки.

6.8. Завод изготавливает зубчатые колеса:

• цементованные, имеющие временное сопротивление ($\sigma_в$) в сердцевине 650-700 МПа и ударную вязкость (KCU) не менее 800 кДж/м²;

• азотированные, имеющие временное сопротивление в сердцевине 950...1000 МПа и ударную вязкость не менее 900 кДж/м²;

• из термически улучшенной стали с временным сопротивлением 900-1000 МПа и ударной вязкостью не ниже 600 кДж/м². Выберите марки сталей. Приведите их химический состав, обработку и структуру, необходимые для получения указанных механических свойств. Сравните режимы обработки и, учитывая свойства, полученные в готовом изделии, определите, для каких условий эксплуатации наиболее рационально использовать стали указанных выше свойств. При решении можно принять, что зубчатые колеса всех типов

имеют одинаковые диаметр (50 мм) и высоту (80 мм).

7. СТАЛИ

7.1. Методические указания

Углеродистые стали. Разберите маркировки углеродистых сталей в соответствии с качеством и назначением по ГОСТу. Их знание позволяет правильно и оперативно осуществлять подбор материала для восстановления или изготовления детали. Изучите влияние углерода и основных примесей на свойства углеродистой стали. Запомните, что вредное влияние фосфора проявляется при эксплуатации стальных деталей, сера же главным образом затрудняет горячую обработку давлением. На работу деталей она практически не влияет, так как детали из углеродистых сталей при высоких температурах не работают. Основное внимание обратите на требования к конструкционным и инструментальным сталям. Запомните, что в конструкционных сталях содержание углерода не превышает 0,65 %, так как при большем содержании углерода детали становятся хрупкими.

Легированные стали. Легированной называют сталь, в состав которой введены легирующие элементы в заданном количестве с целью изменения её структуры и свойств. Разберитесь во влиянии легирующих элементов на изменение структуры и свойств стали, особое внимание уделите технологическим особенностям термической обработки легированной стали различных групп. В связи с этим следует обратить внимание на химический состав и назначение сталей.

Рассмотрите способы классификации (по структуре в нормализованном состоянии и, что особенно важно для машиностроителей, по назначению), основные принципы выбора для различного назначения цементуемых, улучшаемых, пружинно-рессорных, износостойких, высокопрочных, нержавеющих, жаропрочных и других сталей.

Чугуны. Разбирая механические свойства чугунов с графитом, обратите внимание на форму графитовых включений и их количество, так как от этого зависит прочность чугуна. Графит в меньшей степени снижает пластичность и вязкость металлической основы чугуна, если не имеет форму в виде

пластин. Изменение формы графита из пластинчатой на хлопьеобразную может быть получено при отжиге белых чугунов (ковкие чугуны) и в высокопрочных чугунах в результате модифицирования. Уясните сущность модифицирования чугунов. Нужно знать, что металлическая основа у серых, ковких и высокопрочных чугунов может быть одинаковая - перлитная или ферритная. Надо знать способы получения ковких чугунов. Следует иметь в виду, что ковкие чугуны, несмотря на их название, ковать нельзя. В высокопрочных чугунах, модифицированных магнием, графит имеет шарообразную форму, что еще больше увеличивает прочность и пластичность. Высокопрочные чугуны могут выдерживать и некоторые ударные нагрузки. Обязательно нужно знать маркировку чугунов по ГОСТу.

7.2. Краткие теоретические сведения

По *химическому составу* стали подразделяют на углеродистые и легированные.

По *структуре* стали подразделяют на доэвтектоидные (С < 0,83 %), эвтектоидные (С = 0,8 %) и заэвтектоидные (С > 0,8 % С).

По *степени раскисления* стали подразделяют на кипящие, полуспокойные и спокойные. Кипящие стали характеризуются пониженной плотностью отливки, низким содержанием кремния и повышенной пластичностью. Спокойные стали дают плотную отливку. Полуспокойные - занимают промежуточное положение между кипящими и спокойными. Кипящие стали обозначают индексом «кп», полуспокойные – «пс», спокойные - «сп».

По *содержанию углерода* стали подразделяют на низкоуглеродистые (С < 0,3 %), среднеуглеродистые (0,3 < С < 0,7 %) и высокоуглеродистые (С > 0,7 %).

По *качеству* стали подразделяют на стали обыкновенного качества, качественные, высококачественные и особо высококачественные. Основным критерием качества является содержание в стали серы и фосфора.

По *назначению* стали подразделяют на конструкционные, инструментальные и специальные.

Стали обыкновенного качества маркируют буквами Ст и однозначным числом 0, 1,2,..., 6 – номером сплава. Чем число больше, тем выше среднее

содержание углерода в стали. Информацию о количественном химическом составе сплава марка не содержит. После цифры может стоять индекс раскисленности. Например, Ст6сп - сталь углеродистая обыкновенного качества, спокойная номер 6.

Углеродистые конструкционные качественные стали маркируют двузначным числом, показывающим среднее содержание углерода, выраженное в сотых долях процента. Например, сплав 30 – это сталь углеродистая качественная с содержанием углерода 0,30 %. Индекс раскисленности качественной стали указывают, только если он отличается от спокойной. Например, 08кп - сталь углеродистая конструкционная качественная кипящая, содержащая 0,08 % углерода.

Низкоуглеродистые листовые стали 05, 08, 10 используют, главным образом, для изделий, получаемых холодной штамповкой (холоднодеформируемые стали). Низкоуглеродистые стали 15, 20, 25 чаще применяют для деталей, упрочняемых цементацией (цементуемые стали).

Среднеуглеродистые стали 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 используют для самых разнообразных деталей машиностроения в улучшенном, нормализованном или поверхностно закаленном состоянии (улучшаемые стали).

Высокоуглеродистые стали 70, 75, 80, 85 преимущественно применяют для изготовления силовых упругих элементов - плоских и круглых пружин, рессор, упругих колец и других деталей пружинного типа (рессорно-пружинные стали).

Легированные конструкционные стали маркируют цифрами и буквами. Двузначное число, стоящее в начале марки, соответствует среднему содержанию углерода в сотых долях процента. Буквы указывают на наличие легирующих элементов: А N_2, В - W, Г- Mn, Д- Cu, Е - Se, К - Co, М - Mo, Н - Ni, П - P, С - Si, Т - Ti, Ф - V, Х - Cr, Ю - A1. Число, стоящее после буквы, показывает примерное процентное содержание легирующего элемента, символизируемого этой буквой. Отсутствие числа указывает, что среднее содержание соответствующего элемента не превышает 1,0 %. Буква А в конце марки показывает, что сталь высококачественная, буква Ш – особо высококачественная. Например, сплав марки 20ХН3А - сталь конструкционная высококачественная, содержащая (в среднем) 0,20 % С, 3 %

Ni и до 1,0 % Cr.

Буква А в начале марки указывает, что сталь автоматная, т. е. обладающая хорошей обрабатываемостью резанием. Такие стали имеют повышенное содержание серы. Кроме того, они могут быть дополнительно легированы свинцом, селеном или кальцием. Например, А20 - автоматная углеродистая (~ 0,2 % С) сталь; АС14ХГН - свинцовистая автоматная легированная сталь, содержащая 0,14 % С, легированная свинцом, а также хромом, марганцем и никелем (Cr, Mn и Ni до 1,0 % каждого).

Металлы и сплавы, способные сопротивляться коррозионному воздействию газообразной среды при высоких температурах, называются жаростойкими или окалиностойкими. *Жаростойкими* являются, например, высокохромистые стали 08Х17Т, 15Х25Т, 20Х23Н18.

Металлы и сплавы, способные длительное время сопротивляться деформированию и разрушению при повышенных температурах, называют жаропрочными. *Жаропрочными* являются, например, алюминиевые сплавы АК4-1, АЛ3З, магниевые сплавы МА12, МЛ 19, титановые сплавы ВТЗ-1, ВТ-6, стали 10Х11Н20Т3Р, 45Х14Н14В2М и др.

Мартенситно-стареющие стали - это безуглеродистые высоколегированные сплавы, упрочняющиеся после закалки и старения вследствие выделения интерметаллидных фаз. Например, мартенситно-стареющими являются стали 03Н18К9М5Т, 03Н12К15М10, 03Х11Н10М2Т.

Чугуны. По структуре чугуны подразделяют на доэвтектические, с содержанием углерода С < 4,3 % , эвтектические (С = 4,3 %), заэвтектические (С > более 4,3 %).

В отличие от сталей, чугун широко применяется как конструкционный материал для изготовления фасонных отливок, так как обладает хорошими литейными свойствами.

В высокопрочных чугунах, модифицированных магнием, графит имеет шарообразную форму, что еще больше увеличивает прочность и пластичность. Высокопрочные чугуны могут выдерживать и некоторые ударные нагрузки. В отличие от стали чугуны маркируются не по содержанию углерода, а по механическим свойствам, так как при одинаковом содержании углерода они могут иметь разные свойства.

7.3. Вопросы

1. В поле микроскопа около четверти площади микрошлифа занято перлитом. Сталь какой марки может находиться под микроскопом?

1) 40; 2) 05; 3) 10; 4)20.

2. Какая из указанных сталей относится к заэвтектоидным?

1) Ст1кп; 2) У10АУ; 3) 10пс; 4) А11.

3. Какой из признаков может характеризовать кипящую сталь?

1) низкое содержание кремния; 2) высокая плотность отливки; 2) низкая пластичность; 4) низкое содержание марганца.

4. Какую сталь называют кипящей (например, Ст3кп)?

1) сталь, обладающую повышенной плотностью; 2) сталь, доведенную до температуры кипения; 3) сталь, раскисленную марганцем, кремнием и алюминием; 4) сталь, раскисленную только марганцем.

5. Что является критерием для разделения сталей по качеству?

1) степень раскисления стали; 2) степень легирования стали; 3) содержание в стали серы и фосфора; 4) содержание в стали неметаллических включений.

6. Каково предельное содержание серы и фосфора в высококачественных сталях?

1) S - 0,05 %, P - 0,04 %; 2) S - 0,015 %, P - 0,025 %; 3) S - 0,025 %, P - 0,025 %; 4) S - 0,035 %, P - 0,035 %.

7. Каково предельное содержание серы и фосфора в качественных сталях?

1) S - 0,05 %, P - 0,04 %; 2) S - 0,015 %, P - 0,025 %; 3) S - 0,025 %, P - 0,035 %; 4) S - 0,05 %, P - 0,04 %.

8. К какой категории по качеству принадлежит сталь Ст6сп?

1) к высококачественным сталям; 2) к особовысококачественным сталям; 3) к качественным сталям; 4) к сталям обыкновенного качества.

9. К какой категории по качеству принадлежит сталь 08кп?

1) к сталям обыкновенного качества; 2) к качественным сталям; 3) к высококачественным сталям; 4) к особовысококачественным сталям.

10. Содержат ли информацию о химическом составе марочные обозначения сталей обыкновенного качества, например, Ст4?

1) нет. Число 4 характеризует механические свойства стали; 2) нет;

3) да. В сплаве Ст4 содержится 0,4 % углерода; 4) да. В сплаве Ст4 содержится 0,04 % углерода.

11. Какой из сплавов Ст3сп или сталь 30 содержит больше углерода?

1) Ст3сп; 2) в обоих сплавах содержание углерода одинаково; 3) Сталь 30; 4) для ответа на поставленный вопрос следует состав сплава Ст3сп уточнить по ГОСТ 380-94.

12. Изделия какого типа могут изготавливаться из сталей марок 65, 70?

1) изделия, изготавливаемые глубокой вытяжкой; 2) пружины, рессоры; 3) неответственные элементы сварных конструкций; 4) цементуемые изделия.

13. Каков химический состав стали 20ХН3А?

1) ~ 0,2 % C, не более 1,0 % Cr, ~ 3 % Ni. Сталь высококачественная; 2) ~ 2 % C, не более 1,0 % Cr и N, ~ 3 % Ni; 3) ~ 0,02 % C, ~ 3 % N и ~ по 1 % Cr и Ni; 4) ~ 20 % Cr, не более 1,0 % Ni и около 3 % N.

14. Каков химический состав сплава 5ХНМА?

1) ~ 0,5 % C; не более, чем по 1,0 % Cr, Ni и Mo. Сталь высокого качества; 2) ~ 5 % C; не более, чем по 1,0 % Cr, Ni, Mo и N; 3) ~ 0,05 % C; не более, чем по 1,5 % Cr, Ni и Mo. Сталь высокого качества; 4) ~ 5 % Cr; Ni, Mo и N не более, чем по 1,0 %.

15. Какие стали называют автоматными?

1) стали, предназначенные для изготовления ответственных пружин, работающих в автоматических устройствах; 2) стали, длительно работающие при циклическом знакопеременном нагружении; 3) стали с улучшенной обрабатываемостью резанием, имеющие повышенное содержание серы или дополнительно легированные свинцом, селеном или кальцием; 4) инструментальные стали, предназначенные для изготовления металлорежущего инструмента, работающего на станках-автоматах.

16. К какой группе материалов относится сплав марки А20?

1) к углеродистым инструментальным сталям; 2) к углеродистым качественным конструкционным сталям; 3) к сталям с высокой обрабатываемостью резанием; 4) к сталям обыкновенного качества.

17. К какой группе материалов относится сплав марки АЦ20? Каков его химический состав?

1) конструкционная сталь, содержащая ~ 0,2 % C и легированная N

и Zr; 2) высококачественная конструкционная сталь, содержащая ~ 0,2 % C и ~ 1 % Zr; 3) автоматная сталь. Содержит ~ 0,2 % C, легирована Ca с добавлением Pb и Te; 4) алюминиевый сплав, содержащий ~ 2 % Zn.

18. К какой группе материалов относится сплав марки АС40? Каков его химический состав?

1) высококачественная конструкционная сталь. Содержит около 0,4 % углерода и около 1 % кремния; 2) антифрикционный чугун. Химический состав в марке не отражен; 3) конструкционная сталь, легированная азотом и кремнием. Содержит около 0,4 % углерода; 4) автоматная сталь. Содержит около 0,4 % углерода, повышенное количество серы, легирована свинцом.

№ 19. Даны две марки сталей: 40Х9С2 и 40Х13. Какая из них коррозионностойкая (нержавеющая)?

1) 40Х9С2; 2) 40Х13; 3) ни одна из этих марок сталей не может быть отнесена к коррозионностойким (нержавеющим); 4) обе марки относятся к коррозионностойким (нержавеющим) сталям.

20. Какие металлы называют жаростойкими?

1) металлы, способные сопротивляться часто чередующимся нагреву и охлаждению; 2) металлы, способные сопротивляться коррозионному воздействию газа при высоких температурах; 3) металлы, способные сохранять структуру мартенсита при высоких температурах; 4) металлы, способные длительное время сопротивляться деформированию и разрушению при повышенных температурах.

21. Какие металлы называют жаропрочными?

1) металлы, способные сохранять структуру мартенсита при высоких температурах; 2) металлы, способные сопротивляться коррозионному воздействию газа при высоких температурах; 3) металлы, способные длительное время сопротивляться деформированию и разрушению при повышенных температурах; 4) металлы, способные сопротивляться часто чередующимся нагреву и охлаждению.

22. Какие стали называют мартенситно-стареющими?

1) стали, в которых мартенситно-перлитное превращение протекает при естественном старении; 2) стали, в которых мартенсит образуется как следствие закалки и старения; 3) безуглеродистые высоколегированные сплавы, упрочняющиеся после закалки и старения вследствие выделения

интерметаллидных фаз; 4) высоколегированные аустенитные стали, упрочняемые закалкой и последующей термомеханической обработкой с большими степенями обжатия.

23. К какой группе материалов относится сплав марки У10А? Каков его химический состав?

1) высококачественная углеродистая конструкционная сталь. Содержит около 0,1 % С; 2) высокоуглеродистая сталь. Содержит около 1 % С, легирована N; 3) титановый сплав. Содержит около 10 % Al; 4) высококачественная углерод» стая инструментальная сталь. Содержит около 1 % С.

24. Какова форма графита в чугуне марки КЧ 35-10?

1) пластинчатая; 2) хлопьевидная; 3) в этом чугуне графита нет; 4) шаровидная.

25. Графит какой формы содержит сплав СЧ 40?

1) пластинчатой; 2) шаровидной; 3) хлопьевидной; 4) в сплаве графита нет.

26. Графит какой формы содержится в сплаве ВЧ 50?

1) шаровидной; 2) хлопьевидной; 3) в сплаве графита нет; 4) пластинчатой.

27. Что означает число 10 в марке сплава КЧ 35-10?

1) относительное удлинение в процентах; 2) ударную вязкость в кДж/м^2; 3) временное сопротивление в кгс/мм^2; 4) предел текучести в МПа.

28. Что означает число 40 в марке сплава СЧ 40?

1) предел текучести в МПа; 2) предел прочности при изгибе в кгс/мм^2; 3) ударную вязкость в кДж/м^2; 4) временное сопротивление в кгс/мм^2.

29. Можно ли ковать ковкий чугун?

1) можно; 2) можно, но только в горячем состоянии; 3) нельзя; 4). можно после отжига.

30. Как изменяются механические свойства чугуна при выделении графита?

1) улучшаются от пластинчатой к хлопьевидной и шаровидной; 2) ухудшаются от пластинчатой к хлопьевидной и шаровидной; 3) не зависят; 4). улучшаются от хлопьевидной к пластинчатой и шаровидной.

7.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Неверно. В этом случае перлитом было бы занято половина площади микрошлифа.

2) Неверно. В этом случае перлитом было бы занято всего 6 % площади микрошлифа.

3) Неверно. В этом случае перлитом было бы занято немногим более 12 % площади микрошлифа.

4) Правильно.

2. 1) Неверно. Ст1 кп - кипящая сталь 1 обыкновенного качества. По равновесной структуре - она доэвтектоидная.

2) Правильно.

3) Неверно, 10пс - полуспокойная низкоуглеродистая качественная конструкционная сталь. По равновесной структуре она - доэвтектоидная.

4) Неверно. А11 - автоматная сталь. По равновесной структуре она - доэвтектоидная.

3. 1) Правильно.

2) Неверно. В кипящих сталях много газовых пузырьков, поэтому они образуют наименее плотные отливки.

3) Неверно. Марганец в количествах, характерных для нелегированных сталей, не снижает пластичности.

4) Неверно. Кипящие стали - это стали, раскисленные одним Mn. Значит его содержание не может быть очень низким.

4. 1) Кипящие стали как раз обладают пониженной плотностью.

2) Неверно.

3) Сталь, раскисленную марганцем, кремнием и алюминием, называют спокойной.

4) Правильно.

5. 1) Неверно. По степени раскисления стали подразделяют на кипящие, полуспокойные и спокойные.

2) Неверно. По степени легированности стали подразделяют на низко-, средне- и высоколегированные.

3) Правильно.

4) Безусловно, неметаллические включения очень сильно влияют на свойства стали, однако не они являются критерием для разделения сталей по качеству.

6. 1) Неверно. Таково предельное содержание S и P в сталях обыкновенного качества.

2) Неверно. Таково предельное содержание S и P в особо высококачественных сталях.

3) Правильно.

4) Неверно. Таково предельное содержание S и P в качественных сталях.

7. 1) Неверно. Таково предельное содержание S и P в особо высококачественных сталях.

2) Неверно. Не более, чем по 0,025 % серы и фосфора содержат высококачественные стали.

3) Правильно.

4) Неверно. Таково предельное содержание S и P в сталях обыкновенного качества.

8. 1) Неверно. В конце марки высококачественных сталей должна находиться буква А.

2) Неверно. В конце марки сталей особо высокого качества должна находиться буква Ш.

3) Неверно.

4) Правильно.

9. 1) Неверно. Стали обыкновенного качества маркируют буквами Ст и номерами с 0 по 6, например Ст3.

2) Правильно.

3) Неверно. В конце марки высококачественных сталей должна находиться буква А.

4) Неверно. В конце марки сталей особо высокого качества.

10. 1) Действительно, информацию о химическом составе марка сплава Ст4 не содержит, но 4 - это лишь ее номер.

2) Правильно.

3) Неверно. Число в начале марки обозначает содержание углерода в десятых долях процента в инструментальных сталях.

4) Неверно. Число в начале марки обозначает содержание углерода в сотых долях процента в качественных (и более высокого качества) конструкционных сталях.

11. 1) Среднее содержание углерода в стали марки 30 видно по марочному обозначению, а в Ст3 - нет.

2) Среднее содержание углерода в стали марки 30 видно по марочному обозначению, а в Ст3 - нет.

3) Среднее содержание углерода в стали марки 30 видно по марочному обозначению, а в Ст3 - нет.

4) Правильно.

12. 1) Неверно. Из углеродистых сталей для глубокой вытяжки пригодна лишь сталь 05 кп.

2) Правильно.

3) Неверно. Сварка материалов со столь высоким содержанием углерода сложна и требует специальных приемов.

4) Неверно. Цементуемые изделия изготавливают из цементуемых (низкоуглеродистых) сталей.

13. 1) Правильно.

2) Неверно. В конструкционных сталях число в начале марки показывает содержание углерода в сотых долях процента. Числа после букв - содержание соответствующих элементов в процентах. Азота в этой стали нет.

3) Неверно. В конструкционных сталях число в начале марки показывает содержание углерода в сотых долях процента. Числа после букв - содержание соответствующих элементов в процентах. Азота в этой стали нет.

4) Неверно. Концентрацию элементов в сплавах указывают числа, стоящие не перед буквами, а после них. Азота в этой стали нет.

14. 1) Правильно.

2) Неверно. 5ХНМА - инструментальная сталь. В таких сплавах число в начале марки указывает на содержание углерода в десятых долях процента. Азота в этой стали нет.

3) Неверно. 5ХНМА - инструментальная сталь. В таких сплавах число в начале марки указывает на содержание углерода в десятых долях процента.

4) Неверно. Концентрацию элементов в сплавах указывают числа,

стоящие не перед буквами, а после них. Азота в этой стали нет.

15. 1) Неверно. Такие стали называют пружинными.

2) Неверно. Такие стали называют сталями с повышенной цикловой прочностью.

3) Правильно.

4) Неверно.

16. 1) Неверно. Углеродистые инструментальные стали маркируют буквой У, например, У12.

2) Неверно. Углеродистые качественные конструкционные стали - не содержат в марке букву А.

3) Правильно.

4) Неверно. Стали обыкновенного качества маркируют числами от 0 до 6, например Ст3.

17. 1) В этой стали, действительно, содержится около 0,2 % углерода, но ни азота, ни циркония в ней нет.

2) Неверно. Высококачественные стали имеют букву А в конце марки. К тому же в данном сплаве нет Zr.

3) Правильно.

4) Неверно.

18. 1) Этот ответ противоречит принципам маркировки сталей.

2) Неверно. Марки антифрикционных чугунов начинаются с АЧ.

3) В марках конструкционных сталей в начале находится число, обозначающее содержание углерода в сплаве.

4) Правильно.

19. 1) Неверно. В стали 40Х9С2 количество хрома не достигло величины, когда сплав становится электроположительным.

2) Правильно.

3) Неверно. 40Х13 - коррозионно-стойкая (нержавеющая) сталь мартенситного класса.

4) Неверно. В стали 40Х9С2 количество хрома не достигло величины, когда сплав становится электроположительным.

20. 1) Неверно. Такие металлы называют разгаростойкими, или устойчивыми против термической усталости.

2) Правильно.

3) Неверно. Такие металлы называют красностойкими.

4) Неверно. Такие металлы называют жаропрочными.

21. 1) Неверно. Такие металлы называют красностойкими.

2) Неверно. Такие металлы называют жаростойкими.

3) Правильно.

4) Неверно. Такие металлы называют разгаростойкими или устойчивыми против термической усталости.

22. 1) Неверно. Мартенситно-перлитное превращение в сталях протекает при отпуске.

2) Неверно. Мартенсит в сталях образуется при закалке, но не при старении.

3) Правильно.

4) Неверно. Такие сплавы называют метастабильными аустенитными сталями (трипсталями).

23. 1) Неверно. Рассматриваемый сплав не относится к конструкционными сталям. Он содержит значительно больше углерода.

2) Это высокоуглеродистая сталь, но в ней нет азота.

3) Неверно.

4) Правильно.

24. 1) Неверно. КЧ 35-10 - ковкий чугун. Графит пластинчатой формы содержат серые чугуны.

2) Правильно.

3) Неверно. КЧ35-10 - ковкий чугун. Отсутствует же графит в белых чугунах.

4) Неверно. КЧ35-10 - ковкий чугун. Графит шаровидной формы содержат высокопрочные чугуны.

25. 1) Правильно.

2) Неверно. Графит шаровидной формы содержится в сплавах, маркируемых буквами ВЧ.

3) Неверно. Графит хлопьевидной формы содержится в сплавах, маркируемых буквами КЧ.

4) Неверно.

26. 1) Правильно.

2) Неверно. Графит хлопьевидной формы содержится в сплавах,

маркируемых буквами КЧ.

3) Неверно.

4) Неверно. Графит пластинчатой формы содержится в сплавах, маркируемых буквами СЧ.

27. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно. В марке сплава КЧ 35-10 временное сопротивление показывает число 35.

4) Неверно.

28. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

29. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

30. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Неверно.

7.5. Задачи

7.1. Зубчатые колеса в зависимости от условий работы и возникающих напряжений можно изготавливать из стали обыкновенного качества, качественной углеродистой и легированной с различным содержанием легирующих элементов. Выберите, руководствуясь техническими и экономическими соображениями, сталь для изготовления колес диаметром 50 мм и высотой 30 мм с пределом текучести не ниже 360-380 МПа. Укажите термическую обработку колес, механические свойства и структуру выбранной стали в готовом изделии и для сравнения механические свойства и структуру сталей 45 и 40ХН после улучшающей термической обработки.

7.2. Выберите сталь для червячных фрез, обрабатывающих

конструкционные стали твердостью НВ 220-240. Объясните причины, по которым для этого назначения нецелесообразно использовать углеродистую сталь У12 с высокой твердостью (63-65 HRC). Рекомендуйте режим термической обработки фрез из выбранной быстрорежущей стали, приняв, что фрезы изготовлены из проката диаметром 40 мм. Опишите получаемую структуру и возможный комплекс эксплуатационных свойств.

7.3. Выберите марку стали для изготовления крепежных болтов, если их обрабатывают на быстроходных станках-автоматах, на которых надо обеспечить максимальную производительность резания и получить высокую чистоту обрабатываемой поверхности; болты не воспринимают в конструкции значительных нагрузок, но работают в агрессивной среде. Укажите марку, химический состав, механические свойства и назначение стали этого типа. Объясните влияние отдельных элементов, присутствующих в этой стали, на формирование заданного комплекса эксплуатационных свойств. Приведите для сравнения состав, структуру и механические свойства цветного сплава высокой обрабатываемости, применяемого для аналогичного назначения. Объясните, в каких случаях следует применять тот или иной из выбранных материалов и почему.

7.4. Выберите сталь для изготовления валов диаметром 50 мм для двух редукторов. По расчету сталь для одного из валов должна иметь предел текучести не ниже 350 МПа, а для другого - не ниже 500 МПа. Укажите: состав и марку выбранных сталей; режим термической обработки; структуру после каждой операции термической обработки; механические свойства в готовом изделии. Можно ли применять углеродистую сталь обыкновенного качества для изготовления валов требуемого сечения и прочности?

7.5. Выберите сталь для шарикоподшипника, работающего в агрессивной среде (10 % растворе азотной кислоты), назовите режим упрочняющей термической обработки и получаемую структуру. Объясните, почему сталь ШХ15 непригодна для таких условий работы. Приведите химический состав выбранной стали. Обоснуйте возможность изготовления деталей крупногабаритных шарикоподшипников, работающих в неагрессивных средах, из цементуемых легированных сталей.

7.6. Козырьки и черпаки землечерпательных машин, изготовленные из углеродистой' стали, быстро изнашиваются при интенсивной работе по

грунту. Применение легированной стали с аустенитной структурой, обладающей повышенной износостойкостью при ударных нагрузках, позволяет повысить стойкость козырьков и черпаков в несколько раз. Приведите химический состав стали, применяемой для этого, а также режим термической обработки, структуру свойства и объясните причины повышенной износостойкости в указанных условиях эксплуатации.

7.7. Коленчатые валы диаметром 80 мм, работающие при повышенных напряжениях, изготавливают на одном заводе из качественной углеродистой стали а на другом те же валы, но диаметром 120 мм - из легированной стали. Какие стали следует применять для этой цели? Укажите их химический состав и марки. Рекомендуйте режим закалки и отпуска и сопоставьте механические свойства, которые могут обеспечить углеродистая качественная и легированная стали выбранных марок для валов указанных диаметров.

7.8. Щеки и шары машин для дробления руды и камней работают в условиях повышенного абразивного износа, сопровождаемого ударами. Выберите сталь для изготовления щек и шаров, укажите ее химический состав и свойства, в том числе обрабатываемость резанием на станках и поведение в работе. Рекомендуйте наиболее эффективный технологический процесс изготовления и режим термической обработки щек и шаров. Укажите структуру стали в готовом изделии.

7.9. Выберите сталь для изготовления тяжелонагруженных коленчатых валов диаметром 60 мм: временное сопротивление должно быть не ниже 750 МПа. Рекомендуйте состав и марку стали, режим термической обработки. Определите структуру и механические свойства после закалки и после отпуска. Предложите и обоснуйте режим упрочняющей обработки для повышения износостойкости опорных шеек вала.

7.10. Завод изготавливает среднемодульные цилиндрические зубчатые колеса из стали 45 и упрочняет их способом индукционной закалки при поверхностном нагреве. Однако впадина зубьев при такой обработке не закаливается, что сокращает срок службы колес. Рекомендуйте: марку стали и обработку, обеспечивающую закалку зубчатых колес по всему контуру, а следовательно, с упрочнением зубьев по всей их поверхности; приведите для сравнения состав углеродистой или низколегированной стали, пригодной для изготовления зубчатых колес, упрочняемых химико-термической обработкой.

7.11. Завод должен изготовить три вала для двигателей. Они должны иметь временное сопротивление растяжению не ниже 750 МПа. Однако первый вал имеет диаметр 35 мм, второй 50 мм и третий 120 мм. Выберите сталь (стали) для изготовления валов, обоснуйте сделанный выбор, рекомендуйте режим термической обработки и укажите структуру и механические свойства в готовом вале.

7.12. В шестернях, изготовленных из стали 40Х и обработанных на твердость HRC 40-42, в процессе эксплуатации при повышенных напряжениях, в том числе динамических нагрузках, возникали трещины при низких температурах в условиях севера. Объясните причины, вызывающие этот брак, и рекомендуйте марку хладостойкой улучшаемой стали, вязкость которой мало уменьшается при понижении температуры с +20 °С и до –60 °С.

7.13. На заводе изготавливали валы двигателей внутреннего сгорания диаметром 60 мм из стали с пределом текучести 200-230 МПа и относительным удлинением 20-22 %. В дальнейшем был получен заказ на валы такого же диаметра для более мощных двигателей. Завод должен был гарантировать для валов одного типа предел текучести $\sigma_{0,2}$ не ниже 600 МПа и ударную вязкость не ниже 600 кДж/м^2, а для валов другого типа $\sigma_{0,2}$ не ниже 800 МПа и ударную вязкость не ниже 800 кДж/м^2. Укажите стали, режим термической обработки, структуру и механические свойства после окончательной обработки. Укажите, как изменится отношение $\sigma_{0,2}/\sigma_в$ у выбранных сталей в результате выполнения улучшающей термической обработки.

7.14. Поршневые пальцы диаметром 30 мм и длиной 50 мм должны иметь по условиям работы вязкую сердцевину и твердую поверхность; хорошо сопротивляющуюся износу (HRC 58...62). Укажите режим обработки, обеспечивающий получение требуемых свойств, если пальцы изготавливают массовыми партиями из сталей 20 и 45. Приведите химический состав сталей 20 и 45 и сравните продолжительность выдержки изделий из стали 20 при цементации и из стали 45 при других способах обработки для получения поверхностного твердого слоя толщиной 0,8..1,0 мм. Укажите цикл всех операций термической обработки поршневых пальцев из этих сталей и механические свойства в сердцевине изделия из сталей 20 и 45.

7.15. Шестерни подвергаются действию знакопеременных и ударных

нагрузок и должны иметь максимально однородные свойства в продольном и поперечном направлениях. Их изготавливают в зависимости от типа двигателя из стали с временным сопротивлением растяжению ($\sigma_в$) 700-750 МПа и 900-950 МПа. Ударная вязкость (KCU) в обоих случаях должна быть не ниже 700-800 кДж/м^2. Выберите сталь для шестерен обоих типов, приведите состав, марку, режим термической обработки, микроструктуру и механические свойства в готовом изделии. Укажите последовательность операций ее изготовления, начиная с получения стали на машиностроительном заводе. Рекомендуйте операцию, позволяющую создать в стали однородное строение, а следовательно, однородные свойства в продольном и поперечном направлениях.

7.16. Детали холодильных машин во избежание хрупкого разрушения изготавливают из сталей и сплавов с пониженным порогом хладноломкости и соответственно повышенной вязкостью при низких температурах. Рекомендуйте состав стали для деталей холодильных машин, работающих при температурах от –70 °С и до –259 °С (в среде жидкого водорода). Объясните, какие различия в структуре, а следовательно, и в составе должны быть между этими сталями.

7.17. Завод изготавливает два типа зубчатых колес диаметром 60 мм и высотой 80 мм для работы в одинаковых условиях. Предел текучести ($\sigma_{0,2}$) должен быть не ниже 540-550 МПа. Однако второй тип зубчатых колес отличается от первого более сложной формой зуба и поэтому шлифование их после упрочняющей обработки исключено. Выберите сталь для зубчатых колес указанных двух типов и приведите состав и марку, учитывая технологические особенности термической обработки и необходимость предотвращения деформации и образования трещин при закалке. Обоснуйте сделанный выбор стали, рекомендуйте режим термической обработки и укажите механические свойства в готовом изделии.

7.18. Для изготовления пружин приборов завод применяет сталь 60С2ХА, обрабатываемую на твердость HRC 40-44. Однако пружины из этой стали при нагреве даже в области климатических температур изменяют свои характеристики в связи с изменением модуля упругости. Это снижает точность работы приборов. Рекомендуйте сплав для изготовления пружин, модуль упругости которого почти не изменяется при температурах от –50 до

+100 °С. Сопоставьте режим упрочняющей обработки стали 60С2ХА и выбранного сплава.

7.19. Червяк редуктора диаметром 35 мм можно изготовить из цементуемой и нецементуемой стали. Обоснуйте, в каких случаях целесообразно применять цементуемую и в каких случаях нецементуемую сталь Временное сопротивление растяжению ($\sigma_в$) в сердцевине детали должно быть 600-700 МПа. Выберите марку цементуемой и нецементуемой углеродистой качественной стали. Укажите химический состав, рекомендуйте режим химико-термической и термической обработки и сопоставьте механические свойства стали обоих типов в готовом изделии.

7.20. Детали гидронасосов, в частности клапаны, изготавливали из стали 40Х. Однако в дальнейшем в новых более мощных насосах, в которых скорость движения потока жидкости резко возросла, поверхность клапанов из стали 40Х быстро разрушалась. Объясните причины, по которым это изменение условий службы вызвало разрушение клапанов, и какие явления этому способствовали. Рекомендуйте состав стали, стойкий в условиях большой скорости потока для насосов по перекачке морской воды.

7.21. Цех изготавливает зубчатые колеса диаметром 50 мм из цементуемой стали. Выберите сталь для двух зубчатых колес, работающих в условиях износа и удара при повышенных напряжениях. Укажите химический состав выбранных сталей, рекомендуйте режим термической обработки, объясните назначение каждой операции термической обработки и ее влияние на структуру и свойства стали. Рекомендуйте толщину цементованого слоя для данной детали.

7.22. Котлы многих тепловых электростанций работают при давлении пара 50 МПа и температуре 600 °С. В этом случае для котлов нужны стали с высоким сопротивлением ползучести. Укажите марку, химический состав и структуру стали, пригодной для работы в указанных условиях. Сравните характеристики выбранной стали со свойствами другой стали, обычно применяемой для котлов, работающих при 300-400 °С.

7.23. Станкостроительный завод изготавливает шпиндели токарных станков. Шпиндели работают с большой скоростью вращения в условиях повышенного износа, поэтому твердость в поверхностном слое должна быть HRC 58-62. Выберите стали для шпинделей диаметром 40 и 75 мм. Приведите

состав и марку выбранной стали и рекомендуйте режим обработки, обеспечивающий получение заданной твердости в поверхностном слое в условиях скоростной термической обработки. Укажите структуру стали в поверхностных слоях и в сердцевине шпинделя, механические свойства сердцевины после окончательной термической обработки.

7.24. Сталь, применяемая для пароперегревателей котлов высокого давления, должна сохранять повышенные механические свойства при длительных нагрузках при температурах порядка 500 °С и иметь достаточно высокую пластичность для возможности выполнения холодной пластической деформации (гибки, завальцовки и т п.) при сборке котла. Укажите химический состав, микроструктуру и механические свойства стали при комнатной и при повышенной температурах (400... 500 °С). Объясните основные отличия выбранной стали от углеродистой котельной стали.

7.25. Многие детали установок расщепления нефти, в частности трубы печей, подвержены действию высоких температур. Выберите составы сталей для труб, не испытывающих больших нагрузок, но нагревающихся в работе до 250 и 600 °С. Укажите режимы термической обработки и микроструктуры сталей.

7.26. Палец шарнира диаметром 30 мм работает на изгиб и срез; он должен, кроме того, обладать высокой износостойкостью на поверхности и высоким сопротивлением хрупкому и вязкому разрушению в сердцевине. Выберите углеродистую сталь, приведите ее состав и марку, рекомендуйте режим химико-термической и термической обработки и укажите структуру, механические свойства в сердцевине и твердость на поверхности после окончательной обработки. Укажите также желательную толщину твердого поверхностного слоя.

7.27. Лопатки реактивных и турбореактивных двигателей работают в окислительной среде при высоких температурах (до 800-900 °С). Сплавы, из которых изготавливают эти детали, должны обладать повышенной коррозионной стойкостью (окалиностойкостью), высоким сопротивлением ползучести, длительной прочностью при указанных температурах. Выберите состав сплава, укажите методы термической обработки и приведите изменение структуры и свойств после основных операций этой обработки.

7.28. Выберите материал для изготовления черпаков землеройных

машин, работающих в условиях абразивного изнашивания и динамических нагрузок. Расшифруйте химический состав, охарактеризуйте механические и технологические свойства и приведите режим термической обработки стали, объясните причины ее самоупрочнения при работе.

7.29. Многие детали паровых турбин, например лопатки, работают при повышенных температурах (400-500 °С) и в условиях воздействия пара и влаги. Сталь для этого назначения должна обладать устойчивостью против ползучести и коррозии. Выберите марку стали для лопаток и укажите ее химический состав, а также режим термической обработки и микроструктуру в готовом изделии. Приведите механические свойства выбранной стали при 20° и 500° С; сравните их по свойствам с углеродистой качественной сталью, имеющей одинаковое содержание углерода.

7.30. Заводу нужно изготовить зубчатые колеса сложной формы диаметром 50 мм и высотой 100 мм. Они должны иметь твердость на поверхности не ниже HRC 58-60, а в сердцевине временное сопротивление растяжению ($\sigma_в$) не ниже 400 МПа и ударную вязкость (KCU) не ниже 500-600 кДж/м^2. Завод изготовил первую партию зубчатых колес из углеродистой цементуемой стали, однако некоторые зубчатые колеса получили деформацию при закалке. Выберите сталь и рекомендуйте режим термической обработки после цементации для получения заданных механических свойств и предупреждения брака по деформации. Укажите структуру стали в сердцевине и поверхностном слое после окончательной обработки и причины, вызывающие деформацию при закалке.

8. ЦВЕТНЫЕ МЕТАЛЛЫ

8.1. Методические указания

Цветные металлы составляют довольно большую группу веществ из Периодической системы элементов, однако наибольшее распространение в промышленности получили такие металлы, как медь, алюминий, магний, титан, олово, свинец, цинк и никель. Эти металлы используются как

легирующие добавки в производстве специальных сталей и сплавов, так и самостоятельно, главным образом в виде сплавов. Кратко рассмотрите особенности применения этих металлов в различных отраслях техники.

Разберите принципы маркировки медных и алюминиевых сплавов. Как правило, сплавы цветных металлов отличаются хорошими литейными свойствами, однако их прочностные свойства невысоки. Поэтому следует обратить внимание на возможность их повышения путем термической обработки. Большое внимание надо уделять при этом процессу старения, поскольку в одном случае он полезен, а в другом - нежелателен. Разберитесь, для каких сплавов упрочняющая обработка обязательна и почему. Ознакомьтесь с использованием порошков цветных металлов в качестве сырья для производства изделий методами порошковой металлургии.

8.2. Краткие теоретические сведения

Цветные металлы являются более дорогими и дефицитными по сравнению с черными металлами, однако область их применения в технике непрерывно расширяется.

Медь и ее сплавы

Медь – металл красновато-розового цвета, имеет ГЦК решетку, полиморфных превращений нет. Медь характеризуется высокой теплопроводностью и электропроводимостью, пластичностью и коррозионной стойкостью, технологична: хорошо паяется и сваривается, прокатывается в тонкие листы и ленту, из неё получают тонкую проволоку.

Механические свойства меди в большой степени зависят от ее состояния и в меньшей от содержания примесей: временное сопротивление разрыву (предел прочности) 150-200 МПа, относительное удлинение – 40-50 %. После пластической деформации прочность меди повышается до 300-350 МПа, а пластичность понижается до 8-6 %.

В качестве конструкционного материала медь в машиностроении применяется редко, но очень широко используется в электротехнике и электронике. В машиностроении в основном используют сплавы на основе меди – латуни и бронзы.

Латунь – это сплав меди с другими элементами, из которых цинк

является основным.

Бронза – это сплав меди с другими элементами, из которых цинк не является основным.

По технологическому принципу сплавы делятся на деформируемые и литейные, их обозначения имеют различия.

Алюминий и его сплавы

Алюминий – металл серебристо-белого цвета и кристаллизируется в ГЦК решетке, полиморфных превращений нет. Алюминий обладает малой плотностью, хорошей теплопроводностью и электропроводимостью, высокой пластичностью и коррозионной стойкостью, так как на его поверхности образуется плотная пленка оксида Al_2O_3. Алюминий обладает высокой пластичностью δ = 40 % и низкой прочностью $\sigma_в$ = 100 МПа. В результате наклепа прочность алюминия повышается до 160-180 МПа, но при этом пластичность уменьшается до 8-6 %.

Технический алюминий хорошо сваривается. Из него изготавливают строительные конструкции, малонагруженные детали машин, цистерны для перевозки нефти и нефтепродуктов, посуду, используют в качестве электротехнического материала для кабелей, проводов.

Еще шире в промышленности используются сплавы алюминия. По технологическим свойствам сплавы делятся на три группы: деформируемые, литейные и порошковые.

Деформируемые сплавы подразделяют на упрочняемые и не упрочняемые термической обработкой. Упрочняющая термическая обработка заключается в закалке с температуры 500 ^oC и естественном старении. Максимальная прочность достигается через 4-5 суток.

Титан и его сплавы

Титан – металл серебристо-белого цвета, имеет модификации: α-титан с ГЦК решеткой и β-титан с ОЦК. решеткой. Температура α – β превращения 882 °С. Для технического титана, с суммарным содержанием примесей 0,8 %, предел прочности составляет 650 МПа, а относительное удлинение – 20 %. Титан обладает высокой коррозионной стойкостью, хорошо куется и сваривается, но имеет низкую теплопроводность.

Свойства титана сильно зависят от чистоты. Газы – азот и кислород – повышают прочность титана, но сильно снижают пластичность. Углерод

снижает горячую пластичность, обрабатываемость резанием, свариваемость. Технический титан хорошо обрабатывается давлением. Из него изготовляют листы, трубы, проволоку, поковки.

По структурному признаку титановые сплавы делят на три группы: α-сплавы, β-сплавы и (α + β)-сплавы. Титановые сплавы технологичны при литье, пластическом деформировании, однако плохо обрабатываются резанием.

Для снятия напряжений, возникающих при механической обработке, штамповке и т. п., детали из титановых сплавов подвергают отжигу в интервале температур 550-620 °С. Для снятия наклепа отжиг выполняют при более высокой температуре - 700-800 °С.

Титановые сплавы обладают высокой прочностью 700-1200 МПа и пластичностью 12-25 %. Для повышения износостойкости сплавы подвергают азотированию. Твердость азотированного слоя 1100-1200 HV.

Титановые сплавы имеют ряд преимуществ по сравнению с другими: сочетание высокой прочности с хорошей пластичностью, малая плотность, обеспечивающая высокую удельную прочность, хорошая жаропрочность, до 600-700 ºС, высокая коррозионная стойкость в агрессивных средах.

Магний и его сплавы

Магний – металл серебристо-белого цвета, кристаллизуется в плотно упакованной ГПУ решетке. Полиморфных превращений не имеет.

Магний отличается низкой плотностью, хорошей обрабатываемостью резанием и способностью воспринимать ударные и гасить вибрационные нагрузки. Теплопроводность магния в 1,5, а электропроводимость – в 2 раза ниже, чем у алюминия.

При нагреве магний активно окисляется и при температуре выше 623 °С на воздухе воспламеняется. Это затрудняет плавку и разливку магния и его сплавов. Порошок, тонкая лента, мелкая стружка магния представляют большую опасность, так как самовозгораются на воздухе при обычных температурах, горят с выделением большого количества теплоты и излучением ослепительно яркого света.

Литой магний имеет крупнокристаллическую структуру и низкие механические свойства: прочность 110-120 МПа и пластичность 6-8 %.

Чистый магний из-за низких механических свойств как

конструкционный материал практически не применяется. Он используется в пиротехнике, в химической промышленности для синтеза органических препаратов, в металлургии различных металлов и сплавов как раскислитель, восстановитель и легирующий элемент.

В промышленности используют сплавы магния с алюминием, цинком, марганцем и реже с титаном. Алюминий и цинк улучшают механические свойства, марганец повышает коррозионную стойкость, титан способствует измельчению зерна. Достоинством магниевых сплавов является высокая удельная прочность. Временное сопротивление отдельных сплавов достигает 250-400 МПа. Временное сопротивление и особенно предел текучести магниевых сплавов значительно повышаются с помощью термомеханической обработки и легирования цирконием.

Магниевые сплавы хорошо обрабатываются резанием, легко шлифуются и полируются. Они удовлетворительно свариваются.

К недостаткам магниевых сплавов относятся низкая коррозионная стойкость, плохие литейные свойства, склонность к газонасыщению, окислению и воспламенению при их приготовлении.

Деформация магниевых сплавов осуществляется при температурах 250-400 °С. Упрочняющей термической обработке деформируемые магниевые сплавы не подвергают, их отжигают при температурах 340-400 °С в течение 3-12 ч.

Механические свойства литейных сплавов в большой степени зависят от величины зерна. Для измельчения зерна их перед разливкой модифицируют мелом, магнезитом, цирконием, хлорным железом. Отливки магниевых сплавов для снятия остаточных напряжений подвергают отжигу при температурах 200-250 °С. Упрочняющая термическая обработка литейных магниевых сплавов состоит из закалки от температуры 380 °С (МЛ4) или 415 °С (МЛ5), охлаждения на воздухе и последующего старения при температуре 175 °С в течение 15-16 ч. После такой обработки сплав МЛ5 получает предел прочности 220 МПа при относительном удлинении 5 %. Магниевые сплавы применяют в авиационной и радиотехнической промышленности.

8.3. Вопросы

1. Какими из приведенных в ответах свойств характеризуется медь?

1) низкой $T_{пл}$ (651 °С), низкой теплопроводностью, низкой плотностью (1740 кг/м^3); 2) низкой $T_{пл}$ (327 °С), низкой теплопроводностью, высокой плотностью (11 600 кг/м^3); 3) высокой $T_{пл}$ (1083 °С), высокой теплопроводностью, высокой плотностью (8940 кг/м^3). 4) высокой $T_{пл}$ (1665 °С), низкой теплопроводностью, низкой плотностью (4500 кг/м^3).

2. Каков тип кристаллической решетки меди?

1) В модификации α-Г. П. У., в модификации β-О. Ц. К; 2) кубическая гранецентрированная; 3) Гексагональная плотноупакованная; 4) кубическая объемноцентрированная.

3. Что такое латунь?

1) сплав меди с цинком; 2) сплав железа с никелем; 3) сплав меди с оловом; 4) сплав алюминия с кремнием.

4. Каково максимальное содержание цинка в латунях, имеющих практическое значение?

1) 45 %; 2) 39 %; 3) 52 %; 4) 18 %.

5. Как влияет увеличение концентрации цинка на прочность и пластичность α-латуней?

1) обе характеристики снижаются; 2) обе характеристики возрастают; 3) прочность увеличивается, пластичность снижается; 4) прочность снижается, пластичность растет.

6. Как влияет на прочность и пластичность (α + β)-латуней увеличение концентрации цинка?

1) прочность и пластичность снижаются; 2) прочность и пластичность увеличиваются; 3) прочность увеличивается, пластичность снижается; 4) прочность снижается, пластичность увеличивается.

7. Как называется сплав марки Л62? Каков его химический состав?

1) литейная сталь, содержащая 0,62 % С; 2) литейный алюминиевый сплав, содержащий 62 % А1; 3) сплав меди с цинком, содержащий 62 % Cu; 4) сплав бронзы с медью, содержащий 62 % бронзы.

8. Как называется сплав марки ЛК8О-3? Каков его химический состав?

1) литейный алюминиевый сплав (силумин); Состав устанавливают по ГОСТу; 2) латунь. Содержит примерно 80 % Zn, 3 % Cd, остальное - Cu;

3) литейная эвтектоидная сталь. Содержит примерно 0,8 С и ~ 3 % Со; 4) латунь. Содержит примерно 80 % Си, 17 % Zn и 3 % Si.

9. Как называют сплавы меди с другими элементами (кремнием, алюминием, оловом, бериллием и т. д.)?

1) бронзы; 2) латуни; 3) инвары; 4) баббиты.

10. Каковы основные характеристики алюминия?

1) малая плотность; низкая теплопроводность; низкая коррозионная стойкость; 2) высокая плотность; высокая теплопроводность; высокая коррозионная стойкость; 3) малая плотность; высокая теплопроводность; высокая коррозионная стойкость; 4) малая плотность; высокая теплопроводность; низкая коррозионная стойкость.

11. Каков тип кристаллической решетки алюминия?

1) кубическая гранецентрированная; 2) в модификации α-ГПУ, в модификации β-ОЦК; 3) кубическая объемно-центрированная; 4) гексагональная плотноупакованная.

12. Как зависит максимально достижимая прочность сплавов системы Al-Cu от температуры старения?

1) прочность не зависит от температуры старения; 2) чем выше температура, тем выше прочность; 3) чем выше температура, тем ниже прочность; 4) прочность достигается закалкой, старение же только снимает возникшие при закалке напряжения.

13. Чем объяснить, что в сплавах системы Al-Cu при искусственном старении после достижения максимальной прочности наступает разупрочнение?

1) выделением стабильной фазы $CuAl_2$; 2) образованием зон Гинье-Престона; 3) распадом мартенситной структуры; 4) упорядочением твердого раствора.

14. Что называют возвратом для естественно состаренных алюминиевых сплавов?

1) для алюминиевых сплавов возврат - это синоним отжига; 2) переход сплава в свежезакаленное состояние под действием кратковременного нагрева; 3) переход искаженной под действием закалочных напряжений кристаллической решетки в равновесное состояние; 4) переход пластически деформированной кристаллической решетки в равновесное

состояние.

15. К какой группе принадлежат алюминиевые сплавы типа АМг, например, АМг6?

1) к литейным сплавам; 2) к деформируемым сплавам, неупрочняемым термообработкой; 3) к деформируемым высокопрочным сплавам; 4) к деформируемым сплавам, упрочняемым термообработкой.

16. Как называется сплав марки Д16? Каков его химический состав?

1) баббит, содержащий 16 % олова; 2) латунь, содержащая 16 % цинка; 3) сталь, содержащая 16 % меди; 4) деформируемый алюминиевый сплав, упрочняемый термообработкой, - дюралюмин. Состав устанавливают по стандарту.

17. Какой из алюминиевых сплавов, марок АМг2Н1 или АМг5оч, обладает большей прочностью?

1) АМг2Н1 прочнее в связи с деформационным упрочнением; 2) АМг5оч прочнее в связи с большей легированностью; 3) прочность обоих сплавов примерно одинакова; 4) на поставленный вопрос можно ответить только при одинаковых сплавах или при равных чистоте и виде обработки.

18. К какой группе металлов относится титан?

1) к благородным; 2) к редкоземельным; 3) к тугоплавким; 4) к легкоплавким.

19. Какие кристаллические решетки имеют полиморфные модификации титана?

1) α-ОЦК, β-ГПУ; 2) α-ГЦК, β –ОЦК; 3) α -ГПУ, β –ОЦК; 4) α -ГПУ, β -ГЦК.

20. Ti имеет две аллотропические модификации: α - с ГПУ решеткой и β - с решеткой ОЦК. Какая из модификаций высоко- или низкотемпературная более пластична?

1) пластичность не зависит от типа кристаллической решетки. Ее величина является опытной характеристикой; 2) β-Ti более пластичен; 3) в обеих модификациях титан одинаково пластичен; 4) в низкотемпературной модификации титан более пластичен.

21. Как влияют на температуру полиморфного превращения титана алюминий, молибден, олово?

1) Sn - повышает, A1 - снижает, Mo - практически не влияет; 2) Al -

повышает, Mo - снижает, Sn - практически не влияет; 3) Mo - повышает, Sn - снижает, Al - практически не влияет; 4) Al - повышает, Sn - снижает, Mo - практически не влияет.

22. Каковы основные качественные характеристики магния?

1) низкая жесткость, низкая плотность, высокие демпфирующие способности, низкая пластичность; 2) высокая жесткость, низкая плотность, низкие демпфирующие способности, высокая пластичность; 3) высокая жесткость, низкая плотность, высокие демпфирующие способности, высокая пластичность; 4) низкая жесткость, низкая плотность, высокие демпфирующие способности, высокая пластичность.

23. Каков тип кристаллической решетки магния?

1) в низкотемпературной модификации - ГПУ, в высокотемпературной – ОЦК; 2) объемно-центрированная кубическая (К8); 3) в низкотемпературной модификации - ОЦК, в высокотемпературной ГЦК; 4) гексагональная плотно-упакованная (Г12).

24. Каковы (ориентировочно) режимы закалки сплавов на основе магния?

1) температура около 100 °С, выдержка до 40 ч, охлаждение в растворах солей; 2) температура около 200 °С, выдержка до 12 ч, охлаждение в масле или на воздухе; 3) температура около 700 °С, выдержка 15 ... 30 мин, охлаждение в холодной воде; 4) температура около 400 °С, выдержка до 24 ч, охлаждение в горячей воде или на воздухе.

25. Каков механизм старения, приводящего к упрочнению закаленных магниевых сплавов?

1) образование в пересыщенном твердом растворе зон Гинье-Престона; 2) полная рекристаллизация структуры сплава; 3) выделение из пересыщенного твердого раствора дисперсных интерметаллидных фаз; 4) образование дополнительных объемов мартенсита.

26. Чем объясняется длительность выдержек, присущая магниевым сплавам, при температурах термообработки?

1) низкой скоростью диффузионных процессов; 2) дефектностью кристаллической структуры сплавов; 3) типом кристаллической решетки магния; 4) высоким уровнем энергии связи атомов в решетке.

27. Какие свойства магниевых сплавов позволяют эффективно

применять их как конструкционные материалы?

1) хорошая обрабатываемость резанием; 2) высокая абсолютная прочность; 3) низкая плотность; 4) высокие удельные механические свойства.

28. Какой сплав обозначают маркой МЛЗТ2?

1) литейный магниевый сплав МЛЗ, дополнительно легированный редкоземельными элементами; 2) закаленный и искусственно состаренный литейный магниевый сплав МЛЗ; 3) отожженный магниевый сплав МЛЗ; 4) магниевый сплав, содержащий 3 % Li и 2 % Ti.

29. Каковы основные признаки подшипниковых сплавов?

1) сплав имеет однофазную структуру; 2) сплав обладает высокой твердостью; 3) сплав имеет многофазную структуру, состоящую из мягкой основы и твердых включений или из твердой основы и мягких включений; 4) сплав имеет мелкозернистое строение.

30. Что такое баббит?

1) латунь с двухфазной структурой; 2) литейный алюминиевый сплав; 3) антифрикционный сплав; 4) бронза, упрочненная железом и марганцем.

8.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Неверно. В выбранном ответе приведены характеристики Mg.

2) Неверно. В выбранном ответе приведены характеристики Pb.

3) Правильно.

4) Неверно. В выбранном ответе приведены характеристики Ti.

2. 1) Медь не обладает полиморфизмом.

2) Правильно.

3) Неверно.

4) Неверно.

3. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Сплав меди с оловом (кроме Sn дополнительно могут быть другие легирующие) называется оловянистой бронзой.

4) Сплавы алюминия с кремнием называются силуминами.

4. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Неверно.

5. 1) Неверно.

2) Правильно.

3) С увеличением концентрации Zn пластичность α-латуней возрастает.

4) С увеличением концентрации Zn прочность α-латуней возрастает.

6. 1) Прочность α + β латуней с увеличением в сплаве концентрации цинка увеличивается.

2) Пластичность (α + β)-латуней с увеличением концентрации цинка уменьшается.

3) Правильно.

4) Неверно.

7. 1) Неверно. У литейных сталей буква Л стоит в конце марки.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно. Бронза сама является сплавом на основе меди.

8. 1) Неверно. Литейные сплавы алюминия маркируют буквами АЛ. В частности марки силуминов АЛ2, АЛ4, АЛ9.

2) Это действительно латунь, но состав сплава расшифрован неверно.

3) Неверно. В марках литейных сталей буква Л стоит в конце. В остальном литейные стали маркируют по общим правилам маркировки сталей.

4) Правильно.

9. 1) Правильно.

2) Неверно. Латуни - это сплавы меди с цинком.

3) Неверно. Инвар - это железоникелевый сплав с очень низким температурным коэффициентом линейного расширения.

4) Неверно. Баббиты - это антифрикционные сплавы на основе олова или свинца.

10. 1) Действительно, алюминий обладает малой плотностью. Прочие свойства выбраны неверно.

2) Алюминий относится к группе легких металлов, поэтому он не может обладать высокой плотностью.

3) Правильно.

4) Алюминий обладает высокой коррозионной стойкостью, так как на

его поверхности образуется плотная окисная пленка.

11. 1) Правильно.

2) Алюминий не обладает полиморфизмом.

3) Неверно.

4) Неверно.

12. 1) От температуры старения зависит характер образующихся упрочняющих фаз, которые определяют прочность сплава.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Повышение прочности сплавов системы Al-Cu достигается старением закаленных сплавов.

13. 1) Правильно.

2) Неверно. Образование зон Гинье-Престона как раз обеспечивает упрочнение сплавов.

3) Неверно. В алюминиевых сплавах мартенситные структуры не образуются.

4) Неверно. Обычно упорядочение твердых растворов сопровождается повышением твердости с одновременным снижением пластичности. Упорядочение для алюминиевых сплавов не характерно.

14. 1) Неверно. Отжиг приближает сплав к равновесию, а возврат - удаляет.

2) Правильно.

3) Структуру, полученную в результате возврата, едва ли можно назвать равновесной.

4) Этот ответ характеризует возврат - стадию рекристаллизационного отжига сталей, но не естественно состаренных алюминиевых сплавов.

15. 1) Неверно.

2) Правильно.

3) Неверно.

4) Неверно.

16. 1) Баббиты (оловянные и некоторые свинцово-оловянные) маркируют буквой Б, например, Б16 (16 % олова).

2) Латуни маркируют буквой Л, после которой указывается

содержание в сплаве меди.

3) В сталь медь в таком количестве не вводят.

4) Правильно.

17. 1) Деформация действительно упрочняет сплав, но можно ли утверждать, не опираясь на экспериментальные данные, что он стал прочнее сплава иного химического состава.

2) АМг5оч действительно содержит больше упрочняющих легирующих элементов. Но ведь сплав АМг2 подвергнут упрочняющей обработке.

3) Для подобного утверждения, не опирающегося на экспериментальные данные, нет оснований.

4) Правильно.

18. 1) К благородным металлам относятся серебро, золото, металлы группы платины. К группе благородных относят также медь.

2) Неверно. В группу редкоземельных металлов входят лантаноиды и сходные с ними иттрий и скандий.

3) Правильно.

4) Температура плавления титана выше $T_{пл}$ железа. Следовательно, Ti никак не может относиться к легкоплавким металлам.

19. 1) Неверно.

2) Титан в модификации α имеет гексагональную плотноупакованную кристаллическую решетку.

3) Правильно.

4) Титан в модификации β имеет объемно-центрированную кубическую кристаллическую решетку.

20. 1) Неверно. Пластичность материала определяется числом плоскостей легкого скольжения в кристаллической решетке.

2) Правильно.

3) Неверно. Решетка ГПУ имеет меньше плоскостей легкого скольжения, чем ОЦК. Следовательно, в состоянии α титан менее пластичен.

4) Неверно. Низкотемпературная модификация имеет ГПУ кристаллическую решетку, имеющую меньше плоскостей легкого скольжения, чем ОЦК и, следовательно, менее пластичную.

21. 1) В этом ответе влияние всех элементов указано неверно.

2) Правильно.

3) В этом ответе влияние всех элементов указано неверно.

4) В этом ответе влияние олова и молибдена указано неверно.

22. 1) Правильно.

2) Магний, действительно, легкий металл. Остальные характеристики указаны неверно.

3) Магний имеет низкую жесткость и низкую пластичность.

4) Магний обладает низкой пластичностью (относительное удлинение 6... 8 %).

23. 1) Неверно. Магний не имеет полиморфных модификаций.

2) Неверно.

3) Неверно. Магний не имеет полиморфных модификаций.

4) Правильно.

24. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно. Температура 700 °С превышает температуру плавления магния.

4) Правильно.

25. 1) Некоторые магниевые сплавы упрочняются при выделении фаз Гинье-Престона. Однако это не основной механизм упрочнения.

2) Неверно. Рекристаллизационный отжиг и старение - это различные виды термообработки.

3) Правильно.

4) Неверно. При термической обработке магниевых сплавов мартенсит не образуется.

26. 1) Хорошая обрабатываемость резанием или любым иным технологическим методом может лишь способствовать использованию материала, но не является решающим фактором его применимости.

2) Неверно. Магниевые сплавы не обладают высокими абсолютными прочностными свойствами.

3) Низкая плотность безотносительно к прочностным характеристикам не может определять эффективность использования металла в качестве конструкционного материала.

4) Правильно.

27. 1) Многие металлы, несмотря на отсутствие полиморфизма, являются весьма пластичными материалами, например, медь, алюминий, серебро и другие.

2) Правильно.

3) Конечно, увеличение количества дефектов кристаллического строения сверх некоторой величины ведет к снижению пластичности металла. Но в данном случае речь идет о природной характеристике магния.

4) Неверно. Мерилом энергии связи атомов в кристаллической решетке является температура плавления вещества. Для магния этот показатель невелик.

28. 1) Неверно. Обозначение Т2 относится к термической обработке, а не к химическому составу.

2) Неверно. Закалка и старение для получения максимальной твердости в магниевых сплавах обозначается Т6.

3) Правильно.

4) Неверно. Обозначения ЛЗ и Т2 не имеют отношения к легирующим элементам.

29. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

30. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

8.5. Задачи

8.1. Многие изделия изготавливают из латуни вытяжкой из листа в холодном состоянии. Иногда в изделиях обнаруживаются трещины, возникающие без приложения внешних нагрузок (так называемое «сезонное растрескивание»).

Объяснить сущность этого явления и указать способы его предупреждения. Подобрать марку латуни, не подверженной сезонному

растрескиванию. Кроме того, описать структуру, механические и технологические свойства α- и (α + β')-латуней.

Решение задачи. Латуни в зависимости от содержания цинка и структуры можно разделить на три класса:

1. α -латуни ..... до 39,5 % Zn
2. (α + β')-латуни .... 39,5-45,7 % Zn
3. β'-латуни..... 45,7-51 % Zn

Увеличение содержания цинка изменяет структуру и свойства латуни (рис. 8.1). Увеличение содержания цинка до определенного предела повышает пластичность и прочность. Пластичность достигает максимальных значений при 30-32 % Zn, а прочность – при 40 %. При дальнейшем увеличении содержания цинка прочность и пластичность снижаются.

Это изменение свойств определяется свойствами соответствующих фаз, образующихся при введении цинка:

α -фаза – твердый раствор типа замещения, пластичность и прочность которой возрастают по мере увеличения содержания цинка;

β'-фаза – твердый раствор на базе электронного соединения с объемно-центрированной кубической решеткой и упорядоченным расположением атомов;

β'-фаза отличается повышенной хрупкостью и твердостью, поэтому образование β'-фазы снижает вязкость и повышает твердость. При нагреве выше 450 °С β'-фаза превращается в неупорядоченный твердый раствор β, отличающийся большей пластичностью, чем β'-фаза. Из диаграммы состояния видно, что (+ β')-латуни приобретают при таком нагреве однородную структуру β-твердого раствора, а следовательно, и большую пластичность. Эти свойства фаз определяют технологический процесс изготовления изделий из различных сортов латуни, а также их назначение. Изделия из α-латуни изготавливают главным образом холодной или горячей холодной деформацией; обработка резанием не дает достаточно чистой поверхности. Изделия из (α + β')-латуни изготавливают горячей (прессование, штамповка) или холодной деформацией (но без вытяжки) или обработкой резанием.

Изделия из α- или (α + β')- латуней применяют в отожженном или в наклепанном состоянии, поскольку термическая обработка (закалка и отпуск)

не дает заметного эффекта. В наклепанном состоянии (т. е. после холодной деформации) латунь обладает большей прочностью при пониженной пластичности (см. рис. 8.1).

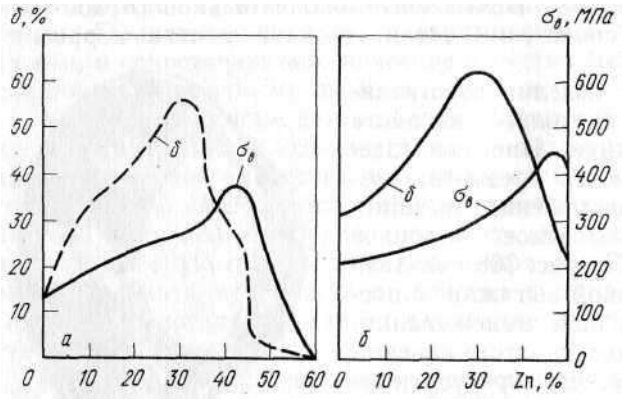


Рис. 8.1. Механические свойства латуни в зависимости от содержания цинка: *а* – литая латунь; б – катаная и отожженная латунь

В результате последующего отжига прочность сплава понижается, но пластичность возрастает (рис. 8.2).

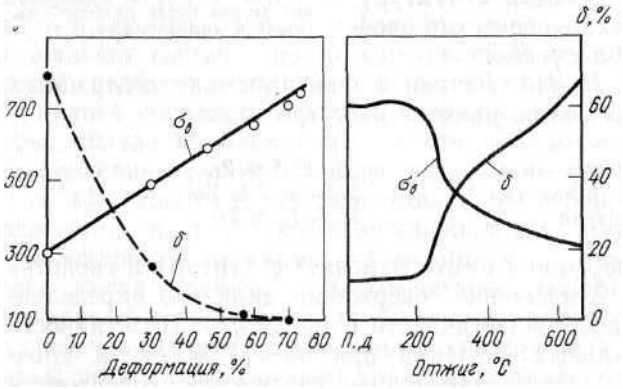


Рис. 8.2. Механические свойства латуни Л70 в зависимости от степени холодной деформации и температуры отжига. П. д. – после деформации

Холодная деформация латуни создает в изделии остаточные напряжения. Они возникают и в результате местной холодной деформации (при изгибе деталей, чеканке, развальцовке и т. п.). При вылеживании или эксплуатации в латунных изделиях иногда возникают трещины. «Сезонное растрескивание» наблюдается главным образом в латунях с содержанием более 20 % Zn и отчетливо обнаруживается, например, в полых изделиях, прутках и т. д. Сезонное растрескивание усиливается в химически активных

средах, особенно в парах аммиака, ртутных солей, ртути, мыльной воде и т. п. Образование трещин является результатом совместного действия остаточных напряжений, созданных холодной деформацией (наиболее опасны растягивающие напряжения) и химически активных сред.

Для предохранения от сезонного растрескивания нужен отпуск с нагревом до 200-300 °С; это снимает большую часть остаточных напряжений и незначительно снижает прочность. Но в условиях изготовления и монтажа конструкций с применением развальцовки, гибки и т. д. не всегда можно избежать возникновения местных, даже незначительных деформаций, а следовательно, и сезонного растрескивания. В таких случаях применяют более дорогие (и имеющие меньшую прочность), но не склонные к сезонному растрескиванию латуни Л96 и Л90.

Механические свойства и состав этих латуней (после прокатки и отжига), а также широко применяемой латуни Л68 и типичной (α + β')-латуни ЛС59-1 приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

Состав и механические свойства латуней

Структурный класс сплава	Марка	Cu, % (остальное Zn)	Примеси (Fe, Si и др.), %	Механические свойства (не менее)	
				σ, МПа	δ, %
α-латунь	Л96	95-97	≤ 0,30	230 270	35
	Л90	89-90	≤ 0,30	280 300	38
	Л80	79-81	≤ 0,30		45
	Л68	67-70	≤ 0,30		55
(α + β')- латунь	ЛС 59-1	58-61	0,75	350 400*	30 15*

		Pb 0,8-1,9			

* Для отожженных лент и листов, а также для прессованных прутков.

Латуни Л96 и Л90 обладают высокой теплопроводностью. Латуни можно заменить алюминиевой бронзой, не склонной к сезонному растрескиванию и обладающей аналогичными значениями прочности и пластичности.

8.2. Червяк редуктора для уменьшения коэффициента трения часто изготавливают из стали, а венец колес – из сплава на медной основе. Указать марку и состав сплава для венца, колеса, обладающего высокими антифрикционными свойствами и временным сопротивлением $\sigma_в$ не ниже 250 МПа. Объяснить, как изменяются механические свойства сплава в зависимости от условий литья (в кокиль или в землю). Указать для сравнения состав, термическую обработку, структуру и механические свойства стали для изготовления червяка редуктора диаметром 30 мм, если временное сопротивление должно быть не ниже 700 МПа.

8.3. Многие детали изготавливают из листа способом глубокой вытяжки. Выбрать состав цветного сплава, обладающего высокой пластичностью и хорошей способностью принимать вытяжку; привести его состав и структуру. Указать режим и назначение термической обработки, применяемой между отдельными операциями вытяжки для повышения пластичности, а также механические свойства после вытяжки и после термической обработки. Привести состав стали, применяемой для глубокой вытяжки, и сопоставить механические свойства выбранного цветного сплава с аналогичными свойствами стали.

8.4. Некоторые винты, болты, гайки и т. п. изготавливают из латуни на быстроходных станках – автоматах. Латунь, обладающая высокой вязкостью и пластичностью, не получает достаточно чистой поверхности при обработке резанием. Выбрать латунь, применение которой позволяет получить чистую поверхность и высокую производительность при обработке сплава резанием. Сравнить механические свойства и структуру выбранного сплава с аналогичными характеристиками латуни высокой вязкости и пластичности.

8.5. Арматура котлов, работающих в условиях пресной воды и пара под

давлением до 2,5 МПа (краны, вентили и т. п.), а также трубки и корпуса приборов (например, манометров), работающие в аналогичных условиях, изготавливают из цветных сплавов, стойких против коррозии.

Указать состав, способ изготовления, структуру и механические свойства: сплава с хорошими литейными свойствами и хорошей обрабатываемостью резанием для изготовления арматуры; сплава высокой пластичности в холодном состоянии для изготовления трубок и корпусов приборов.

8.6. Некоторые детали арматуры турбин, котлов и гидронасосов и т. п., работающие во влажной атмосфере и изготавливаемые массовыми партиями литьем, имеют сложную форму. В процессе литья должна быть обеспечена максимальная точность размеров. Указать состав применяемого для этой цели цветного сплава, его структуру и механические свойства; привести способ литья, позволяющий создать требуемую высокую точность отливки с минимальной последующей механической обработкой. Привести химический состав стали для форм, применяемых для литья выбранного сплава, и указать режим термической обработки, а также структуру стали в готовом изделии.

8.7. Многие детали приборов и оборудования, подверженные действию морской воды, изготавливают из цветного сплава путем холодной деформации в несколько операций. Подобрать сплав, стойкий против действия морской воды и привести его химический состав. Указать режим промежуточной термической обработки выбранного сплава и привести его механические свойства после деформации и термической обработки. Сравнить состав стали, стойкой против действия морской воды; привести режим ее термической обработки, механические свойства и структуру.

8.8. Трубки в паросиловых установках должны быть стойки против коррозии. Подобрать марку сплава на медной основе, пригодного для изготовления трубок и не содержащего дорогих элементов; привести состав выбранного сплава. Указать способ изготовления трубок и сравнить механические свойства выбранного сплава, получаемые после окончательной обработки, с механическими свойствами стали, стойкой против коррозии в тех же средах.

8.9. В химическом машиностроении применяют специальные латуни для изготовления литьем коррозионностойких тяжело нагруженных деталей.

Выбрать марку сплава с временным сопротивлением не ниже 450 МПа, привести его состав, механические свойства, структуру и указать, в каких средах такой сплав является устойчивым. Сопоставить механические свойства латуни выбранного состава с аналогичными свойствами латуни ЛС59-1 и указать область применения латуни ЛС59-1.

№ 8.10. Необходимо изготовить зубчатые колеса из сплава, стойкого против действия воды и пара и обладающего небольшим коэффициентом трения. Сплав должен иметь временное сопротивление не ниже 350 МПа. Объяснить, почему в таких случаях не применяют нержавеющую сталь, стойкую против коррозии в условиях воды и пара. Указать состав и структуру цветного сплава, не содержащего дорогих элементов и пригодного для изготовления подобных зубчатых колес.

8.11. Вкладыши коренных и шатунных подшипников двигателей внутреннего сгорания изготавливают из бронзы, отличающейся высокими антифрикционными свойствами и не содержащей особо дорогих элементов. Подобрать состав сплава и привести способ изготовления из него деталей, указать его строение и механические свойства, а также причины, по которым подобный сплав хорошо работает в условиях износа. Для сравнения привести состав и строение других антифрикционных сплавов, обладающих более низкими температурами плавления и применяемых для заливки подшипников.

8.12. Каркас самолета, рассчитанного на полет с дозвуковыми скоростями и воспринимающего значительные нагрузки, изготавливают часто из легкого сплава с пределом прочности не ниже 400 МПа. Привести состав и плотность сплава, а также режим термической обработки, структуру. Указать его механические свойства после каждой операции термической обработки, объяснив, какие превращения в сплаве соответствуют повышению прочности. Сопоставить механические свойства выбранного сплава 386 с механическими свойствами хромоникелевой нержавеющей стали. При сопоставлении учесть, что детали должны обладать максимальной удельной прочностью при данной температуре.

8.13. Для труб и других деталей, работающих в горячей азотной кислоте и в растворах хлористых солей, необходимы металлические сплавы, имеющие значительно большую стойкость, чем нержавеющие стали. Выбрать марку

сплава и охарактеризовать его стойкость против коррозии в сравнении со сталью 12Х18Н10Т.

8.14. Вращающиеся детали многих установок реактивной техники, нагревающихся до 500-600 °С, необходимо изготовлять из сплавов с меньшей плотностью (~4,5 т/м^3), чем у стали. Выбрать марку сплава и сравнить его жаропрочность (длительную прочность для 1000 ч) при 500 °С с аналогичными свойствами дюралюмина и жаропрочной стали 12Х18Н9Т.

8.15. Бесшовные трубы опреснительных установок, подающие морскую воду, нагретую до 80-120 °С, целесообразно для повышения их долговечности изготовлять из сплава со значительно большей стойкостью против коррозии в этих условиях, чем у нержавеющей стали. Выбрать марку сплава и сопоставить его свойства со свойствами нержавеющей стали 12Х18Н9Т.

8.16. Нержавеющие стали, в том числе высоколегированные аустенитного класса, не имеют достаточной стойкости в соляной кислоте. Выбрать металл с плотностью ~ 4,5 т/м^3 для баков и трубопроводов, обладающий высокой стойкостью в указанных условиях, и сравнить механические свойства выбранного сплава с аналогичными свойствами нержавеющей стали 12Х18Н10Т.

8.17. Головки цилиндров поршневых автомобильных двигателей, работающих при повышенных температурах, изготавливают из легких сплавов литьем. Привести химический состав сплава, применяемого для этой цели, указать роль отдельных компонентов сплава, его структуру и механические свойства.

8.18. Поршни многих двигателей внутреннего сгорания изготавливают из деформируемого сплава на алюминиевой основе с добавками легирующих элементов, способствующих сохранению механических свойств при нагреве до 250-300 °С. Указать состав и свойства сплава на алюминиевой основе, применяемого для этой цели, а также рекомендовать состав сплава на основе титана, обладающего повышенной прочностью при температурах до 400-500 °С и, таким образом, пригодного для изготовления поршней, работающих при более высоких температурах.

8.19. Сварные топливные баки, от материала которых не требуется высоких механических свойств, изготавливают в авиапромышленности из

легких листовых сплавов, обладающих повышенной стойкостью против коррозии, пластичностью и способностью хорошо принимать сварку. Рекомендовать состав сплава, пригодного для данного назначения, указать его структуру и механические свойства. Для сравнения привести химический состав, а также режим термической обработки и структуру стали, стойкой против коррозии в указанных средах.

8.20. Уменьшение массы поршня в двигателях внутреннего сгорания дает повышение мощности. Рекомендовать состав сплава с минимальной плотностью, пригодного для изготовления поршней. Указать химический состав сплава, его механические свойства и режим обработки. Сопоставить плотность и механические свойства выбранного сплава с аналогичными характеристиками сплавов на алюминиевой основе, применяемых для изготовления поршней.

9. НЕОРГАНИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

9.1. Методические указания

Для неметаллических материалов необходимо знание основных свойств, позволяющих правильно оценить техническую и экономическую целесообразность применения того или иного материала.

Обратите внимание на принципиальное отличие композиционного материала, заключающееся в сочетании разнородных материалов с четкой границей раздела между ними. В связи с тем, что композиционный материал обладает свойствами, которыми не может обладать ни один из его компонентов в отдельности, такие материалы становятся весьма перспективными в различных областях новой техники. Укажите свойства композитов в зависимости от вида матрицы и формы, размеров и взаимного расположения наполнителя. Уясните возможность использования композиционных материалов в качестве жаропрочных материалов и способы повышения их жаропрочности.

Обратите внимание на особенности строения полимеров, которые определяют их механические и физико-химические свойства. Классификацию полимеров рассмотрите с учетом особенностей их состава и строения.

Пластические массы - искусственные материалы, получаемые на основе

полимеров. Изучите различные группы пластических масс, их свойства и области применения. Следует помнить, что свойства пластмасс практически полностью определяются их составом: связующим, наполнителем, красителем, пластификатором и др. Уясните их преимущества по сравнению с черными и цветными металлами, области применения.

Как технический материал резина отличается от других материалов высокими эластичными свойствами, что связано со свойствами самой основы резины - каучука. Уясните состав резины, способы получения и влияние различных добавок на ее свойства. Подробно рассмотрите влияние порошковых и органических наполнителей на свойства резины, изучите физико-механические свойства и области применения резины различных марок.

Обратите внимание на внутреннее строение неорганического стекла. Разберитесь в изменении свойств стекла в зависимости от состава. Рассмотрите стеклокристаллические материалы (ситаллы) и их отличие от стекла минерального. При изучении керамических материалов обратите внимание на отличие технической керамики от обычной. Разберитесь в химическом и фазовом составах технической керамики, ее свойствах и области применения.

Разберитесь с группами твёрдых сплавов, их структурой и назначением. Обратите внимание на рабочие температуры твёрдых сплавов и их основные механические свойства. Изучите основные группы режущей керамики, ее особенности и эксплуатационные характеристики, область применения. При изучении сверхтвёрдых материалов обратите внимание на их теплостойкость, ограничивающую их применение в качестве инструментального материала.

9.2. Краткие теоретические сведения

Композиционными называют материалы, состоящие из основы (матрицы) и конструктивных элементов (наполнителей), разделенных четко выраженной границей и свойства которых резко отличаются.

Матрица объединяет все компоненты композиционного материала в единое целое. От свойств матрицы зависят технологические режимы получения композиционных материалов и эксплуатационные характеристики

– рабочая температура, сопротивление усталостному разрушению, плотность и удельная прочность.

В технике используют композиционные материалы с металлическими, неметаллическими матрицами и полиматричные материалы, в которых чередующиеся слои матрицы имеют различный состав. В качестве металлической основы широко применяют алюминий, магний, никель, титан, сталь. Неметаллическая основа может быть полимерной, углеродной, керамической.

В матрице равномерно распределены компоненты, наполняющие и упрочняющие композиционный материал - *упрочнители и армирующие материалы*. Материалы, используемые в качестве наполнителей, должны обладать высоким модулем упругости, высокой прочностью, термостойкостью и химической инертностью по отношению к матрице.

По геометрическим параметрам армирующие материалы могут быть нуль-мерными, одномерными и двумерными, т. е. порошки, волокна и слои. В зависимости от формы наполнителя композиты делят на дисперсно-упрочненные, волокнистые, слоистые и комбинированные.

Композиционные материалы по удельной прочности, жесткости, прочности при высокой температуре, сопротивлению усталостному разрушению и другим свойствам значительно превосходят многие металлические сплавы. Их преимущество заключается в том, что уровень свойств заранее проектируется и реализуется в процессе изготовления, при этом материалу придают форму готовой детали (изделия).

Полимеры – высокомолекулярные соединения, молекула которых состоит из большого числа повторяющихся групп атомов, имеющих одинаковое строение (мономеров).

Полимеры получают в результате синтеза из низкомолекулярных соединений методами полимеризации или поликонденсации.

Свойства полимерных материалов определяются их химическим составом и строением макромолекул. По строению различают следующие основные типы макромолекул: линейные, разветвленные, пространственные.

Полимерные материалы с линейной или разветвленной структурой макромолекул высокоэластичны. Они способны обратимо размягчаться при нагреве и затвердевать при охлаждении без участия химических реакций.

Такие материалы называют *термопластами.* Этот процесс можно повторять многократно.

Полимеры с пространственными макромолекулами имеют повышенную тепловую и химическую стойкость. Образование подобной структуры и связанное с ним необратимое затвердевание материала протекает при участии химических реакций. Такие полимеры, а также пластмассы на их основе называют *термореактивными.* Перевести однажды затвердевшую термореактивную смолу в вязкотекучее или высокоэластичное состояние нельзя.

Пластмасса – искусственный материал на основе природных или синтетических полимеров, способный принимать заданную форму при нагревании под давлением и устойчиво сохранять ее после охлаждения.

По составу пластмассы подразделяют на *простые*, в состав которых входят только полимеры, и *сложные*, в которые помимо полимеров входят другие вещества (наполнители, пластификаторы, стабилизаторы, отвердители, красители и др.).

Наполнители позволяют получать пластмассы с разными свойствами. Наполнители могут быть как органическими, так и неорганическими веществами. По структуре наполнители бывают порошкообразными, волокнистыми, листовыми и газообразными. Пластмассы с ориентированным волокнистым наполнителем и с листовым наполнителем (слоистые пластмассы) обладают ярко выраженной анизотропией механических свойств. По назначению пластмассы подразделяют на ряд групп: конструкционные, электроизоляционные, химически стойкие, фрикционные, тепло- и звукоизоляционные, светотехнические и др.

Резина – высокоэластичный материал, изготовленный из каучуков (натуральных и синтетических) с добавками серы и других связующих элементов.

*Каучу*к – это природный полимер с линейной либо разветвлённой структурой. Недостатком каучука является его невысокая эластичность. Для получения высокоэластических свойств каучук переводят в редкосетчатый полимер посредством вулканизации.

В зависимости от количества серы степень сетчатости и свойства резины изменяются. До 5 % S образуется редкосетчатая резина с высокой

эластичностью; при 30 % S сетка становится настолько густой, что материал теряет эластичность – образуется эбонит.

Для увеличения прочности и износостойкости в состав резины входят наполнители (сажи, оксид кремния или титана). Обозначаются резины начальными буквами каучуков, являющихся их основой: НК – натуральный каучук, СК – синтетический каучук.

Прочность различных резин колеблется от 5-8 МПа до 40-42 МПа, а эластичность от 700-800 % до 350-400 %, соответственно.

По назначению резины подразделяют на резины общего и специального назначения. Резины общего назначения работают в воде, на воздухе, в слабых растворах щелочей и кислот. Температурный интервал их работы от –50 до +130 ^{o}C. К резинам общего назначения относят НК, СК. Из них изготавливают шины, ремни, транспортерные ленты, изоляцию кабелей, различные резинотехнические изделия.

Резины специального назначения делят на маслобензостойкие, химически стойкие, теплостойкие и химически термостойкие.

Неорганическое стекло – твёрдый, прозрачный материал с аморфной структурой. Основным компонентом стекол является оксид кремния с добавками различных оксидов. В зависимости от добавок меняются свойства и получаются различные сорта стёкол. Например, оксиды Al_2O_3, TiO_2 повышает прочность, термо- и химическую стойкость стёкол, а оксиды щелочных и щелочно-земельных металлов снижает указанные свойства, но облегчает технологичность их производства.

Стекло – термопластичный материал, при нагреве его вязкость уменьшается, оно постепенно размягчается и становится жидкостью. Стекла отличаются высокой хрупкостью. Механическая прочность стекол на сжатие составляет 400-700 МПа (на растяжение – 50-100 МПа). Для повышения механических свойств используют различные способы их поверхностного упрочнения путём химической, термической и термомеханической обработок.

Ситалл – это поликристаллический непрозрачный материал, полученный путем направленной кристаллизации стекол специального состава. В отличие от неорганических стекол, свойства которых определяются химическим составом, для ситаллов главным фактором, регулирующим свойства, является структура, определяемая количеством и

дисперсностью добавляемой кристаллической фазы. При изготовлении ситаллов добавляют либо оксиды (SiO_2, Al_2O_3, NaF), либо чистые металлы (Ag, Au, Pt).

Ситаллы имеют высокую твердость, предел прочности при изгибе 150-500 МПа, высокую термо- (700-800 °С) и химическую стойкость. Интервал рабочей температуры от –50 до +700 °С. Из ситаллов изготовляют подшипники для работы без смазки при температуре 540 °С, поршни и цилиндры двигателей внутреннего сгорания, химическую посуду, подложки тонкопленочных и гибридных интегральных схем.

Керамика – неорганический материал, получаемый из минеральных масс в процессе высокотемпературного (1200 – 2500 °С) обжига.

Керамические материалы изготавливают на основе глины или синтезированных материалов различного химического и фазового состава. Такая керамика содержит минимальное количество или совсем не содержит глины. Основными компонентами технической керамики являются оксиды и бескислородные соединения металлов.

Твердые сплавы - это инструментальные материалы, состоящие из частиц карбидов тугоплавких металлов (WC, TiC, TaC), объединенных металлическим связующим компонентом (кобальтом), изготавливаемые методом порошковой металлургии. Твердые сплавы обладают высокой твердостью (до 90-92 HRA), износостойкостью, красностойкостью (900-1100 °С).

Существуют сплавы следующих групп: вольфрамовые, титановольфрамовые и титанотанталовольфрамовые.

Вольфрамовые сплавы, например ВК2, ВК8, ВК15, ВК25, состоят из карбидов вольфрама и металлического кобальта (число, стоящее в марке сплава после буквы К, указывает на процентное содержание кобальта). Чем больше в сплаве карбида вольфрама, тем сплав тверже, но тем более он хрупок. Вязкость сплава, дающая возможность воспринимать ударные нагрузки, обеспечивается кобальтом.

Титановольфрамовые сплавы, например Т5К10, Т15К6, Т30К4, изготавливают из карбидов титана, карбидов вольфрама и металлического кобальта. В марке сплава число, стоящее после буквы Т, указывает на содержание в шихте сплава карбида титана в процентах; число после К -

содержание кобальта. Содержание карбида вольфрама определяют по разности. Так, в шихте твердого сплава Т5К10 содержится 5 % TiC, 10 % Co и 85 % WC. Карбид титана обладает еще более высокой твердостью, чем карбид вольфрама. Чем больше в сплаве TiC (точнее твердого раствора карбида вольфрама в карбиде титана), тем большей твердостью и износостойкостью обладает сплав. Наиболее тверд сплав Т30К4. Сплавы с большим содержанием кобальта (Т15К6, Т5К10) менее тверды, но обладают большей эксплуатационной прочностью. Применяют титановольфрамовые сплавы главным образом для обработки сталей.

Титанотанталовольфрамовые сплавы изготавливают из карбидов титана, карбидов тантала, карбидов вольфрама и металлического кобальта. Например, шихта сплава ТТ7К12 содержит 7 % карбидов титана и тантала, 81 % карбида вольфрама и 12 % кобальта. Применяют титанотанталовольфрамовые сплавы для черновой (например, сплав ТТ7К12) и чистовой (например, сплав ТТ8К6) обработки труднообрабатываемых материалов (жаропрочных сталей, титановых сплавов и др.).

9.3. Вопросы

1. Какой материал называют композиционным?

1) материал, составленный различными компонентами, разделенными в нем ярко выраженными границами; 2) материал, структура которого представлена матрицей и упрочняющими фазами; 3) материал, состоящий из различных полимеров; 4) материал, в основных молекулярных цепях которого содержатся неорганические элементы, сочетающиеся с органическими радикалами.

2. Какие композиционные материалы называют дисперсно-упрочненными?

1) материалы, упрочненные частицами второй фазы, выделившимися при старении; 2) материалы, упрочненные полностью растворимыми в матрице частицами второй фазы; 3) материалы, упрочненные нуль-мерными наполнителями; 4) материалы, упрочненные одномерными наполнителями.

3. Как зависит прочность дисперсно-упрочненных композиционных материалов от содержания наполнителя?

1) если наполнитель по прочности превосходит матрицу, то увеличение его содержания приведет к повышению прочности, в противном случае - к понижению; 2) с увеличением содержания наполнителя прочность растет; 3) прочность мало зависит от содержания наполнителя, но определяется его дисперсностью; 4) прочность зависит в основном от расстояния между частицами наполнителя и их дисперсности.

4. Каким методом получают дисперсно-упрочненные композиционные материалы?

1) методами обработки давлением; 2) самораспространяющимся синтезом; 3) методами порошковой металлургии; 4) литьем под давлением.

5. Как влияет увеличение объемного содержания волокнистого наполнителя на прочность композиционного материала?

1) прочность не зависит от содержания наполнителя; 2) влияние на прочность неоднозначно; 3) прочность растет; 4) прочность снижается.

6. Как влияет в волокнистом композиционном материале соотношение модулей упругости наполнителя и матрицы $(E_н/E_м)$ на распределение нагрузки между волокнами и матрицей?

1) соотношение $(E_н/E_м)$ не влияет на распределение нагрузки; 2) чем больше $(E_н/E_м)$, тем больше нагружена матрица; 3) влияние $(E_н/E_м)$ на распределение нагрузки неоднозначно; 4) чем больше $(E_н/E_м)$, тем более нагружено волокно.

7. Что такое борсик?

1) ткань специального плетения из волокон бора; 2) волокна бора с выращенными на них поперечными кристаллами карбида кремния; 3) волокнистый композиционный материал, упрочненный волокнами бора; 4) волокна бора, пропитанные силикатным стеклом.

8. К каким материалам относится САП-1?

1) к дисперсно-упрочненным композиционным материалам на алюминиевой основе; 2) к термореактивным пластмассам с порошковым наполнителем; 3) к антифрикционным чугунам с пластинчатым графитом; 4) к фрикционным спеченным материалам на основе меди.

9. Какой из перечисленных в ответах материалов можно использовать для изготовления деталей ракетного двигателя, работающих при температуре 1200 °С?

1) ВДУ-1; 2) САП-1; 3) ВКА-1; 4) КАС-1.

10. Какие вещества называют полимерами?

1) вещества, полученные полимеризацией низкомолекулярных соединений; 2) высокомолекулярные соединения, основная молекулярная цепь которых состоит из атомов углерода; 3) высокомолекулярные соединения, молекулы которых состоят из большого числа мономерных звеньев; 4) органические соединения, состоящие из большого числа одинаковых по химическому составу мономеров.

11. Какой из наполнителей пластмасс: слюдяная мука, асбестовые волокна, стеклянные нити - полимерный материал?

1) ни один из названных наполнителей не полимер; 2) стеклянные нити; 3) асбестовые волокна и слюдяная мука; 4) все названные наполнители - полимеры.

12. В основной цепи полимера, кроме углерода, присутствуют атомы фтора и хлора. Какое из свойств, перечисленных в ответах, можно ожидать у полимерного материала?

1) повышенную газонепроницаемость; 2) высокую химическую стойкость; 3) повышенную эластичность; 4) высокие диэлектрические свойства.

13. Какие из перечисленных в ответах свойств характеризуют полярные полимерные материалы?

1) высокие диэлектрические свойства; 2) хорошая адгезионная способность; 3) высокая морозостойкость; 4) слабовыраженная температурная зависимость свойств.

14. Какие полимерные материалы называют термопластичными?

1) материалы, обратимо затвердевающие в результате охлаждения без участия химических реакций; 2) материалы с редкосетчатой структурой макромолекул; 3) материалы, формуемые при повышенных температурах; 4) материалы, необратимо затвердевающие в результате химических реакций.

15. Какова структура макромолекул термореактивных полимерных материалов?

1) ленточная, или пространственная; 2) разветвленная, или паркетная; 3) сетчатая, или цеповидная; 4) линейная, или редкосетчатая.

16. Какие материалы называют пластмассами?

1) материалы органической или неорганической природы, обладающие высокой пластичностью; 2) высокомолекулярные соединения, молекулы которых состоят из большого числа мономерных звеньев; 3) искусственные материалы на основе природных или синтетических полимерных связующих; 4) материалы, получаемые посредством реакций полимеризации или поликонденсации.

17. Какие пластмассы называют термореактивными?

1) пластмассы, в состав которых включены наполнители, например, меняющие характер надмолекулярной структуры; 2) пластмассы, обратимо затвердевающие в результате охлаждения без участия химических реакций; 3) пластмассы на основе полимеров с линейной или разветвленной структурой макромолекул; 4) пластмассы, необратимо затвердевающие в результате химических реакций.

18. Пластмассы на основе фенолформальдегидной смолы необратимо затвердевают при формовании изделий. Какую структуру макромолекул смолы можно ожидать?

1) пространственную, или ленточную; 2) разветвленную, или паркетную; 3) линейную, или разветвленную; 4) сетчатую, или линейную.

19. Что такое текстолит?

1) ненаполненная пластмасса на основе термопластичных полимеров; 2) пластмасса с наполнителем из направленных органических волокон; 3) пластмасса на основе термореактивного полимера с наполнителем из хлопчатобумажной ткани; 4) термореактивная пластмасса с наполнителем из стеклоткани.

20. Какой из перечисленных в ответах материалов предпочтителен для изготовления подшипников скольжения?

1) фторопласт-4; 2) ударопрочный полистирол; 3) фенопласт; 4) асбоволокнит.

21. Какой из перечисленных в ответах материалов предпочтителен для изготовления тормозных накладок?

1) текстолит; 2) винипласт; 3) асботекстолит; 4) стекловолокнит.

22. Сколько процентов вольфрама и ванадия (W и V) содержит сталь Р18К5Ф2?

1) в этой стали вольфрама нет, V - 5 %; 2) W - 2 %, V - 18 %; 3) W -

18 %, V-2 %; 4) W- 18 %, V- 5 %.

23. Какой из перечисленных в ответах технологических методов применяют для получения твердых сплавов?

1) обработку сверхвысоким давлением в сочетании с высоким нагревом; 2) порошковую металлургию; 3) литье с последующей термической обработкой; 4) термомеханическую обработку.

24. Какова роль кобальта в твердом сплаве?

связующий компонент 1) увеличивает вязкость сплава; 2) увеличивает износостойкость сплава; 3) увеличивает твердость сплава. 4) увеличивает красностойкость сплава.

25. Какова роль карбида вольфрама (WC), входящего в состав твердых сплавов?

1) WC играет роль связующего материала; 2) WC обеспечивает вязкость сплава; 3) WC обеспечивает твердость сплава; 4) WC обеспечивает прочность сплава.

26. Как называется сплав Т15К6? Каков его химический состав?

1) сталь. Содержит более 1 % углерода, 15 % титана, 6 % кобальта; 2) медный сплав. Содержит 15 % тантала, 6 % кремния, остальное – медь. 3) Алюминиевый сплав. Состав устанавливается по ГОСТу; 4) Твердый сплав. Содержит 15 % карбида титана, 6 % кобальта, 79 % карбида вольфрама.

27. Какой из приведенных в ответах инструментальных материалов обладает наибольшей красностойкостью?

1) У8А; 2) Р6М5; 3) Т30К4; 4) Алмаз.

28. Входящие в состав твердых сплавов карбиды тугоплавких металлов хрупки. Почему же не разрушаются инструменты, работающие с большими ударными нагрузками, например, штампы?

1) вязкость твердых сплавов обеспечивается связующим компонентом; 2) уменьшение ударных нагрузок достигается конструктивными решениями (амортизаторы, демпферы и др.); 3) для таких инструментов твердые сплавы не применяют; 4) увеличение ударной вязкости достигается специальной смягчающей термообработкой.

29. Какой из приведенных в ответах инструментальных материалов следует применить для чистовой обработки стального закаленного изделия?

1) ВК15; 2) Р6М5; 3) У8А.; 4) Т30К4.

30. Какой из приведенных в ответах твердых сплавов предпочтителен для черновой обработки отливки из серого чугуна?

1) ВК3; 2) Т30К4; 3) ВК25; 4) ВК8.

9.4. Пояснения к ответам на вопросы

1. 1) Правильно.

2) Неверно. Под такое определение подходят, например, состаренные алюминиевые сплавы, не являющиеся композиционными материалами.

3) Понятие «композиционные материалы» охватывает значительно более широкий круг материалов.

4) Неверно. Такие материалы называются элементоорганическими полимерами.

2. 1) Неверно. Под такое определение подходят, например, состаренные алюминиевые сплавы, не являющиеся композиционными материалами.

2) Неверно. Одно из требований, предъявляемых к композиционным материалам, - отсутствие растворимости частиц упрочняющей фазы в материале матрицы.

3) Правильно.

4) Неверно. Одномерным наполнителем упрочнены волокнистые композиционные материалы.

3. 1) Применяемые в композиционных материалах наполнители по прочности, твердости и модулю упругости значительно превосходят матрицу.

2) Прочность в зависимости от количества упрочняющей фазы не подчиняется закону аддитивности. Оптимальное содержание второй фазы обычно не превышает 5 ... 10 % (объемных).

3) Прочность зависит от дисперсности частиц наполнителя, но она не может не зависеть от его содержания.

4) Правильно.

4. 1) При получении таких материалов давление обычно применяют как элемент технологии, но сам метод иной.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

5. 1) Неверно.

2) Правильно.

3) При большом (более 80 %) и малом (менее 5 %) содержании наполнителя увеличение его объемного содержания ведет к уменьшению прочности.

4) В интервале 5 ... 80 % увеличение содержания наполнителя ведет к повышению прочности материала.

6. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

7. 1) Неверно.

2) Правильно.

3) Неверно.

4) Неверно.

8. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Неверно.

9. 1) Правильно.

2) Неверно. Алюминиевая матрица не может существовать при такой температуре.

3) Неверно. Алюминиевая матрица не может существовать при такой температуре.

4) Неверно. Алюминиевая матрица не может существовать при такой температуре.

10. 1) Полимеры получают не только путем полимеризации, но и путем поликонденсации.

2) Такие соединения представляют собой лишь одну из разновидностей полимеров, а именно карбоцепные.

3) Правильно.

4) Неверно. Полимерами могут быть не только органические соединения. Входящие в состав полимеров мономерные звенья не обязательно должны иметь одинаковый химический состав.

11. 1) Неверно.

2) Ответ неполон. К неорганическим полимерам относится не только стекло.

3) Ответ неполон. Все перечисленные материалы относятся к неорганическим полимерам.

4) Правильно.

12. 1) Повышенную газонепроницаемость полимеру придают присутствующие в основной цепи атомы серы.

2) Правильно.

3) Повышенную эластичность полимеру придают присутствующие в основной цепи атомы кислорода.

4) Неверно.

13. 1) Неверно. Высококачественными диэлектриками являются неполярные полимеры (на основе углеводородов).

2) Правильно.

3) Неверно. Морозостойкость у полярных полимерных материалов низкая.

4) Неверно.

14. 1) Правильно.

2) Неверно. Сетчатая (редкосетчатая) структура характерна для термореактивных материалов.

3) В выбранном ответе дана слишком общая характеристика материалов. Формование изделий при повышенных температурах характерно для многих как неметаллических, так и металлических материалов.

4) Неверно. В выбранном ответе приведена характеристика термореактивных материалов.

15. 1) Правильно.

2) Разветвленная структура характерна для термопластичных материалов.

3) Цеповидная структура характерна для термопластичных материалов.

4) Линейная структура характерна для термопластичных материалов.

16. 1) Неверно. Высокой пластичностью обладают, например, многие

металлы и сплавы, не относящиеся к пластмассам.

2) Неверно. В ответе приведено определение полимеров.

3) Правильно.

4) Эти реакции могут иметь место при получении пластмасс. Однако полимеризация и поликонденсация - это реакции, посредством которых получают полимеры.

17. 1) Неверно. Наполнители могут содержать как термореактивные, так и термопластичные пластмассы.

2) Неверно. Обратимо затвердевают термопластичные пластмассы.

3) Неверно. Линейную или разветвленную структуру макромолекул полимера имеют термопластичные пластмассы.

4) Правильно.

18. 1) Правильно.

2) Разветвленная структура характерна для термопластичных материалов. Фенолформальдегидная смола - термореактивный материал.

3) Линейная или разветвленная структуры характерны для термопластичных материалов. Фенолформальдегидная смола - термореактивный материал.

4) Линейная структура характерна для термопластичных материалов. Фенолформальдегидная смола - термореактивный материал.

19. 1) Неверно. Текстолит - это пластмасса с наполнителем.

2) Пластмассы с наполнителем из направленных органических волокон представляют собой композиционные материалы, называемые органо-волокнитами.

3) Правильно.

4) Неверно. Пластмасса с наполнителем из стеклоткани называется стеклотекстолит.

20. 1) Правильно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Неверно. Асбоволокнит чаще применяют для изготовления тормозных устройств.

21. 1) Неверно. Текстолит чаше применяют как материал для изготовления подшипников скольжения.

2) Неверно.

3) Правильно.

4) Неверно.

22. 1) Неверно. Р18К5Ф2 - быстрорежущая вольфрамосодержащая сталь. Количество W в таких сплавах указывается после буквы Р, количество V -после буквы Ф.

2) Неверно. Р18К5Ф2 - быстрорежущая вольфрамосодержащая сталь. Количество W в таких сплавах указывается после буквы Р, количество V - после буквы Ф.

3) Правильно.

4) Неверно. Ванадий в марках сталей обозначают буквой Ф, а не К.

23. 1) При получении твердых сплавов, действительно используют нагрев до довольно высоких температур, но применяемые давления к сверхвысоким не относятся.

2) Правильно.

3) Неверно.

4) Неверно.

24. 1) Правильно.

2) Неверно. Увеличение количества кобальта в сплаве приводит к снижению износостойкости.

3) Неверно. При увеличении количества кобальта в сплаве твердость последнего снижается.

4) Неверно. Увеличение количества кобальта в сплаве приводит к снижению красностойкости.

25. 1) Неверно.

2) Неверно. Чем больше в сплаве карбида вольфрама (сплавы ВК), тем более он хрупок и менее прочен.

3) Правильно.

4) Неверно. Чем больше в сплаве карбида вольфрама (сплавы ВК), тем более он хрупок и менее прочен.

26. 1) Неверно.

2) Неверно.

3) Неверно.

4) Правильно.

27. 1) Неверно. Красностойкость инструментальных углеродистых сталей равна примерно 200 °С.

2) Неверно. Красностойкость быстрорежущих сталей равна примерно 600 °С.

3) Правильно.

4) Неверно. Алмаз при нагреве выше 800 °С графитизируется.

28. 1) Правильно.

2) Подобные решения вряд ли целесообразны, поскольку они приведут к снижению ударного воздействия на деформируемый материал.

3) Неверно. Для штампов применяют, например, сплав ВК25.

4) Неверно. Твердые сплавы не подвергают смягчающим видам термической обработки.

29. 1) Сплав ВК15 обладает высокой вязкостью, но твердость и износостойкость его для обработки закаленных сталей недостаточна.

2) Быстрорежущие стали не обладают твердостью и красностойкостью, достаточной для обработки закаленных сталей.

3) Сталь У8 (У8А) применяют для изготовления деревообрабатывающего инструмента, зубил, отверток, кернеров и т. п.

4) Правильно.

30. 1) Сплав ВК3 имеет низкую прочность и для черновых видов обработки, сопряженных с ударными нагрузками, не пригоден.

2) Сплав Т30К4 обладает высокой твердостью, но он не достаточно вязок для восприятия ударных нагрузок, сопровождающих черновые виды обработки.

3) Сплав ВК25 применяют для изготовления инструмента, воспринимающего высокие ударные нагрузки, например, для изготовления штампов.

4) Правильно.

9.5. Задачи

9.1. На цилиндрическую деталь летательного аппарата действует растягивающая сила N = 55000 (Н). Деталь имеет длину L = 900 (мм); площадь поперечного сечения S = 95 (мм^2); масса детали M = 450 (г); рабочая

температура детали T = 900 ^{0}C.

Требуется:

1. Выполнить для заданной детали расчеты прочности, плотности и удельной прочности без учета материала детали.

2. Выполнить проектирование композиционного материала (КМ) для заданной детали.

Решение задачи 9.1.

Расчет № 1

1. Рассчитываем предел прочности при растяжении:

$$\left[\sigma^P\right] = \frac{N}{S} = \frac{55000}{0{,}000095} = 578{,}9 \quad \text{МПа}$$

2. Определяем верхнее и нижнее значения плотности детали (плотность КМ допускается меньше на 10 %):

$$G^{\max} = \frac{M}{V} = \frac{0{,}45}{0{,}855 \cdot 10^{-4}} = 5263 \ \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$G^{\min} = G^{\max} - \frac{10}{100} G^{\max} = 5263 - 0{,}1 \cdot 5263 = 4737 \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Рассчитываем верхнее и нижнее значения удельной прочности:

$$\sigma_{\text{уд}}^{\max} = \frac{\left[\sigma^P\right]}{G^{\min}} = \frac{5{,}79 \cdot 10^8}{4737} = 0{,}122 \cdot 10^6 \ \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}};$$

$$\sigma_{\text{уд}}^{\min} = \frac{\sigma^P}{G^{\max}} = \frac{5{,}79 \cdot 10^8}{5263} = 0{,}11 \cdot 10^6 \quad \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}.$$

Расчет № 2

Расчеты КМ для данной детали:

Материал матрицы – УУМ. Материал волокон – Al_2O_3.

1. Рассчитываем критическую длину волокон:

$$T_{\text{гр}} = \sigma_{вm} \cdot \cos 45^{\circ} = 350 \cdot 10^6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 247{,}5 \cdot 10^6 \quad \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$L_{\text{кр}f} = D_f \cdot \frac{\sigma_{вf}}{2 \cdot T_{\text{гр}}} = 28 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{3400 \cdot 10^6}{2 \cdot 247{,}5 \cdot 10^6} = 192{,}3 \text{ мкм.}$$

2. Рассчитываем объемную концентрацию волокон:

$$V_{f\,\min} = \frac{\left[\sigma^P\right] - \sigma_{вm}}{T_{\text{гр}} \cdot \frac{L_{\text{кр}f}}{D_f} - \sigma_{вm}} = \frac{5{,}789 \cdot 10^8 - 3{,}5 \cdot 10^8}{2{,}47 \cdot 10^8 \cdot \frac{192{,}3 \cdot 10^{-8}}{28 \cdot 10^{-7}} - 3{,}5 \cdot 10^8} = \frac{2{,}289}{13{,}46} = 0{,}17 = 17 \text{ \%}$$

3. Рассчитываем плотность спроектированного КМ:

$$G^{\text{КМ}} = G_m \cdot (1 - V_f) + G_f \cdot V_f = 1930 \cdot (1 - 0{,}17) + 3960 \cdot 0{,}17 = 2275 \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

4. Рассчитываем удельную прочность спроектированного КМ:

$$\sigma_{\text{уд}}^{\text{КМ}} = \frac{\sigma_{\text{в}}^{\text{КМ}}}{G^{\text{КМ}}} = \frac{578{,}9 \cdot 10^6}{2275} = 0{,}254 \quad \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

5. Проверяем выполнение необходимого условия для спроектированного КМ:

$$\sigma_{\text{уд}}^{\text{КМ}} = 0{,}254 \quad \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} > \sigma_{\text{уд}}^{\min} = 0{,}110 \quad \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Неравенство выполняется. Делаем вывод, что КМ спроектирован правильно.

9.2. На цилиндрическую деталь действует растягивающая сила N = 65000 Н. Деталь имеет длину L = 800 мм; площадь поперечного сечения S = 85 мм^2; масса детали M = 0,350 кг; рабочая температура детали T = 250 ^{0}C.

Требуется:

1. Выполнить для детали расчеты прочности, плотности и удельной прочности без учёта материала детали.

2. Выполнить проектирование композиционного материала (КМ) для заданной детали.

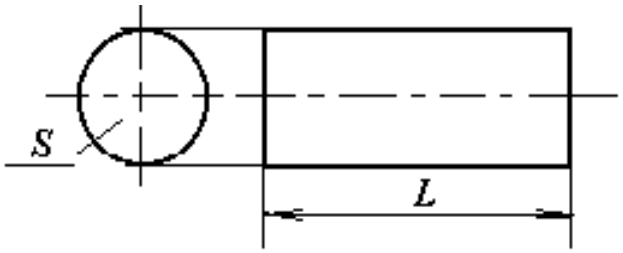


Рис. 9.1. Деталь машины

Исходные данные: N = 65000 Н; M = 0,35 кг; L = 0,8 м; T =250 ^{0}C; $S = 85 \cdot 10^{-6}$ м^2.

Выполнение расчетов:

Часть 1

1. Определяем расчётное напряжение растяжения в детали:

$$\sigma_в = N / S ; \qquad \sigma_в = 7{,}647 \text{ Па}$$

2. Определяем верхнее и нижнее значения плотности детали:

$$Y_{max} = M /(S\,L); \qquad Y_{max} = 5{,}147\ 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$Y_{min} = Y_{max} - (Y_{max} / 100)\ 10^3 ; \quad Y_{min} = 4{,}632\ 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

3. Вычисляем верхнее и нижнее значения удельной прочности:

$$\sigma_{уд_{min}} = \frac{\sigma_в}{\gamma_{max}}; \ \sigma_{уд_{min}} = 1{,}486 \cdot 10^5 \quad \frac{Дж}{кг};$$

$$\sigma_{уд_{max}} = \frac{\sigma_в}{\gamma_{min}}; \ \sigma_{уд_{max}} = 1{,}651 \cdot 10^5 \quad \frac{Дж}{кг}.$$

Часть 2

Выбираем в качестве материала матрицы алюминиевый высокопрочный сплав 1950 (В95).

Характеристики материала:

$$\gamma = 2800 \ \frac{кг}{м^3}; \quad W_m = 300 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг}; \quad W_{экстр} = 2 \cdot 10^6 \ \frac{Дж}{кг};$$

$$\sigma_{в_m} = 600 \cdot 10^6 \ \text{Па}; \ G_m = 2800 \ \frac{кг}{м^3}.$$

Выбираем в качестве наполнителя керамические волокна Al_2O_3.
Характеристики наполнителя:

d_f = 127 10^{-6} м; σ_f = 2410 10^6 Па; G_f = 3960, кг/м^3; W_f = 950 кДж/кг.

1. 4. Рассчитываем критическую длину волокон:

$$L_{\text{кр}} = \frac{d_f \cdot \sigma_f}{2 \cdot T_{ГР}}, \qquad \text{где} \qquad T_{\text{гр}} = \sigma_{\text{в}_m} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right);$$

$$L_{\text{кр}} = 3{,}607 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

2. Расчёт минимальной объёмной концентрации волокон:

$$V_{f_{\min}} = \frac{\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{в}_m}}{\frac{T_{\text{гр}} \cdot L_{\text{кр}}}{d_f} - \sigma_{\text{в}_m}}; \qquad V_{f_{\min}} = \frac{7{,}647 \cdot 10^8 - 600 \cdot 10^6}{\frac{423{,}2 \cdot 10^6 \cdot 3{,}607 \cdot 10^{-4}}{127 \cdot 10^{-6}} - 600 \cdot 10^6} = 0{,}272;$$

$V_{f_{\min}} = 27{,}2$ %.

3. 4. Рассчитываем удельные энергетические затраты на изготовление материалов матрицы и волокна:

$$W_{km} = W_f \cdot V_f + W_m \cdot (1 - V_f); \qquad W_{km} = 2{,}186 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

4. Рассчитываем общие энергетические затраты на изготовление детали из проектируемого КМ:

$$W_{\text{общ}} = W_{km} + W_{\text{экстр}}; \qquad W_{\text{общ}} = 2{,}219 \cdot 10^6 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

5. Рассчитываем плотность спроектированного КМ:

$$G_{km} = G_f \cdot V_f + G_m \cdot (1 - V_f); \qquad G_{km} = 3{,}116 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

6. Рассчитываем удельную прочность для спроектированного КМ:

$$\sigma_{уд_{км}} = \frac{\sigma_в}{G_{км}}; \qquad \sigma_{уд_{км}} = 2{,}454 \cdot 10^5 \ \frac{Дж}{кг}.$$

Имеем: $\sigma_{уд_{км}} = 2{,}454 \cdot 10^5 \ \frac{Дж}{кг}; \qquad \sigma_{уд_{min}} = 1{,}486 \cdot 10^5 \ \frac{Дж}{кг}.$

Как видно $\sigma_{уд_{км}} > \sigma_{уд_{min}}$.

Вывод: Расчёт удельной прочности показывает, что для спроектированного КМ выполняется требование по удельной прочности. Таким образом, для изготовления детали можно выбрать матрицу из сплава 1950 (В95), наполнитель из керамических волокон Al_2O_3 диаметром 127 мкм и длиной 364 мкм при концентрации 27,2 об. %.

9.3. Для изготовления ряда конструкций, массу которых особенно важно снизить, применяют материалы, отличающиеся высокой удельной прочностью и жесткостью. Привести состав и строение подобных материалов, если из-за повышенной температуры службы конструкции нужна повышенная теплостойкость и стабильность размеров деталей конструкций.

9.4. С целью снижения массы деталей различных аппаратов для их изготовления применяют сложные по своей внутренней конструкции материалы, которые помимо высокой удельной прочности обладают также коррозионной стойкостью и износостойкостью. Описать тип подобных материалов, свойства их составляющих и материала в целом, а также возможные способы изготовления из них изделий разного назначения.

9.5. На цилиндрическую деталь массой *M* при температуре *T* действует растягивающая сила *N*. Деталь имеет длину *L* и площадь поперечного сечения *S*.

Требуется:

1. Выполнить для заданной детали расчеты прочности, плотности и удельной прочности без учета материала детали.
2. Выполнить проектирование композиционного материала (КМ) для заданной детали.

Таблица 9.1

Варианты заданий

Номер задания	*L*, мм	*S*, мм^2	*M*, кг	*N*, Н	*T*, ^{o}C
1	950	100	0,50	60000	20
2	900	95	0,45	55000	20
3	850	90	0,60	50000	20
4	800	85	0,35	65000	20
5	800	100	0,45	60000	20
6	800	90	0,40	55000	20
7	850	80	0,55	50000	20
8	950	100	0,50	60000	400
9	900	90	0,60	55000	400
10	850	95	0,35	50000	400
11	900	85	0,30	65000	400
12	950	100	0,65	60000	400
13	850	90	0,40	55000	400
14	900	80	0,35	50000	400
15	950	90	0,45	65000	400
16	950	100	0,55	60000	550
17	900	95	0,45	55000	550
18	850	90	0,60	50000	550
19	800	85	0,35	65000	550
20	800	100	0,65	60000	550
21	850	80	0,40	55000	550
22	900	85	0,35	50000	550

9.6. С целью снижения массы автомобиля и соответственно уменьшения расхода горючего кабину (у грузовых автомобилей) и кузов (у легковых автомобилей) изготовляют уже не из стального листа, а из материалов, отличающихся высокими удельными значениями прочности,

жесткости и хорошей коррозионной стойкостью, а также технологичностью при изготовлении изделий.

Выбрать материал, обладающий указанными свойствами, назвать особенности его строения и описать технологический процесс изготовления из него изделия.

9.7. При выборе режущего инструмента и материала для изготовления на токарных станках-автоматах винтов М8 (шестигранник высотой 12 мм) токарь допустил ошибки и предложил использовать сталь 20 и твердосплавный резец Т30К4. В чем заключаются ошибки? Исправьте их. Обоснуйте выбор типоразмера, материала заготовки и режущего инструмента. Расшифруйте химический состав и укажите свойства выбранных материалов.

№ 9.8. При обработке стали твердостью более НВ 280... 300 резцы из быстрорежущей стали не имеют достаточной стойкости. Укажите состав сплава, обладающего более высокими режущими свойствами. Вследствие высокой стоимости и большей хрупкости такого сплава приведите способ изготовления составных резцов и укажите металл, из которого следует изготовить державку резца. Сопоставьте структуру, твердость, теплостойкость и способ изготовления выбранного сплава с аналогичными характеристиками быстрорежущей стали.

10. ТЕСТОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

10.1. Основные свойства материалов

1. Химические элементы, обладающие положительным температурным коэффициентом электросопротивления, называются

1) металлами 2) неметаллами 3) окислителями

2. Наиболее плотно упакованная кристаллическая решетка металла

1) ОЦК 2) ГЦК 3) ГПУ

3. Элементы, для которых характерна термоэлектронная эмиссия

1) неметаллы 2) металлы 3) полуметаллы

4. Количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку в

ОЦК решетке:

1) 2 2) 4 3) 6

5. Количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку в ГПУ решетке:

1) 2 2) 4 3) 6

6. Количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку в ГЦК решетке:

1) 2 2) 4 3) 6

7. Зависимость свойств кристалла от направления, возникающее в результате упорядоченного расположения атомов (ионов) в пространстве:

1) эмиссия 2) полиморфизм 3) анизотропия

8. Способность металла образовывать разные типы кристаллических решеток

1) анизотропия 2) текстура 3) полиморфизм

9. Неравномерность свойств кристалла в различных кристаллографических направлениях называют

1) ликвацией 2) анизотропией 3) текстурой

10. Линейный дефект строения кристаллической решетки

1) дислокация 2) вакансия 3) граница зерна

11. Поверхностный дефект строения кристаллической решетки

1) дислокация 2) вакансия 3) граница зерна

12. Расстояния (*a*, *b*, *c*) между центрами ближайших атомов в элементарной ячейке:

1) плотность упаковки 2) период решетки 3) координационное число

13. Суммарная длина всех линий дислокаций в единице объема называется

1) плотность дислокаций 2) вектор Бюргерса 3) искажение решетки

14. При повышении температуры концентрация вакансий

1) возрастает 2) убывает 3) остается постоянной

15. Двойники - это вид дефектов кристаллического строения

1) точечных 2) линейных 3) поверхностных

16. Плотность дислокаций в изделии, изготовленном холодной штамповкой

1) 10^8 м$^{-2}$ 2) 10^{10} м$^{-2}$ 3) 10^{16} м$^{-2}$

17. Дефект кристаллической решетки, представляющий собой край лишней полуплоскости:

1) вакансия 2) дислокация 3) граница блока

18. Свойство металлических кристаллов, существенно зависшее от плотности дислокаций

1) теплопроводность 2) прочность 3) анизотропи

19. Радиус концентратора напряжений при определении ударной вязкости максимален

1) *KCU* 2) *KCV* 3) *KCT*

20. Изменяется ли коррозионная стойкость при наклепе металла

1) не меняется 2) понижается 3) повышается

21. Напряжения, возникающие в процессе быстрого нагрева, вследствие неоднородного расширения поверхностных и внутренних слоев называются

1) внутренние остаточные 2) структурные 3) тепловые или термические

22. Относительное сужение поликристаллического металла с увеличением степени его холодной деформации

1) остается постоянным 2) увеличивается 3) уменьшается

23. Деформацию, которую проводят при температуре выше температуры рекристаллизации, называют

1) остаточной 2) холодной 3) горячей

24. Металл *а* имеет ОЦК решетку, *в* - ГЦК, *с* - ГПУ наименее пластичным из них будет

1) *а* 2) *в* 3) *с*

25. Упрочнение металла в процессе холодной пластической деформации объясняется

1) уменьшением числа дислокаций

2) увеличением числа дислокаций

3) фазовыми превращениями

26. Температура горячей деформации сплавов

1) (0,3 - 0,4) $T_{пл}$ 2) (0,7 - 0,75) $T_{пл}$ 3) (0,1 - 0,2) $T_{пл}$

27. Закономерная ориентировка кристаллов относительно внешних деформационных сил

1) полиморфизм 2) скольжение 3) текстура

28. Механическое свойство не зависит от структуры металла и определяется силами межатомной связи

1) прочность 2) хрупкость 3) плотность

29. Зависимость между размером зерна и пределом текучести материала

1) зависимости нет

2) прямо пропорциональная

3) обратно пропорциональная

30. Возникновение трещин при разрушении происходит при развитии процесса

1) скопления вакансий 2) скопления дислокаций 3) полигонизации

31. Излом, возникающий при длительном воздействии циклических нагрузок:

1) усталостный 2) хрупкий 3) вязкий

32. Изменение структуры и свойств металлического материала, вызванное пластической деформацией

1) отдых 2) полигонизация 3) наклеп

33. С ростом степени пластической деформации плотность металла

1) остается постоянной 2) понижается 3) повышается

34. Материалы, обычно испытываемые на сжатие:

1) хрупкие 2) пластичные 3) значения не имеет

35. Материалы, обычно испытываемые на сжатие:

1) конструкционные стали 2) чугуны 3) однофазные латуни

36. Материалы, обычно испытываемые на сжатие:

1) силумины 2) конструкционные стали 3) однофазные латуни

37. Материалы, обычно испытываемые на сжатие:

1) инструментальные стали после поверхностного упрочнения

2) конструкционные стали

3) однофазные латуни

38. Материалы, обычно испытываемые на изгиб:

1) хрупкие 2) пластичные 3) значения не имеет

39. Материал, имеющий максимальную трещиностойкость:

1) σ_{02} = 120 МПа 2) $\sigma_{0,2}$ = 500 МПа 3) $\sigma_{0,2}$ = 1000 МПа

40. Хрупкому разрушению соответствует трещина

1) острая ветвящаяся

2) тупая ветвящаяся

3) тупая плавно раскрывающаяся

10.2. Кристаллизация

1. Условия теплоотвода, способствующие образованию столбчатых кристалов

1) наличие температурного градиента

2) отсутствие температурного градиента

3) большая степень переохлаждения

2. Температурный интервал между равновесной и реальной температурой плавления

1) степень переохлаждения

2) степень перегрева

3) температурный гистерезис

3. Разница между равновесной и реальной температурой кристаллизации

1) степень переохлаждения

2) степень перегрева

3) температурный гистерезис

4. Разница между реальной температурой плавления и реальной температурой кристаллизации

1) степень переохлаждения

2) степень перегрева

3) температурный гистерезис

5. Уменьшению размера зерна при разливке модифицированного металла способствует

1) вакуумирование 2) подстуживание 3) перегрев

6. Размер критического зародыша будет максимальным при степени переохлаждения металла

1) 10 К 2) 50 К 3) 100 К

7. Вид физических процессов, к которому относится кристаллизация:

1) сдвиговый 2) диффузионный 3) полиморфный

8. Измельчение зерен металлов и сплавов относится к технологической операции

1) алитирование 2) модифицирование 3) легирование

9. Переход металла из жидкого или парообразного состояния в твердое с образованием кристаллической структуры

1) кристаллизация

2) первичная кристаллизация

3) перекристаллизация

10. Характерное строение для макро- и микроструктуры литого металла (сплава)

1) ячеистое 2) равноосное кристаллическое 3) дендритное

11. Влияние скорости охлаждения на процесс дендритной ликвации сплава

1) ускорит 2) замедлит 3) не влияет

12. Дендритная ликвация проявится в большей мере в сплаве интервалом кристаллизации

1) широким 2) узким 3) средним

13. Мелкие кристаллы, не имеющие ярко выраженной многогранной кристаллической формы

1) зерно 2) блок 3) субзерно

13. У стального слитка усадочная раковина образуется в верхней части

1) кипящей стали 2) полуспокойной стали 3) спокойной стали

14. С увеличением скорости охлаждения степень переохлаждения

1) не изменяется 2) возрастает 3) убывает

15. Фаза, формирующаяся в твердом состоянии при неограниченной растворимости компонентов в жидком и твердом состояниях

1) химическое соединение

2) твердый раствор замещения

3) твердый раствор внедрения

16. Горизонтальный отрезок, соединяющий составы фаз, находящихся в равновесии:

1) фигуративная линия 2) конода 3) сольвус

17. Количество фаз, находящихся в равновесии при первичной кристаллизации двухкомпонентного сплава неэвтектического состава:

1) одна 2) две 3) три

18. Правило, определяющее состав фаз в диаграммах состояния двойных систем:

1) правило отрезков 2) правило концентраций 3) правило конод

19. Количество фаз, находящихся в равновесии при эвтектическом превращении в двухкомпонентной системе

1) одна 2) две 3) три

20. Проекция точки пересечения коноды с линией ликвидус на ось концентраций показывает

1) состав жидкой фазы 2) состав твердой фазы 3) состав сплава

10.3. Термическая и химико-термическая обработка

1. Процесс устранения внутренних напряжений при нагреве

1) рекристаллизация 2) возврат 3) полигонизация

2. Изменяется ли временное сопротивление на стадии собирательной рекристаллизации

1) уменьшается 2) увеличивается 3) остается постоянным

3. Изменяется ли относительное удлинение поликристаллического металла с увеличением степени его холодной деформации

1) нет 2) увеличивается 3) уменьшается

4. Процесс образования и роста новых равноосных зерен из деформированных кристаллов называется

1) рекристаллизация 2) возврат 3) полигонизация

5. Предел текучести наклепанного металла на стадии собирательной рекристаллизации

1) уменьшается 2) увеличивается 3) остается постоянным

6. Относительное удлинение наклепанного металла на стадии собирательной рекристаллизации

1) уменьшается 2) увеличивается 3) остается постоянным

7. Процесс устранения внутренних напряжений при нагреве

1) рекристаллизация 2) возврат 3) полигонизация

8. Процесс образования и роста новых равноосных зерен из деформированных

1) возврат 2) рекристаллизация 3) полигонизация

9. Термическая обработка для восстановления структуры и свойств наклепанного металла

1) отдых 2) возврат 3) рекристаллизационный отжиг

10. Изменение предела прочности наклепанного металла при первичной рекристаллизации

1) снижается 2) повышается 3) остается постоянным

11. Изменение относительного удлинения на стадии первичной рекристаллизации

1) уменьшится 2) увеличится 3) останется постоянным

12. Превращение, происходящее при нагреве доэвтектоидной стали в интервале температур A_{c1} - A_{c3}

1) перлито-аустенитное

2) феррито-аустенитное

3) цементито-аустенитное

13. Аустенизация пройдет быстрее (при прочих равных условиях) в стали с содержанием углерода

1) 0,1 % 2) 0,4 % 3) 0,8 %

14. Твердость феррито-цементитной смеси зависит от

1) площади межфазовой границы

2) полноты превращения

3) морфологии фаз

15. Сталь, имеющая большую прокаливаемость

1) 40Х 2) 40 3) 45

16. Сталь чувствительнее к закалочным трещинам

1) сталь 45 2) У8 3) Ст 5

17. Большую твердость после закалки будет иметь сталь

1) Ст 0 2) Сталь 60 3) У9

18. Температура нагрева стали У7 под закалку

1) A_{C1} + (30 - 50 °С) 2) A_{C2} + (30 - 50 °С) 3) A_{C3} + (30 - 50 °С)

19. Структура после правильной закалки стали 35

1) мартенсит

2) мартенсит, аустенит остаточный

3) мартенсит, аустенит остаточный, цементит вторичный

20. Термическая обработка, при которой сталь нагревают выше линии "A_{C3}", выдерживают и охлаждают на воздухе

1) полный отжиг 2) нормализация 3) полная закалка

21. Термическая обработка, при которой сталь нагревают выше линии "A_{C3}", выдерживают и охлаждают с печью

1) полный отжиг 2) нормализация 3) полная закалка

22. Термическая обработка, при которой сталь нагревают выше линии "A_{C3}", выдерживают и охлаждают со скоростью выше критической

1) полный отжиг 2) нормализация 3) полная закалка

23. Предотвратить выгорание углерода с поверхности детали при закалке можно

1) снижением температуры закалки

2) изменением закалочной среды

3) созданием в закалочной печи специальной атмосферы

25. Структура после правильной закалки СТАЛИ У13

1) мартенсит

2) мартенсит, аустенит остаточный

3) мартенсит, аустенит остаточный, цементит вторичный

26. Термическая обработка цементуемых изделий

1) отжиг 2) неполная закалка, низкий отпуск 3) полная закалка

27. Структура, которая формируется из аустенита при малых степенях его переохлаждения

1) мартенсит 2) перлит 3) троостит

28. Диффузионное превращение

1) мартенситное 2) бейнитное 3) перлитное

29. Сдвиговое превращение

1) мартенситное 2) бейнитное 3) перлитное

30. Мартенсит отпуска образуется при температуре

1) 150 - 200 °С 2) 350 - 450 °С 3) 500 - 600 °С

31. Троостит отпуска образуется при температуре

1) 150 - 200 °С 2) 350 - 450 °С 3) 500 - 600 °С

32. Сорбит отпуска образуется при температуре

1) 150 - 200 °С 2) 350 - 450 °С 3) 500 - 600 °С

33. Наследственно мелкозернистая сталь раскисляется

1) Si 2) Mn, Si 3) Mn, Si, Al

34. Самая твердая феррито-цементитная смесь

1) перлит 2) троостит 3) сорбит

35. Азотирование детали повышает

1) износостойкость 2) ударную вязкость 3) относительное удлинение

36. Термическая обработка детали типа “вал”, работающей на знакопеременные нагрузки

1) полная закалка, высокий отпуск

2) полная закалка, средний отпуск

3) закалка

37. Недостаток строения стального слитка, подвергнутого гомогенизации:

1) дендритное строение 2) крупное зерно 3) слоистый излом

38. Интенсивность процесса диффузионного насыщения при химико-термической обработке зависит от

1) теплоты активации 2) температуры ХТО 3) скорости нагрева

39. Термическое улучшение

1) закалка с последующим высоким отпуском

2) закалка с последующим средним отпуском

3) закалка с последующим низким отпуском

40. Вид термической обработки, заключающийся в нагреве закаленной стали ниже линии A_{c1}:

1) неполный отжиг 2) отпуск 3) нормализация

41. Наследственно мелкозернистая сталь

1) 08кп 2) 08пс 3) 08сп

42. Сталь, для которой отжиг можно заменить более дешевой термической обработкой - нормализацией

1) малоуглеродистая 2) среднеуглеродистая 3) высокоуглеродистая

43. Сталь чувствительная к закалочным деформациям

1) сталь 45 2) У8 3) Ст 5

44.. Склонность аустенитного зерна к росту учитывается при проведении технологических процессов

1) горячей обработки 2) улучшения 3) химико-термической

45. Сталь, которая практически не закаливается

1) сталь 10 2) сталь 45 3) У13

46. Инструментальные углеродистые стали подвергают отжигу на зернистый перлит с целью

1) повышения твердости

2) снижения твердости перед обработкой резанием

3) уменьшения закалочных напряжений

47. Координаты построения диаграммы изотермического превращения

аустенита

1) температура - концентрация углерода

2) температура - время

3) температура - степень превращения

48. Зависимость между температурой аустенизации и скоростью нагрева

1) зависимости нет

2) выше скорость нагрева - выше температура аустенизации,

3) выше скорость - ниже температура аустенизации

49. Термическим улучшением стали называют

1) закалку с высоким отпуском

2) нормализацию стали

3) отжиг на зернистый перлит

50. Термическая обработка стали, приводящая к образованию равновесной структуры:

1) закалка с высоким отпуском

2) нормализация

3) полный отжиг

10.4. Железоуглеродистые сплавы

1. Фазовый состав сплава, содержащего 0,8 % С по массе при температуре 900 °С

1) аустенит 2) аустенит и цементит 3) феррит и цементит

2. Фазовый состав сплава, содержащего 3 % С, при температуре 900 °С

1) аустенит 2) аустенит и цементит 3) ледебурит

3. Содержание углерода (по массе в процентах) в сплаве эвтектоидного состава

1) 0,8 2) 2,14 3) 4,3

4. Сталь, имеющая структуру перлит и цементит (вторичный)

1) У8А 2) сталь 0,8кп 3) У10

5. Сталь, имеющая максимальное относительное сужение:

1) сталь 10 2) сталь 45 3) У10А

6. Сталь, содержащая в равновесной структуре максимальное количество цементита:

1) сталь 10 2) У10А 3) У8

7. Свойство чугуна, использующееся во вкладышах подшипников скольжения:

1) демпферность 2) антифрикционность 3) жидкотекучесть

8. Чугун, в котором весь углерод находится в виде графита, имеющего пластинчатую форму:

1) серый перлитный 2) серый ферритный 3) ковкий чугун

9. Фазовый состав сплавов, содержащих > 2,14 % с, после завершения первичной кристаллизации

1) аустенит 2) аустенит и цементит 3) ледебурит

10. Укажите (в процентах) содержание углерода в сплавах, в которых проходит полиморфное превращение:

1) 0 - 0,02 2) 0 – 0,8 3) 0 - 2,14

11. Процент углерода (по массе) в последней капле жидкой фазы, при кристаллизации сплава, содержащего 4 % углерода:

1) 4 2) 4,3 3) 6,67

12. Фазы, из которых состоит ледебурит (при температуре 900 °С):

1) феррита и аустенита 2) феррита и цементита 3) аустенита и цементита

13. Количество углерода, находящегося в ферритном сером чугуне в связанном состоянии:

1) менее 0,02 % 2) 0,8 % 3) 2,14 %

14. Структура сплава, содержащего 0,005 % углерода (по массе) при комнатной температуре:

1) ферритная 2) феррито-перлитная 3) феррито-цементитная

15. Фазовый состав сплавов, содержащих > 0,006 % С при комнатной температуре:

1) феррит 2) феррит и цементит 3) феррит и перлит

16. Фазы, из которых состоит ледебурит превращенный

1) феррита и аустенита 2) феррита и цементита 3) аустенита и цементита

17. Сталь имеет максимальный предел прочности

1) У8А 2) сталь 08кп 3) сталь 20

18. Одно трехфазное превращение проходит в сплавах, содержащих углерода (по массе в процентах):

1) > 0,8 2) > 2,14 3) 0,02 - 2,14

19. Изменяется ли концентрация углерода в жидкой фазе при первичной кристаллизации сплава, содержащего 5 % углерода:

1) возрастает 2) убывает 3) остается постоянной

20. Содержание углерода (по массе в процентах) в сплаве эвтектоидного состава

1) 0,8 % 2) 2,14 % 3) 4,3 %

21. Критическая точка полиморфного превращения железа

1) *A* 2) *S* 3) *G*

22. Вредное явление, развивающееся из-за повышенного содержания примеси серы в стали:

1) красноломкость 2) желтоломкость 3) синеломкость

23. Вредное явление, развивающееся из-за содержания примеси фосфора в стали:

1) красноломкость 2) желтоломкость 3) синеломкость

24. Вредное явление, развивающееся из-за примеси водорода в стали:

1) образуются двойники 2) образуются вакансии 3) образуются флокены

25. Количество “горизонтальных площадок” на кривой охлаждения сплава железа с 1 % С

1) одна 2) две 3) не будет

26. Количество “горизонтальных площадок” на кривой охлаждения сплава железа с 5 % С

1) одна 2) две 3) не будет

27. Количество “горизонтальных площадок” на кривой охлаждения сплава железа с 0,01 % С

1) одна 2) две 3) не будет

28. Количество “горизонтальных площадок” на кривой охлаждения

сплава железа с 0,005 % С

1) одна 2) две 3) не будет

29. Охлаждается толстостенная и тонкостенная отливка из чугуна одного и того же состава. В структуре какой отливки следует ожидать большего количества перлита?

1) тонкостенной 2) толстостенной 3) различия не будет

30. Процесс в железоуглеродистых сплавах

1) эвтектическое превращение

2) эвтектоидное превращение

3) первичная кристаллизация

31. Процесс образования в железоуглеродистых сплавах при 727 ^{o}С сплава состава перлит + цементит

1) эвтектическое превращение

2) эвтектоидное превращение

3) первичная кристаллизация

32. Чугуны, получаемые модифицированием:

1) ковкие и серые

2) высокопрочные и вермикулярные

3) белые и графитизированые

33. Если отношение длины графитного включения к его ширине больше 10, то чугун

1) серый 2) вермикулярный 3) высокопрочный

34. Марка стали, используемая для литья:

1) сталь 20 2) сталь 60 3) У9

35. Сталь, имеющая самый низкий порог хладноломкости

1) У10 2) сталь 60 3) сталь 10

36. Марка литейной стали

1) Л70 2) 25Л 3) Сталь 60

37. Марка стали для изготовления сварной конструкции

1) Ст 2 2) Ст 1кп 3) У7

38. Цифра в марке стали Ст 3

1) содержание углерода 2) номер сплава 3) предел прочности

39. Цифра в марке стали 30

1) содержание углерода 2) номер сплава 3) предел прочности

40. Цифра в марке сплава СЧ30

1) содержание углерода 2) номер сплава 3) предел прочности

10.5. Конструкционные и инструментальные стали

1. Марка инструментальной высококачественной стали

1) сталь 10 2) У10А 3) сталь 45

2. Быстрорежущие стали легируют основным химическим элементом

1) Cr 2) W 3) Mo

3. Цифра “6” в марке стали Р6М5 означает

1) содержание “Co” 2) содержание “W” 3) скорость резания

4. Порог теплостойкости быстрорежущей стали

1) 240 °С 2) 640 °С 3) 880 °С

5. Марка инструментальной стали

1) 10ХСНД 2) ХВГ 3) 12Х17

6. Марка стали для изготовления фрезы для резания труднообрабатываемых сплавов

1) У13 2) Р9М4К8 3) ХВГ

7. Инструментальная сталь для изготовления крупного инструмента

1) У13 2) 13Х 3) ХВСГ

8. Марка инструментального материала с низкой теплостойкостью

1) Т15К6 2) Р18 3) ХВГ

9. Самый теплостойкий материал

1) Т15К6 2) 11ХФ 3) Р18

10. Марка стали для изготовления метчика, предназначенного для нарезания резьбы вручную

1) Р6М5 2) 37Х12Н8Г8МФБ 3) У12А

11. Твердый сплав, используемый для обработки чугуна

1) ВК8 2) Т15К6 3) ТТ10К8

12. Твердый сплав, используемый для обработки стали

1) ВК8 2) Т15К6 3) ХВГ

13. Твердый сплав, используемый для обработки труднообрабатываемых материалов

1) ВК8 2) Т15К6 3) ТТ10К8

14. Инструментальный материал, непригодный для обработки стали

1) алмаз 2) нитрид бора 3) твердые сплавы

15. Отличие инструментальных материалов У10, Х, ХВСГ

1) теплостойкость 2) прокаливаемость 3) содержание углерода

16. Укажите марку качественной конструкционной стали

1) сталь 30 2) Ст 3 3) У7А

17. Количество перлита в равновесной структуре стали 40

1) 40 % 2) 25 % 3) 50 %

18. Марка конструкционной стали обыкновенного качества

1) сталь 10 2) Ст 1 3) У10

19. Качество стали зависит от содержания

1) углерода 2) серы 3) фосфора

20. Сталь, имеющая минимальную пластичность:

1) У10 2) сталь 10 3) Ст 3

21. Марка рессорно-пружинной стали

1) У8А 2) сталь 70 3) сталь 08пс

22. Марка улучшаемой конструкционной стали

1) У8А 2) сталь 80 3) сталь 45

23. Марка цементуемой конструкционной стали

1) У8А 2) сталь 60 3) сталь 15

24. Сталь, имеющая максимальный предел прочности:

1) У8А 2) сталь 08кп 3) сталь 20

25. Сталь, рекомендуемая для изготовления оси:

1) Сталь 10 2) сталь 45 3) У8

26. Предел прочности цементуемой конструкционной стали

1) 100 МПа 2) 350 МПа 3) 500 МПа

27. Предел прочности улучшаемой конструкционной стали

1) 100 МПа 2) 350 МПа 3) 550

МПа

28. Предел прочности высокопрочной стали

1) 750 МПа 2) 1100 МПа 3) 1600 МПа

29. Марка конструкционной стали обыкновенного качества

1) сталь 30 2) Ст 3 3) 30ХГТ

30. Марка качественной конструкционной стали

1) У7 2) Ст 6 3) сталь 70

31. Марка качественной конструкционной цементуемой стали

1) сталь 10 2) Ст 3 3) сталь 45

32. Марка качественной конструкционной улучшаемой стали

1) сталь 10 2) Ст 3 3) сталь 45

33. Сталь, структура которой в равновесном состоянии состоит из 50 % феррита и 50 % перлита

1) сталь 40 2) сталь 50 3) сталь 30

34. Технологическое свойство, присущее автоматным сталям:

1) хорошая штампуемость

2) хорошая обрабатываемость резанием

3) хорошая свариваемость

35. Литейные свойства стали при возрастании в ней содержания углерода

1) ухудшаются 2) улучшаются 3) не изменяются

36. Лучшую штампуемость имеет сталь марки

1) сталь 10 2) сталь 40 3) У7

37. Низколегированные стали имеют суммарное содержание легирующих элементов

1) менее 2,5 % 2) менее 10 % 3) менее 15 %

38. Среднелегированные стали имеют суммарное содержание легирующих элементов

1) менее 2,5 % 2) менее 10 % 3) менее 15 %

39. Высоколегированные стали, имеют суммарное содержание легирующих элементов

1) менее 2,5 % 2) менее 10 % 3) более 10 %

40. Химический элемент, применяемый для легирования коррозионно-стойких сталей

1) Cr 2) W 3) Cu

41. Буква “А” в марке стали 38ХН3А означает

1) содержание алюминия 2) содержание азота 3) высококачественная

42. Сталь, имеющая более высокую коррозионную стойкость:

1) 15Х 2) Х28 3) 50ХФА

43. Марка цементуемой конструкционной стали

1) 15Х 2) ХВГ 3) 45Х

44. Марка жаростойкой стали

1) 20Х 2) 20Х23Н13 3) 50С2

45. Марка рессорно-пружинной легированной стали

1) 20Х 2) 45ХН 3) 60С2

46. Марка улучшаемой легированной стали

1) 60С2ХФА 2) 20ХГТ 3) 38ХН3МФА

47. Сталь, предназначенная для цементации

1) 60С2ХФА 2) 35ХГТ 3) 15ХН

48. Материал, имеющий максимальную прокаливаемость:

1) 60С2А 2) 25ХГТ 3) 38ХН3МФА

49. Марка коррозионно-стойкой стали

1) 12Х18Н9Т 2) 20Х 3) 50С2

50. Предел ограничения концентрации фосфора и серы в качественных легированных сталях

1) менее 0,035 % 2) менее 0,025 % 3) менее 0,05 %

51. Предел ограничения концентрации фосфора и серы в высококачественных легированных сталях

1) менее 0,035 % 2) менее 0,025 % 3) менее 0,05 %

52. Марка автоматной стали

1) 70С3А 2)А30 3) 16Г2АФ

53. Марка особовысококачественной стали

1) 12Х18Н9Т 2) 30ХГСА-Ш 3) 50С2

54. Марка низколегированной стали

1) 12ХГ2МТР 2) 12Х18Н9Т 3) 60С2

55. Концентрация серы в автоматных сталях

1) до 0,035 % 2) до 0,025 % 3) до 0,3 %

56. Концентрация фосфора в автоматных сталях

1) до 0,05 % 2) до 0,025 % 3) до 0,3 %

57. Сталь для изготовления пружины большого сечения

1) 12 ХГ2МТР 2) 65 3) 65С2ВА

58. Сталь для холодной штамповки крышки картера ДВС

1) 38ХН3МФА 2) 08Ю 3) 65С2ВА

59. Сталь, устойчивая к газовой коррозии при температуре выше 550 °С

1) жаропрочная 2) жаростойкая 3) коррозионно-стойкая

60. Сталь, которая может успешно эксплуатироваться при температуре –196 °С

10.6. Цветные металлы и сплавы на их основе

1. Название сплавов меди с цинком

1) бронзы 2) латуни 3) мельхиоры

2. Медные сплавы, используемые для изготовления слесарного

инструмента, не дающего искры

1) морские латуни 2) бериллиевые бронзы 3) мельхиоры

3. Марка морской латуни

1) Л90 2) ЛО70-1 3) ЛЦ10

4. Марка литейной латуни

1) Л90 2) ЛО70-1 3) ЛЦ10

5. Марка однофазной двухкомпонентной латуни

1) Л90 2) ЛО70-1 3) Л60

6. Укажите марку деформируемого алюминиевого сплава, легированного цинком, магнием и медью

1) Д16 2) В95 3) АЛ2

7. Алюминиевые сплавы, которые обычно модифицируют

1) дюралюмины 2) силумины 3) магналии

8. Термическая обработка, которой подвергают сплав Д16:

1) старение

2) закалка с последующим старением

3) отжиг

9. Большинство магналиев упрочняют

1) термообработкой 2) модифицированием 3) деформацией

10. Силумины – это сплавы алюминия с

1) медью 2) магнием 3) кремнием

11. Алюминиевые сплавы, которые относятся к деформируемым термически не упрочняемым

1) дюралюмины 2) силумины 3) магналии

12. Алюминиевый деформируемый термически упрочняемый сплав

1) дюралюмин 2) силумин 3) магналий

13. Литейные алюминиевые сплавы

1) дюралюмины 2) силумины 3)

магналии

14. Марка литейной латуни

1) Л90 2) ЛЦ10 3) ЛС59-1

15. Марка деформируемой латуни

1) Л90 2) ЛЦ10 3) БрО10

16. Укажите двухфазную двухкомпонентную деформируемую латунь

1) Л96 2) ЛЦ32 3) Л60

17. Сплавы металла, имеющие максимальную удельную прочность при температурах выше 600 °С:

1) алюминия 2) железа 3) титана

18. Антифрикционный материал, применяемый для подшипников скольжения, работающих при больших давлениях и средних скоростях вращения:

1) Б88 2) БрО10Ф1 3) ЛЦ16К4

19. Антифрикционный материал имеет низкую прирабатываемость

1) Б88 2) БрС30 3) АЧС1

20. Антифрикционный материал, лучше всего отводящий тепло от узла трения:

1) Б88 2) БрС30 3) АЧС3

21. Антифрикционный материал с мягкой основой и твердыми включениями

1) Б88 2) БрС30 3) АЧС1

22. Антифрикционный материал с твердой основой и мягкими включениями

1) Б88 2) БрС30 3) БН

23. Материалы, предназначенные для изготовления подшипников (опор) скольжения

1) демпферные 2) антифрикционные 3) текстурированные

24. Толщина рабочего покрытия из баббита, для рабочих поверхностей опор скольжения

1) менее 1 мм 2) более 1 мм 3) более 10 мм

25. Количество цинка, содержащееся в однофазных латунях:

1) более 39 % 2) менее 39 % 3) более 46 %

26. Металл, способный поглощать газы при высоких температурах:

1) алюминий 2) медь 3) титан

27. Металл, горящий в присутствии воды:

1) алюминий 2) магний 3) медь

28. Сплавы металла, имеющие очень высокую химическую стойкость:

1) алюминия 2) железа 3) титана

29. Сплавы металла, имеющие максимальную удельную прочность до температуры 300 °С:

1) алюминия 2) железа 3) титана

30. Сплавы металла, имеющие максимальную удельную прочность в интервале температур 300 - 600 °С:

1) алюминия 2) железа 3) титана

10.7. Неметаллические материалы

1. Простыми пластмассами называют

1) полимеры без добавок

2) полимеры и наполнители

3) полимеры и стабилизаторы

2. В пластмассы для повышения механических свойств добавляют

1) стабилизаторы 2) наполнители 3) пластификаторы

3. В пластмассы для замедления старения добавляют

1) стабилизаторы 2) красители 3) пластификаторы

4. В пластмассы для уменьшения хрупкости добавляют

1) стабилизаторы 2) наполнители 3) пластификаторы

5. В пластмассы для сохранения структуры молекул добавляют

1) стабилизаторы 2) красители 3)

отвердители

6. Отвердители добавляют в пластмассы

1) термопластичные 2) термореактивные 3) во все виды пластмасс 7. Назовите самый огнеопасный полимер и особенно пористые пластмассы на его основе

1) полиэтилен 2) полистирол 3) полиуретан

8. В полиэтилен для замедления старения добавляют

1) древесную муку 2) тальк 3) сажу

9. Вредное вещество, выделяемое при горении термопластов:

1) H_2SO_4 2) HCl 3) HNO_3

10. Термопласт, который взаимодействует с водой и поглощает влагу:

1) полиэтилен 2) полипропилен 3) полиамид

11. Пластмассы, имеющие более стабильные механические свойства:

1) термопласты 2) термореактопласты 3) разницы нет

12. Назовите материал с максимальной удельной прочностью

1) гетинакс

2) капрон

3) стеклотекстолтт

13. Основой полиамидного клея являются

1) термопласты

2) термореактопласты

3) термореактопласты с порошковыми наполнителями

14. Назовите клеи, обеспечивающие максимальную прочность при сдвиге

1) фенолформальдегидные

2) кремнийорганические

3) полиамидные

15. Клеи, имеющие максимальную теплостойкость:

1) фенолформальдегидные 2) кремнийорганические 3) полиамидные

16. Материал, идущий на изготовление подшипников, не требующих смазки:

1) фторопласт-4 2) фторопласт-3 3) фторопласт-2

17. Материал, широко применяемый для покрытия металлов

1) фторопласт-4 2) полиэтилен 3) фторопласт-3

18. Назовите марку синтетического изопренового каучука

1) НК 2) СКС-30 3) СКИ-3В

19. Резины, применяемые в качестве электроизоляции

1) неполярные каучуки 2) полярные каучуки 3) наирит

20. Маслобензостойкая резина

1) неполярные каучуки 2) полярные каучуки 3) наирит

21. Силикатный клей относится к группе

1) неорганические клеи 2) смоляные клеи 3) резиновые клеи

22. Резиновый клей, стойкий в морской воде:

1) БФ-4 2) 88НП 3) ВК-15

24. Корундовой называют керамику на основе

1) Al_2O_3 2) SiC 3) ZrO_2

25. Карборундовой называют керамику на основе

1) Al_2O_3 2) SiC 3) ZrO_2

26. Термостойкость строительного стекла

1) 100 - 170 °С 2) 800 - 1000 °С 3) 1200 - 1300 °С 27. Термостойкость кварцевого стекла

1) 100 - 170 °С 2) 800 - 1000 °С 3) 1200 - 1300 °С 28. Изменения, происходящие при “старении” клеящих материалов:

1) упрочнение 2) охрупчивание 3) разупрочнение

29. Прочность клея больше в 10-100 раз в случае

1) при работе на сжатие

2) при работе на растяжение

3) схема нагружения значения не имеет

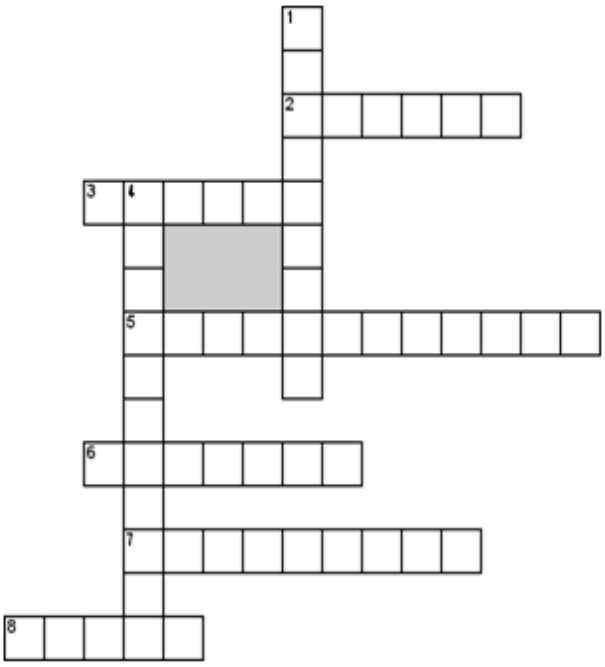
30. Долговечность резин при динамическом нагружении определяется

1) стойкостью концентрации напряжений
2) усталостной прочностью
3) восстанавливаемостью резины

11. ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

11.1. Кроссворды

Кроссворд № 1



По горизонтали:

2. Уменьшение объема (линейных размеров) в процессе охлаждения отливки (слитка) в литейной форме.

3. Термическая обработка стали, заключающаяся в нагреве закаленной на мартенсит стали до температуры ниже критической, выдержки при этой температуре и охлаждении на воздухе.

5. Способность материала приобретать необратимые изменения формы под действием нагрузки.

6. Вид термической обработки, заключающийся в нагреве стали выше критической температуры.

7. Способность материала восстанавливать форму и размеры тела после снятия нагрузки, вызвавшей деформацию.

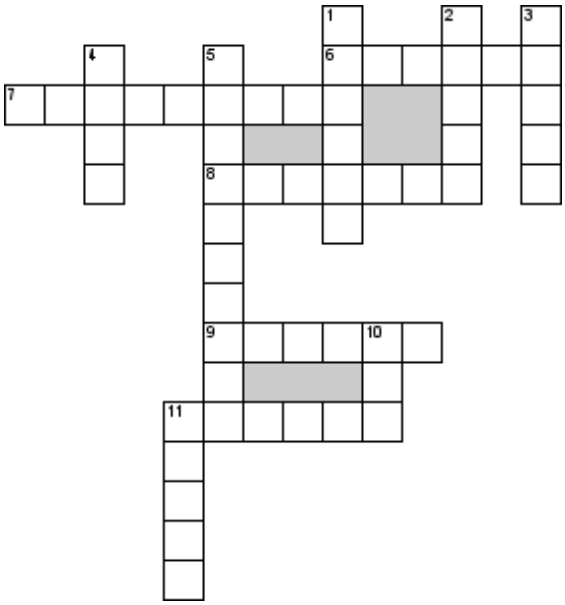
8. Вещество, содержащее в своем составе два или более компонентов, по крайней мере, один из которых – металл.

По вертикали:

1. Способность материала разрушаться под воздействием внешних сил без пластической деформации.

4. Главный термодинамический параметр.

Кроссворд № 2



***По горизонтали*:**

6. Эластичный материал, получаемый вулканизацией каучука.

7. Клетчатка, главный строительный материал растительного мира, образующий клеточные стенки деревьев и других высших растений.

8. Пластичная смазка, используемая преимущественно в механизмах, работающих в условиях сырости (горная техника и т. п.).

9. Прозрачный материал на окнах.

11. Натуральный, полимер растительного происхождения, вулканизацией которого получают резину.

***По вертикали*:**

1. Компонент состава для изготовления стержней для чёрных карандашей.

2. Пластичная водостойкая смазка, получаемая загущением нефтяных масел литиевым мылом 12-оксистеариновой кислоты.

3. Жидкость, применяемая для смазывания поршневых и роторных двигателей внутреннего сгорания.

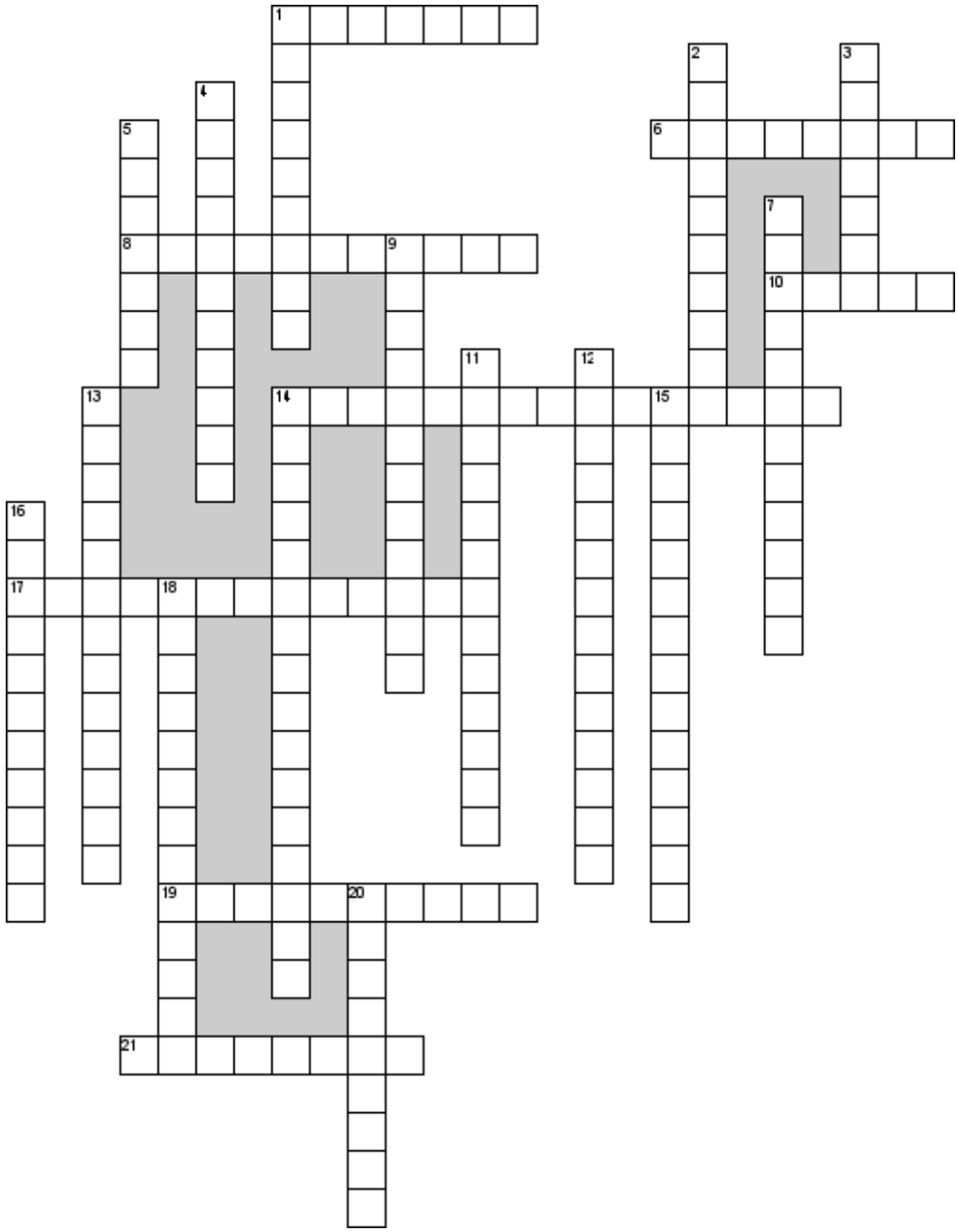
4. Вещество (чаще смесь) органического и неорганического происхождения, предназначенное для удаления окислов с поверхности под пайку.

5. Органические материалы, основой которых являются синтетические или природные высокомолекулярные соединения (полимеры).

10. Раствор, образующий при отверждении прозрачную, блестящую или матовую плёнку.

11. Основной минерал, используемый в приборе, в котором пьезоэлектрический эффект и явление механического резонанса используются для построения высокодобротного резонансного элемента электронной схемы.

Кроссворд № 3



***По горизонтали*:**

1. От какого слова появился термин «полимеризация»?

6. Пластмасса, предназначенная для изготовления базисов съёмных протезов

8. Воск растительного происхождения.

10. Обладает высокой теплостойкостью, твёрдостью и водопоглотительной способностью.

14. Процесс соединения нескольких мономерных веществ в большие

молекулы высокополимерного вещества, протекающий с повышением температуры.

17. Густая маслообразная синтетическая жидкость, вводимая в пластмассы для понижения их хрупкости и повышения холодостойкости.

19. Вещество, понижающее статическую электризацию химических волокон, пластмасс, резин.

21. Состояние пластмассовой смеси при замешивании, когда она становится липкой и при перемешивании тянется волокнами.

***По вертикали*:**

1. Материалы, получаемые из прессовочных порошков, которые под действием температуры и давления размягчаются и приобретают свойства пластического течения.

2. Высокомолекулярные соединения, обладающие при определённых условиях высокой пластичностью.

3. Низкомолекулярное вещество, образующее полимер в реакции полимеризации.

4. Вещество, вводимое в пластмассы для ускорения их отвердения.

5. Представитель базисных пластмасс.

7. Какая пластмасса используется для изготовления мягких подкладок, челюстно-лицевых протезов и т. д.

9. Вещество, вводимое в пластмассы для повышения их стойкости к свету и нагреву.

11. Химическая реакция при затвердевании пластмассы.

12. Четвёртая стадия созревания пластмассового теста.

13. Переход метала из жидкого состояния в твёрдое.

14. Жёсткая пластмасса на основе чего?

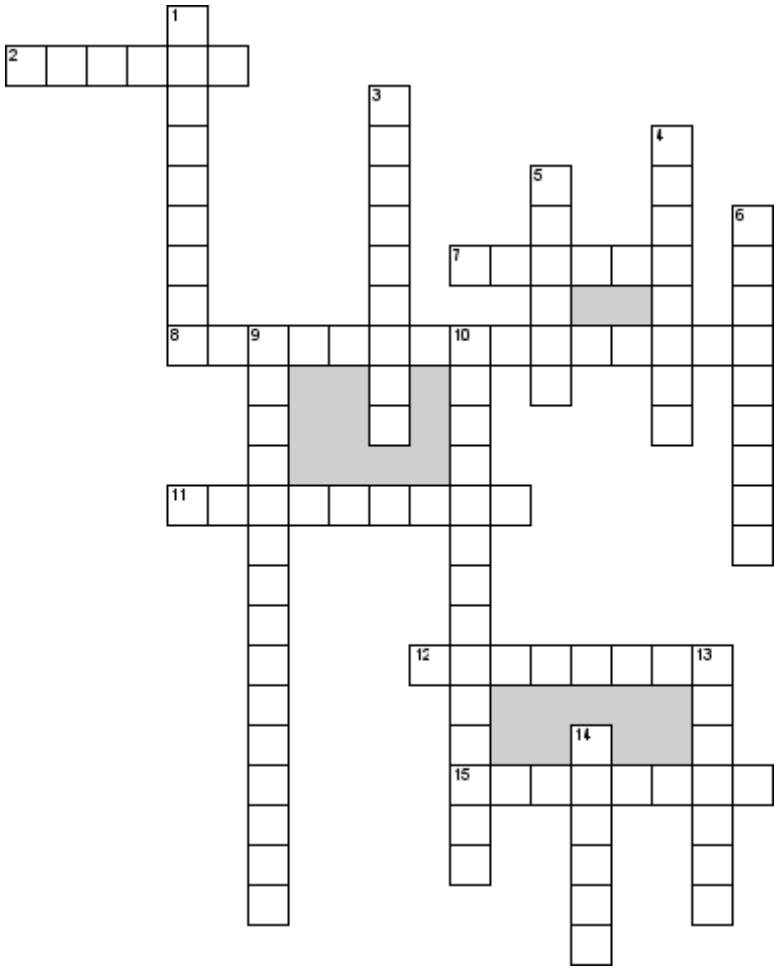
15. Пластмасса холодной полимеризации.

16. Порошкообразные или волокнистые вещества, повышающие механическую прочность и уменьшающие объёмную усадку изготовляемых изделий.

18. Третья стадия созревания пластмассового теста.

20. Материалы на основе пластмасс.

Кроссворд № 4



По горизонтали **:**

2. Углерод в чистом виде, весьма пластичный и хрупкий НВ – 3.

7. Тонкая механическая смесь зёрен феррита и цементита, прочный и твердый НВ – 200.

8. Группа материалов, обладающих низким коэффициентом трения, или материалы способные уменьшить коэффициент трения других материалов.

11. Масса вещества в единицу объема.

12. На фазовых диаграммах линия полного плавления твёрдых фаз.

15. Химическое соединение Fe_3C (железо с углеродом - углерода 6,67 %), имеет металлический блеск, электро- и теплопроводен, слабомагнитный, очень хрупкий и твердый НВ – 800.

По вертикали**:**

1. Графическое представление данных, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин.

3. Структурная составляющая железоуглеродистых сплавов, главным образом чугунов, представляющая собой эвтектическую смесь аустенита и цементита в интервале температур 727-1147 °С, или феррита и цементита ниже 727 °С.

4. Высокотемпературная гранецентрированная модификация железа и его сплавов.

5. Твердый раствор внедрения углерода в α-железо, магнитный, пластичный, мягкий НВ 60 – 100.

6. Нонвариантная (при постоянном давлении) точка в системе из *n* компонентов, в которой находятся в равновесии *n* твердых фаз и жидкая фаза.

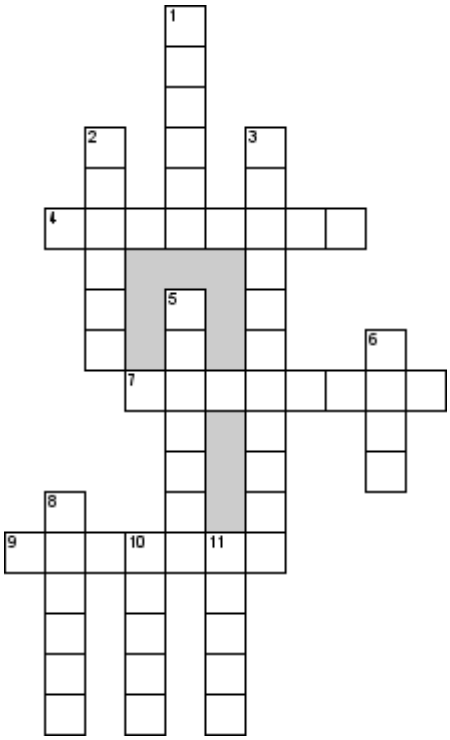
9. Часть производственного процесса, содержащая целенаправленные действия по изменению и (или) определению состояния предмета труда.

10. Процесс фазового перехода вещества из жидкого состояния в твёрдое кристаллическое с образованием кристаллов.

13. Линия на фазовых диаграммах, на которой исчезают последние капли расплава, или температура, при которой плавится самый легкоплавкий компонент.

14. Элемент побочной подгруппы восьмой группы четвёртого периода Периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева с атомным номером 26.

Кроссворд № 5



По горизонтали:

4. Химический элемент с атомным номером 74 в Периодической системе, обозначается символом W.

7. Элемент главной подгруппы третьей группы третьего периода Периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева, с атомным номером 13. Обозначается символом Al.

9. В технике металл и сплав, не являющийся чёрным.

***По вертикали*:**

1. Двойной или многокомпонентный сплав на основе меди, где основным легирующим элементом является цинк, иногда с добавлением олова, никеля, свинца, марганца, железа и других элементов.

2. Сплав меди, обычно с оловом как основным легирующим элементом, но применяются и сплавы с алюминием, кремнием, бериллием, свинцом и другими элементами

3. Сплав алюминия с медью до 4 %, марганцем и магнием.

5. Сплав алюминия с кремнием.

6. Элемент побочной подгруппы второй группы, четвёртого периода

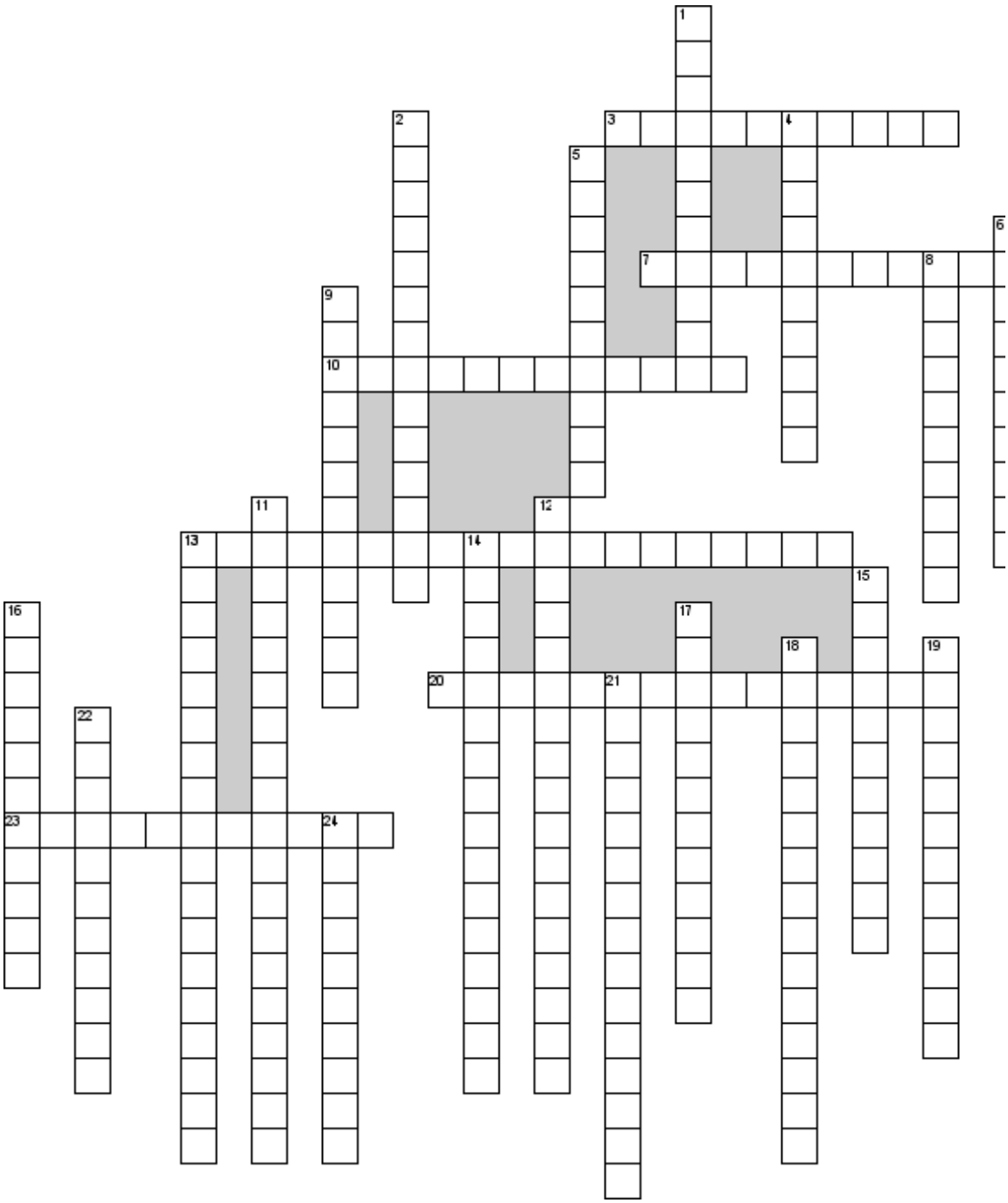
Периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева, с атомным номером 30. Обозначается символом Zn.

8. Элемент 14-й группы шестого периода Периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева, с атомным номером 82. Обозначается символом Pb.

10. Элемент побочной подгруппы четвёртой группы, четвёртого периода Периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева, с атомным номером 22. Обозначается символом Ti.

11. Элемент 14-й группы Периодической таблицы химических элементов пятого периода, с атомным номером 50. Обозначается символом Sn.

Кроссворд № 6



***По горизонтали*:**

3. Вид линейного дефекта.
7. Одна из групп цветных металлов.
10. Кристалл правильной геометрической формы.
13. Металлы, состоящие из большого числа кристаллитов.
20. Число, которым характеризуется плотность кристаллической

решётки.

23. Неодинаковость свойств кристалла в разных направлениях.

***По вертикали*:**

1. Кристаллы металлов неправильной формы.

2. Переход металла из жидкого состояния в твёрдое.

4. Химические элементы, образующие сплав.

5. Группировка атомов, при определённых условиях становящаяся центром кристаллизации.

6. Изменение размера и формы под действием приложенной внешней нагрузки.

8. Величина приложенной нагрузки, отнесённая к единице площади поперечного сечения испытуемого образца.

9. Физическое свойство металла, его способность поглощать тепло.

11. Физическое свойство металла.

12. Коррозия в водных растворах.

13. Превращение, в результате которого образуются кристаллические зёрна других форм и размеров.

14. Физическое свойство металла, его способность передавать тепло.

15. Кристалл правильной геометрической формы.

16. Вид металла в зависимости от температуры плавления.

17. Способность металла принимать новую форму и размеры.

18. Использование специально вводимых в жидкий металл примесей, которые вызывают измельчение зерна при кристаллизации.

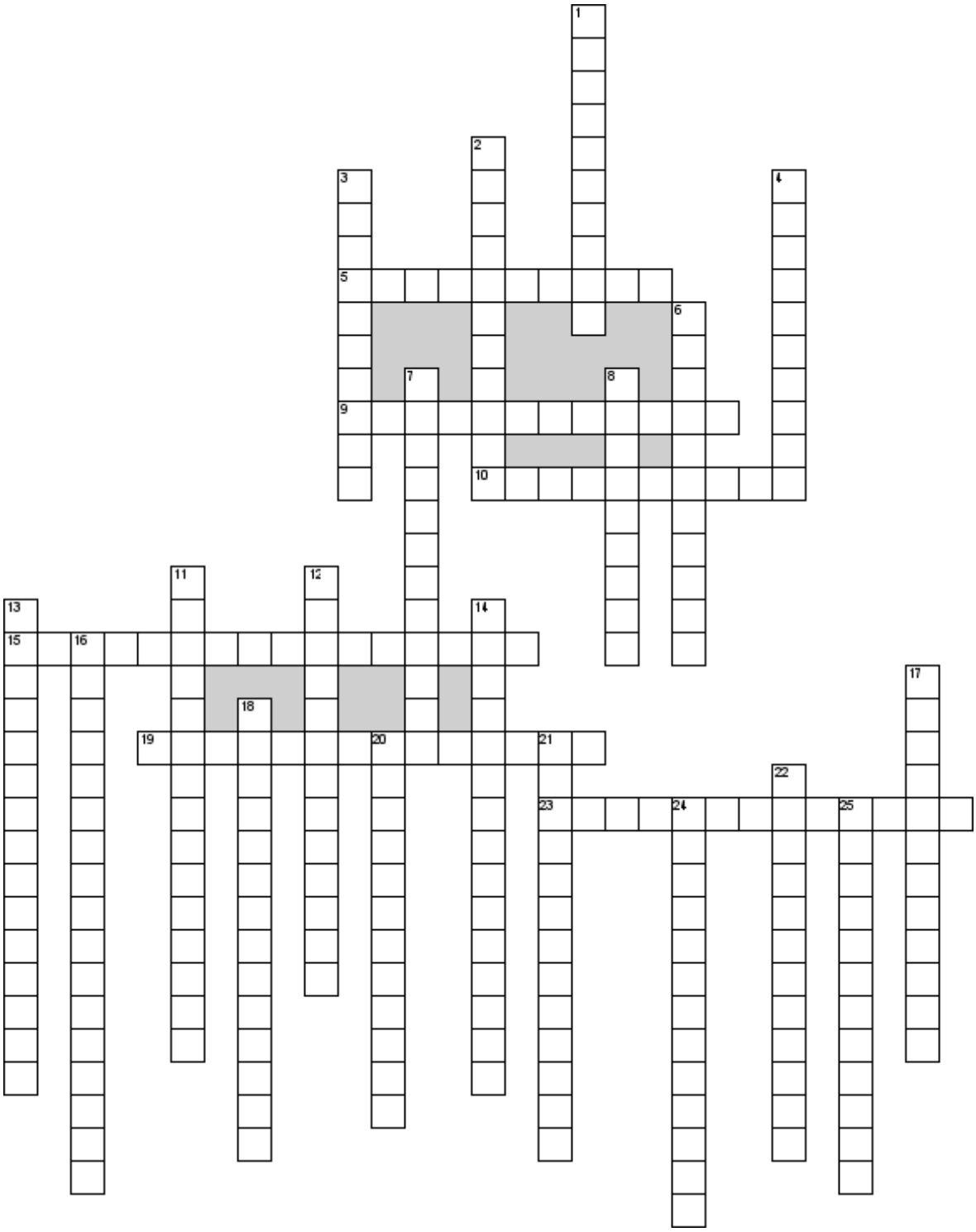
19. Вид металла в зависимости от температуры плавления.

21. Износостойкость.

22. Металлы, существующие в нескольких модификациях.

24. Добавки в составе водных растворов, замедляющие процесс коррозии.

Кроссворд № 7



***По горизонтали*:**

5. Термомеханическая обработка стали в метастабильном аустенитном состоянии ниже температуры рекристаллизации с последующим охлаждением для получения мартенсита и/или бейнита.

9. Нагрев металла до температуры на 30-50 ^{o}C выше линии *GSE* и

последующее охлаждение на воздухе.

10. Способность некоторых металлов изменять тип кристаллической решетки при изменении внешних условий (температуры и давления).

15. Процесс образования и роста одних кристаллических зёрен поликристалла за счёт других той же фазы в деформированном металле.

19. Характеризует твердость закаленной стали и измеряется в единицах твердости.

23. Вторая стадия процесса рекристаллизации деформированного металла, протекающая при нагреве.

***По вертикали*:**

1. Процесс слипания, укрупнения и выпадения в осадок частиц вещества из коллоидного раствора.

2. Теплообмен между поверхностью твердого тела и окружающей его средой.

3. Естественный или принудительный отвод теплоты от какого-либо тела или его части.

4. Процесс поверхностного насыщения углеродом, произведенный с целью поверхностного упрочнения деталей.

5. Процесс насыщения поверхностного слоя детали бором.

7. Процесс насыщения поверхностного слоя стали хромом для повышения коррозионной стойкости и жаростойкости.

8. Структура кристаллических твёрдых тел, возникающая в результате бездиффузионного полиморфного превращения при быстром охлаждении.

11. Улучшение термообработкой структуры цветных сплавов и сталей, приближающей ее к холоднообработанному состоянию после закалки.

12. Процесс насыщения поверхностного слоя детали кремнием для повышения коррозионной стойкости и кислотостойкости.

13. Расстояние от поверхности до того места, где в структуре 50 % мартенсита и 50 % троостита (полумартенситная зона).

14. Процесс создания упрочненного слоя, при котором подходящая сталь нагревается в газообразной атмосфере химического состава, способного вызвать одновременную диффузию углерода и азота в поверхность металла и

создание градиента концентрации.

16. Предварительная термообработка материала для получения заданных свойств при последующей термообработке.

17. Вид термической обработки стали, заключающийся в её нагреве выше температуры верхней критической точки и охлаждении со скоростью 100-600 °С/мин.

18. Термообработка, применяемая к среднеуглеродистым и высокоуглеродистым сталям перед волочением провода или между протяжками.

20. Процесс насыщения поверхностного слоя различных металлов и сплавов, стальных изделий или деталей азотом при нагреве в соответствующей среде

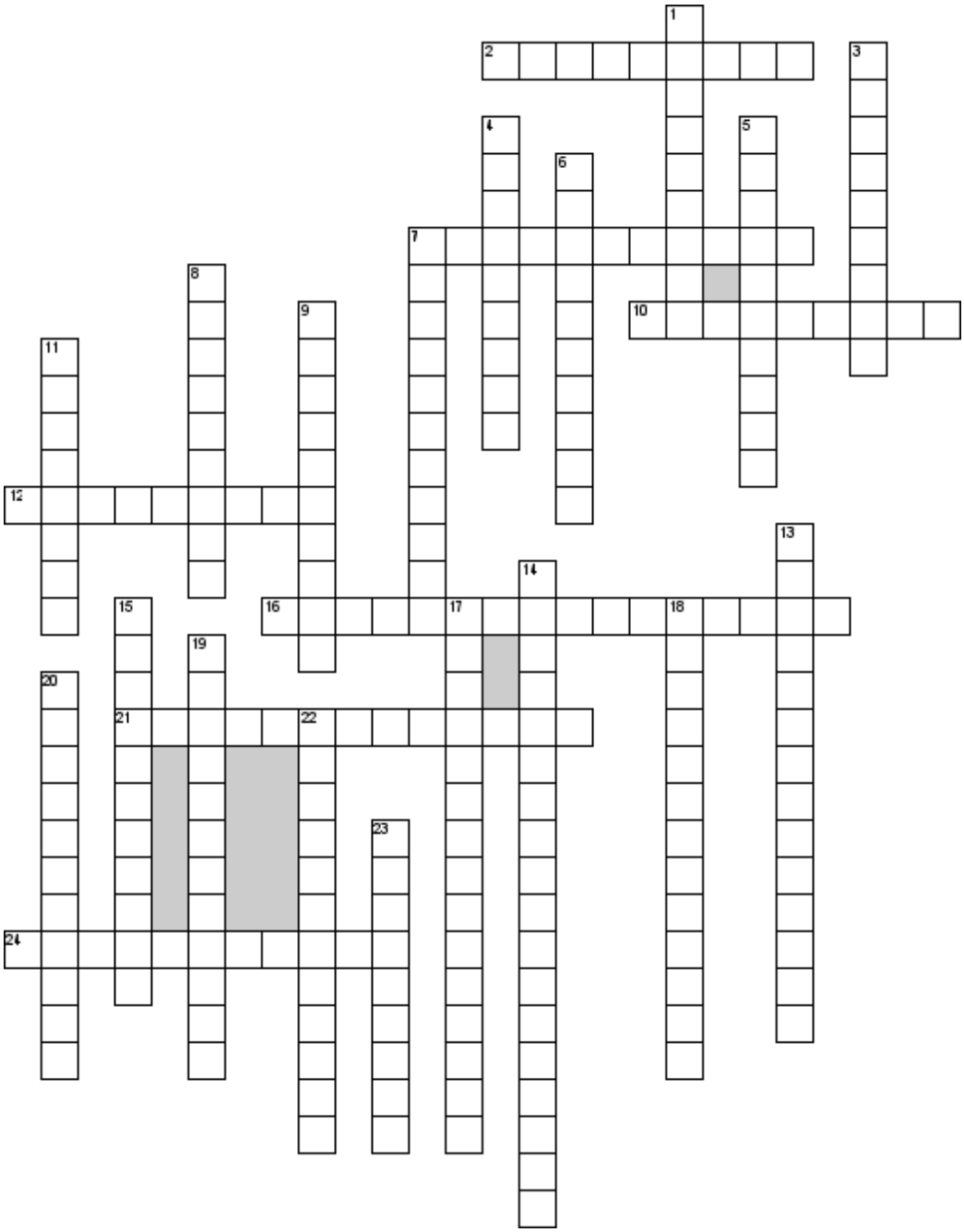
21. Жидкое или газообразное вещество, применяемое для передачи тепловой энергии.

22. Насыщение поверхностного слоя изделий одновременно углеродом и азотом в жидкой среде.

24. Процесс получения гомогенных растворов, эмульсий, сплавов и т. п.

25. Процесс насыщения поверхностного слоя стали алюминием для повышения жаростойкости (окалиностойкости) и сопротивления атмосферной коррозии.

Кроссворд № 8



***По горизонтали*:**

2. Способность металла под воздействием внешних сил не разрушаться.

7. Воск из пальмовых листьев.

10. Нонвариантная точка в системе из *n* компонентов, в которой находятся в равновесии *n* твердых фаз и жидкая фаза.

12. Процесс протягивания прутка через отверстие меньшего размера.

16. Наука, изучающая связь между составом, строением и свойствами

металлов.

21. Способность металлов образовывать сварные неразъемные соединения.

24. Способность металлов образовывать разные кристаллические решетки.

***По вертикали*:**

1. Первый химик, который дал определение физической химии.

3. Эвтектика с выделением кристаллов аустенита и цементита.

4. Сопротивление металлов проникать в него другого более твердого тела.

5. Свариваемость - это свойство металла образовывать моментальное соединение.

6. Органический материал на основе полимеров.

7. Химическое вещество, ускоряющее реакцию.

8. Все слепочные материалы состоят из …..

9. NaCl-соль.

11. Повреждение металлов вследствие химического или электрохимического взаимодействия с окружающей средой.

13. Процесс перехода вещества из жидкого состояния в твёрдое.

14. Способность тела проводить электрический ток.

15. Процесс выдавливания металла из контейнера через одно или несколько отверстий в матрице с площадью, меньшей, чем поперечное сечение исходной заготовки.

17. Сопротивление износу.

18. Поворот части кристалла относительно плоскости в положение зеркального отображения.

19. Способность материала принимать новую форму и размеры.

20. Показатель прочности материала и его изнашиваемости.

22. Способность к продолжительному выполнению какой-либо работы без заметного снижения работоспособности.

23. Моделировочно-литьевой воск.

11.2. Ответы на кроссворды

Кроссворд № 1

***По горизонтали*:**
2. усадка
3. отпуск
5. пластичность
6. закалка
7. упругость
8.сплав

***По вертикали*:**
1. хрупкость
4. температура

Кроссворд № 2

***По горизонтали*:**
6. резина
7. целлюлоза
8. солидол
9. стекло
11. каучук

***По вертикали*:**
1. графит
2. литол
3. масло
4. флюс
5. пластмасса
10. лак
11. кварц

Кроссворд № 3

***По горизонтали*:**
1. полимер
6. базисная
8. карнаубский
10. акрил
14. поликонденсация
17. пластификатор
19. антистатик
21. вязкость

По вертикали:
1. пластмасса
2. пластмасса
3. мономер
4. отвердитель
5. этакрил
7. эластическая
9. стабилизатор
11. полимеризация

12. резиноподобная
13. кристаллизация
14. поливинилхлорида
15. поливинилхлорида
16. наполнитель
18. тестообразная
20. текстолит

Кроссворд № 4

***По горизонтали*:**
2. графит
7. перлит
8. антифрикционные
11. плотность
12. ликвидус
15. цементит

***По вертикали*:**
1. диаграмма
3. ледебурит
4. аустенит
5. феррит
6. эвтектика
9. технологический
10. кристаллизация
13. солидус
14. железо

Кроссворд № 5

***По горизонтали*:**
4. вольфрам
7. алюминий
9. цветной

***По вертикали*:**
1. латунь
2. бронза
3. дюралюминий
5. силумин
6. цинк
8. свинец
10. титан
11. олово

Кроссворд № 6

***По горизонтали*:**

3. дислокация

7. одна из групп цветных металлов

10. монокристалл

13. поликристаллические

20. координационное

23. анизотропия

***По вертикали*:**

1. кристаллиты

2. кристаллизация

4. компоненты

5. зародышевые

6. деформация

8. напряжение

9. теплоёмкость

11. физическое свойство металла

12. коррозия в водных растворах

13. перекристаллизация

14. теплопроводность

15. монокристалл

16. тугоплавкие

17. пластичность

18. модифицирование

19. легкоплавкие

21. износостойкость

22. полиморфные

24. ингибиторы

Кроссворд № 7

***По горизонтали*:**

5. аусформинг

9. нормализация

10. аллотропия

15. рекристаллизация

19. закаливаемость

23. полигонизация

***По вертикали*:**

1. коагуляция

2. теплоотдача

3. охлаждение

4. цементация

6. борирование

7. хромирование

8. мартенсит

11. экстраупругость
12. силицирование
13. прокаливаемость
14. нитроцементация
16. кондиционирование
17. сорбитизация
18. патентирование
20. азотирование
21. теплоноситель
22. цианирование
24. гомогенизация
25. алитирование

Кроссворд № 8

***По горизонтали*:**

2. прочность
7. карнаубский
10. эвтектика
12. волочение
16. материаловедение
21. свариваемость
24. полиморфизм

***По вертикали*:**

1. Ломоносов
3. ледебурит
4. твердость
5. физическая
6. пластмасса
7. катализатор
8. краситель
9. поваренная
11. коррозия
13. кристаллизация
14. электропроводность
15. прессование
17. износостойкость
18. двойникование
19. пластичность
20. стираемость
22. выносливость
23. формадент

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арзамасов Б. Н., Сидорин И. И. и др. Материаловедение: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 648 с.
2. Батышев А. И., Безпалько В. И., Смолькин А. А. Материаловедение и технология материалов М.: Изд-во Инфра-М, 2012. 288 с.
3. Богодухов С. И., Козик Е. С.. Материаловедение: учеб. для вузов. М.: Машиностроение, 2015. 504 с.
4. Бондаренко, Г. Г. Кабанова Т. А., Рыбалко В. В. Материаловедение: учебник для бакалавров / под ред. Г. Г. Бондаренко. 2-е изд. М.: Юрайт, 2014. 359 с.
5. Геллер Ю. А., Рахштадт А. Г. Материаловедение (методы анализа, лабораторные работы и задачи). Издание четвертое, доп. и перераб. М.: Металлургия, 1976. 447 с.
6. Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.
7. Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П. Материаловедение: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 2009. 528 с.
8. Материаловедение и технология металлов: учеб. для вузов / Г. П. Фетисов [и др.] ; под ред. Г. П. Фетисова. 6-е изд., доп. М.: Высш. школа, 2008. 877 с.
9. Травин О. В. Материаловедение: учебно-практическое пособие. М.: МГУТУ, 2004. 68 с.
10. Методы исследования материалов / Л. И. Тушинский, А.В. Плохов, А. О. Токарев и др. М.: Мир, 2004. 384 с.
11. Шубина Н.Б. Материаловедение: учебник. М.: КноРус, 2016. 282 с.
12. Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

.

Приложение

Таблица П1

Стали, износостойкие в условиях кавитационной эрозии

и динамических нагрузок

Сталь	Химический состав, %						Назначение
		i	n	r	i	другие легирующие элементы	
ИЗНОСОСТОЙКИЕ В УСЛОВИЯХ КАВИТАЦИОННОЙ ЭРОЗИИ							
Стойкие в воде при повышенной скорости потока							
Х18Н9Т	< 0,12	0,8	2	7-19	,0-9,5	Ti = (%C – 0,02)x 5 ≤ 0,7 %	Лопасти гидротурбин
Стойкие при значительной скорости потока							
30Х10Г10	,3-0,4	,5-0,6	,0-11	-11		–	Лопасти гидротурбин и гидронасосов
С повышенной кавитационной, коррозионной и абразивной стойкостью							
0Х14АП2	,1	0,3	0-15	3-17		0,1-0,3 N	Лопасти гидротурбин и гидрона-сосов, в том числе в морской воде
0Х14АГ12М	,1	0,3	0-15	3-17		0,1-0,3 N	
ИЗНОСОСТОЙКИЕ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК							
Г13	,1-1,3	0,5	2-14			–	Крестовины рельсов, щеки дробилок, черпаки

							землеройных машин, траки гусеничных машин

Таблица П2

Нагревательные устройства термических производств машиностроения (примеры)

Обозначение серии	Тип нагревательного устройства	Конструкция устройства	Характер среды	Максимальная рабочая температура, ^{0}С	Назначение при термообработке
Вид нагрева – электрический					
СНО	СНО-4·8·2,5/10	Камерная	Воздушная атмосфера	1000	Закалка, Отжиг
СН3	СН3-3·6·2/10	Камерная	Защитная	1000	Закалка,

			атмосфера		Отжиг
С КБ	ОКБ-210	Камерная	Защитная атмосфера	1300	Закалка
С Ш3	СШ3-6·6/7	Шахтная	Защитная атмосфера	700	Отпуск Закаленных изделий
П Н	ПН-32	Шахтная	Воздушная атмосфера	650	Отпуск Закаленных изделий
І	Ш-30	Шахтная	Воздушная атмосфера	950	Закалка
І	Ц-105Б	Шахтная	Наугл ероживающая атмосфера	950	Цементация
С ША	США-6·6/6	Шахтная	Аммиак	600	Азотирование
С ВС	СВС-2·4·4/10	Ванна электродная	Расплавленная соль	1000	Закалка
С ВГ	СВГ-20/8,5	Печь-ванна	Расплавленная соль	850	Отпуск закаленных изделий
Вид нагрева – индукционный					

МГЗ	МГЗ-208АК	Машинный генератор ТВЧ	Воздух	Частота тока 8000 Гц	Поверхностная индукционная закалка

Таблица П3

Время нагрева и выдержки в электрических и газовых печах и соляных ваннах при закалке стали

Сечение поперечное (диаметр детали), мм	Продолжительность, мин				
	печи электрические	печи газовые		соляные ванны (жидкая среда)	
	нагрев и выдержка	нагрев	выдержка	нагрев	выдержка
25	1,0 на 1 мм сечения	20	5	7	3
50		40	10	17	8
100		80	20	33	17

150		120	30	50	25
200		160	40	65	35

Таблица П4

Группы улучшаемых конструкционных сталей по степени нагруженности
деталей машин и механическим свойствам после закалки и высокого отпуска

Улучшаемые стали (основные разновидности, примеры марок)	Механические свойства сердцевины деталей	
	предел прочности $\sigma_в$, МПа	предел текучести $\sigma_{0,2}$, МПа
1. **Малонагруженные детали машин** (прокаливаемость при закалке в сечениях до 10-12 мм; $\sigma_{0,2} < 600$ МПа).		
Углеродистые стали марок 35,40,45	600…700	400…600
2. **Средненагруженные детали машин** (прокаливаемость при закалке в сечениях до 20-50 мм; $\sigma_{0,2} < 850$ МПа).		
Хромистые: 40Х, 45Х Марганцовистые: 45Г2 Хромомарганцовистые (дополнительно вводят титан или бор): 30ХГТ; 40ХГР	900…1100	700…850

3. **Высоконагруженные детали машин** (прокаливаемость при закалке в сечениях до 75-100 мм; $\sigma_{0,2} < 1100$ МПа).		
Хромоникелевые: 40ХН Хромоникельмолибденовые: 40ХН2М Хромоникельмолибденованадиевые: 38ХН3МФА	1000…1200	800…1100

Таблица П5

Механические свойства некоторых типовых конструкционных среднеуглеродистых сталей после закалки и высокого отпуска при температуре 540…600 ^{0}С

Марка улучшаемой стали	$_{зак}$, ^{0}С	Среднее значение критического диаметра, мм**	Предназначены для деталей с поперечным сечением, мм	Механические свойства		
				$\sigma_{0,2}$, МПа	$_в$, МПа	НВ
40	830	12	15…20	450	600	167…207
45	810	12	15…20	490	630	205…210
40Х	860	15	25…35	800	900	163…168
40ХН	820	25	50…75	800	1000	166…170
30ХГС	880	25	50…75	980	1080	207…217

40ХН2М	50	100	75…100	950	050	280…310
38ХН3МФА	50	100	100…200	1070	150	230

* Относительные единицы: за 1,0 принята оптовая цена углеродистой качественной стали.

** Диаметр образца, закаливающегося насквозь с получением в центре микроструктуры из 90 % мартенсита и 10 % троостита.

Таблица П6

Основные способы поверхностного упрочнения деталей машин

Типовая глубина упрочняемого слоя, мм	Упрочняющая обработка	Твердость поверхностного слоя	
		HV	HRC
0,1…0,2	Борирование	1800…2000	-
0,3…0,5	Азотирование	850…1050	65…68
0,2…0,8	Нитроцементация, закалка и низкий отпуск	-	58…64
0,5…1,0	Лазерное термоупрочнение	950…1200	67…72
1,5…1,8	Цементация, закалка и низкий отпуск	-	58…62
1,5…2,0	Объемно-поверхностная	-	5

	закалка и низкий отпуск		8…61
1,6…5,0	Поверхностная индукционная закалка ТВЧ и низкий отпуск	-	45…55

Таблица П7

Группы цементуемых конструкционных сталей по степени нагруженности деталей машин и механическим свойствам сердцевины деталей после цементации, закалки и низкого отпуска

Типовые примеры марок цементуемых сталей	Механические свойства сердцевины деталей	
	предел прочности $\sigma_в$, мпа	предел текучести $\sigma_{0,2}$, мпа
1. Малонагруженные детали машин (прокаливаемость при закалке малая; $\sigma_{0,2} < 300$ МПа)		
Углеродистые стали марок 10, 15, 20	380…460	245…300
2. Средненагруженные детали машин (прокаливаемость при закалке в сечениях 10…20 мм; $\sigma_{0,2} < 700$ МПа)		
Легированные стали марок 15Х, 20Х, 15ХР, 20ХН и др.	730…830	590…700
3. Высоконагруженные детали машин (прокаливаемость при закалке в зависимости от марки стали от 20 до 100 мм; $\sigma_{0,2} < 1080$ МПа)		
Легированные стали марок 25ХГТ, 20ХГР, 25ХГМ, 12ХН3А, 12Х2Н4А, 15ХГН2ТА, 20ХН2М и др.	980…1270	830…1080

Таблица П8

Механические свойства в сердцевине некоторых типичных цементуемых
сталей после цементации и низкого отпуска при 180…200 ^{0}C

Марка стали	Рекомендуемое максимальное поперечное рабочее сечение, мм	Температура закалки, ^{0}C	Механические свойства			
			$\sigma_в$, МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ,	,
20Х	35	820	650	800	1	0
18ХГТ	35	870	900	1000		0
20ХГР	40…60	880	800	1000		0
20ХГМ	60…80	860	1100	1200	0	5
30ХГТ	60…80	850	1300	1500		0
12Х2Н4А	100…120	800	110	1300		5
18Х2Н4МА	более 120	860	850	1150	2	0

Таблица П9

Характеристики основных видов поверхностного упрочнения

Операции упрочняющей термической обработки	Типовая глубина упрочняе-мого слоя	Твердость поверхностного слоя		Поперечное сечение детали, мм	Предел текучести сердцевины $\sigma_{0,2}$, МПа	Примеры типовых марок сталей
		V	HRC			
Химико-термическая обработка						
Цементация, закалка и низкий отпуск	1,5…1,8	-	58…62	До 50…60	390…830	20Х, 25ХГТ, 20ХН2М и др.
Нитроцемен-тация, закалка и низкий отпуск	0,2…0,8	-	58…64	До 30	930	35Х, 25ХГМ, и др.
Борирование	0,1…0,2	1800…2000	-	До 150	Зависит от марки стали и термообработки	Конструк-ционные стали (40Х, 30ХГСА и др.)
Азотирование	0,3…0,5	850…1050	65…68	До 60…200	880…590	38Х2МЮА и др.

Поверхностная термическая обработка						
Поверхностная индукционная закалка (закалка с нагревом ТВЧ) и низкий отпуск	1,6…5,0	-	45…55	40…100	375	40Х, 45 и др.
Объемно-поверхностная индукционная закалка с глубинным нагревом и низкий отпуск	1,5…2,0	-	58…61	6	1850	55ПП
Лазерная закалка (термоупрочнение) и низкий отпуск	0,5…1,0	950…1200	67…72	16…25	460…780	45, 45Х и др.

Таблица П10

Данные по поверхностной индукционной закалке

Диаметр изделия, мм	Рекомендуемая глубина закаленного слоя, мм	Глубина закаленного слоя, мм	Рекомендуемая частота тока, Гц
40	1,6…3,1	1,5	25000*
60	2,3…3,9	2,0	15000*
80	2,6…4,5	3,0	8000**
100	2,9…5,0	4,0	4000**

Генератор тока: *ламповый или машинный;

** машинный.

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ высшего
профессионального образования

НОВИКОВА Н.А

Методическое руководство для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»

для студентов направления бакалавриата:
15.03.01 «Машиностроение»
очного и заочного обучения

Екатеринбург
2019

Министерство образования и науки Российской федерации
Уральский государственный горный университет

ОДОБРЕНО:
Методической комиссией
Горно-механического факультета
Председатель комиссии
_____ проф. В.П.Барановскиий

Методическое руководство

для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

Новикова Н.А. Методическое руководство для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация» для студентов очного и заочного обучения специальности 150700- «Машиностроение» (МШС). Екатеринбург: Издательство УГГУ, 2014. 33 с.

В руководстве изложены методические указания, последовательность решения задач по допускам гладких цилиндрических соединений, цилиндрических зубчатых колес, подшипников качения и размерных цепей, приведены справочные данные, необходимые для решения задач.

Пособие рассмотрено на заседании кафедры эксплуатации горного оборудования, ----------. (протокол №-----) и рекомендовано к изданию в УГГУ.

© Новикова Н.А.,
© УГГУ 2014 г.

В целях закрепления основных положений по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация» студенты самостоятельно выполняют две расчетно-графические работы.

РАБОТА №1

Работа заключается в анализе допусков и посадок гладких соединений. Анализируются все стандартные посадки, образующиеся с основным валом заданного квалитета и заданного номинального размера и все стандартные посадки, образующиеся с основным отверстием заданного квалитета и размера.

Работа выполняется на специальном бланке и подлежит защите. Бланк заполняется карандашом, с соблюдением требований ГОСТ 2.307-68.

Для выполнения данной работы студенту необходим для определения полей допусков ГОСТ 25347-82 (СТ СЭВ 144-75).

1.Последовательность выполнения работы

1.1. Для выполнения работы студент получает бланк с заданием.

1.2. Из таблицы ГОСТ 25347-82 выписать в графу 1 бланка работы все стандартные посадки, образующиеся с основным валом заданного квалитета, и все стандартные посадки, образующиеся с основным отверстием заданного квалитета.

1.3 Посадки записываются в соответствии с ГОСТ на условные обозначения полей допусков: предельные отклонения отверстия записываются в числителе, а вала – в знаменателе, например: $50\ \frac{H7}{e8}$ или 50 *H7/e8*. Где: 50 – номинальный размер соединения; *H7*- условное обозначение поля допуска отверстия; *e8*- поле допуска вала.

Аналогично по заданному квалитету и номинальному размеру выписываются все стандартные посадки в системе вала.

1.4. В графы 2 и 3 каждой системы (система отверстия, система вала) заносятся числовые значения предельных отклонений для всех полей допусков.

Числовые значения предельных отклонений принимаются по ГОСТ25347-82 (СТ СЭВ 144-75). При отсутствии указанного стандарта предельные отклонения находят расчетным путем с помощью ГОСТ 25346-82 (СТ СЭВ 145-75).

1.5. В графы 4 и 5 каждой системы посадок записываются исполнительные размеры для отверстий и валов с указанием условного обозначения предельных отклонений, а в графы 6 и 7 – исполнительные размеры, но уже в числовых величинах предельных отклонений, мм.

1.6. Проводится математический анализ зазоров и натягов для каждого сопряжения в обеих системах. Величины зазоров и натягов по абсолютной величине, в мкм, заносятся в графы отчета 8, 9, 10 и 11 соответственно каждой системы посадок.

Предельные зазоры и натяги определяются:

посадки с зазором:

$$S_{max} = ES - ei\ , \qquad S_{min} = EI - es\ ;$$

посадки с натягом:

$$N_{max} = es - EI, \qquad N_{min} = ei - ES\ ;$$

переходные посадки:

$$S_{max} = ES - ei, \qquad N_{max} = es - EI,$$

где S_{max} и S_{min} - наибольший и наименьший зазор;
N_{max} и N_{min} - наибольший и наименьший натяг;
ES и EI - верхнее и нижнее отклонение отверстия;
es и ei - верхнее и нижнее отклонение вала.

1.7. Определяется для посадок в системе отверстия и в системе вала допуск посадки исходя из предельных зазоров или натягов.

Для посадок с зазором $T_n = S_{max} - S_{min} = IT_D + IT_d$;
Для посадок с натягом $T_n = N_{max} - N_{min} = IT_D + IT_d$;
Для переходных посадок $T_n = S_{max} + N_{max} = IT_D + IT_d$;

При этом IT_D – допуск отверстия,
IT_d – допуск вала.

Результаты расчета заносятся в графу 12 бланка отчета соответственно каждой посадке, мкм.

1.8. Строятся схемы полей допусков для всех посадок в системе отверстия и в системе вала. Для построения полей допусков следует принять определенный масштаб.

1.9. Для одной (любой) посадки в системе отверстия и для одной посадки в системе вала оформляются эскизы сопряжений.

При этом на эскизах сопряжений указать исполнительные размеры на двух размерных линиях: на одной указать номинальный размер и условное обозначение предельных отклонений, на второй - номинальный размер с числовыми предельными отклонениями.

Образец контрольной работы №1 приведен в таблице 1.1 и Рис.1.1, Рис.1.2.

Таблица 1.1

Дать анализ всех стандартных посадок в системе вала с валом h5 номинального размера 20 мм

Посадка	Отклонение в мкм.		Наносимый размер на чертежах деталей (в мм)				Натяги в мкм		Зазоры в мкм		Допуск посадки в мкм
	Отв.	Вала	Условно		С числовыми отклонениями		max	min	max	min	
	ES EJ	es ej	Отв.	Вала	Отв.	Вала					

Схема полей допусков для размера 20 мм с полем допуска основного вала h5

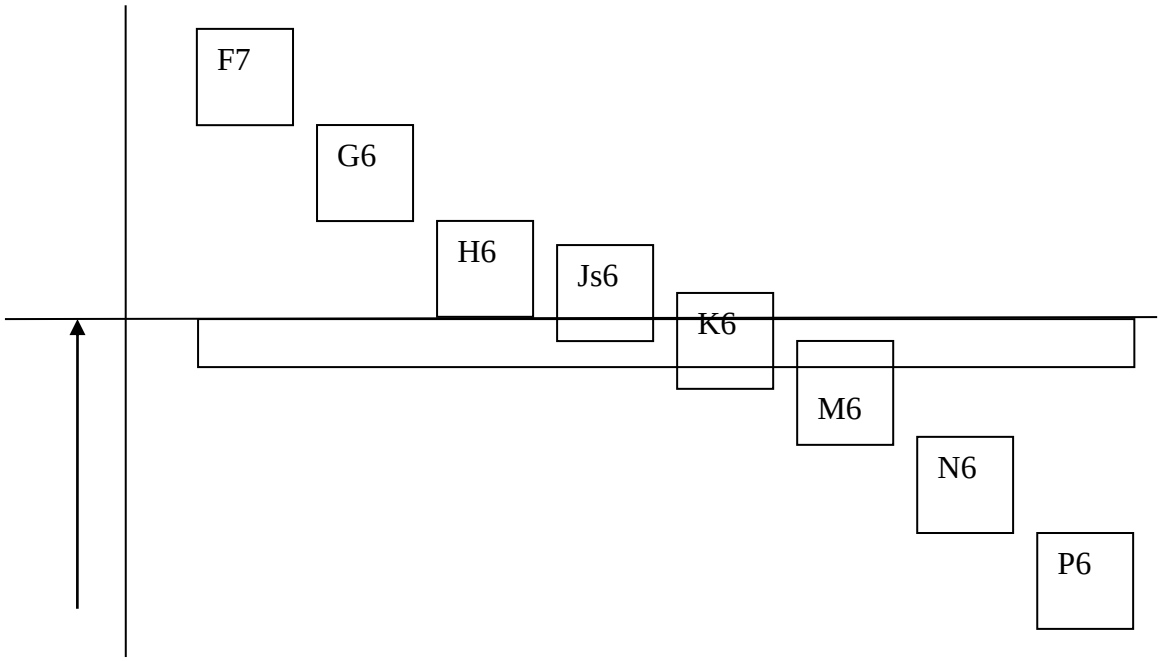


Рис 1.1 Эскизы деталей и сопряжения для посадки с полем допуска h5 в системе вала

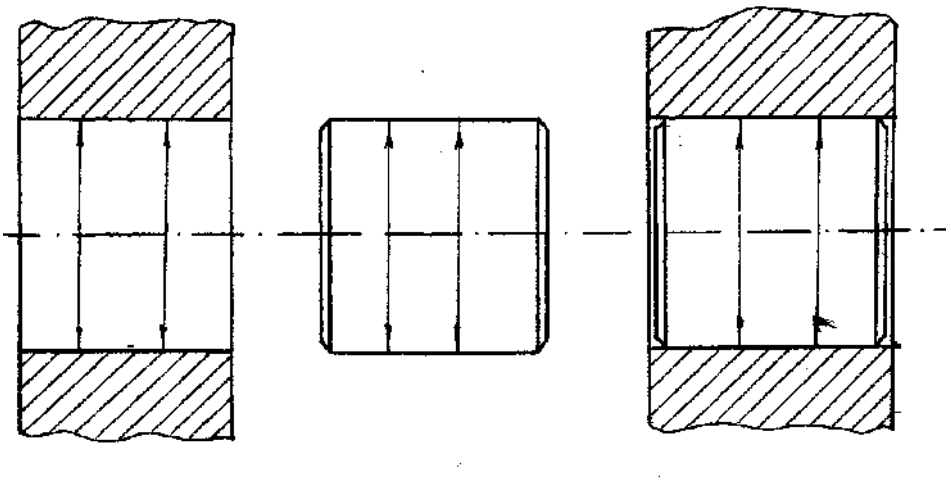


Рис.1.2.Схема обозначения посадок на чертежах

РАБОТА №2

Работа включает в себя следующие расчеты:
- расчет и выбор посадки с зазором,
- расчет и выбор посадки с натягом,
- выбор посадок для подшипников качения,
- определение исполнительных элементов зубчатого колеса,
- решение размерных цепей.

Работа выполняется на бумаге формата А4.

Номера вариантов задаются студентам преподавателем.

2.1. Расчет и выбор посадки с зазором

По заданным условиям работы подшипника скольжения студент должен рассчитать и выбрать стандартную посадку из ГОСТ 25347-82.

Последовательность расчета:

2.1.1. Определяется удельное давление на подшипник, Па

$$P = \frac{R}{D \bullet l},$$

где R - радиальная нагрузка на цапфу, Н;

D - номинальный диаметр сопряжения, м;

l - длина сопряжения, м.

2.1.2. Определяется относительная длина подшипника

$$\lambda = \frac{l}{D}$$

2.1.3. Если рабочая температура подшипника отличается от температуры, при которой устанавливается вязкость масла, необходимо определить динамическую вязкость масла при рабочей температуре. Машинные масла испытываются при $t = 50^0$C, а тяжелые и моторные масла при температуре $t = 100^0$C

$$\mu_t = \mu_{50}\left(\frac{50}{t^0}\right)^x \quad \text{или} \quad \mu_t = \mu_{100}\left(\frac{100}{t^0}\right)^x$$

где μ_{50} и μ_{100} – динамическая вязкость масла, принятая по таблице 2.2, Па·с;

t - рабочая температура подшипника;

x – показатель степени, принимаемый в зависимости от вязкости масла по таблице 2.1.

Таблица 2.1

Значение показателя степени

Вязкость св. масла, Па С от	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09
до	0,04	0,05	0,07	0,09	-
Значение x	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0

Таблица 2.2

Вязкость масел при температуре $t = 50^0$C

Марка масла	Вязкость, Па·с	Марка масла	Вязкость, Па·с
И-8А	0,005…0,007	ИГП-4	0,003…0,004
И-12А	0,009…0,012	ИГП-6	0,004…0,006
И-20А	0,015…0,019	ИГП-8	0,006…0,007
И-25А	0,021…0,023	ИГП-18	0,014…0,017
И-30А	0,025…0,028	ИГП-30	0,024…0,026
И-40А	0,031…0,039	ИГП-38	0,030…0,034
И-50А	0,041…0,048	ИГП-49	0,041…0,045
И-70А	0,057…0,066	ИГП-72	0,062…0,066

Таблица 2.3.

Коэффициент точности по квалитетам

Квалитеты	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
«а»	7	10	16	25	40	64	100	160	250	400	640	1000	1600

Таблица 2.4.

Единица допуска для размеров от 1 до 500 мм

Интервалы диаметров	1	3	6	10	18	30	50	80	120	180	250	315	400
	3	6	10	18	30	50	80	120	180	250	315	400	500
Единица допуска ι, мкм	0,54	0,73	0,90	1.09	1,30	1,56	1,86	2,17	2,52	2,89	3.23	3,54	3,89

2.1.4. Вычисляется характеристика режима работы подшипника по зависимости

$$A = \frac{\mu \cdot \omega}{P} ,$$

где μ_t - динамическая вязкость масла при рабочей температуре подшипника, Па.с

ω - угловая скорость вращения вала, рад/с.

P - удельное давление на подшипники, Па;

Если по условию задачи задана частота вращения вала, то угловую скорость можно определить по зависимости

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} ,$$

где n – частота вращения вала, об/мин.

2.1.5. Вычисляется оптимальный относительный зазор при относительном эксцентриситете χ =0,5.

$$\psi_{опт} = \sqrt{A \cdot C_{R1}},$$

где C_{R1} – коэффициент несущей способности подшипника, соответствующий χ =0,5. Принимается по табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значение коэффициентов C_{R1}, C_{R2}, C_{R3} в зависимости от относительного эксцентриситета

Относительный эксцентриситет χ	Значение C_R при λ					
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,3	0,089	0,133	0,182	0,234	0,287	0,339
0,5	0,216	0,317	0,427	0,538	0,647	0,754
0,75	0,776	1,098	1,418	1,720	1,965	2,248
χ	C_R при λ					
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	2,0
0,3	0,391	0,440	0,487	0.529	0,610	0,763
0,5	0,853	0.947	1,033	1,111	1,248	1,483
0,75	2,469	2,664	2,838	2,990	3,242	3,671

2.1.6. Вычисляется минимальный относительный зазор при *относительном* эксцентриситете χ =0,3.

$$\psi_{minF} = \sqrt{A \cdot C_{R2}} \ ,$$

2.1.7. Вычисляется максимальный относительный зазор при относительном эксцентриситете χ =0,75.

$$\psi_{maxF} = \sqrt{A \cdot C_{R3}},$$

2.1.8. Зная относительные зазоры и номинальный диаметр соединения, определяют предельные диаметральные зазоры, мм

$$S_{opt} = \psi_{onm} \cdot D; \ S_{min\,F} = \psi_{minF} \cdot D; \ S_{maxF} = \psi_{maxF} \cdot D$$

где *D*- номинальный диаметр соединения, мм.

2.1.9. По предельным зазорам определяется допуск зазора, мкм

$$T_{sF} = S_{maxF} - S_{min\,F}$$

2.1.10. Устанавливается коэффициент точности по зависимости

$$a = \frac{T_{SF}}{2 \cdot i} \ ,$$

где *i* – единица допуска, мкм, принимаемая по табл. 2.4.

В ГОСТ 25 346-82 (или табл.2.3).по величине *a* определяется квалитет для сопрягаемых деталей.

2.1.11. Определяется оптимальная величина масляного клина из условия

$$h_{min\ opt} = 0{,}25\ S_{opt};$$

$$h_{min\ opt} = k(Rz_D + Rz_d + \gamma_g)$$

где Rz_D и Rz_d – шероховатость сопрягаемых поверхностей деталей, мкм;

k - коэффициент запаса надежности по толщине масляного слоя, принимают $k \geq 2$;

γ_g – добавка на неразрывность масляного слоя с учетом отклонений формы, расположения поверхности вала и прогиба вала.

При $\lambda \geq 1$, $\gamma_g = 2 \div 3$; при $\lambda < 1$, $\gamma_g = 1$.

2.1.12.Определяется оптимальная шероховатость сопрягаемых поверхностей, приняв $h_{min\ opt}$ равной 0,25 от S_{opt}, мкм

$$Rz_{opt} = \frac{h_{min\ opt} - K\gamma_g}{2K} \quad ,$$

Полученная величина Rz_{opt} округляется до стандартной по ГОСТ 2789-73. (Таблица 2.6)

Таблица 2.6

Ряды числовых значений шероховатости и базовых длин

***L*, мм**	***Ra*, мкм**	***Rz*, мкм**	***L*, мм**	***Ra*, мкм**	***Rz*, мкм**
8	80	320	0,8	2,5	10,0
	63	250		2,0	8,0
	50	200		1,6	6,3
	40	160		1,25	5,0
	32	125		1,00	4,0
	25	100		0,80	3,2
	20	80		0,63	2,5
	16	63		0,50	2,0
	12.5	50		0,40	1,6
2,5	10,0	40	0,25	0,32	1,25
	8,0	32		0,25	1,00
	6,3	25		0,20	0,80
	5,0	20		0,16	0,63
	4,0	16		0.125	0,50
	3,2	12,5		0,100	0.40

2.1.13. Учитывая шероховатость поверхностей определяются технологические зазоры в соединении, мм

$$S_{max\,t} = S_{max\,F} - 2(R_{zD} + R_{zd});$$

$$S_{min\,t} = S_{min\,F} - 2(R_{zD} + R_{zd}).$$

2.1.14. В таблицах ГОСТ 25347-82 выбирается стандартная посадка из условия

$$S_{min} \geq S_{min\,t};$$
$$S_{max} \leq S_{max\,t}.$$

где S_{min} и S_{max} - наименьший и наибольший табличные зазоры по ГОСТ 25347-82

При выборе посадки следует руководствоваться следующими условиями:

1. Посадка, по возможности, должна состоять из предпочтительных полей допусков, первого ряда предпочтительности;

2. Допускается применять стандартную посадку первого ряда предпочтительности, у которой S_{min} будет меньше $S_{min\,t}$, но не более 15%;

3. Если окажется, что посадка должна быть 5-го квалитета или точнее, то в таком случае следует принять посадку более грубого квалитета (например, 6-го или 7-го) и назначить селективную сборку. Для такой посадки следует принимать поля допусков вала и отверстия одного квалитета. У принятой посадки средний зазор S_m должен быть близким к S_{opt};

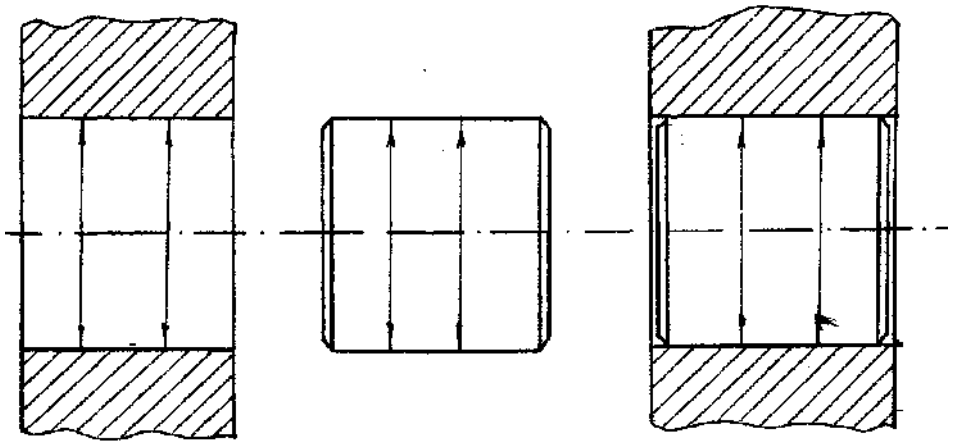
4. Количество групп сортировки определяется по зависимости:

$$n = \frac{T_s}{T_{sF}},$$

где T_s - допуск у принятой стандартной посадки по ГОСТ 25347-82;

T_{sF} - допуск посадки с зазором, полученный расчетом.

2.1.15. Выполнить эскиз вала, отверстия и вала в сборе, аналогично эскизов в работе №1. На эскизах нанести размеры с нанесением условных и числовых отклонений и нанести шероховатость по R_a.



2.2. Расчет и выбор посадки с натягом

По заданным нагрузкам и размерам соединяемых деталей рассчитать и выбрать стандартную посадку с гарантированным натягом.

Для выполнения работы необходимо иметь ГОСТ 25347-82.

Последовательность расчета:

2.2.1. По заданным значениям внешних сил и размерам сопрягаемых деталей определяется наименьшее удельное давление на сопрягаемых поверхностях соединяемых деталей.

При действии на соединение только осевой силы P_o, наименьшее удельное давление определяется по зависимости, Па

$$P_{min} = \frac{P_o}{\pi \cdot D \cdot L \cdot f} \quad ,$$

При действии на соединение только крутящего момента $M_к$, P_{min} находится из уравнения, Па:

$$P_{min} = \frac{2 \cdot M_к}{\pi \cdot D^2 \cdot L \cdot f} \quad ,$$

При действии на соединение одновременно P_o и $M_к$ минимальное удельное давление P_{min} определяется по равнодействующей сил, Па

$$P_{min} = \frac{R}{\pi \cdot D \cdot L \cdot f},$$

где $R = \sqrt{P_0^2 + M^2}$, н

P_o – продольная осевая сила, стремящаяся сдвинуть одну деталь относительно другой, Н;

$M_к$ – крутящий момент, стремящийся повернуть одну деталь относительно другой, Н·м;

D – диаметр соединения, м;

L- длина контакта сопрягаемых поверхностей, м

f - коэффициент трения при установившемся режиме распрессовки или проворачивания.

Коэффициент f зависит от материала сопрягаемых деталей, способа сборки, шероховатости поверхностей и других факторов.

В табл. 2.7. приведены коэффициенты трения при сборке деталей под прессом. Если детали будут собираться термическим способом, то коэффициент f следует увеличить в 1,8 раза, например, если обе сопрягаемые детали изготавливаются из стали, то при сборке деталей под прессом f = 0,008, а при термической сборке f = 0,14.

Таблица 2.7

Значение коэффициентов трения

Материал сопрягаемых деталей	Коэффициент трения f
Сталь – сталь	0,06 ÷ 0,12
Сталь – чугун	0,07 ÷ 0,12
Сталь – алюминиевые сплавы	0,03 ÷ 0,05
Сталь – латунь	0,05 ÷ 0,10
Сталь - бронза	0,06 ÷ 0,10

Таблица 2.8

Допустимые пределы текучести и коэффициенты линейного расширения некоторых сплавов

Марка сплава	$\sigma_т$, МПа	$\lambda \cdot 10^6$ $1/^0C$	Марка сплава	$\sigma_т$, МПа	$\lambda \cdot 10^6$ $1/^0C$
Сталь СТ 3	196	11,1	Сталь 50Х	880	13,4
Сталь СТ 5	265	11,1	Сталь 45Х	850	13,4
Сталь 08	190	11,1	Сталь 40Х	785	13,4
Сталь 20	198	11,9	Сталь 30Х	687	11,3
Сталь 30	245	11,1	Сталь 20Х	638	11,3
Сталь 35	270	11,1	Сталь 20Г	275	12,3
Сталь 40	275	11,3	Сталь 30Г	314	12,6
Сталь 45	310	11,6	Сталь 40Г	353	9,4
Сталь 50	314	11,2	Сталь 50Г	392	11,6
Сталь 55	324	11,0	Сталь 65Г	432	11,6
Алюминиевые сплавы			Чугуны СЧ 21-40	162	10,2
Д-1	245	22,9	СЧ 24-44	206	10,1
Д-6	294	22,0	СЧ 28-48	242	10,0
В-95	540	23,1	СЧ 32-52	267	10,0
АЛ-12	118	22,0	КЧ 35-10	215	10,2
АЛ-13	98	20,0	КЧ 37-12	226	10.0
			ВЧ 40-10	294	10.0
Бронзы					
БраЖМУ10-3-1,5	343	16,1			
БрОЦС 6-6-3	145	17,1			
Латунь					
ЛАЖМУ	396	18,7			
ЛМУСС	343	17,0			

Таблица 2.9

Значение модуля упругости и коэффициента Пуассона

Материал	Модуль упругости *E*, МПа	Коэффициент Пуассона μ
Сталь	210000	0,3
Чугун	110000	0,25
Бронза	84000	0,35
Латунь	78000	0,38

2.2.2. Определяется коэффициент Ляме, исходя из размеров сопрягаемых деталей

$$C_1 = \frac{1+(d_1/D)^2}{1-(d_1/D)^2} - \mu_1; \quad C_2 = \frac{1+(D/d_2)^2}{1-(D/d_2)^2} + \mu_2;$$

где D - диаметр соединения, мм;

d_1 - диаметр отверстия пустотелого вала, мм;

d_2 – диаметр наружной поверхности втулки, мм;

μ - коэффициент Пуассона.

2.2.3. Определяется наименьший допустимый натяг в соединении, мкм

$$N_{minF} = P_{min} \cdot D \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \cdot 10^6,$$

где D – диаметр соединения, м;

E_1 и E_2 – модуль упругости материалов, соответственно для материала вала и материала втулки, Па;

P_{min} – удельное давление, Па.

2.2.4. На основе теории наибольших касательных напряжений определяются максимальные допустимые удельные давления P_{max}, при котором отсутствуют пластические деформации на контактных поверхностях деталей. В качестве P_{maxF} ,берется наименьшее значение P_{max}, Па.

$$P_{max1} = 0{,}58\ \sigma_{T1}\ [1 - (d_1/D)^2];$$

$$P_{max1} = 0{,}58\ \sigma_{T2}\ [1 - (D/d_2)^2];$$

где σ_{T1} и σ_{T2} - предел текучести материалов вала и втулки, Па. (Таблица2.8)

2.2.5. Определяется наибольший расчетный натяг, мкм

$$N_{maxF} = P_{max} \cdot D \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \cdot 10^6$$

2.2.6. Определяется допуск посадки, мкм

$$T_N = N_{maxF} - N_{minF}.$$

2.2.7. Устанавливается степень точности соединяемых деталей

$$a = \frac{T_N}{2 \cdot i},$$

где i- единица допуска, мкм, принять по таблице 2.4.

По величине «а» в таблице 2.3. устанавливается квалитет сопрягаемых деталей. Если «а» равно 25 единицам и более, следует принимать посадки с натягом 8-го квалитета или точнее. Для посадки зубчатого колеса на вал квалитет для отверстия следует принимать по степени точности зубчатого колеса.

2.2.8.В зависимости от квалитета сопрягаемых поверхностей определяется оптимальная шероховатость, величину которой можно принимать в процентах от допуска на размер детали:

- для деталей 7 и 8-го квалитетов $Rz \approx 0{,}16\ T_p$;
- для деталей 5 и 6-го квалитетов $Rz \approx 0{,}2\ T_p$.

Полученные значения шероховатости округляются до стандартных по ГОСТ2789-73.(Таблица 2.6)

2.2.9. С учетом оптимальной шероховатости определяются технологические натяги, мм

$$N_{min\,t} = N_{minF} + 1{,}2(R_{z\,d} + R_{z\,D});$$

$$N_{max\,t} = [N_{maxF} + 1{,}2(R_{z\,d} + R_{z\,D})] \times 0{,}9.$$

2.2.10. В таблицах ГОСТ 25347-82 принимаются предельные отклонения основного отверстия, согласно принятого квалитета.

2.2.11. Нижнее технологическое отклонение вала находится по условию:

$$ei_t = N_{min\,t} + ES.$$

По нижнему отклонению вала в таблицах ГОСТ 25347-82 подбирается такое поле допуска вала, у которого

$$ei \geq ea_t, \quad \text{а} \quad es \leq N_{max\ t},$$

где ei и es – табличные значения нижнего и верхнего отклонений вала.

2.2.12. Дать эскизы сопрягаемых деталей в сборе и отдельно для вала и для втулки, аналогично, как в работе №1. На эскизах деталей нанести шероховатость по критерию R_a.

2.3. Выбор посадок для подшипников качения

Данные для расчета задаются преподавателем.

Выбор посадок для поверхностей деталей машин, сопрягаемых с кольцами подшипников качения зависит от вида нагружения кольца подшипника. ГОСТ 3325-85 устанавливает три вида нагружения колец подшипников качения:

местное, циркуляционное и колебательное.

Местным нагружением кольца считается такой вид нагружения, при котором действующая на подшипник результирующая радиальная нагрузка постоянно воспринимается одним и тем же ограниченным участком дорожки качения этого кольца и передается соответствующему участку посадочной поверхности вала или корпуса.

Такой вид нагружения имеет место когда кольцо не вращается относительно действующей на него нагрузки или кольцо и нагрузка участвуют в совместном вращении. В качестве примеров местного нагружения можно привести наружное кольцо в корпусе редуктора или внутреннее кольцо в катке гусеничного механизма.

Циркуляционным нагружением кольца считается такой вид нагружения, при котором действующая на подшипник результирующая радиальная нагрузка воспринимается и передается телами качения в процессе вращения дорожки качения последовательно всей посадочной поверхности вала или корпуса.

Такой вид нагружения возникает у вращающегося кольца при неподвижной нагрузке, например, внутреннее кольцо подшипника в редукторе, или наружное кольцо в катке гусеничного механизма.

Колебательным нагружением кольца считается такой вид нагружения, при котором неподвижное кольцо подшипника подвергается одновременному воздействию радиальных нагрузок постоянной по направлению P_c и вращающей P_ν меньшей или равной по величине P_c.

Их равнодействующая R совершает периодическое колебательное движение. Посадки на колебательно нагруженное кольцо назначают как для местно-нагруженного кольца если $P_c \geq P_\nu$ или как для циркуляционно-нагруженого кольца, если $P_\nu \geq P_c$.

Посадки для местно-нагруженных колец выбираются с небольшим гарантированным зазором из расчета, чтобы кольцо имело возможность за период эксплуатации совершить хотя бы один оборот. Для этой цели используются посадки с малым гарантированным зазором. Конкретную посадку можно выбрать согласно таблицы 2.10.

Таблица 2.10

Поля допусков для поверхностей деталей, сопрягаемых с кольцами, имеющими местное нагружение

Номинальные размеры Св.	до	Поля допусков: Для валов		Для отверстий в корпусе: Не разъемных		разъемных		Тип подшипников
		Класс точности и подшипников						
		P0; P6	P4; P5	P0; P6	P5; P4	P0; P6	P5; P4	
		Нагрузка спокойная умеренная						
-	80	h6	h5	H7	H6	H7	H6	Все типы кроме штампованных и упорных
80	260	g6	g5	G7	G6	H7	H6	
260	500	f6	g5	G7	G6	H7	H6	
500	1600	-	-	F7	G6	H7	H6	
		Нагрузка с ударами и вибрацией						
-	80	h6	h5	Is7	Is6	Is7	Is6	Все типы кроме штампованных и конических
80	260	h6	h5	H7	H6	Is7	Is6	
260	500	g6	g5	H7	H6	Is7	Is6	
500	1600	-	-	H7	H6	Is7	Is6	
-	120	h6	h5	H7	H6	Is7	Is6	Для роликовых конических двухрядных
120	1600	g6	g5	H7	H6	Is7	Is6	

Посадка циркуляционно-нагруженных колец должна осуществляться с гарантированным натягом. Для этой цели используются следующие поля допусков:

а) если наружное кольцо имеет циркуляционное нагружение, то отверстие в корпусе обрабатывают с полями допусков:

для подшипников класса *P0* и *P6 - K7; M7; N7; P7*;

для подшипников класса *P5* и *P4 - K6; M6; N6; P6*;

б) если внутренне кольцо имеет циркуляционное нагружение, то шейку вала следует обрабатывать с полями допусков:

для колец подшипников класса *P0* и *P6 – j_s 6; к6; m6; n6; p6; r6*

для колец подшипников класса *P5* и *P4 - j_s 5; к5; m5; n5*.

Конкретное поле допуска может быть определено расчетным путем.

Если внутреннее кольцо имеет циркуляционное нагружение, то посадку можно выбрать по величине наименьшего натяга, который можно определить из уравнения, мм

$$N_{minF} = \frac{13 \cdot R \cdot к}{b \cdot 10^6},$$

где R – суммарная радиальная нагрузка, действующая на опоры, *Кн*;

К – коэффициент, принимаемый для подшипников серии диаметров 9, 8, 7, 0, 1 ,2 или серии ширин 8, 7, 1, 0 (легкая серия) равным 2,8; для серии 1 диаметров 3, 5, 6 или серии ширин 2,3 (средняя серия) равным 2,3; для серии диаметров 4, 6 или серий ширин 4, 5, 6 (тяжелая серия) равным 2,0.

b – активная часть кольца подшипника, м

$$b = B - 2 \cdot r$$

где В – ширина кольца, м

r – размер фаски кольца, м

Во избежание разрыва кольца выбранная посадка проверяется на максимальный натяг, допустимая величина максимального натяга определяется из зависимости, мм

$$N_{max\ F} = \frac{11{,}4 \cdot Kd[\sigma_D]}{(2K-2)\ 10^3},$$

где $[\sigma_P]$ - допускаемое напряжение на растяжение, МПа

(для подшипниковой стали 400 МПа)

d - диаметр внутреннего кольца подшипника качения, м

Поле допуска выбирается из условия $ei_t \geq N_{minF}$,, но принятое поле допуска не должно создавать натяг $N_{max} \leq N_{max\ F}$

При циркуляционном нагружении кольца подшипника выбор посадки на вал и отверстие корпуса можно производить по интенсивности нагружения на посадочной поверхности кольца подшипника качения. Величину интенсивности можно подсчитать по зависимости, кН/м

$$P_R = \frac{R}{b} K_1 K_2 K_3,$$

где *R* - радиальная реакция опоры на подшипник, кН

b - рабочая ширина посадочного места, м

$$b = B - 2 \cdot r$$

В - ширина кольца подшипника, м

r - радиус закругления или ширина фаски кольца подшипника, м

$К_1$ - динамический коэффициент посадки, зависящий от характера нагрузки, принимается по таблице 2.11.

$К_2$ - коэффициент, учитывающий степень ослабления посадочного натяга при полом вале или тонкостенном корпусе, принимается по таблице 2.12. Для сплошного вала $К_2 = 1$;

K_3 - коэффициент неравномерности распределения радиальной нагрузки E между рядами роликов в двухрядных конических роликоподшипниках или между сдвоенными шарикоподшипниками при наличии осевой нагрузки A на опору. Значение коэффициента K_3, зависящее от $A / R \cdot ctg\beta$ приведено в табл. 2.13 (угол β - угол контакта тел качения с дорожкой качения наружного кольца зависит от конструкции подшипника β = 12°; 26°;36°. Для однорядных подшипников K_3 = I.

Таблица 2.11

Характер нагрузки	K_1
Нагрузка с умеренными толчками и вибрацией	1,0
Нагрузка с сильными толчками и вибрацией, перегрузки достигают до 300%	1,8

Таблица 2.12

Коэффициент K_2

d_0/d	D/D_H	Значение коэффициента для			
		вала			корпуса
Св.	До	D/d ≤ 1,5	D/d>1,5	D/d>2-3	
-	0.4	1.0	1.0	1.0	1.0
0.4	0.7	1.2	1.4	1.6	1.1
0.7	0.8	1.5	1.7	2.0	1.4
0.8	-	2.0	2.3	3.0	1.8

Таблица 2.13

Коэффициент K_3

A/R ctg β		K_3
Св.	до	
-	0.2	1.0
0.2	0.4	1.2
0.4	0.6	1.4
0.6	1.0	1.6
1.0		2.0

По величине P_R в табл. 2.14 выбирается поле допуска для поверхности детали, сопрягаемой с циркуляционно-нагруженным кольцом. Поля допусков принимаются для подшипников классов PO и P6 для корпуса по 7-му квалитету, для вала по 6-му квалитету; для подшипников классов P5 и P4 принимаются для отверстия в корпусе по 6-му квалитету, а для вала по 5-му квалитету.

Таблица 2.14

Допустимые интенсивности нагрузок на вал и корпус для подшипников качения

Диаметр, мм		Допустимые значения P_R, кН/м				
		Поля допусков вала				
Св.	до	j_s6; j_s5	k6; k5	m6; m5	n6; n5	p6
18	80	до 300	300-1350	1350-1600	1600-3000	св. 3000
80	180	550	550-2000	2000-2500	2500-4000	4000
180	360	700	700-3000	3000-3500	3500-6000	6000
360	630	900	900-3400	3400-4500	4500-8000	8000
Диаметр, мм		Поля допусков корпуса				
Св.	до	K7; K6	M7; M6	N7; N6	P7; P6	
50	180	до 800	800-1000	1000-1300	1300-2500	
180	360	1000	1000-1500	1500-2000	2000-3300	
360	630	1200	1200-2000	2000-2600	2600-4000	
630	1600	1600	1600-2500	2500-3500	3500-5500	

Работа должна выполняться в следующей последовательности.

По номеру подшипника в справочнике определить размеры колец подшипников.

По классу точности подшипника в стандарте ГОСТ 520-71 (СТ СЭВ 774-77) или справочнике определить числовые предельные отклонения для наружного диаметра D и внутреннего диаметра d .

Установить характер нагружения колец подшипников качения, исходя из условия работы подшипника.

Для местно-нагруженного кольца в табл. 2.10 подобрать поля допусков согласно класса точности кольца подшипника.

Выполнить расчет посадки для циркуляционно-нагруженного кольца подшипника.

Для принятых полей допусков в табл. ГОСТ 25347-82 определить числовые отклонения для вала и отверстия в корпусе.

По предельным отклонениям построить схемы полей допусков.

Подсчитать зазоры и натяги для посадки наружного и внутреннего колец подшипников и заполнить таблицу отчета по образцу (табл. 2.15).

Таблица 2.15

Анализ посадок подшипникового соединения

Класс точности подшипника		Сопряжения подшипника	
		С валом	С корпусом
Посадка			
Отклонение вала, мкм	es		
	ei		
Отклонения отверстия, мкм	ES		
	EI		
Натяги, мкм	N_{max}		
	N_{min}		
Зазоры, мкм	S_{max}		
	S_{min}		

Выполнить эскизы опоры, шейки вала и отверстия в корпусе. На эскизе узла нанести только условные обозначения полей допусков сопрягаемых деталей. Обозначение полей допусков колец подшипников на сборочном чертеже не указывается. На эскизах деталей нанести: условное и числовое обозначение предельных отклонений, допуск цилиндричности, биение заплечиков и шероховатость.

Допуск цилиндричности принимать равным 1/4 от допуска размера для поверхностей деталей, сопрягаемых с кольцом подшипника классов РО и Р6 или 1/8 от допуска размера для подшипников классов Р5 и Р4. Допуски торцового биения принять по табл. 2.16, а допустимую шероховатость по критерию Ra в табл. 2.17.

Таблица 2.16

Биение заплечиков в мкм (не более)

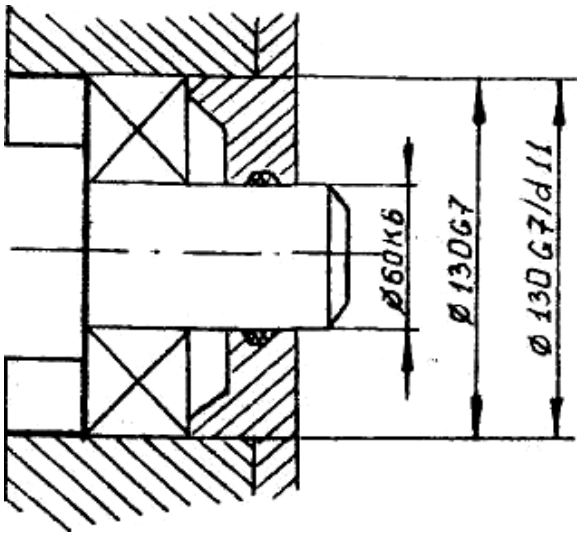
Заплечиков валов					Заплечиков корпуса				
d, мм	Р0	Р6	Р5	Р4	D, мм	Р0	Р6	Р5	Р4
	Классы подшипников					Классы подшипников			
До 50	20	10	7	4	До 80	40	20	13	8
Св 50 до 120	25	12	8	6	Св 80 до 120	45	22	15	9
Св 120 до 250	30	15	10	8	Св 120 до 150	50	25	18	10
Св 250 до 315	35	17	12	9	Св 150 до 180	60	30	20	12
Св 315 до 400	40	20	13	5	Св 180 до 250	70	35	23	14
					Св 250 до 315	80	40	27	16
					Св 315 до 400	90	45	30	18
					Св 400 до 500	100	50	33	12

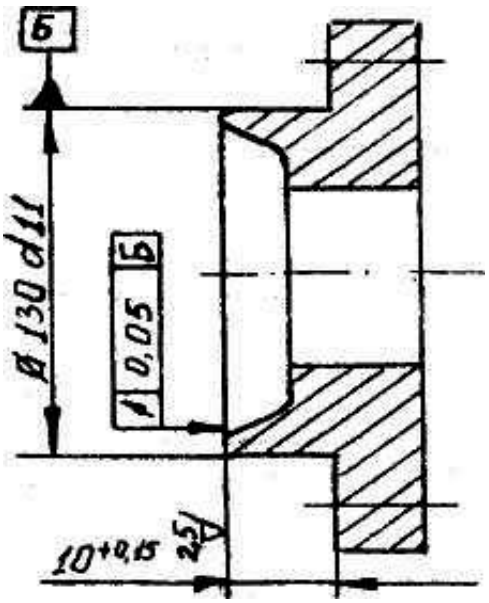
Таблица 2.17

Шероховатость по Ra, мкм, для посадочных мест под подшипники

Посадочные места	Классы точности подшипников	Ra для номинальных диаметров, мкм	
		До 80	Св 80
На валах	P0 P6 и P5 P4	1,25 0,63 0,32	2,50 1,25 0,63
В отверстии корпуса	P0 P6, P5, P4	1,25 0,63	2,50 1,25
Торцы заплечиков вала и корпуса	P0 P6, P5, P4	2,50 1,25	2,50 2,5

Образец выполнения эскиза опоры





2.4. Определение исполнительных размеров элементов зубчатого колеса, влияющих на норму бокового зазора

Варианты задаются преподавателем.

У зубчатых колес норму бокового зазора можно проверить при измерении следующих элементов:

I) предельных смещений исходного контура;

2) средней длины общей нормали;

3) размера постоянной хорды.

Допустимые размеры смещения исходного контура определяются по ГОСТ 1643-81.

2.4.1. Величина наименьшего дополнительного смещения исходного контура E_{HS} принимается по табл. 14 ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.18 настоящих методических указаний). Для нахождения необходимо знать вид бокового зазора, размер делительного диаметра и степень точности по норме плавности.

Номинальный размер делительного диаметра можно определить по зависимости, мм

$$d = z \cdot m$$

Где z - число зубьев зубчатого колеса;

m- модуль, мм.

Степень точности может быть задана условным обозначением. Если у зубчатого колеса степень точности по всем нормам принята одна и та же, то условное обозначение имеет вид:

8 - В ГОСТ 1643-81 .

В данном примере степень по всем трем нормам, восьмая, вид бокового зазора "В" и вид допуска на боковой зазор " в ".

При комбинированной степени точности условное обозначение имеет вид:

8 - 7 - 7 - Ва ГОСТ 1643-81

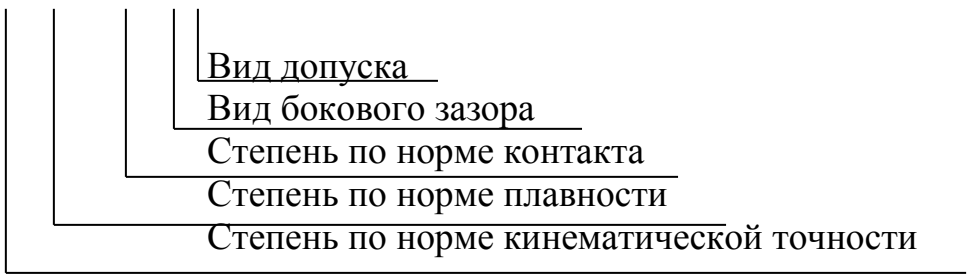


Таблица 2.18

Нормы бокового зазора (показатель – E_{HS})

Вид сопряжения	Степень точности по нормам плавности	делительный диаметр d, мм					
		до 80	св 80 до 125	св 125 до 180	св 180 до 250	св 250 до 315	св 315 до 400
		мкм					
H	3 – 6	12	14	16	18	20	22
	7	14	16	18	20	22	25
E	3 – 6	30	35	40	46	52	57
	7	35	40	45	50	55	60
D	3 – 6	46	54	63	72	81	89
	7	50	60	70	80	90	100
	8	55	70	80	90	100	110
C	3 – 6	74	87	100	115	130	140
	7	80	100	110	120	140	160
	8	90	110	120	140	160	180
	9	100	120	140	160	180	200
B	3 – 6	120	140	160	185	210	230
	7	140	160	180	200	250	250
	8	140	160	200	220	250	280
	9	160	180	200	250	280	300
A	3 – 6	190	220	250	290	320	360
	7	200	250	280	300	350	400
	8	220	280	300	350	400	450
	9	250	280	350	400	400	500

Таблица 2.19

Норма кинематической точности

Степень точности	Обозначение показателя	Модуль, мм	Делительный диаметр d, мм			
			до 125	св 125 до 400	св 400 до 800	св 800 до 1600
			Размер показателя, мкм			
1	2	3	4	5	6	7
6	Fr	от 1 до 3,5	25	36	45	50
		св 3,5 до 6,3	28	40	50	56
		св 6,3 до 10	32	45	56	63
	Fvw	от 1 до 16	16	28	45	70
	Fi ”	от 1 до 3,5	36	50	63	71
		св 3,5 до 6,3	40	56	71	80
		св 6,3 до 10	45	63	80	90
7	Fr	от 1 до 3,5	36	50	63	71
		св 3,5 до 6,3	40	56	71	80
		св 6,3 до 10	45	63	80	90
	Fvw	от 1 до 25	22	40	60	100
	Fi ”	от 1 до 3,5	50	71	90	100
		св 3,5 до 6,3	56	80	100	112
		св 6,3 до 10	63	90	112	125

1	2	3	4	5	6	7
8	Fr	от 1 до 3,5	45	63	80	90
		св 3,5 до 6,3	50	71	90	100
		св 6,3 до 10	56	80	100	112
		от 1 до 16	-	90	112	125
	Fvw	от 1 до 40	28	50	80	120
	Fi ”	от 1 до 3,5	63	90	112	125
		св 3,5 до 6,3	71	100	125	140
		св 6,3 до 10	80	112	140	160
		от 1 до 16	-	125	160	180
9	Fr	от 1 до 3,5	71	80	100	112
		св 3,5 до 6,3	80	100	112	125
		св 6,3 до 10	90	112	125	140
		от 1 до 16	-	125	160	160
	Fi ”	от 1 до 3,5	90	112	140	160
		св 3,5 до 6,3	112	140	160	180
		св 6,3 до 10	125	160	180	200
		от 1 до 16	-	180	224	224
6	Fc	от 1 до 16	16	28	45	70
7	Fc	от 1 до 16	22	40	60	100
8	Fc	от 1 до 16	28	50	80	120

Таблица 2.20

T_H – допуск на смещение исходного контура, мкм

Вид сопряжения	Вид допуска	Допуск на радиальное биение зубчатого венца Fr						
		св 25 до 32	св 32 до 40	св 40 до 50	св 50 до 60	св 60 до 80	св 80 до100	св 100 до 125
H, E	h	55	60	70	80	110	120	160
D	d	70	80	90	100	140	160	200
C	c	90	100	120	140	180	200	250
B	b	100	120	140	180	200	250	300
A	a	140	160	180	200	250	300	350

2.4.2. Наибольшее дополнительное смещение исходного контура определяется из условия:

$$E_{Hi} = | E_{Hs} | + T_H,$$

где T_H – допуск на смещение исходного контура.

Допуск T_H – принимают по табл. ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.20 методических указаний) по величине допуска на радиальное биение зубчатого венца F_r и виду допуска на боковой зазор.

Допуск на радиальное биение зубчатого венца F_r принимается по табл. 6 ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.19 методических указаний) по величине делительного диаметра и степени точности по норме кинематической точности.

Наименьшее и наибольшее смещения исходного контура принимаются всегда в тело колеса, т.е. для внешних колес внешнего зацепления принимается

смещение исходного контура со знаком «минус», а для зубчатых колес внутреннего зацепления принимается со знаком «плюс».

2.4.3. Номинальный размер длины общей нормали для цилиндрических зубчатых колес с прямыми зубьями определяют по зависимости, мм

$$W = m\,[1{,}476\,(2\cdot Z_{wr} - 1) + 0{,}0149\cdot z]$$

где m – модуль зубчатого колеса, мм;

z – число зубьев зубчатого колеса, мм;

Z_{wr} – число зубьев в длине общей нормали; для цилиндрических зубчатых колес принимается по зависимости:

$$Z_{wr} = 0{,}111\cdot z + 0{,}5.$$

Полученную величину Z_{wr} округляют до целого числа, например, 2, 3, 4, 5 и т.д.

Исполнительный размер должен иметь два предельных отклонения.

Наименьшее уменьшение длины общей нормали принимают из двух таблиц ГОСТ 1643-81. Первое слагаемое $E_{wms}\,I$ принимают в табл. 16 по размеру делительного диаметра и виду бокового зазора; второе слагаемое принимается в табл. 17 по величине допуска на радиальное биение зубчатого венца (табл. 2.21 и табл. 2.22 методических указаний)

$$E_{wms} = E_{wms}\,I + E_{wms}\,II.$$

Таблица 2.21

Нормы бокового зазора (показатель – E_{wms} слагаемое 1)

Вид сопряжения	Степень точности по нормам плавности	делительный диаметр, мм					
		до 80	св 80 до 125	св 125 до 180	св 180 до 250	св 250 до 315	св 315 до 400
		мкм					
H	3 – 6	8	10	11	12	14	16
	7	10	10	12	14	16	18
E	3 – 6	20	24	28	30	35	40
	7	25	30	30	35	40	45
D	3 – 6	30	35	40	50	55	60
	7	35	40	50	55	60	70
	8	40	50	50	60	70	70
C	3 – 6	50	60	70	80	90	100
	7	55	70	70	80	100	110
	8	60	80	80	100	110	120
	9	70	80	100	110	120	140
B	3 – 6	80	100	110	120	140	160
	7	100	110	120	140	180	180
	8	100	110	140	140	180	200
	9	110	120	140	160	200	200
A	3 – 6	120	140	180	200	220	250
	7	140	180	200	200	250	280
	8	160	200	200	250	280	300
	9	180	200	250	280	280	350

Таблица 2.22

Нормы бокового зазора (показатель – E_{wms} слагаемое 11)

Допуск на радиальное биение зубчатого венца Fr, мкм								
св 25 до 32	св 32 до 40	св 40 до 50	св 50 до 60	св 60 до 80	св 80 до100	св 100 до 125	св125 до160	св160 До200
7	9	11	14	18	22	25	35	45
$- E_{wms} = - (E_{wms}1 + E_{wms}11)$								

Наибольшее уменьшение длины общей нормали определяется по зависимости:

$$E_{wmi} = | E_{wms}| + T_{wm},$$

где T_{wm} – допуск на среднюю длину общей нормали, принимается по табл. 18 ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.23 методических указаний) в зависимости от допуска на радиальное биение зубчатого венца и вида допуска на боковой зазор.

Таблица 2.23

T_{wm}– допуск на среднюю длину общей нормали, мкм

Вид сопряжения	Вид допуска	Допуск на радиальное биение зубчатого венца Fr, мкм						
		св 25 до 32	св 32 до 40	св 40 до 50	св 50 до 60	св 60 до 80	св 80 до100	св 100 до 125
H, E	h	22	25	25	28	30	40	55
D	d	35	40	40	40	60	70	80
C	c	45	50	60	70	90	110	120
B	b	55	60	70	100	100	120	140
A	a	80	90	100	110	140	150	180

Для зубчатых колес внешнего зацепления отклонения принимаются со знаком «минус», т.е. в тело колеса:

$$W^{-Ewms}_{-Ewmi}$$

2.4.4. Исполнительный размер толщины зуба по постоянной хорде определяется в следующей последовательности.

Номинальный размер постоянной хорды для цилиндрических зубчатых колес с прямыми зубьями определяют по зависимости, мм

$$\overline{S_c} = 1{,}387 \cdot m,$$

где m – модуль зубчатого колеса, мм.

Установочная высота постоянной хорды определяется по зависимости, мм

$$\overline{h_c} = 0{,}7476 \cdot m.$$

Наименьшее уменьшение постоянной хорды E_{cs} принимается в табл. 20 ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.24 методических указаний) по размеру делительного диаметра и виду бокового зазора.

Таблица 2.24

Нормы бокового зазора (показатель – E_{cs})

Вид сопряжения	Степень точности по нормам плавности	делительный диаметр d, мм					
		до 80	св 80 до 125	св 125 до 180	св 180 до 250	св 250 до 315	св 315 до 400
		мкм					
D	3 – 6 7 8	35 35 40	40 45 50	45 50 60	55 60 70	60 70 70	60 70 80
C	3 – 6 7 8 9	55 60 70 70	60 70 80 90	70 80 90 100	80 90 100 120	90 100 120 140	100 120 140 140
B	3 – 6 7 8 9	90 100 100 120	100 120 120 140	120 140 140 160	140 140 160 180	160 180 180 200	160 180 200 220
A	3 – 6 7 8 9	140 150 160 180	160 180 200 200	180 200 220 250	200 220 250 300	250 250 300 300	250 300 350 350

Наибольшее уменьшение постоянной хорды принимается из условия

$$E_{ci} = |E_{cs}| + T_c,$$

где T_c – допуск на постоянную хорду, принимается по табл. 21 ГОСТ 1643-81 (или табл. 2.25 методических указаний) с учетом допусков на радиальное биение зубчатого венца и виду допуска на боковой зазор.

Таблица 2.25

T_c– допуск на толщину зуба, мкм

Вид сопряжения	Вид допуска	Допуск на радиальное биение зубчатого венца Fr						
		св 25 до 32	св 32 до 40	св 40 до 50	св 50 до 60	св 60 до 80	св 80 до100	св 100 до 125
H, E	h	40	45	50	70	70	90	100
D	d	50	60	70	70	110	120	140
C	c	70	70	90	100	140	160	180
B	b	70	90	100	140	140	180	220
A	a	100	120	140	140	180	220	250

Для цилиндрических зубчатых колес внешнего зацепления предельные отклонения принимают в тело колеса, т.е. отклонения принимают минусовое значение:

$$\overline{S}_{c-Eci}^{-Ecs}$$

Все полученные данные сводятся в таблицу 2. 26 .

Таблица 2.26

Исполнительные размеры параметров

Обозначение параметра	Размер, мм	Обозначение параметра	Размер, мм
E_{HS}		F_r	
T_H		E_{CS}	
E_{HI}		T_C	
$E_{wms}1$		E_{CI}	
$E_{wms}11$		S	
T_{wm}		h_C	
E_{wmi}			
W			

2.5. Решение размерных цепей

Решение размерной цепи студенты выполняют при анализе размеров конкретной детали.

Студенту выдается чертеж ступенчатого валика или втулки с заданной последовательностью обработки.

В задаче требуется определить исполнительный размер одного из составляющих звеньев.

Работа выполняется в следующей последовательности.

2.5.1. Ознакомиться с определениями по размерным цепям, пользуясь конспектом лекций или учебной литературой

2.5.2. Построить схему размерной цепи.

2.5.3. Выявить замыкающее звено в размерной цепи.

2.5.4. Установить, какие составляющие звенья будут относиться к увеличивающим, а какие - к уменьшающим звеньям.

2.5.5. Определить числовые отклонения для всех звеньев размерной цепи по ГОСТ 25347-82 СТ СЭВ 144^75).

2.5.6. Путем решения размерной цепи определить исполнительный размер для заданного звена размерной цепи, для чего:

I) Записать уравнение предельных отклонений замыкающего звена, при решении размерной цепи методом Максимума-Минимума:

$$\mathrm{E}_S A_\Delta = \sum_{j=1}^{k} \vec{E_S A_j} - \sum_{j=1}^{m} \overleftarrow{E_i A_j}$$

$$\mathrm{E}_i A_\Delta = \sum_{j=1}^{k} \vec{E_i A_j} - \sum_{j=1}^{m} \overleftarrow{E_s A_j}$$

2) Подставить известные значения в уравнения размерной цепи и найти отклонения для заданного размера.

Приложение

Варианты заданий для работы № 2

Расчет и выбор посадки с зазором

Ва-риант	**D, мм**	**L,** мм	**R**, н	**n** об/мин**.**	**Масло**	**t°**р
I	100	90	9000	1250	ИГП - 38	60
2	120	НО	6000	1800	И – 30А	60
3	140	100	18800	3000	ИГП - 72	60
4	120	85	10000	1200	ИГП - 49	60
5	170	150	18000	1250	И – 20А	50
6	40	60	17900	1950	И – 40А	50
7	32	50	8000	1600	И – 50А	65
8	70	60	17500	1950	И – 40А	50
9	92	85	12500	2500	И – 30А	60
10	50	45	4500	1250	И – 40А	60
11	50	50	7200	1500	И – 50А	65
12	180	160	18600	1250	И – 25А	50
13	125	65	13000	1450	ИГП - 49	60
14	150	120	25000	2250	И – 40А	70
15	130	150	15000	860	И – 30А	65
16	85	80	4800	2000	ИГП - 49	70
17	130	120	7000	1850	И – 25А	60
18	80	70	15000	1500	ИГП - 38	65
19	45	45	7200	2500	ИГП - 49	65
20	82	150	9500	'960	ИГП - 72	60
21	32	52	2500	3000	ИГП - 18	50
22	165	125	12000	1250	ИГП - 49	60
23	130	70	18000	2500	ИГП - 72	65
24	180	120	12000	1860	И – 50А	60
25	65	80	8500	2800	И – 40А	50

Расчет и выбор посадок с натягом

Номер варианта	D ,мм	d_1.мм	$d_{2,мм}$	ι ,мм	M_k,Н.М	P_0, Н	Материал	
							Вала	Корпуса
1.	35	30	50	35	12	500	Бронз-6-6-3	Сталь 20
2.	220	70	230	200	460	0	Сталь 30	Сталь 20
3.	100	90	130	100	0	6000	Сталь 20	Сталь 30
4.	40	20	60	60	320	0	Сталь 30	СЧ 21-40
5.	50	40	70	80	350	0	Сталь 20	Сталь 35
6.	110	100	130	120	200	1000	Сталь 30	Сталь 08
7.	120	100	140	130	400	0	Сталь 08	Сталь 30
8.	30	0	40	50	120	0	Сталь 40	Сталь 45
9.	180	170	210	180	300	700	Сталь 20	Сталь 35
10.	115	100	130	90	200	0	Сталь 08	Сталь 20
11.	95	80	**110**	100	700	1000	Сталь 20	Сталь 35
12.	140	130	180	120	460	0	Сталь 08	Сталь 30
13.	40	20	60	60	100	0	Сталь 35	Сталь 35
14.	200	100	220	110	0	1500	Бронз 6-6-3	Сталь 30
15.	130	120	150	140	270	0	Сталь 20	Сталь 30
16.	60	0	70	70	420	0'	Сталь-45	Сталь 30
17.	200	100	220	300	450	600	Сталь 20	Сталь 30
18.	60	50	100	60	0	2000	Сталь 20	Сталь 30
19.	100	90	120	60	320	0	СЧ 21	Сталь 20
20.	130	120	160	150	350	0	Сталь 20	Сталь 45
21.	60	50	100	60	150	0	Сталь 20	Сталь 30
22.	75	60	100	80	250	0	Сталь 08	СЧ 21-40
23.	90	0	100	140	900	0	Сталь 30	Сталь 40
24.	150	140	170	150	960	0	Сталь 20	Сталь 30
25.	170	150	180	250	280	1000	Сталь 30	Сталь 20

Расчет посадок для подшипников качения

Номер вари-анта	Номер под-шипника	Класс	Рад. нагр. F, Н	Осев. нагр. F_a, Н	Характеристи-ки нагрузки	Что враща-ется	D/D_k или d/a
1	80310	6	12000	0	С ударами	Корпус	0,4
2	7515	5	10000	0	Умеренная	Вал	0,4
3	60310	0	3800	0	С ударами	Вал	0,6
4	60306	4	5000	0	Умеренная	Корпуса	0,5
5	80312	6	4600	0	С ударами	Корпус	0,5
6	7220	5	20000	1000	С ударами	Вал	0,3
7	7214	4	13500	2000	Умеренная	Вал	0,7
8	46116	0	9500	1000	С ударами	Корпус	0,6
9	46114	6	14500	1500	Умеренная	Корпус	0,4
10	60306	5	10000	0	С ударами	Вал	0,3
11	80214	4	12000	0	С ударами	Корпус	0,5
12	7520	0	9600	1000	Умеренная	Вал	0,6
13	7314	6	3400	1800	С ударами	Корпус	0,7
14	46310	5	5750	500	Умеренная	Вал	0,6
15	3617	4	17000	150	С ударами	Корпус	0,8
16	7310	0	9500	500	Умеренная	Вал	0,5 ,,
17	7208	6	6500	200	С ударами	Вал	0,4
18	36206	5	3800	250	С ударами	Корпус	0,5
19	36307	4	5900	500	Умеренная	корпус	0,5
20	7515	5	8500	600	С ударами	Вал	0,4
21	60305	6	7500	0	С ударами	корпус	0,6
22	3618	0	12000	1200	Умеренная	Вал	0,5
23	46310	6	9600	400	С ударами	Вал	0,6
24	34209	5	7500	900	Умеренная	Корпус	0,4
25	7218	4	21600	1000	Умеренная	Корпус	0,6

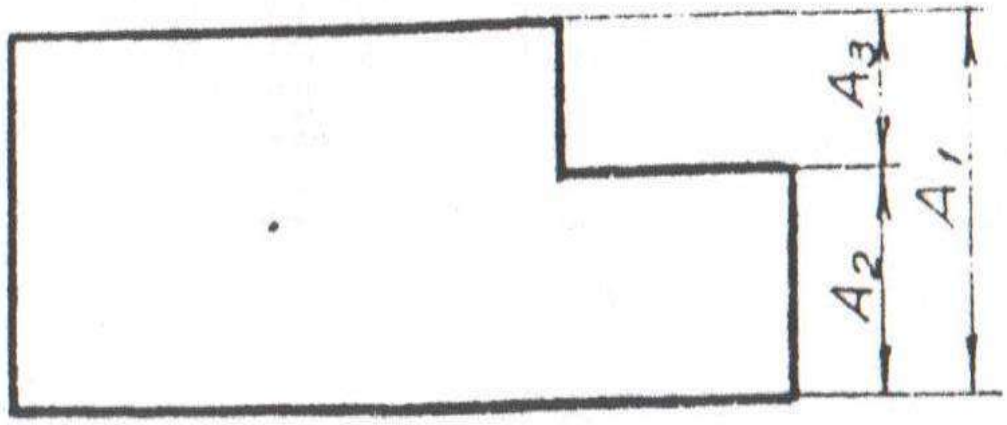
Определение элементов зубчатых колес

ик вар.	Z	m	степени точности
1	36	2.5	6-7-7-С
2	28	3,0	7-6-6-В
3	30	3,5	8-В
4	40	4,0	8-7-7-Ва-
5	29	4,0	7-6-6 -В
6	32	5,0	7-В
7	56	3,0	6-7-7-Д
8	45	2,0	5-6-6-Д
9	42	2,5	7-6-6-С
10	25	3.0	8-7-7-Ва
11	28	3,5	8-В а
12	50	4,0	8-7-7-С
13	36	3,5	8-В
14	62	5,0	7-6-6-Ва
15	46	3,0	8-В
16	45	4,0	8-7-7-С
17	38	3,0	8-7-7-В
18	40	2,5	6-7-7-Д
19	35	2,0	6-7-7-С
20	22	4,0	8-В
21	34	3.5	7-6-6-Ва
22	32	4,0	8-В а
23	60	5,0	7-В
24	62	4,0	8-7-7-В а
25	58	2,0	8-А

Расчет размерных цепей

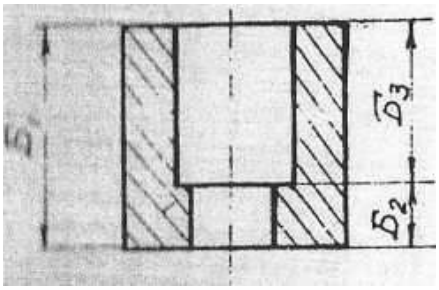
Задача № 1.

Определить исполнительный размер A_j -го звена, при заданной последовательности обработки.



Номер вар.	AI	A2	A3	Последовательность обработки	Определить размер
1	100 ℓ 11	40	60F9	A2 и A3	A2
6	120 d lo	75 js 12	45	A1 и A3	A3
11	80 f 9	50 j s 11	30	A1 и A3	A3
I6	150 8	65	85BII	A1 и A2	A2
21	130	75 d 10	55AII	A1 и A2	AI

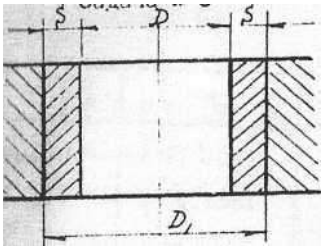
Задача № 2



Конструктор задал размеры $Б_I$ и $Б_2$, технологу удобнее обрабатывать в последовательности $Б_I :: Б_3$. Определить исполнительный размер $Б_3$ из условия, чтобы после обработки детали размеры $Б_1$ и $Б_2$ соответствовали заданным конструктором.

Номер вар.	$Б_I$	$Б_2$	Номер вар.	$Б_I$	$Б_2$
2	100 d 8	20 js 11	57	115 d 8	25 js 12
7	95 e 9	15 B 12	62	120 e 7	20 d 11
12	120 f 8	30 c 11	67	100 h 6	25 l 12
17	145 d 8	35 l 11	72	145 js 6	30 a 11
22	85 h 7	15 B 12	77	150 d 8	25 js 11

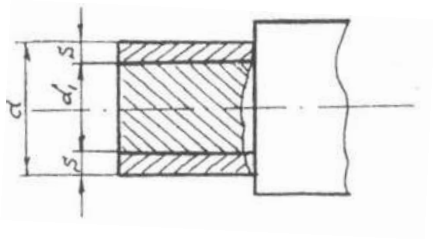
Задача № 3



Определить исполнительный размер отверстия D_1 до покрытия слоем металла, если после электрогальванического покрытия слоем S_j на сторону, отверстие должно иметь размер D.

Номер вар.	D	S	Номер вар.	D	S
3	140 D 10	$0^{+0.06}_{+0.03}$	58	130 B 11	$0^{+0.10}_{+0.07}$
8	125 E 9	$0^{+0.05}_{+0.03}$	63	100 A 11	$0^{+0.15}_{+0.12}$
13	80 js 11	$0^{+0.09}_{+0.05}$	68	56 D 11	$0^{+0.10}_{+0.97}$
18	75 D 11	$0^{+0.15}_{+0.13}$	73	115 E 9	$0^{+0.120}_{+0.105}$
23	185 D 10	$0^{+0.12}_{+0.09}$	78	125 B 11	$0^{+0.110}_{+0.070}$

Задача № 4.

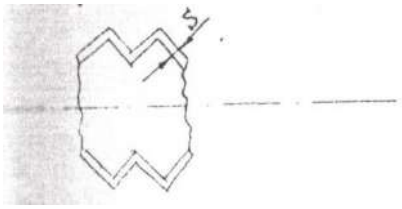


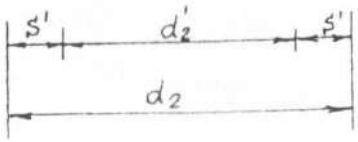
Определить исполнительный размер вара d_1 до нанесения слоя металла, если после нанесения электрогальваническим способом слоя S_j на сторону, вал должен иметь размер d.

Номер вар.	d	S	Номер вар.	d	S
4	75 d 10	$0^{+0.10}_{+0.08}$	59	130 d 11	$0^{+0.11}_{+0.07}$
9	65 f 9	$0^{+0.075}_{+0.060}$	64	125 c 11	$0^{+0.16}_{+0.12}$
14	182 d 11	$0^{+0.15}_{+0.12}$	69	100 *l* 12	$0^{+0.15}_{+0.10}$
19	120 *l* 11	$0^{+0.16}_{+0.12}$	74	72 d 11	$0^{+0.08}_{+0.05}$
24	95 d 10	$0^{+0.06}_{+0.04}$	79	76 *l* 11	$0^{+0.12}_{+0.09}$

Задача № 5

Определить размер диаметра $d`_2$ до покрытия защитным слоем, если при гальваническом покрытии наносится слой металла S на сторону и после покрытия резьба должна иметь d_2





Номер вар.	Резьба после металлизации	S	Номер вар.	Резьба после металлизации	S
5	M20x1,5-6g	$0^{+0.05}_{+0.02}$	60	M36x2-8g	$0^{+0.10}_{+0.06}$
10	M16x1,5-8g	$0^{+0.07}_{+0.03}$	65	M36-8g	$0^{+0.12}_{+0.07}$
15	M12-8g	$0^{+0.06}_{+0.03}$	70	M27x1,5-6d	$0^{+0.08}_{+0.04}$
20	M10-8g	$0^{+0.08}_{+0.05}$	75	27x1,5-8g	$0^{+0.12}_{+0.08}$
25	M16x1,5-6g	$0^{+0.07}_{+0.05}$	80	M18x1,5-6a	$0^{+0.08}_{+0.05}$

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

НОВИКОВА Н.А

ДОПУСКИ И ПОСАДКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

По курсу «Метрология, стандартизация и сертификация» для студентов направления: 15.03.01 - «Машиностроение», 15.03.02 - «Технологические машины и оборудование» 21.05.04 «Горное дело»

Екатеринбург
2019

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Допуски и посадки» является одной из важнейших дисциплин, так как неразрывно связана с главной задачей современного машиностроения – обеспечение высокого качества выпускаемой продукции. Качество изделий машиностроения, как и любого другого вида продукции, является физической категорией, зависящей от множества конструкторских, технологических и организационно-технологических факторов, проявляющихся на этапах жизненного цикла изделия. Установлено, что до 90% эксплуатационных свойств деталей изделий машиностроения может быть достигнуто за счет соответствующего нормирования точностей геометрических параметров элементов деталей и их поверхностей. К таким эксплуатационным свойствам следует отнести взаимозаменяемость деталей и сборочных единиц, износостойкость трущихся поверхностей, долговечность, герметичность и прочность соединений и др.

Знания , умения и навыки, полученные в результате изучения дисциплины «Допуски и посадки» помогут студентам пользоваться государственными стандартами при нормировании точности геометрических параметров гладких цилиндрических и типовых деталей и сборочных единиц, обозначать их на рабочих чертежах.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ

Взаимозаменяемость – свойство независимо изготовленных деталей и сборочных единиц занимать свое место в изделии без дополнительной механической или ручной обработки при сборке, обеспечивая при этом нормальную работу собираемых узлов, механизмов, машин. Взаимозаменяемость не обеспечивается только точностью геометрических параметров, Взаимозаменяемыми должны быть форма, механические, электрические и другие количественные и качественные характеристики деталей и сборочных единиц. Такая взаимозаменяемость называется полной. Полную взаимозаменяемость экономически целесообразно применять для деталей, изготовленных с допусками не точнее 6-го квалитета.

При полной взаимозаменяемости:

- упрощается процесс сборки – он сводится к простому соединению деталей рабочими преимущественно невысокой квалификации;

- появляется возможность точно нормировать процесс сборки во времени, устанавливать необходимый темп работы и применять поточный метод;

- создаются условия для автоматизации процессов изготовления и сборки изделий;

-упрощается и удешевляется ремонт изделий, гак как любая изношенная или поломанная деталь или сборочная единица может

быть заменена новой (запасной).

Иногда для удовлетворения эксплуатационных требований необходимо изготовлять детали и сборочные единицы с малыми экономически неприемлемыми или технологически трудно выполнимыми допусками. В этих случаях для получения требуемой точности сборки применяют групповой подбор деталей (селективную сборку), компенсаторы, регулирование положения некоторых частей машин и приборов, пригонку и другие дополнительные технологические мероприятия при обязательном выполнении требовании к качеству сборочных единиц и изде ий. Такую взаимозаменяемость называют неполной (ограниченной). Ее можно осуществлять не по всем, а только по отдельным геометрическим или другим параметрам.

Внешняя взаимозаменяемость — это взаимозаменяемость покупных и кооперируемых изделий (монтируемых в другие более сложные изделия) и сборочных единиц по эксплуатационным показателям, а также по размерам и форме присоединительных поверхностей. Например, в электродвигателях внешнюю взаимозаменяемость обеспечивают по частоте вращения вала и мощности, а также по размерам присоединительных поверхностей; в подшипниках качения — по наружному диаметру наружного кольца и внутреннему диаметру внутреннего кольца.

Внутренняя взаимозаменяемость распространяется на детали, сборочные единицы и механизмы, входящие в изделие. Например, в подшипнике качения внутреннюю групповую взаимозаменяемость имеют тела качения и кольца.

2. ПОНЯТИЯ О РАЗМЕРАХ, ДОПУСКАХ И ПОСАДКАХ

Под размером понимают числовое значение линейной или угловой величины в выбранных единицах измерения. Различают номинальный, действительный и предельные размеры.

Номинальный размер — это размер, относительно которого определяются предельные размеры и который служит также началом отсчета отклонений. Номинальный размер, общий для отверстия и вала, образующих соединение, называется номинальным размером соединения. Это основной размер, полученный на основе кинематических, динамических и прочностных расчетов или выбранный из конструктивных, технологических, эксплуатационных, эстетических и других соображений и указанный на чертеже. Полученный, таким образом номинальный размер должен быть округлен до ближайшего стандартного из ряда нормальных линейных размеров по ГОСТ 6636-69 «Нормальные линейные размеры».

Действительный — это размер, установленный измерением с допустимой погрешностью. Величина допускаемой погрешности измерения, по которой выбирается необходимое средство измерения, регламентируется ГОСТ 8.051-81 в зависимости от точности изготовления, заданной на чертеже.

Предельные размеры — это два предельно допустимых размера, между которыми должен находиться или которым может быть равен действительный размер. Больший из двух предельных размеров

называется *наибольшим предельным размером,* а меньший- *наименьшим предельным размером.*

Принято обозначать номинальный, действительный и предельные размеры для отверстий - D, D_r, D_{max}, D_{min};

для валов – d, d_r, d_{max}, d_{min}..

При выходе действительного размера за предельные – деталь считается бракованной.

Условие годности для отверстий: $D_{min} \le D_r \le D_{max}$;

для валов $d_{min} \le d_r \le d_{max}$.

Для упрощения простановки размеров на чертежах вместо предельных размеров проставляют предельные отклонения. Предельные отклонения подразделяют на верхнее и нижнее.

Верхнее — это алгебраическая разность между наибольшим предельным и номинальным размерами, *нижнее отклонение* — это алгебраическая разность между наименьшим предельным и номинальным размерами.

В ГОСТ 25346-89 приняты условные обозначения: верхнее отклонение отверстия —*ES,* вала — *es,* нижнее отклонение отверстия — *El,* вала — *ei.*

Согласно определениям:

Для отверстий

$$ES = D_{max} - D; \qquad El = D_{min} - D;$$

Для валов

$$es = d_{max.} - d\ ; \qquad ei = d_{min} - d\ ;$$

Предельные отклонения могут иметь положительные и отрицательные значения, или одно из них может быть равным нулю.

Допуск размера — это разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями. Допуск обозначается IT или T_D – допуск отверстия и T_d – допуск вала.

Согласно определениям:

Допуск отверстия

$$T_D = D_{max} - D_{min}\ ;$$

Допуск вала

$$T_d = d_{max} - d_{min}\ .$$

Допуск размера всегда положительная величина.

Поле допуска - это поле, ограниченное верхним и нижним отклонениями. Для графического изображения полей допусков, позволяющего понять соотношения номинального и предельных размеров, предельных отклонений и допуска, введено понятие нулевой линии.

Нулевая линия — это линия, соответствующая номинальному размеру, от которой откладываются предельные отклонения размеров при графическом изображении допусков и посадок. При горизонтальном расположении нулевой линии положительные отклонения откладываются вверх от нее, а отрицательные — вниз (рис. 2.1 и 2.2).

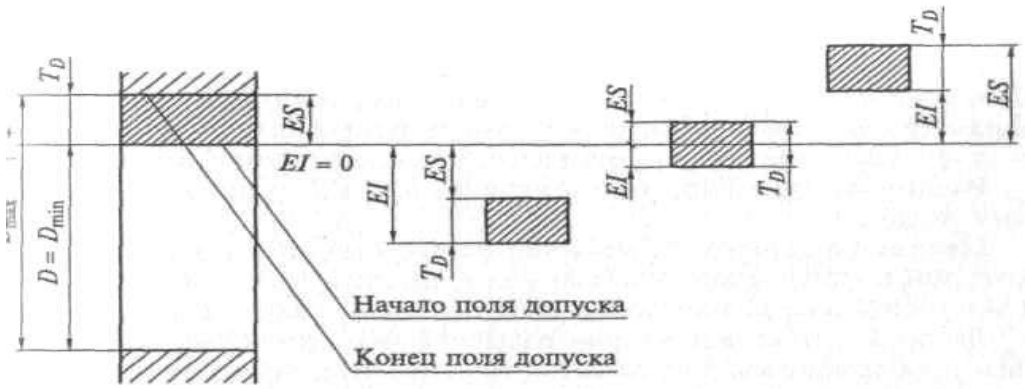


Рис. 1.4. Схема расположения полей допусков отверстий

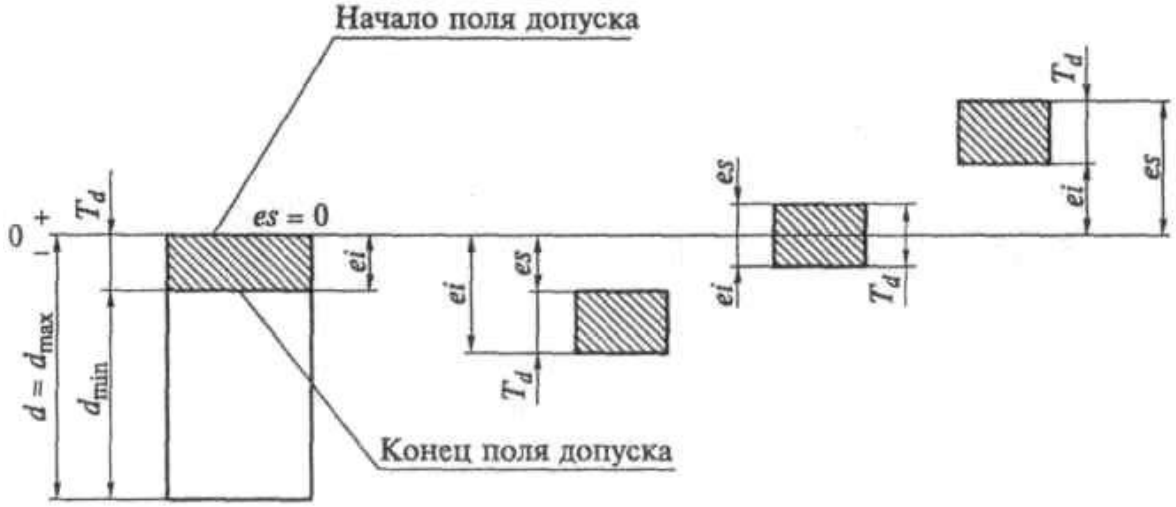


Рис. 1.5. Схема расположения полей допусков валов

В машинах и механизмах детали не находятся обособленно друг от друга, они собираются в определенные узлы, комплекты, группы. Поверхности деталей, по которым происходит сопряжение одной детали с другой называют сопрягаемыми поверхностями.

Остальные поверхности называются свободными. Поверхности могут быть как цилиндрическими (ось вагона, подшипник скольжения), так и плоскими (шпонка, шпоночный паз). В терминологии по допускам и посадкам: *вал* - все охватываемые наружные поверхности, о*тверстие* - внутренние охватывающие поверхности.

Посадкой – называется характер соединения деталей, определяемый разностью действительных размеров вала и отверстия. Различают три вида посадок: с зазором, с натягом и переходные посадки.

Посадкой с зазором называют такое соединение, у которого действительный размер отверстия больше действительного размера вала. Поле допуска отверстия располагается над полем допуска вала. (рис. 2.3). Основными характеристиками посадки с зазором являются:

Наименьший зазор $S_{min} = D_{min} - d_{max}$;

наибольший зазор $S_{max} = D_{max} - d_{min}$;

средний зазор $S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2}$;

действительный зазор $S_д = D_д - d_d$;

допуск зазора (допуск посадки с зазором) $T_s = S_{max} - S_{min} = T_D + T_d$

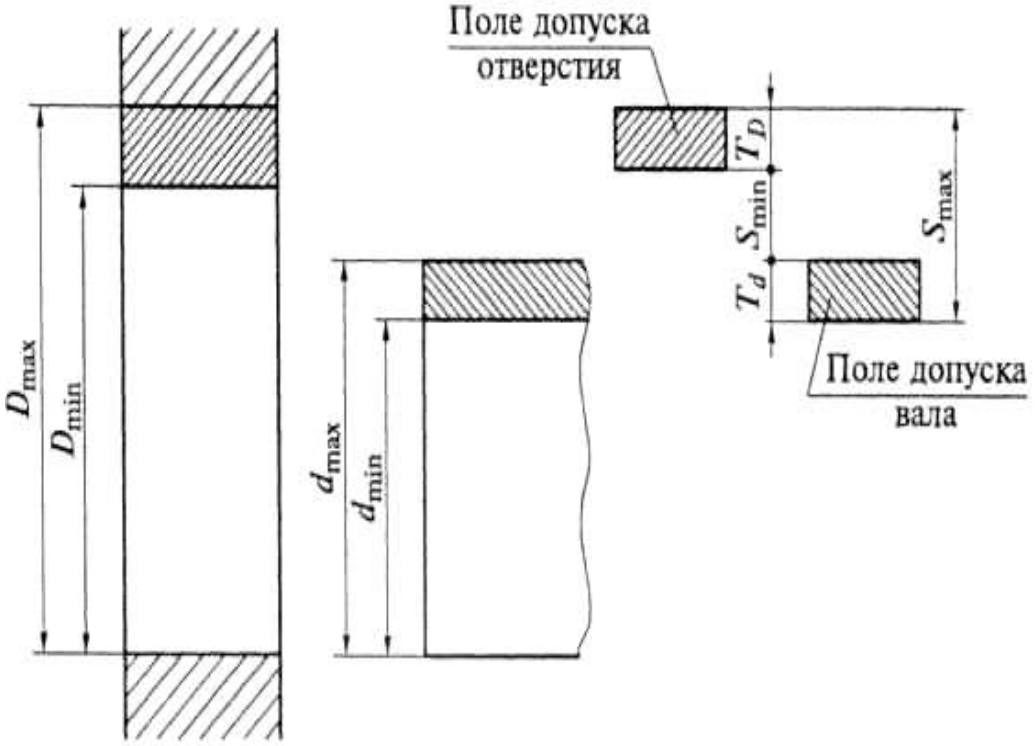


Рис.2.3 Схемы расположения полей допусков при посадках с зазором

посадкой с натягом называется посадка, у которой при любых условиях сборки, действительный размер вала больше действительного размера отверстия (поле допуска вала расположено над полем допуска отверстия) (рис. 2.4). Натяг обеспечивает взаимную неподвижность деталей после их сборки. Основными характеристиками посадки с натягом являются:

наименьший натяг $N_{min} = d_{min} - D_{max}$;

наибольший натяг $N_{max} = d_{max} - D_{min}$;

средний натяг $N_m = \frac{N_{max} + N_{min}}{2}$;

действительный натяг $N_д = d_d - D_д$

допуск натяга (допуск посадки с натягом) $T_N = N_{max} - N_{min} = T_D + T_d$.

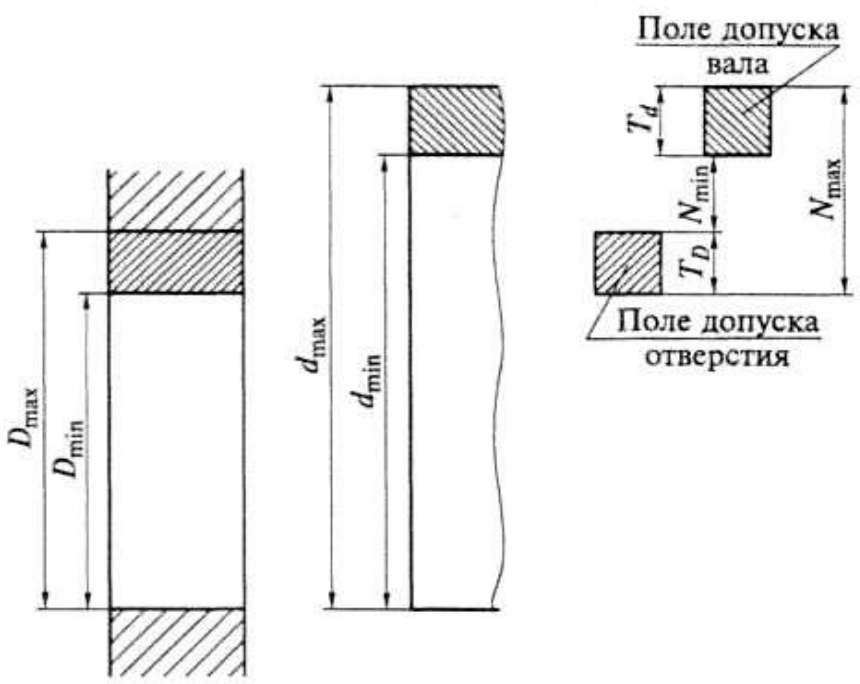


Рис.2.4 Схемы расположения полей допусков при посадках с натягом

Переходной посадкой называется посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга (поля допусков отверстия и вала перекрываются частично или полностью) (рис.2.5). Переходные посадки используются для неподвижных соединений, когда при эксплуатация необходима частая разборка и сборка, а также когда к центрированию деталей предъявляются повышенные требования.

Основными характеристиками переходных посадок являются:

наибольший натяг $N_{max} = d_{max} - D_{min}$;

наибольший зазор $S_{max} = D_{max} - d_{min}$;

действительный натяг $N_д = d_d - D_д$

действительный зазор $S_д = D_д - d_d$;

допуск посадки $T_{N(S)} = N_{max} + S_{max} = T_D + T_d$.

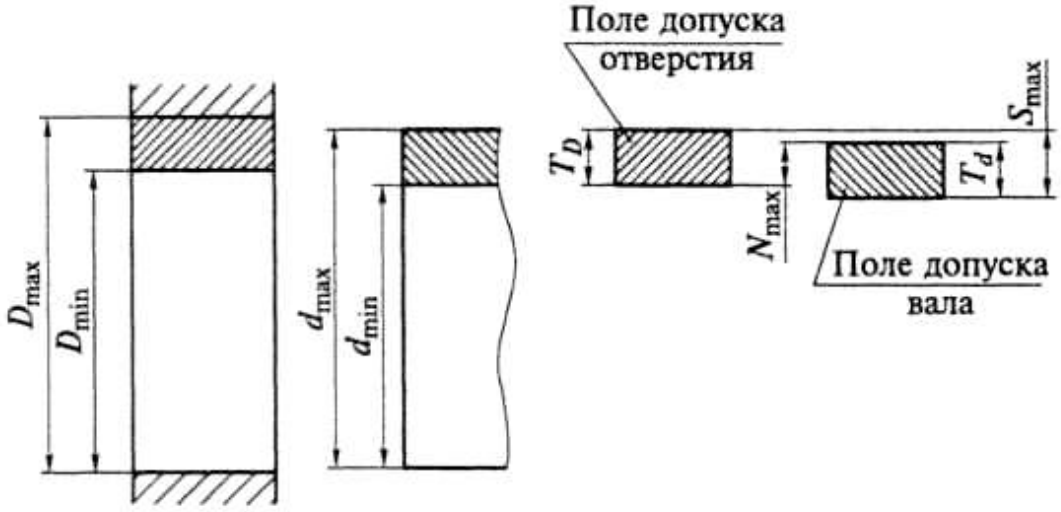


Рис.2.5 Схемы расположения полей допусков при переходных посадках

3. ЕДИНАЯ СИСТЕМА ДОПУСКОВ И ПОСАДОК

Системой допусков и посадок называют совокупность допусков и посадок, закономерно построенных на основе опыта, теоретических и экспериментальных исследований и оформленных в виде стандартов. Система предназначена для выбора минимально необходимых, но достаточных для практики вариантов допусков и посадок типовых соединений деталей машин. Единая система допусков и посадок (ЕСДП) гладких соединений изложена в стандартах: ГОСТ 25346-89; ГОСТ 25347-82; Согласно стандартам в ЕСДП установлены допуски и посадки для размеров до 1 мм;

свыше 1 мм до 500 мм; свыше 500 мм до 3150 мм. Детали, размеры которых входят в каждый из этих диапазонов, имеют свои особенности при проектировании, обработке и контроле. Так, размеры диапазона свыше 0 до 1 мм наиболее часто реализуются в микроэлектронике с использованием нанотехнологий, размеры свыше 1 до 500 мм – в машиностроении, а размеры свыше 500 мм – в станкостроении, тяжелом машиностроении. Рассмотрим построение системы допусков и посадок для размеров от 1 до 500 мм.

3.1 Закономерности построения допусков

Основная закономерность построения допусков размеров *IT*, имеет вид

$$IT\ (T) = a\ i \qquad (1.1)$$

Где a – число единиц допуска; i- единица допуска, мкм

Единица допуска функционально связана с номинальным размером и является масштабом для измерения допуска в закономерности (1.1).

На основании исследований точности механической обработки установлены следующие зависимости единиц допуска для размеров до 500 мм

$$i = 0{,}45\sqrt[3]{D} + 0{,}001D, \qquad (1{,}2)$$

где i — единица допуска, мкм; D — среднее геометрическое крайних размеров каждого интервала размеров, мм.

Каждый диапазон размеров разбивается на *интервалы* — основные и промежуточные. В пределах каждого интервала

основные отклонения и допуски неизменны. Основные интервалы используются для определения всех допусков системы. В СДП для номинальных размеров от 1 до 500 мм предусмотрено 13 основных интервалов размеров. Для полей допусков, образующих посадки с большими величинами зазоров или натягов, введены дополнительные промежуточные интервалы, что позволяет уменьшить колебание зазоров и натягов и

Интервалы подразделяются на основные и промежуточные.

диапазон размеров до 500 мм разбит на 13 основных интервалов:

свыше1 до З мм;	свыше 30 до 50 мм;	свыше 250 до 315 мм;
свыше З до б мм;	свыше 50 до 80 мм;	свыше 315 до 400 мм;
свыше б до10 мм;	свыше 80 до 120 мм;	свыше 400 до 500мм.
свыше 10 до 18 мм;	свыше 120 до 180 мм;	
свыше 18 до 30 мм;	свыше 180 до 250 мм;	

Промежуточные интервалы введены для номинальных размеров свыше 10 мм и делят каждый основной интервал на две, а в некоторых случаях – на три части. В пределах каждого интервала по зависимости (1.2.) установлена единица допуска

Детали разного назначения в различных машинах и механизмах должны быть изготовлены с различной точностью. Нормирование требуемых уровней точности осуществляется с помощью квалитетов. Под ***квалитетом*** понимается совокупность допусков, изменяющихся в зависимости от номинального размера так, что уровень точности для всех номинальных размеров остается одинаковым. Допуск, характери-

зующий точность, в пределах одного квалитета зависит только от номинального размера, входящего в единицу допуска *i*.

В ЕСДП предусмотрено 20 квалитетов, которые обозначаются арабскими цифрами (01; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; …;18). С увеличением номера квалитета точность понижается (допуск увеличивается).

Самые точные квалитеты (01, 0, 1, 2, 3, 4), как правило, применяются при изготовлении образцовых мер и калибров.

Квалитеты с 5-го по 12-й, как правило, применяются для сопрягаемых элементов деталей при образовании посадок.

Квалитеты с 12-го по 18-й применяют для несопрягаемых элементов деталей.

Допуск по квалитету обозначается буквами *IT* с указанием номера квалитета, например *IT*8 - допуск по 8 квалитету.

Квалитеты отличаются друг от друга коэффициентом точности *a* (количеством единиц допуска) В табл. 1 приведено количество единиц допуска для каждого квалитета, начиная с 5 по 18.

Таблица 1

Число единиц допуска

квалитет	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
«*a*»	7	10	16	25	40	64	100	160	250	400	640	1000	1600	2500

3.2 системы допусков и посадок

Стандарты предусматривают две равноправные системы посадок: систему отверстия и систему вала.

Система отверстия – система допусков и посадок, при которой для данного номинального размера и данного квалитета предельные отклонения отверстия остаются постоянными, а требуемые посадки достигаются за счет изменения предельных размеров вала (рис.3.1). В системе отверстия основной деталью является *основное отверстие*, которого нижнее отклонение $El=0$, а верхнее $ES = + T_D$.

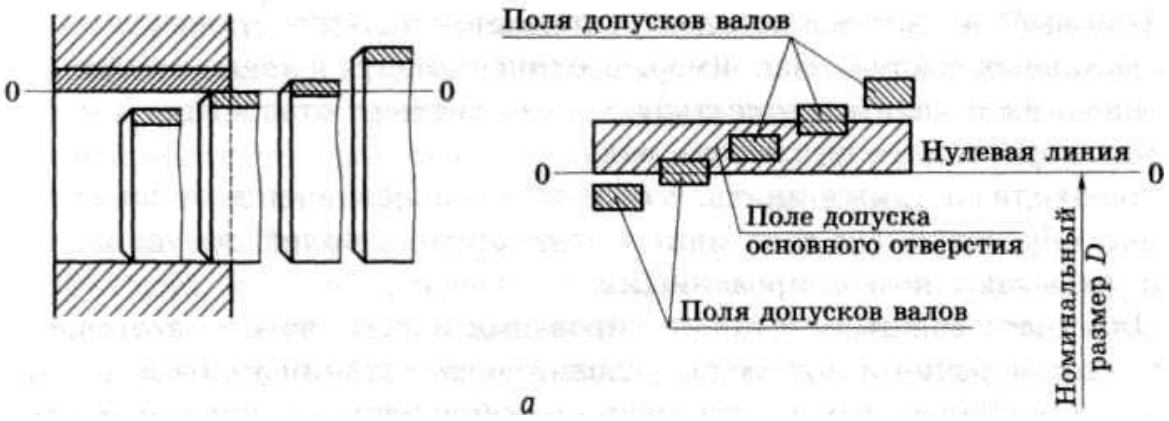


Рис.3.1 Посадки в системе отверстия

Система вала – система допусков и посадок, при которой для данного номинального размера и данного квалитета предельные отклонения вала остаются постоянными, а требуемые посадки достигаются за счет изменения предельных размеров отверстия (рис.3.2). В системе вала основной деталью является *основной вал* у которого верхнее отклонение $es=0$, а нижнее $ei = - T_d$.

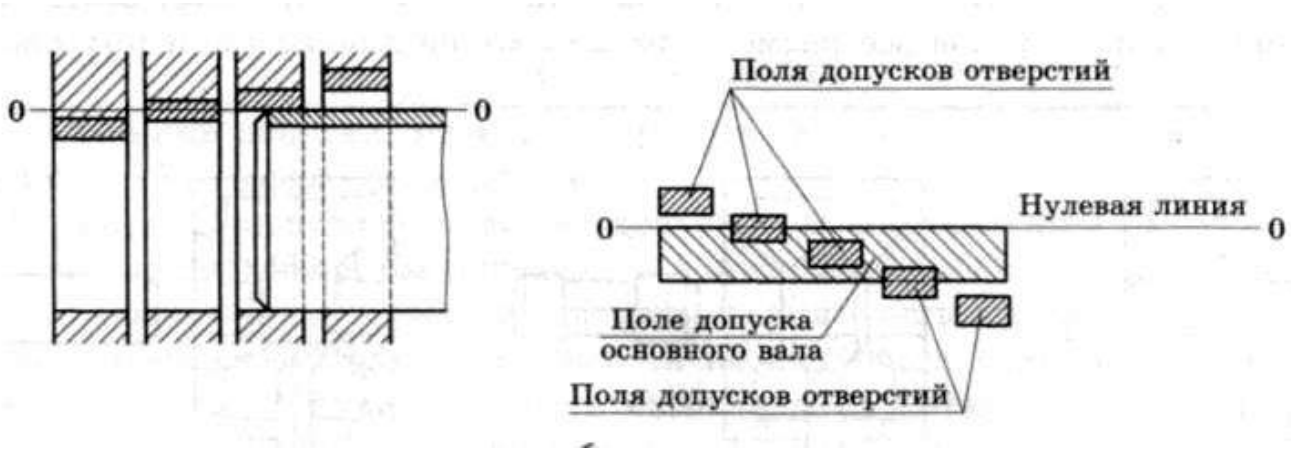


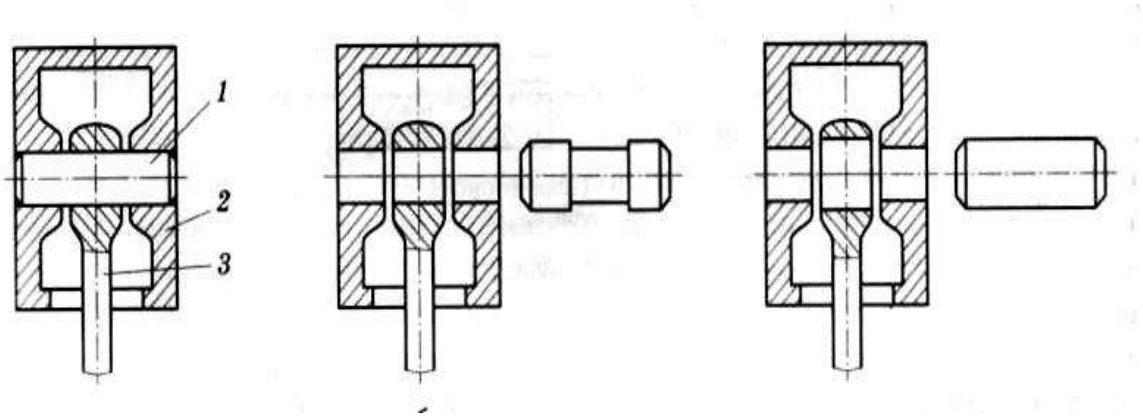
Рис.3.2. посадки в системе вала

Выбор системы посадки (отверстия или вала) определяют исходя из конструктивных, технологических и экономических соображений.

Предпочтительной является система отверстия. Это связано с тем, что отверстия обрабатываются дорогостоящим режущим инструментом (сверлом, протяжкой, зенкером, разверткой и т.п.), предназначенным для обработки только одного размера с определенным полем допуска. Вал, независимо от размера, в большинстве своем обрабатывается одним и тем же инструментом (резцом, шлифовальным кругом). Таким образом, количество типоразмеров инструмента для обработки отверстий будет значительно меньше при назначении посадки в системе отверстия. Система вала применяется в следующих случаях:

- когда на одном валу необходимо чередовать соединения нескольких отверстий одного номинального размера с различными посадками. На рис. 3.3, *а* представлено соединение поршневого пальца *1* с поршнем *2* и шатуном *3*. Для нормальной работы

этого узла соединение поршня и пальца должно быть выполнено по неподвижной посадке, а шатуна с пальцем — по подвижной посадке. Назначение посадок в системе отверстия (рис. 3.3, *б)* привело бы к неудобствам при обработке ступенчатого пальца и, главное, к порче отверстия шатуна при сборке. При назначении посадок в системе вала (рис. 3.3, *в*) эти недостатки исключаются.



а *б* *в*

Рис.3.3 Соединение поршневого пальца с поршнем и шатуном двигателя автомобиля;

а – общий вид соединения: 1 – поршневой палец; 2- поршень; 3- шатун; *б*- соединение в системе отверстия*; в*- соединение в системе вала

- система вала также применяется в случаях, когда детали типа валиков или осей изготавливаются из калиброванных холодно-тянутых прутков, дополнительная механическая обработка которых не предусматривается.

- и, наконец, посадка в системе вала назначается в случаях, когда вал является стандартной деталью или сборочной единицей (штифт, шплинт, шпонка, наружное кольцо подшипника и т.п.).

Необходимо также отметить, что возможно назначение и внесистемных посадок, образованных сочетанием стандартных полей допусков, которые иногда называют комбинированными.

3.3 Ряды основных отклонений

Основное отклонение- это одно из двух предельных отклонений (верхнее или нижнее), по величине и знаку которого определяется положение поля допуска относительно нулевой линии.

По ЕСДП таким отклонением является отклонение, ближайшее к нулевой линии. Стандарт предусматривает 28 рядов основных отклонений для валов и столько же основных отклонений для отверстий. Отклонения валов обозначаются строчными буквами латинского алфавита от *a* до *z* , а отверстия прописными буквами от *A* до *Z*.

Схематично ряды основных отклонений показаны на рис.3.4 Каждому основному отклонению на схеме соответствуют горизонтальная черта, от которой начинается поле допуска. Штриховкой показано направление поля допуска, а второе отклонение зависит от того, по какому квалитету будет выполнено данное предельное отклонение.

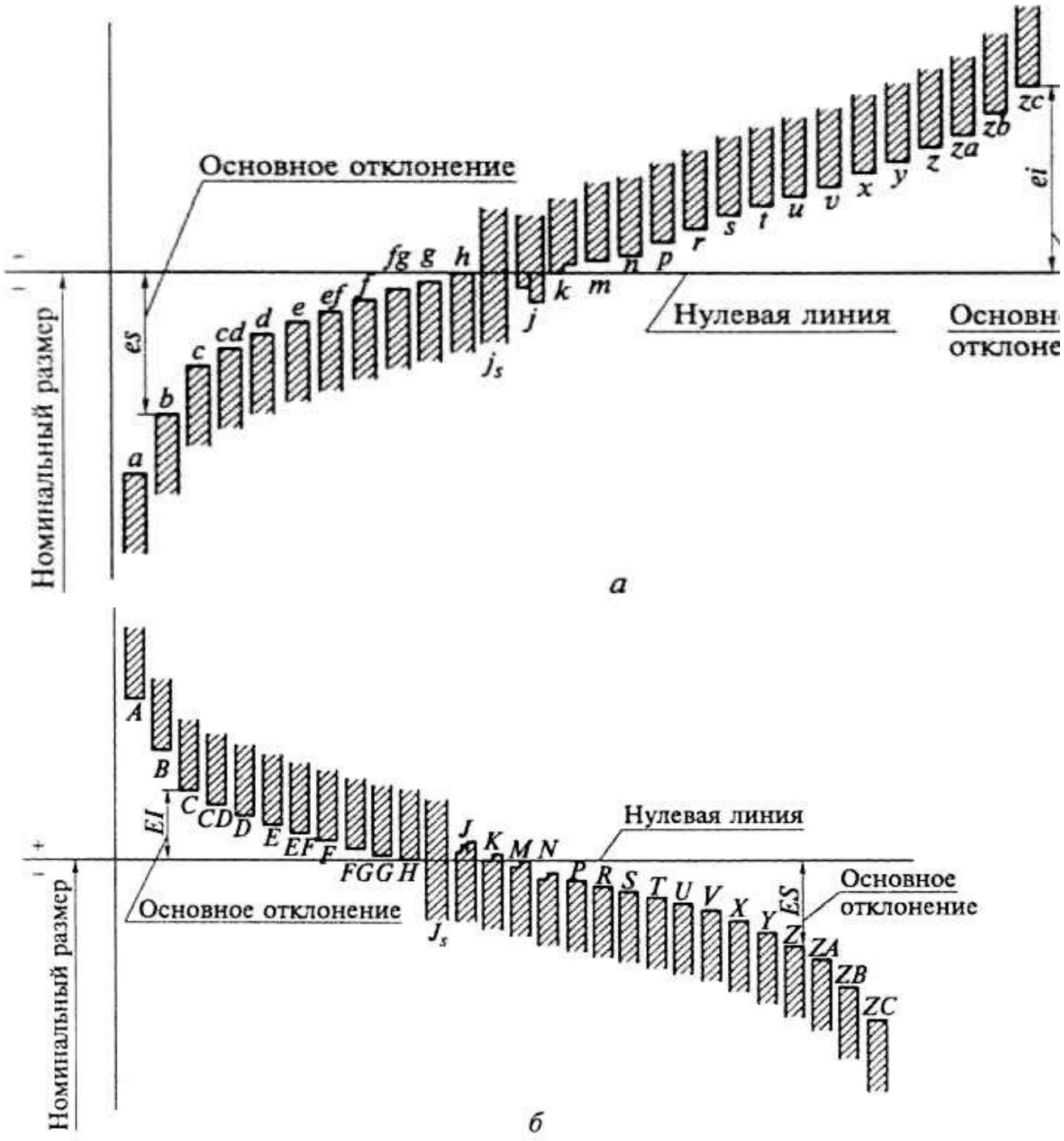


Рис.3.4. основные отклонения для валов (а), для отверстий (б)

3.4 Поля допусков

Поле допуска в ЕСДП образуется сочетанием одного из основных отклонений с допуском по одному из квалитетов. В соответствии с этим поля допусков обозначаются буквой основного отклонения и номерами квалитетов, например

для валов $h6$, $d11$, $b12$, $s8$ и т.д.;

для отверстий $A11$, $H8$, $S7$ и т.д.

По основному отклонению и допуску вычисляют второе предельное отклонение, ограничивающее данное поле допуска.

Если основное отклонение - верхнее, то нижнее отклонение определяют по зависимости:

для вала $ei = es - IT$;

для отверстия $El = ES - IT$.

Если основное отклонение – нижнее, то верхнее отклонение :

для вала $es = ei + IT$;

для отверстия $ES = El + El$.

В системе ЕСДП можно образовывать поля допусков для любого квалитета, что позволяет получить более 500 полей допусков для валов и столько же полей допусков для отверстий. Однако не все возможные поля допусков могут найти применение даже в перспективе, на которую ориентирован стандарт, так как одновременное применение на практике всех полей допусков неприемлемо по экономическим соображениям (затрудняет унификацию изделий, различных инструментов и калибров). В ЕСДП для диапазона размеров от 1 до 500 мм применяется отбор полей допусков, которые делятся на основные и дополнительные .

Основные поля допусков включают в себя предпочтительные (имеющие первоочередное применение) и рекомендуемые. Дополнительные поля допусков являются полями ограниченного применения и используются тогда, когда применение основных полей допусков не позволяет выполнить требования, предъявляемые к изделию.

3.5 Образование посадок

Посадки в системе ЕСДП образуются сочетанием полей допусков отверстия и вала.

Принципиально допускается любое сочетание полей допусков отверстия и вала. Предпочтение следует отдавать посадкам, образованным в системе отверстия или в системе вала. ГОСТ 25347 -82 устанавливает ряд стандартных посадок в системе отверстия и в системе вала. В каждой системе выделяются предпочтительные посадки, выделенные рамочками.

Минобрнауки Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов,
выполнению практических и контрольных работ

Екатеринбург
2019

Минобрнауки Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ:
проректор по УМК

_____доц. С. А. Упоров

«___»_____2019 г.

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов,
выполнению практических и контрольных работ

Издание УГГУ Екатеринбург, 2019

В 67

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов, выполнению практических и контрольных работ / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2019
©Уральский государственный горный университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 4
1.1. Основные виды связей и их реакции 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары 5
1.3. Условия равновесия систем сил 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором

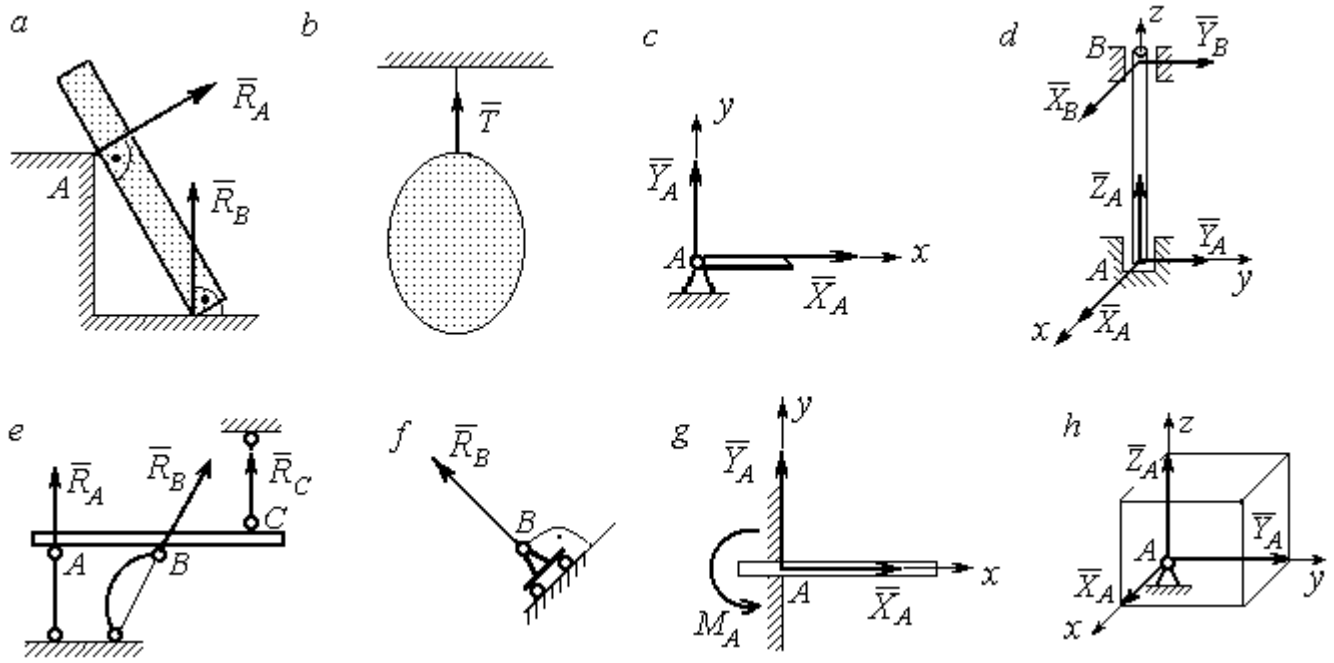


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
a – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач

реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы F относительно центра O $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра *O,* называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние *h* от центра *O* до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину *h* называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

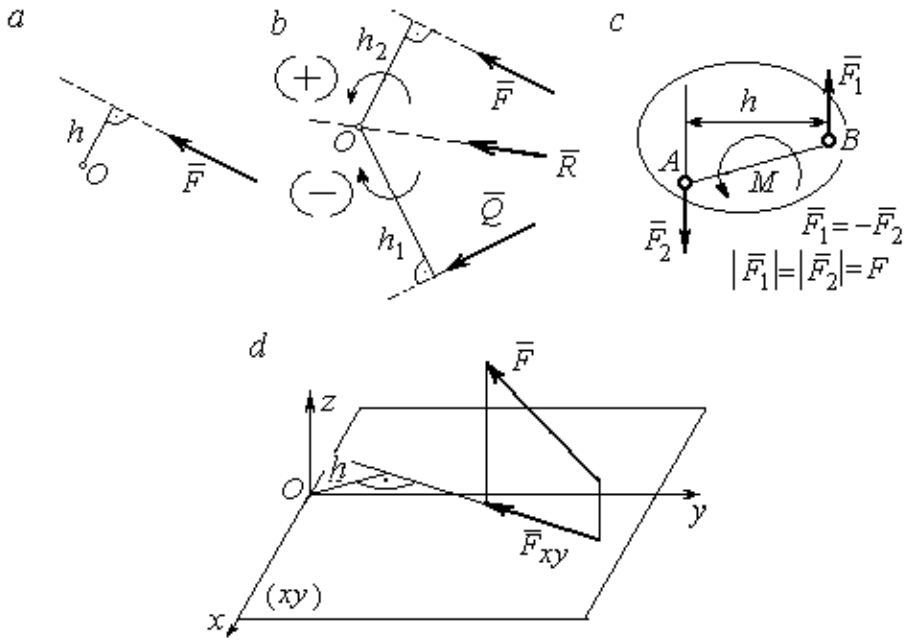


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O* положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр *O* и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.2, *c*).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы *F* относительно

оси z: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z, h – плечо проекции F_{xy} относительно центра O – точки пересечения оси z и плоскости xOy.

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

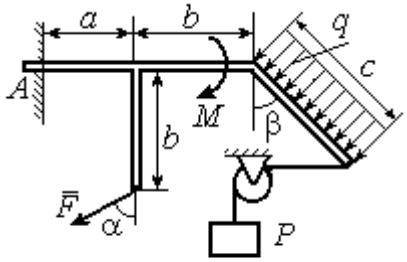
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

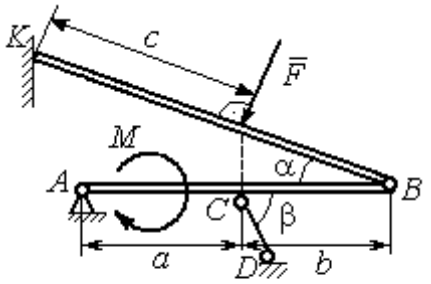
В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1	Задача 2



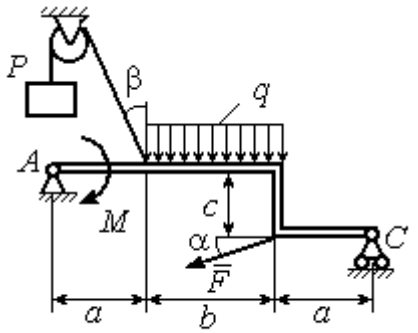
Найти реакцию жесткой заделки в точке A



Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

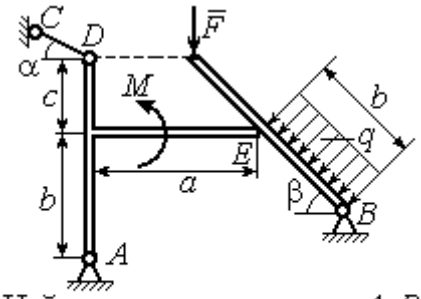
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

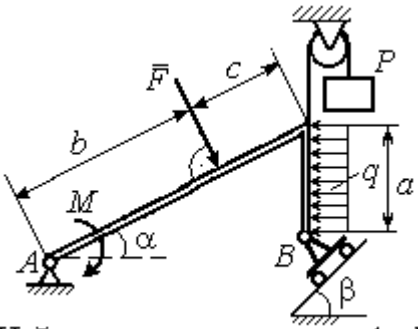
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

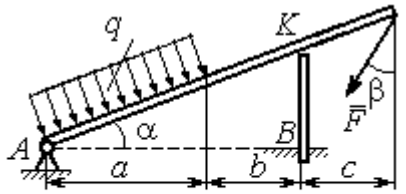
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

Задача 2

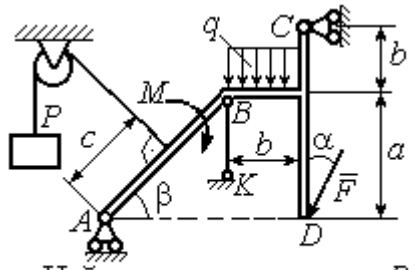


Найти реакцию шарнира A, реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

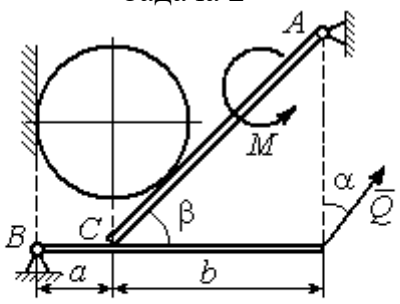
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

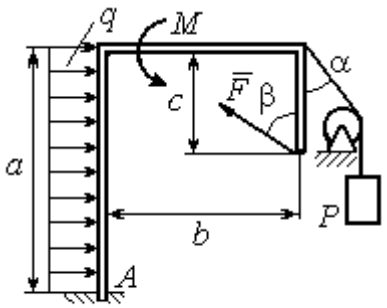
Задача 2



Вес шара P. Найти реакцию шарниров A, B, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

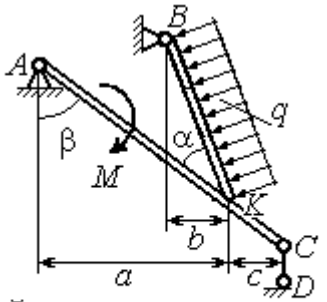
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

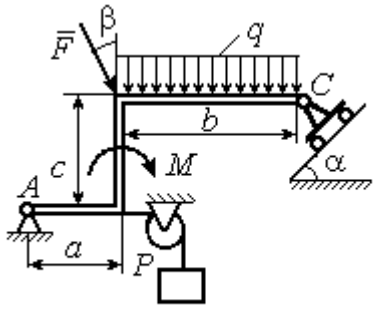
Задача 2



Найти реакцию шарнирв A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

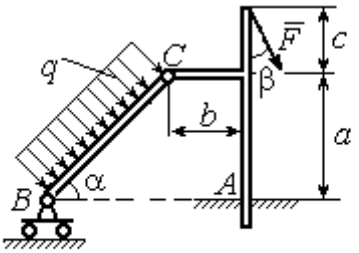
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

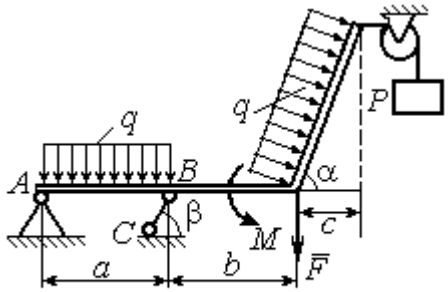


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

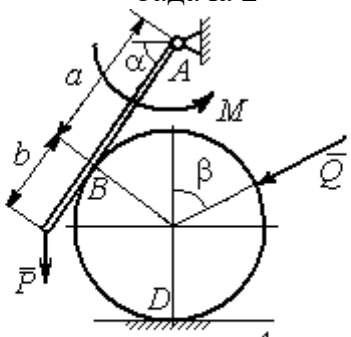
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

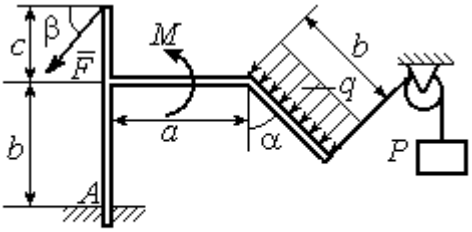
Задача 2



Найти реакцию шарнира A, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

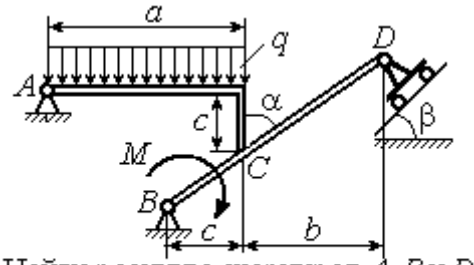
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

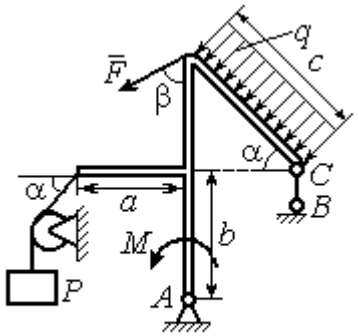
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

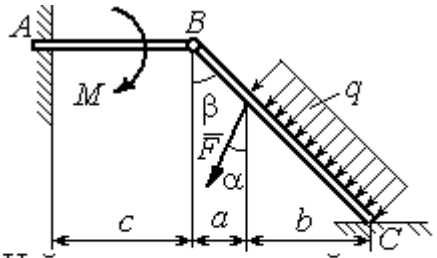
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2

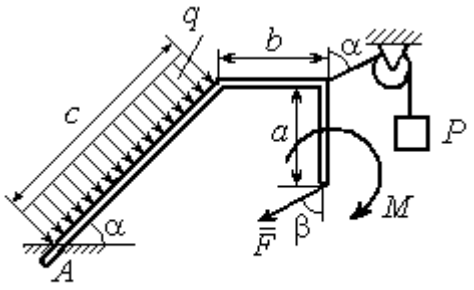


Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

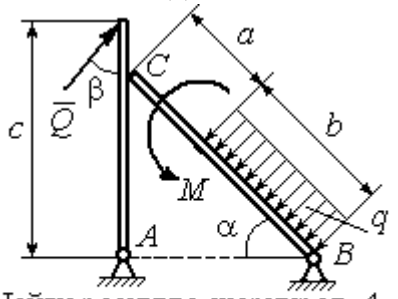
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P, кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F, кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q, кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M, кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α, град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β, град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a, м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b, м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c, м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F, кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q, кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M, кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α, град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β, град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a, м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b, м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c, м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1**.** Рама *ACE* (рис. 1.7) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке *AB*. В точке *E* под прямым углом к участку балки *CE* прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

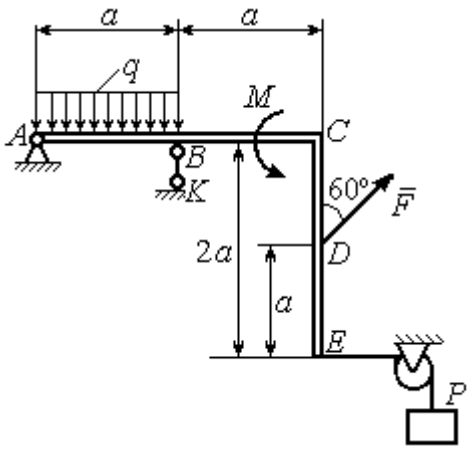


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза *P* на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

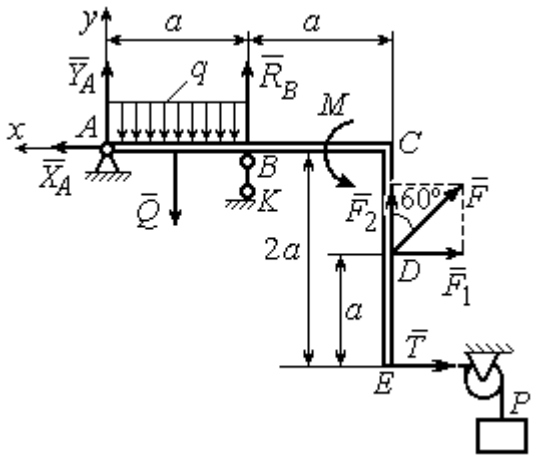


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *x*, *y*, и моменты сил относительно центра *A*, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра A использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем X_A = 28,66 Н, Y_A = 59,66 Н, R_B = – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка *ABLC* с вертикальной частью *AB* и горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° в точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *CL*, а в точке *E* закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью q = 2 кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине F = 10 кН, и пара сил с моментом M = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки *A* и реакции шарниров *C* и *E*, если a = 2 м.

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру *C* и рассмотрим равновесие балок *ABLC* и *EC* отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку *ABLC* (рис. 1.10, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, приложенной в середине отрезка *BL*, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a = 4$ кН. Кроме силы $\vec{Q}_1$ и пары сил с моментом *M* на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке *A*, имеющая своими составляющими силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A, а также реакция шарнира *C*, разложенная на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ (см. рис. 1.10, *a*). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат *xAy*, как показано на рис. 1.10, *a*, и составим уравнения равновесия:

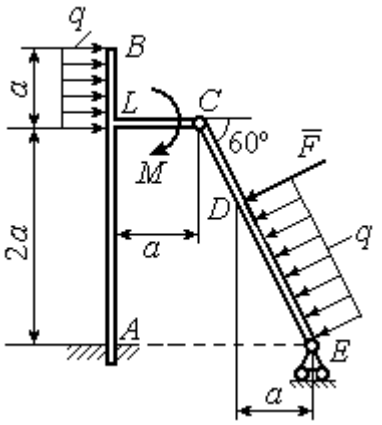


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

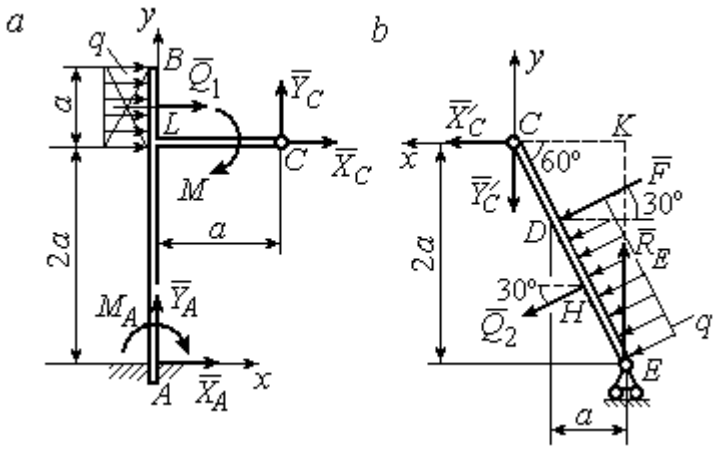


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку *ABLC*;
b - силы и реакции связей, действующие на балку *CE*

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки *EC*. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED*, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8$кН. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке

E и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира *C*. Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку *EC* силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат *xCy*, как показано на рис. 1.10, *b*, и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\,\mathrm{tg}\,30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C, а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59 \text{ кН},\ Y_A = -2{,}76 \text{ кН},\ M_A = 42{,}87 \text{ кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН},\ Y_C = 2{,}76 \text{ кН},\ R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки *A* и шарнира *C*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

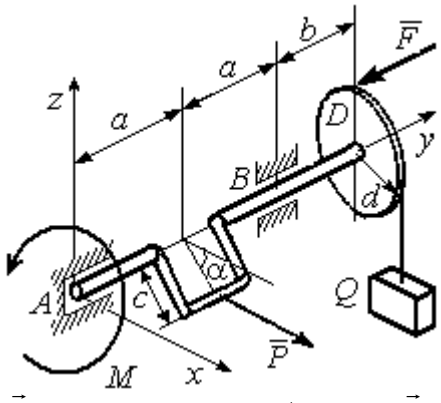
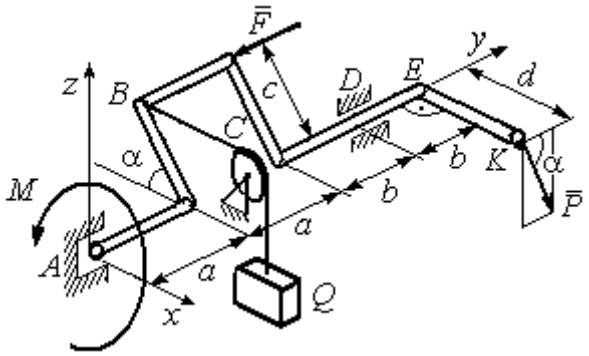
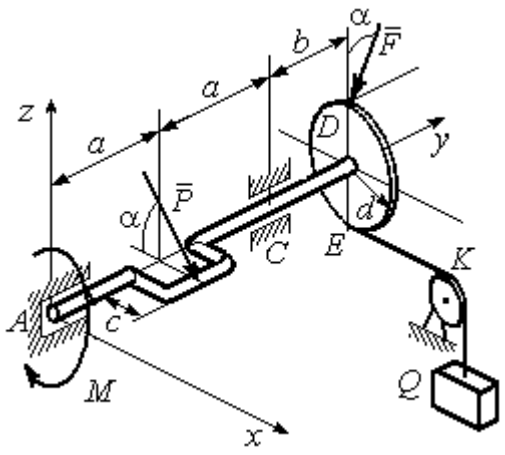
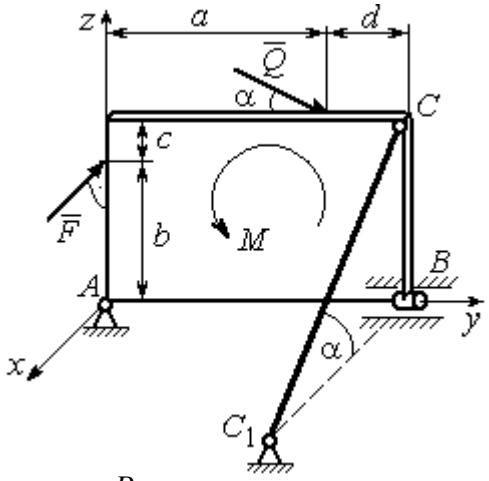
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравновешивающего груза Q	Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

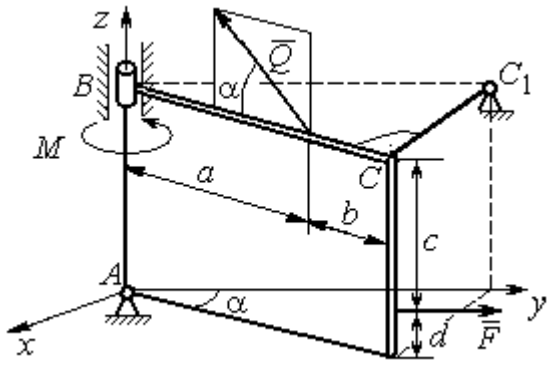
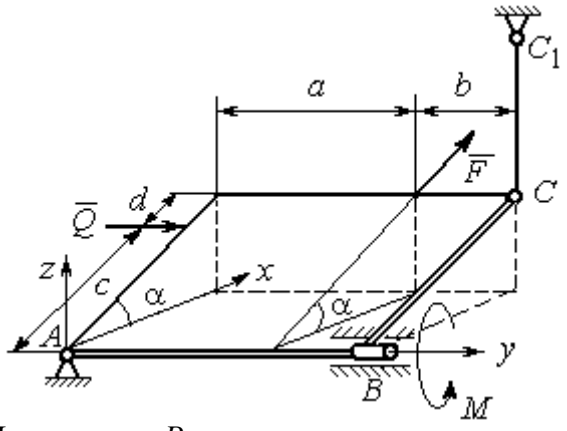
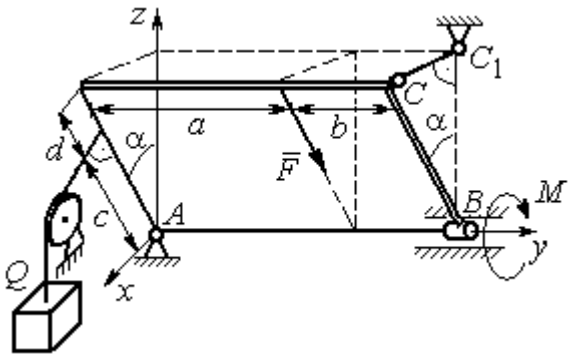
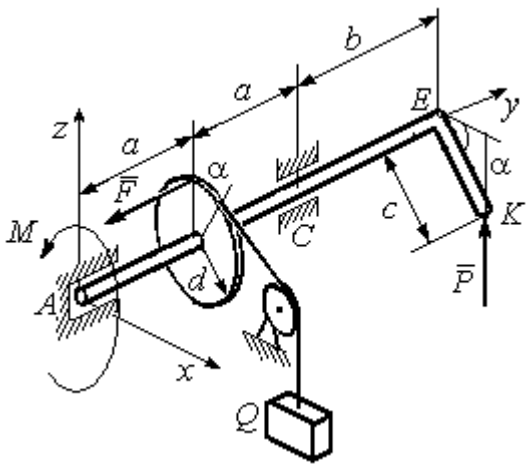
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости z*Ay*; нить, удерживающая груз *Q*, находится плоскости z*Ax*, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости z*Ay*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Рукоять *EK* перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{P}$ параллельна оси *Az*; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *C*, и величину уравновешивающего груза *Q*

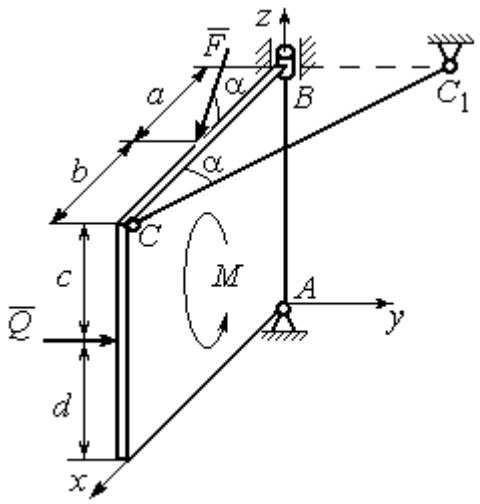
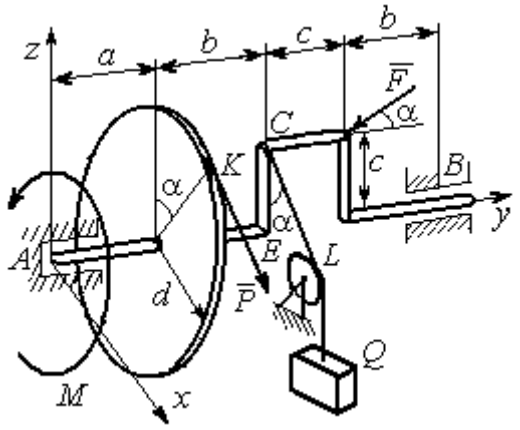
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	
Плита весом *P* находится в вертикальной плоскости z*Ax*; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *xAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Сила $\vec{F}$ находится в плоскости z*Ay*; стойка *CE* находится в плоскости z*Ay*; отрезок *CL* нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной *xAz*; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке *K*. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и величину уравновешивающего момента *M*

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 1.2

Исходные данные для задания С2.

Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P, кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F, кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q, кН	–	12	–	12	8	12	10	–	10	12
M, кН·м	12	–	10	8	12	6	8	6	8	–
α, град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a, м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b, м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c, м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d, м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P, кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F, кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q, кН	–	14	–	10	10	12	14	–	12	14
M, кН·м	10	–	12	12	12	8	10	10	10	–
α, град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a, м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b, м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c, м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d, м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F, кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q, кН	–	10	–	12	14	10	16	–	12	6
M, кН·м	12	–	16	14	8	10	8	12	10	–
α, град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a, м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b, м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c, м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d, м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив I радиуса *R* и шкив II радиуса *r*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*. Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*, закручивающая вал вокруг оси *Cy*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в точке *B* шкива II, определяемой центральным углом 30º, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента *M* и реакции подшипника и подпятника, если *P* = 4 кН, *F* = 2 кН, *Q* = 3 кН, *R* = 0,6 м, *r* = 0,3 м, *a* = 0,8 м, *b* = 0,4 м.

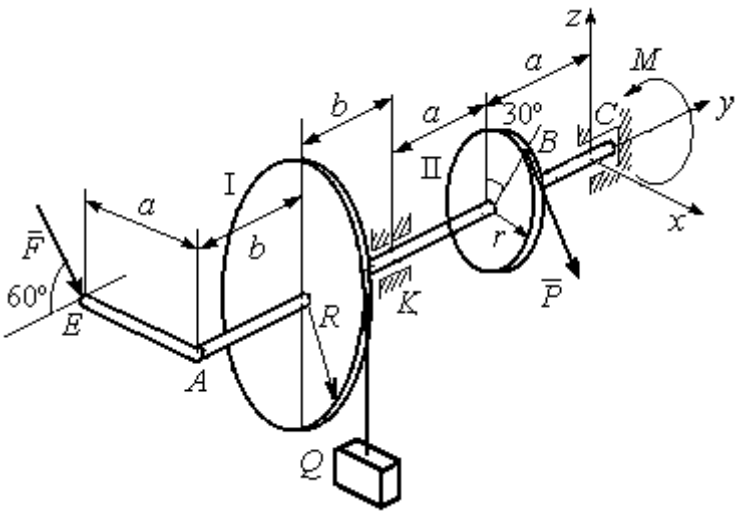


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом *Q*, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные

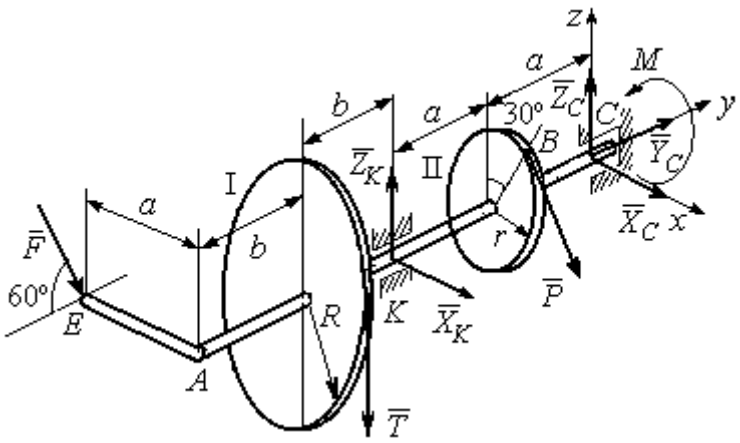


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

вдоль координатных осей. Реакция подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *K* и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{X}_K$, $\vec{Z}_K$, $\vec{T}$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, *M*) ∞ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

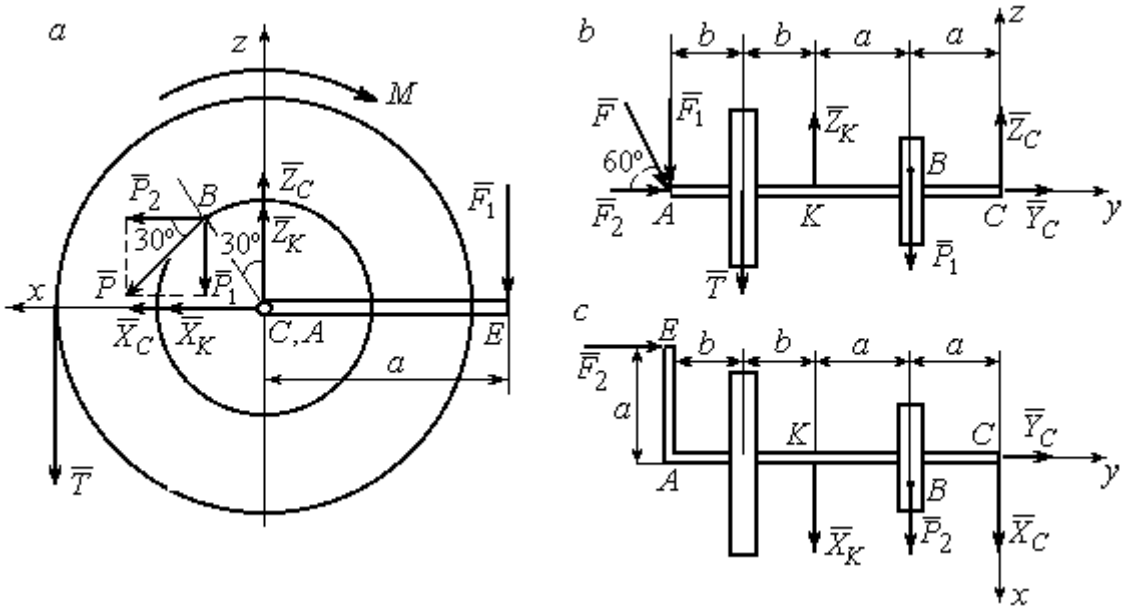


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси z.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy. В точке А плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

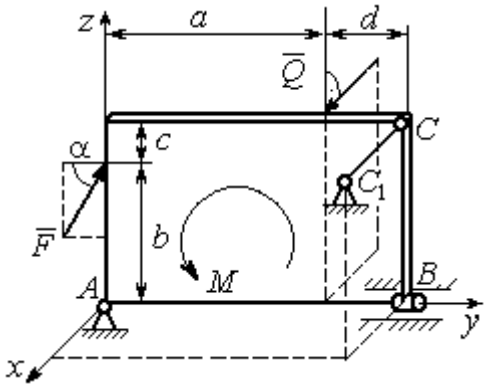


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\vec{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M. Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: P = 1 кН, Q = 500 Н, F = 400 Н, M = 300 Н·м, $\alpha = 35^\circ$, a = 2 м, b = 1,5 м, c = 0,2 м, d = 0,4 м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция стержня $\vec{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

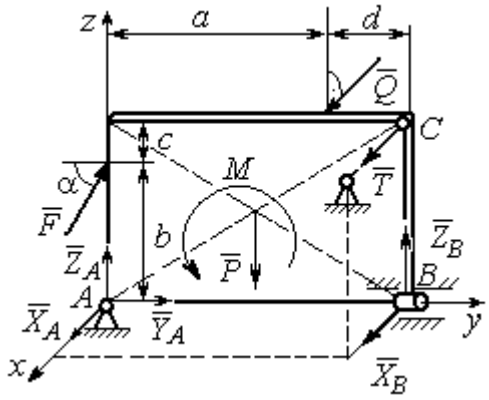


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0\,,\ \sum F_{ky} = 0\,,\ \sum F_{kz} = 0\,,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k)=0,\ \sum M_y(\vec{F}_k)=0,\ \sum M_z(\vec{F}_k)=0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx}=0,\ X_A+Q+X_B+T=0,$$

$$\sum F_{ky}=0,\ Y_A+F\cos\alpha=0,$$

$$\sum F_{kz}=0,\ Z_A+F\sin\alpha-P+Z_B=0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k)=0,\ -F\cos\alpha\cdot b-P\cdot 0{,}5(a+d)+Z_B(a+d)+M=0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k)=0,\ Q\cdot(b+c)+T\cdot(b+c)=0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k)=0,\ -Q\cdot a-T\cdot(a+d)-X_B\cdot(a+d)=0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A+500+X_B+T=0,\ \ Y_A+400\cdot 0{,}82=0,\ Z_A+400\cdot 0{,}57-1000+Z_B=0,$$

$$-400\cdot 0{,}82\cdot 1{,}5-1000\cdot 0{,}5\cdot 2{,}4+Z_B\cdot 2{,}4+300=0,$$

$$500\cdot 1{,}7+T\cdot 1{,}7=0,\quad -500\cdot 2-T\cdot 2{,}4-X_B\cdot 2{,}4=0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T=-500\text{ Н},\ X_B=83{,}33\text{ Н},\ Z_B=580\text{ Н},$$

$$X_A=-83{,}33\text{ Н},\ Y_A=-328\text{ Н},\ Z_A=192\text{ Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира *A*:

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=389{,}09\text{ Н},$$

цилиндрического шарнира *B*: $R_B=\sqrt{X_B^2+Z_B^2}=585{,}95$ Н.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O, принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданного закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$

вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с $\dot{\varphi}$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h

– расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры

находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек *A* и *B* плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек *A* и *B* плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия *AB* перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек *A* и *B* параллельны друг другу, но линия *AB*, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный

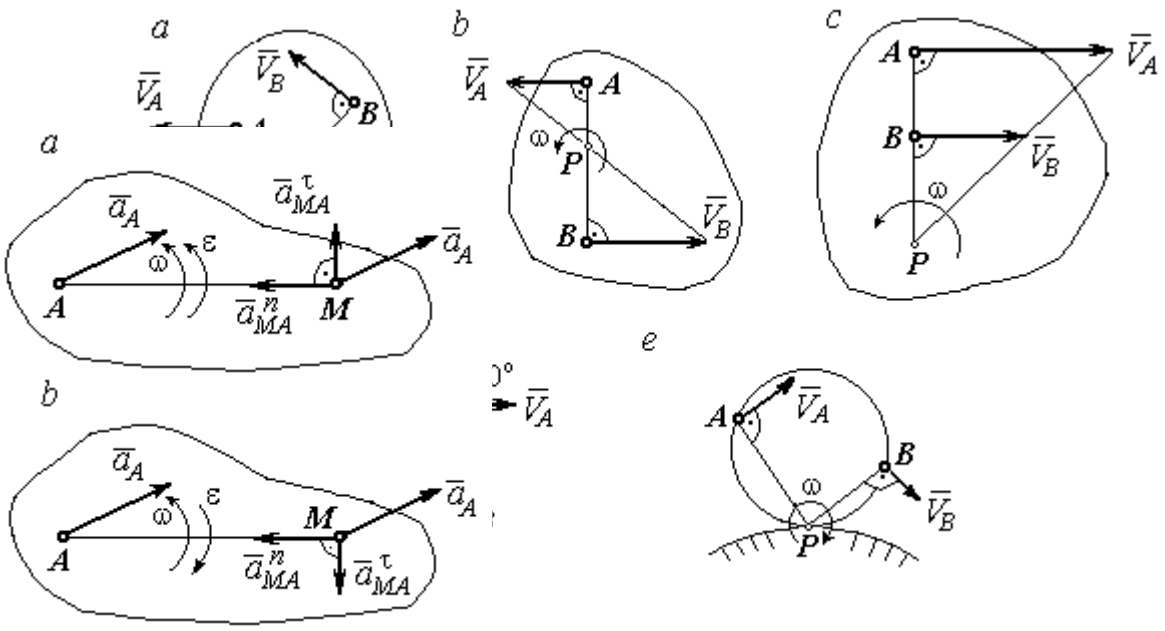


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

Ускорение любой точки *M* плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса *A*; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A*.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно

замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки *M* определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\ ,\ \ a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\ ,$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки *M* до полюса *A* (см. рис. 2.2).

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса *A* и точки *M*, то для определения ускорения точки *M* используется векторное равенство

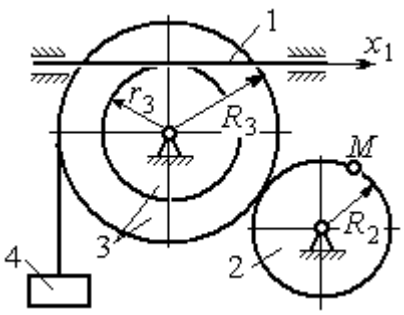
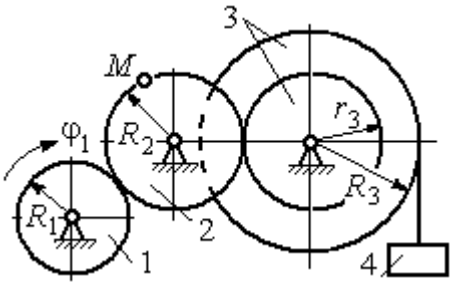
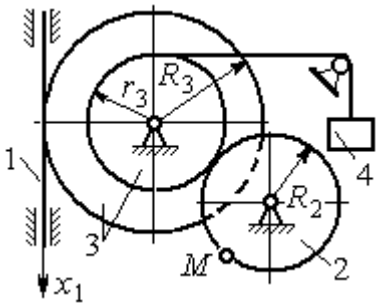
$$\vec{a}^{\tau}_{M} + \vec{a}^{n}_{M} = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

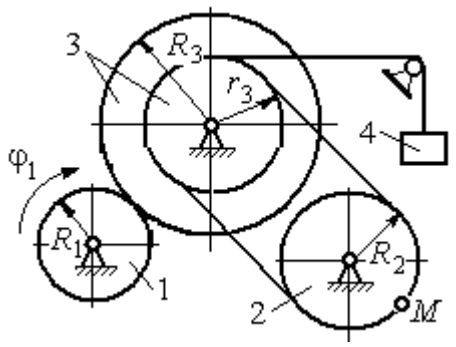
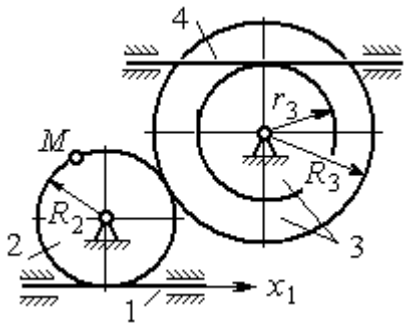
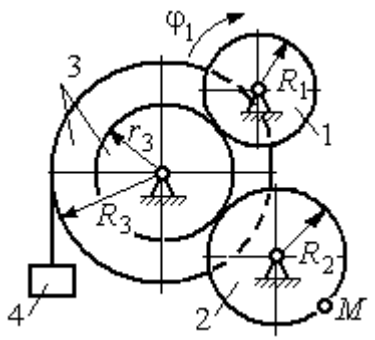
где $\vec{a}^{\tau}_{M}$, $\vec{a}^{n}_{M}$, $\vec{a}^{\tau}_{A}$, $\vec{a}^{n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* и полюса *A* при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**	**Варианты № 3, 13, 23**
		

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

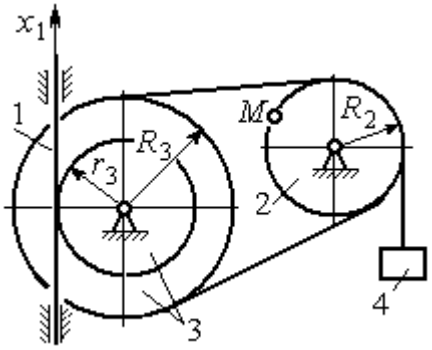
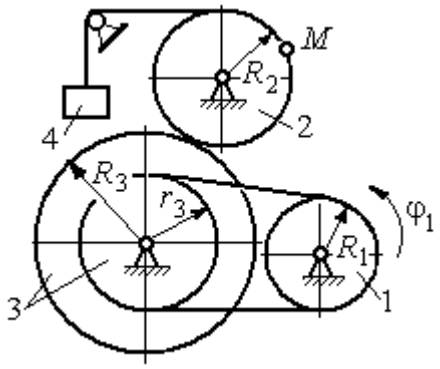
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

Окончание вариантов задания К1

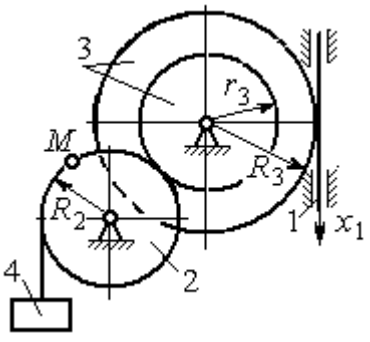
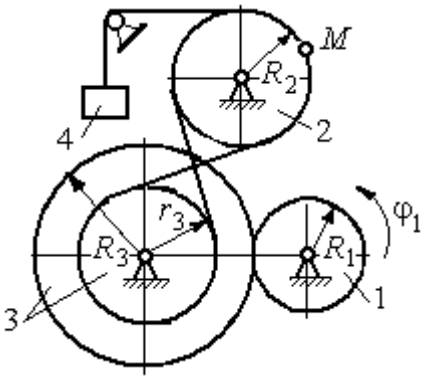
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	

Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
1	–	40	45	35	$x_1(t) = (3t-1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	–	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	–	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	–	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	–	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	–	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	–	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Окончание табл. 2.1

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
15	–	20	30	20	$x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$	1
17	–	20	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$	1
19	–	22	50	18	$x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$	4
21	–	20	40	20	$x_1(t)=t+(3t-4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$	3
23	–	45	60	40	$x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$	2
25	–	15	35	25	$x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$	1
27	–	15	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$	1
29	–	35	50	10	$x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на момент времени t_1, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2=20$ см, $r_2=5$ см, $R_3=8$ см, $r_3=4$ см, $x_1=2t^2-5t$ см, $t_1=1$ с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

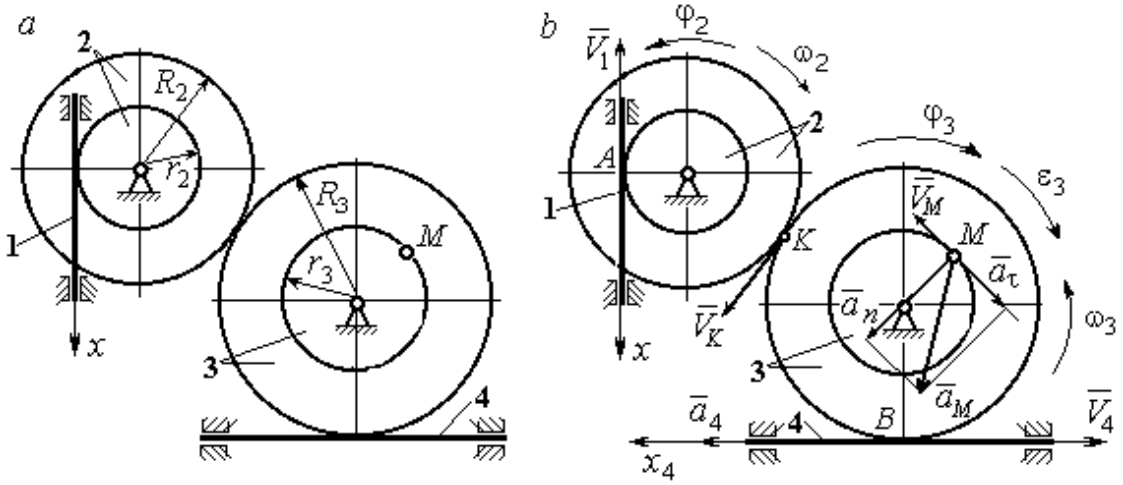


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2, φ_3, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4.

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1)$ = –1 см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Эту же скорость будет иметь точка *A* – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с.

При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1)$ = – 0,2 рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью

$\omega_2(1)=|\dot{\varphi}_2(1)|$ = 0,2 рад/с происходит в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3=\omega_2\frac{R_2}{R_3}=|2t-2{,}5|$ = $|\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1=1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1)=$ – 0,5 рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1)$ = $|\dot{\varphi}_3(1)|=0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_3 r_3$. В момент времени $t_1=1$ с модуль скорости $V_M(1)=2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4=V_B=\omega_3 R_3$ = $|2t-2{,}5|\cdot 8$ = $|\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1=1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1)=-4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1)$ = 4 см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t)=|\dot{\omega}_3|=|\ddot{\varphi}_3|$ = 2 рад/с^2. Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки *M* рассчитывается по формуле $a_\tau=\varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1=1$ с: $a_\tau=8$ см/с^2. Так как вращение диска 3 замедленное,

вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1)$ = 1 см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)}$ = 8,06 см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

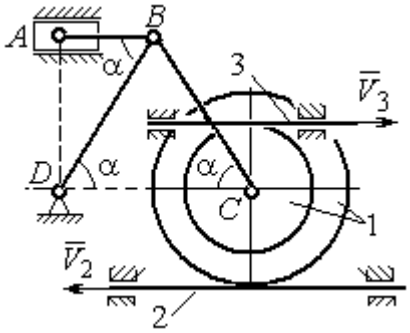
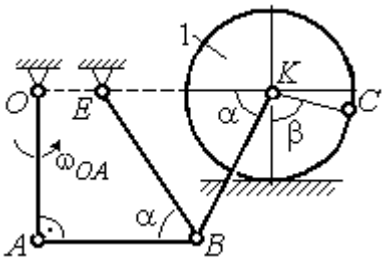
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: a_4 = 16 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

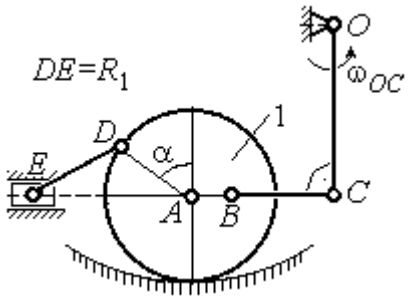
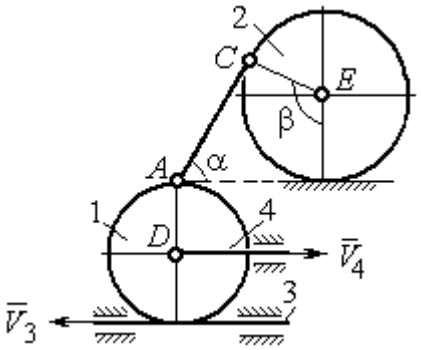
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

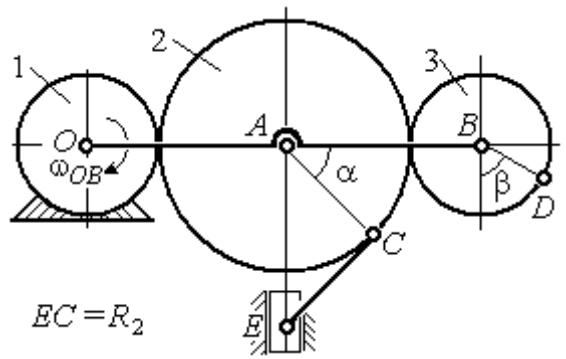
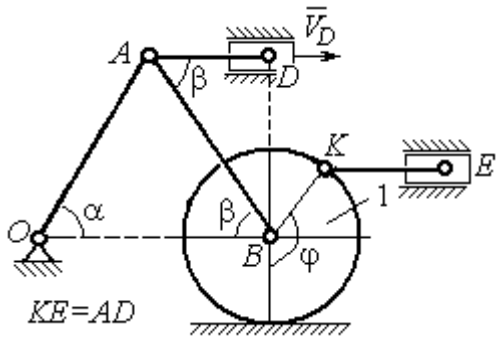
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$	 Найти: V_A, V_B, V_K, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, ω_{BE}, ω_{BK}

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	AD, см	α, град	V_2, см/с	V_3, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	OE, см	α, град	β, град	V_C, см/с
1	10	5	20	30	8	10	**2**	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	**12**	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	**22**	5	12	2	60	120	12

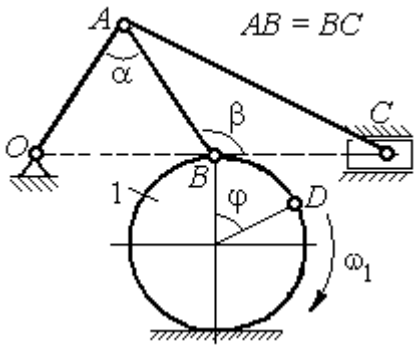
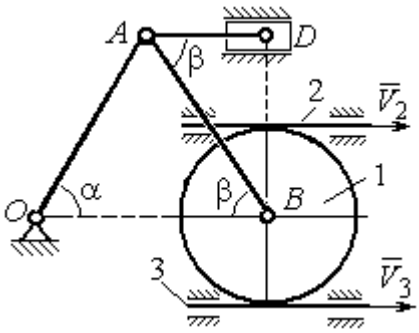
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$	 Найти: V_A, V_C, V_E, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OC, см	AB, см	BC, см	α, град	ω_{OC}, рад/с	Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	α, град	β, град	V_3, см/с	V_4, см/с
3	12	18	10	35	60	4	**4**	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	**14**	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	**24**	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, ω_2, ω_3, ω_{EC}	Найти: V_A, V_B, V_K, V_E, ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AD}, ω_{KE}

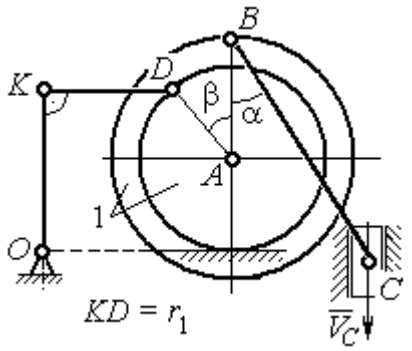
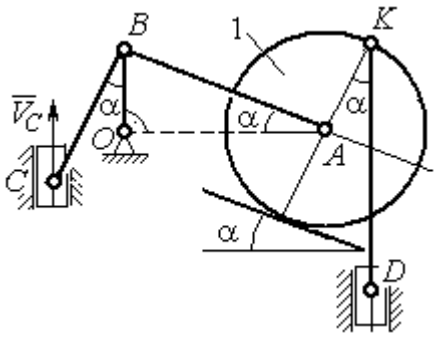
Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	α, град	β, град	ω_{OB}, рад/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
5	10	20	12	60	0	6	**6**	10	20	30	60	60	12
15	6	18	10	90	90	8	**16**	12	26	30	30	90	8
25	20	25	15	120	180	4	**26**	15	30	60	60	120	15

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 29**
	
Найти: V_A, V_B, V_C, ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AC}	Найти: V_A, V_B, V_D, ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AD}

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	V_2, см/с	V_3, см/с
7	10	20	30	60	60	12	**8**	10	20	30	60	12	4
17	12	25	60	120	90	16	**18**	12	26	30	30	8	2
27	8	16	30	60	120	10	**28**	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К2

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: ω_{OK}, ω_{KD}, ω_{BC}, ω_1, V_A, V_B, V_K, V_D	 Найти: V_A, V_B, V_D, V_K, ω_{CB}, ω_1, $\omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	α, град	β, град	BC, см	V_C, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	CB, см	OB, см	KD, см	α, град	V_C, см/с
9	20	12	45	60	60	8	**10**	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	**20**	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	**30**	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2, r_3, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C. Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC}. Диск 2, увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1. Диск 3, также увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по подвижному диску 2. В точке D, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке E шарнирно

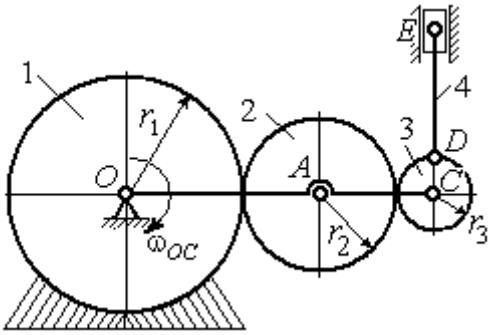


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

прикреплен поршень *E*, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень *OC* горизонтален, стержень *DE* направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек *A, C, D, E,* угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: r_1 = 6 см, r_2 = 4 см, r_3 = 2 см, *DE* = 10 см, ω_{OC} = 1 рад/с.

Решение

Определим скорость точки *A*, общей для стержня *OC* и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2. В этом случае скорость точки *A* может быть определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как V_A = 10 см/с, получим ω_2 = 2,5 рад/с.

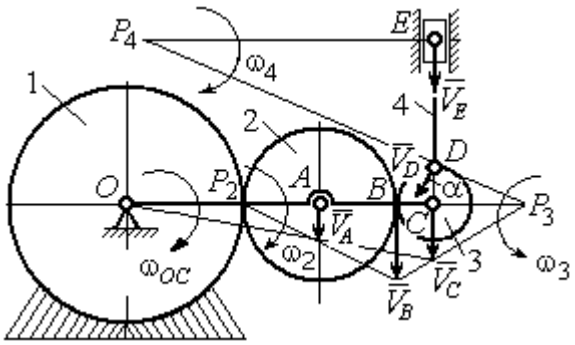


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек *B* и *C*. Скорость точки *B* может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2.

Скорость точки *C* определяется через угловую скорость стержня *OC*: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3, получим: $CP_3 = 8$ см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} =$ 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3.

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E. По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E: V_E =16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \frac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4,

$EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, ω_4 = 0,4 рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки *D*.

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы *OA* и *ED* вращаются вокруг неподвижных центров *O* и *E*. В крайней точке *D* кривошипа *ED* к нему прикреплён шатун *DB*, второй конец которого в точке *B* прикреплён к кривошипу *OA*. Шатун *AC* прикреплён в точке *A* к кривошипу *AO*, а другим своим концом – к ползуну *C*, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип *OA* вертикален, шатун *DB* расположен горизонтально, кривошип *ED* наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун *AC* отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа *AO*. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма *AC* = 6 см, *AB* = 2 см, *BO* = 8 см, *DB* = 10 см и скорость ползуна в данный момент V_C = 4 см/с.

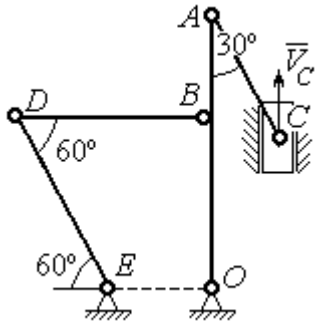


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы *OA* и *ED* совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек *A* и *B* перпендикулярны кривошипу *OA*, а скорость $\vec{V}_D$ точки *D* перпендикулярна кривошипу *ED*. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна $\omega_{AC} = \frac{V_C}{P_1C} = \frac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC, так и кривошипу OA, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

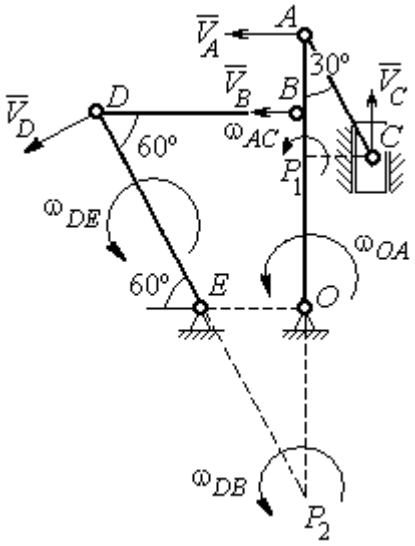


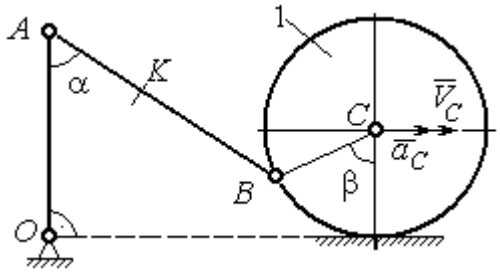
Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D, построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB $\omega_{DB} = \frac{V_B}{P_2B} = \frac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки D $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \frac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа DE $\omega_{DE} = \frac{V_D}{DE} = \frac{6{,}4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

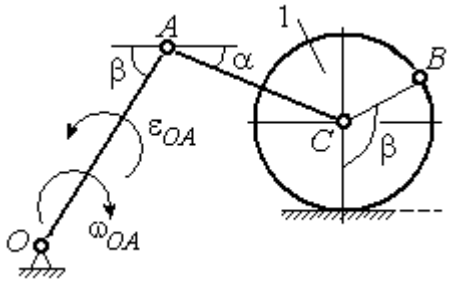
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

Номер варианта задания	*AB*, см	*AK*, см	α, град	β, град	R_1, см	V_C, см/с	a_C, см/с^2
1	16	10	60	120	10	12	6
11	20	16	30	60	8	10	8
21	18	10	60	180	6	8	4

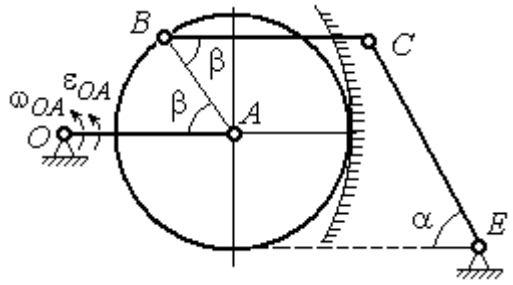
Варианты № 2, 12, 22



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	*OA*, см	*AC*, см	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
2	5	10	12	30	60	2	4
12	8	24	20	30	120	1	2
22	6	12	15	60	90	2	3

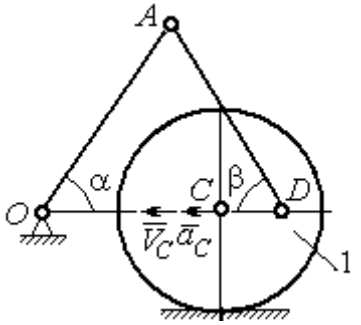
Варианты № 3, 13, 23



Найти: a_C, a_B, ε_{BC}

Номер варианта задания	*BC*, см	*AO*, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
3	16	15	60	90	10	2	3
13	18	12	90	60	8	3	2
23	14	12	30	120	10	2	4

Варианты № 4, 14, 24

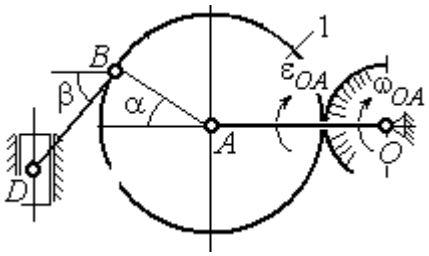


Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

Номер варианта задания	R_1, см	*OA*, см	*DC*, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
4	10	28	5,78	60	30	10	2
14	8	24	4,62	30	90	8	3
24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

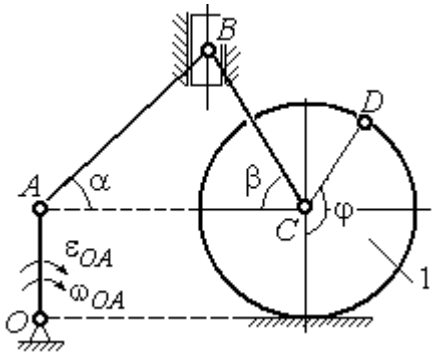
Варианты № 5, 15, 25



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	*OA*, см	*BD*, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
5	16	10	60	30	10	4	3
15	18	8	90	45	12	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2

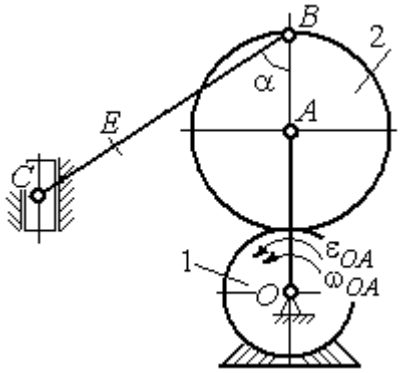
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	R_1, см	*AB*, см	φ, град	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
6	6	18	60	30	30	2	3
16	8	20	90	60	30	2	4
26	5	16	120	30	60	3	4

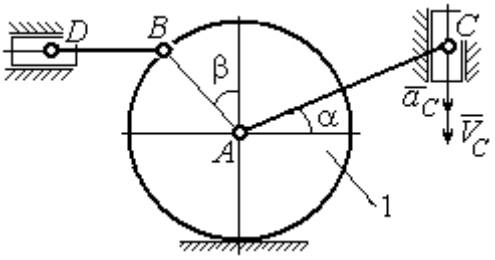
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	*BC*, см	*BE*, см	α, град	R_1, см	R_2, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
7	22	10	60	2	10	2	3
17	28	15	30	3	6	3	4
27	20	8	45	4	8	2	2

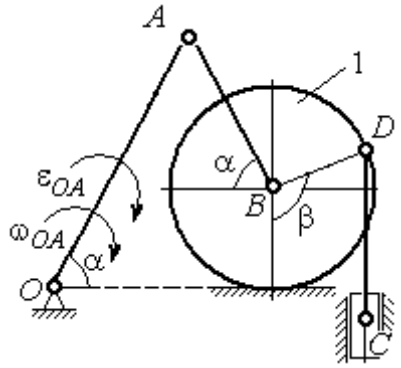
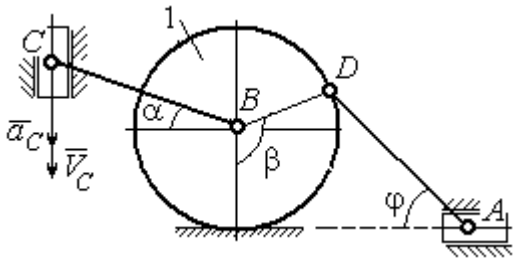
Варианты № 8, 18, 28



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	R_1, см	*BD*, см	*AC*, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
8	4	5	12	60	60	12	5
18	6	10	16	45	90	10	8
28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$	 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$

Номер варианта задания	*OA*, см	*DC*, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	*BC*, см	φ, град	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
9	18	10	30	120	4	2	3	**10**	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	**20**	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	**30**	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}3$ м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном *AC*, один конец которого соединён с центром барабана в точке *A*, а другой – с ползуном *C*, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун *AC* отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки *B* барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна *C*: $V_C = 9$м/с, $a_C = 4$ м/с^2.

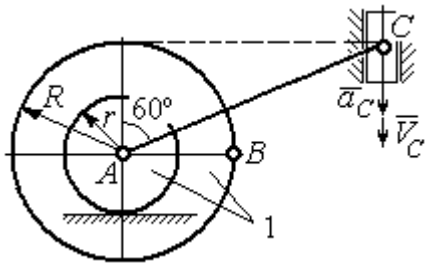


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC}, ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

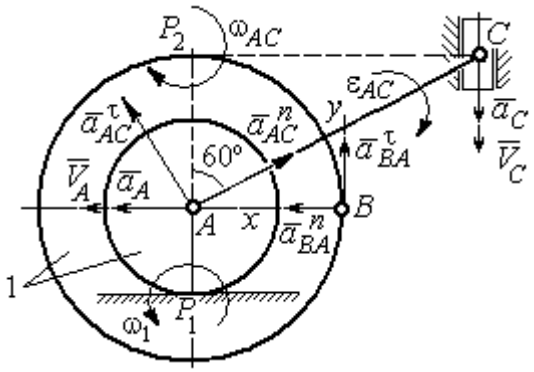


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\mathrm{tg}60^\circ} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки A шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с. При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\tau} + \vec{a}_{AC}^{n}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{AC}^{\tau}$, $\vec{a}_{AC}^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_{AC}^{n}$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a_{AC}^{n} = \omega_{AC}^2 \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с^2. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\tau}$ выбрано из предположения, что

вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{AC} + \vec{a}^{n}_{AC}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{AC}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a^n_{AC}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a^n_{AC}\right) = -122{,}4$ м/с^2. Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

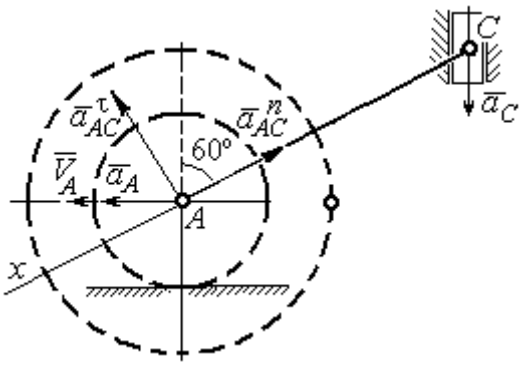


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Для того чтобы найти ускорение точки B, выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{BA}$ равен по величине $a^n_{BA} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с^2. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с^2, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с^2.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B: $a_{Bx} = a_A + a^{n}_{BA}$, $a_{By} = a^{\tau}_{BA}$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с^2, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с^2. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B: $a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = 34{,}32$ м/с^2.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип *OA* вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке *A*, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2. На краю диска 2 в точке *B* шарнирно прикреплен стержень *BC*, соединенный с центром *C* диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки *D* и угловое ускорение стержня *BC*, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

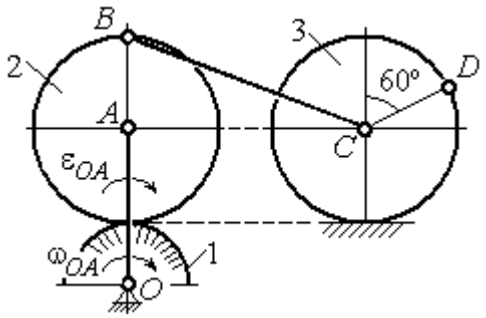


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа *OA*. Скорость точки *A*: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу *OA* в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки *B* диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

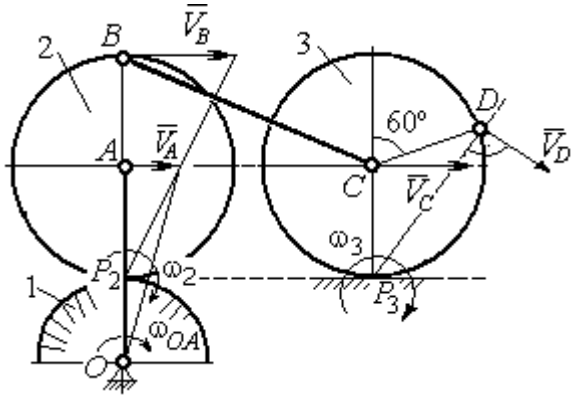


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки D диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30^\circ = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^\tau_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a^n_{CB} = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB}. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня *BC* в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB}.

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня *BC* в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

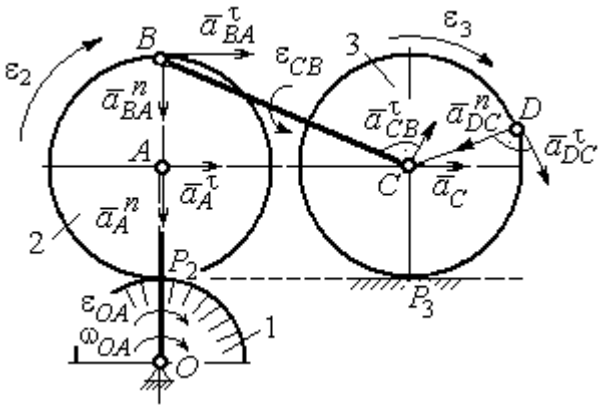


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Выразим ускорение точки *B* через полюс *A*: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса *A*; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки *B* при вращении диска 2 вокруг полюса *A*. Величина нормальной составляющей ускорения точки *B* $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA$ = 288 см/с^2. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса *BA* от точки *B* к полюсу *A* (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки *B* при вращении диска 2 вокруг полюса *A* вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_A = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \dfrac{a^{\tau}_A}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину a^{τ}_A, рассмотрим вращательное движение кривошипа *OA* вокруг неподвижной оси *O*. Ускорение точки *A* представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_A$, где $\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_A$ – известные нормальная и касательная составляющие ускорения точки *A* кривошипа *OA*:

$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA$ = 192 см/с², $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA$ = 24 см/с². Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^{\,n}$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^{\,\tau}$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ = 3 рад/с², $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA$ = 24 см/с².

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau}$. Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

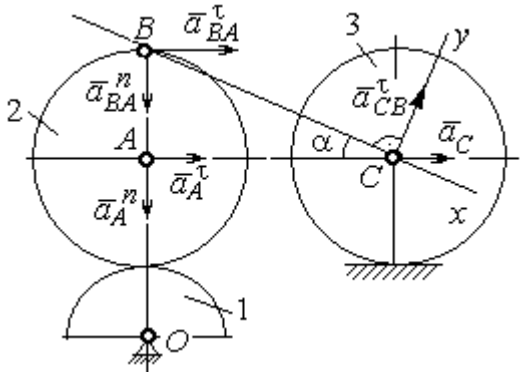


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C\cos\alpha = a_A^n\sin\alpha + a_A^\tau\cos\alpha + a_{BA}^n\sin\alpha + a_{BA}^\tau\cos\alpha;$$

$$a_C\sin\alpha = a_A^n\cos\alpha + a_A^\tau\sin\alpha + a_{BA}^n\cos\alpha + a_{BA}^\tau\sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}$ = 0,4; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: a_C = 256,7 см/с², a_{CB}^τ = – 358,12 см/с².

Модуль углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC}$ = 17,9 рад/с².

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^{\,\tau}$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB}, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки *D* через полюс *C*: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки *C*; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки *D* при вращении диска 3 вокруг полюса *C*. Величина нормального ускорения точки *D*: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC = 1152$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}^n_{DC}$ направлен по радиусу от точки *D* к полюсу *C* (рис. 2.23).

Для расчёта касательной составляющей a^τ_{DC} ускорения точки *D* найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32{,}09$ рад/с^2. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки *D*: $a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC = 256{,}7$ см/с^2. Направление вектора $\vec{a}^\tau_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

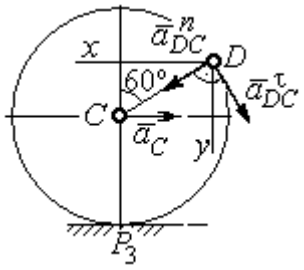


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки *D*

Проведём оси *Dx* и *Dy*, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки *D* на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^\tau_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^\tau_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612{,}5$ см/с^2, $a_{Dy} = 798{,}3$ см/с^2. Величина ускорения точки *D*:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

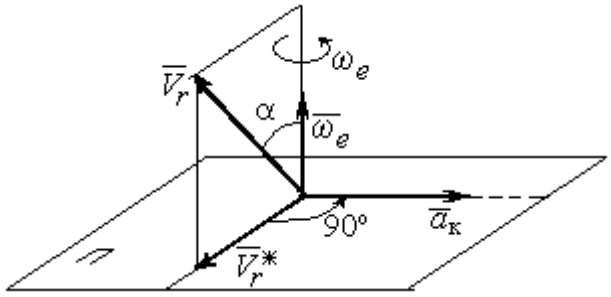


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить

простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0$, $a_e^{n} = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau}$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1.

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

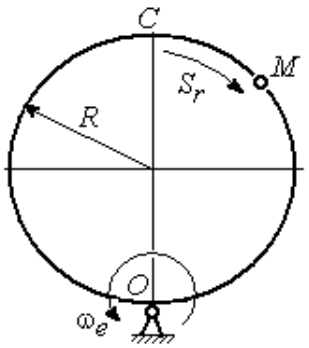
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

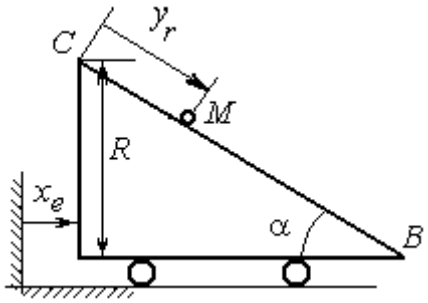
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



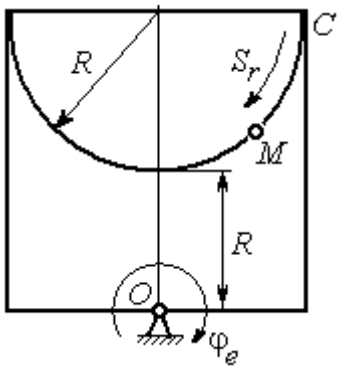
Задача 2



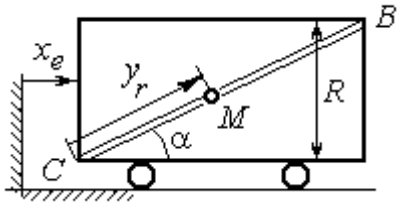
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



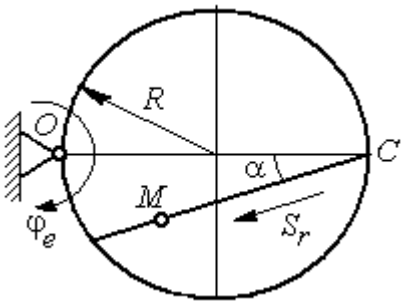
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла 2/3 пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

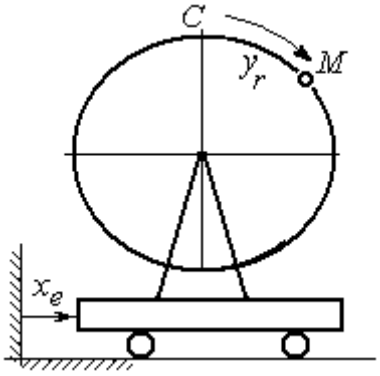
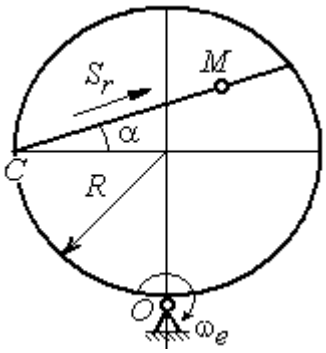


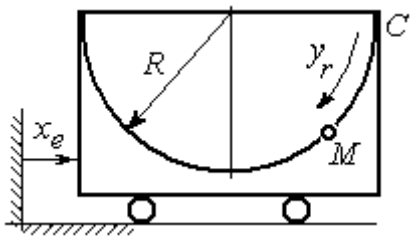
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

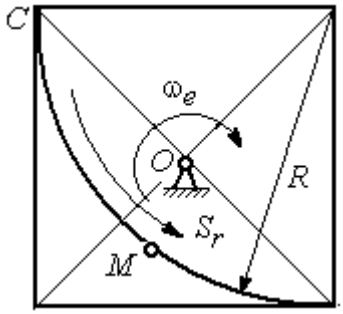


Задача 2

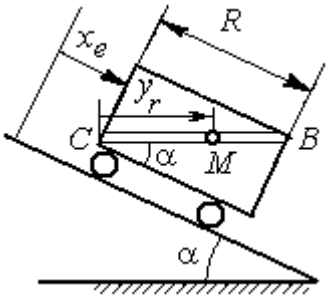


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



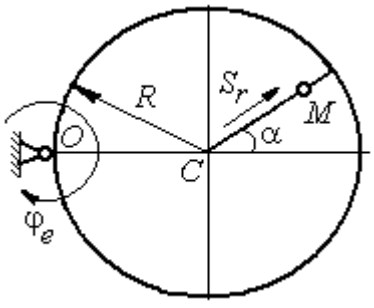
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка *M* прошла путь *CB*

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

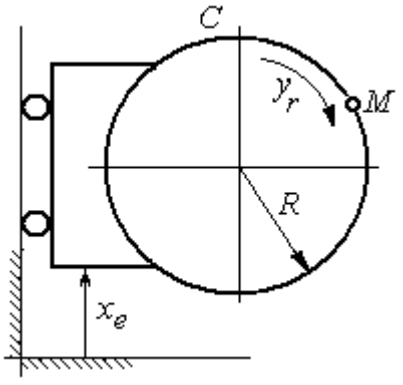
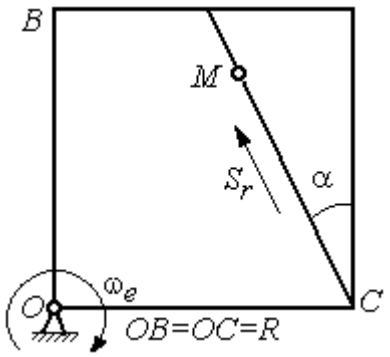


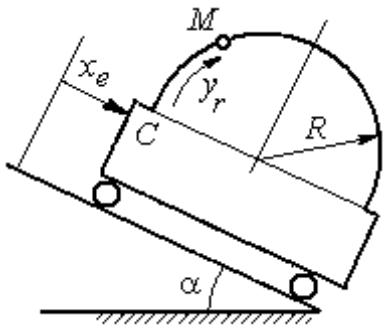
Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

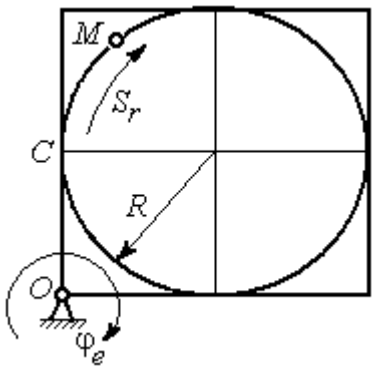


Задача 2

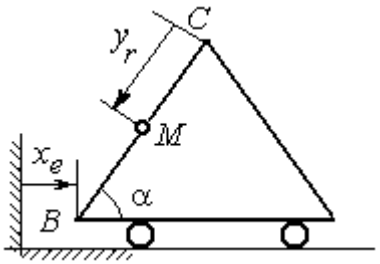


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



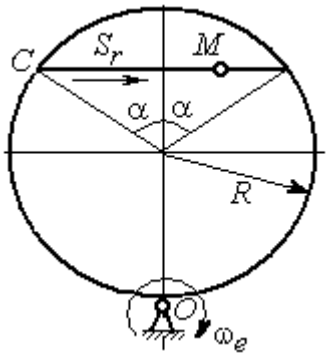
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

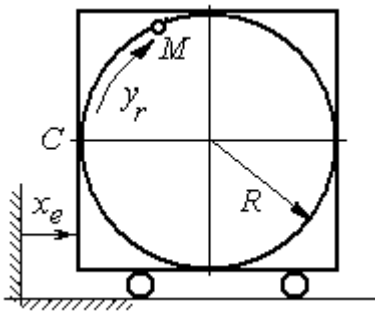
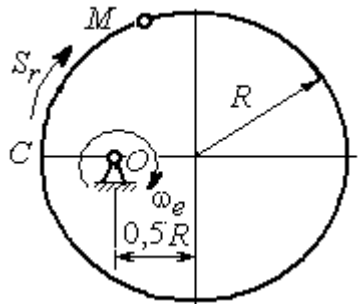


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

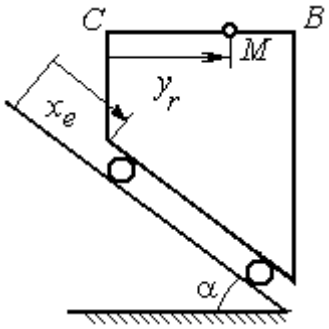
Окончание вариантов задания К4

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
1	1	3	–	$S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	–
2	1	2	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	–	$y_r = \pi\left[2t + \sin\pi t\right]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	–	$y_r = \pi\left[2t + \cos(\pi t/2)\right]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	–
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = \left[1 - \cos(\pi t/4)\right]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$CM = S_r(t)$, см $CM = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
8	1	8	–	$S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	–
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	–	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	–
11	1	6	–	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	–
12	1	18	–	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	–
16	1	12	90	$S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	–	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	–
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	–	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	–
21	1	3	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	–

Окончание табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$CM = S_r(t)$, см $CM = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
22	1	4	–	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	–
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	–	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	–
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	–	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	–	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	–	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину *A* треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

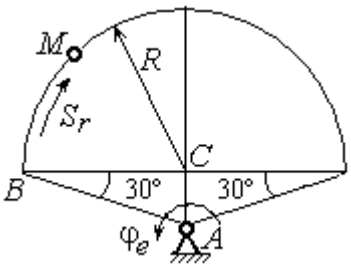


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e. По ободу диска от точки *B* движется точка *M*. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки *M* на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r. Радиус диска R = 9 см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени t_1 = 1с.

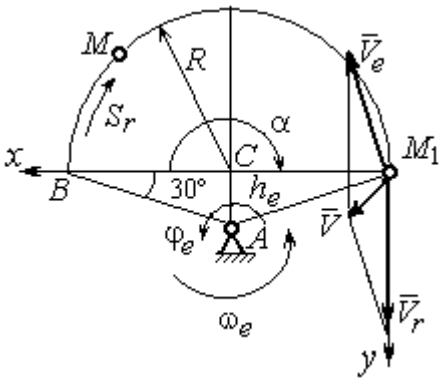


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Решение

Вращение фигуры будет для точки *M* переносным движением. Относительное движение точки *M* – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки** *M* на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки *M* определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени t_1 = 1 с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1.

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При t_1 = 1 с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает,

что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени t_1 = 1 с точка *M* находится в положении M_1. Скорость V_e переносного движения точки в момент времени t_1 = 1 с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги *BM*. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|18\pi t\right|$. При t_1 = 1 с $V_r(1) = \left|\dot{S}_r(1)\right|$ = 18π = 56,5 см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат M_1xy (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2}$ = 29,95 см/с.

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Относительное касательное ускорение a_r^{τ} вычисляется по формуле: $a_r^{\tau} = \left|\ddot{S}_r\right|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi$ = 56,5 см/с^2 – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\tau}$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r.

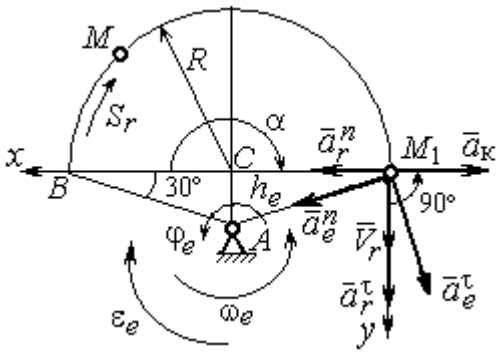


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^n(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9}$ = 355,3 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$ = 4 рад/с^2 постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^{\tau}$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной

скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: a_e^τ = $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3}$ = 41,6 см/с^2.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени t_1 = 1 с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1) h_e$ = $6\sqrt{3}$ = 10,4 см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{\,n}$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при t_1 = 1 с $a_к = 2\omega_e V_r$ = $2 \cdot 1 \cdot 18\pi$ = 113,1 см/с^2.

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau$ = 97,9 см/с^2,

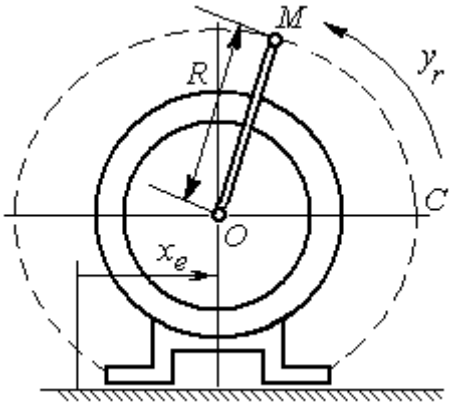


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к$ =228,4 см/с^2. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ = 248,5 см/с^2.

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины R = 6 см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см.

При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону $x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α, отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r =$ 6,28 см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1.

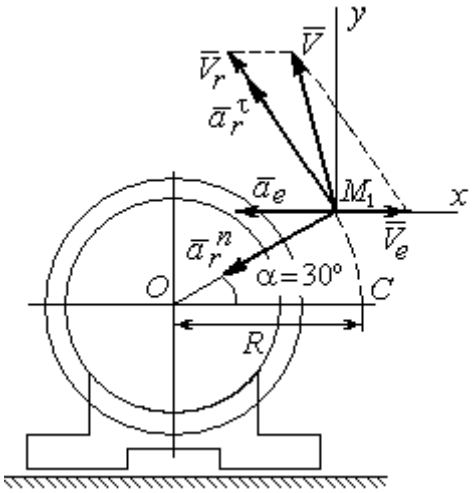


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60^\circ =$ 2,62 см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину

абсолютной скорости, выберем оси xM_1y, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ$ = – 0,52 см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ$ = 5,44 см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}$ = 5,46 см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки ω_e = 0 и потому $a_к$ = 0. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении a_e^n = 0. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^\tau = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^\tau = \dot{V}_e$ = $-\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$с равны a_r^τ = 6,28 см/с^2, a_r^n = 6,57 см/с^2, a_e = – 4,75 см/с^2. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^\tau\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^\tau\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}$ = 4,61 см/с^2.

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

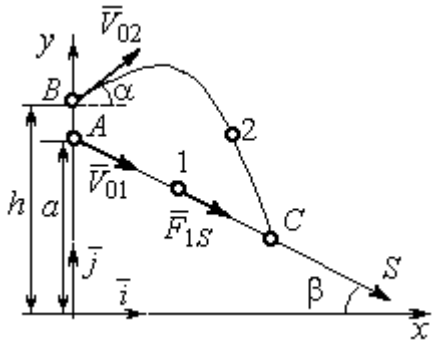
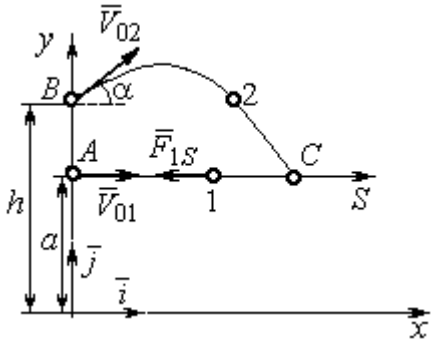
Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой m_1, получив в начальном положении *A* скорость V_{01}, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке *C*.

Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

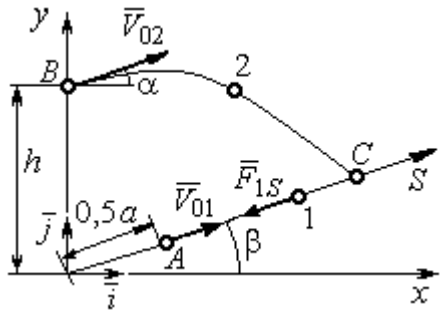
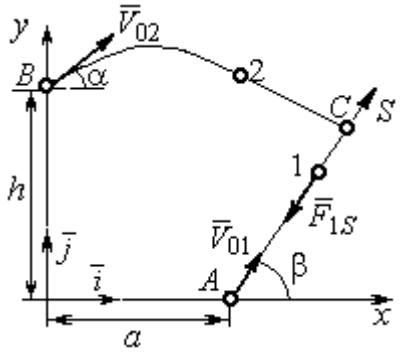
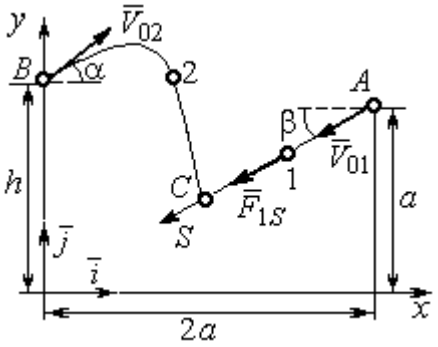
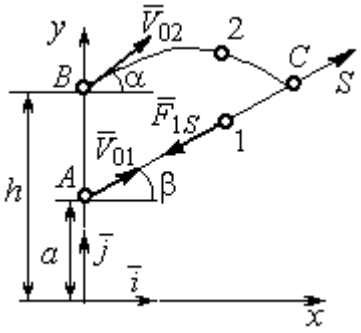
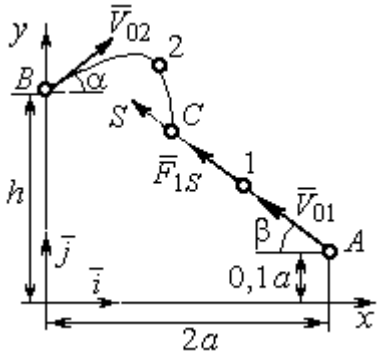
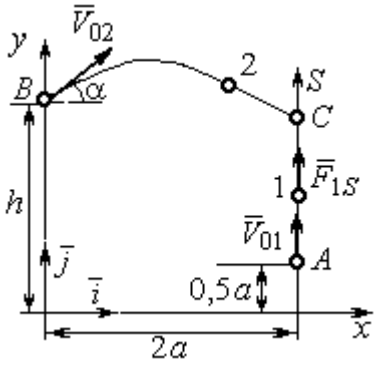
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Встреча в точке *C* в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	Встреча в точке *C*, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с	Встреча в точке *C* в момент максимального подъёма точки 1

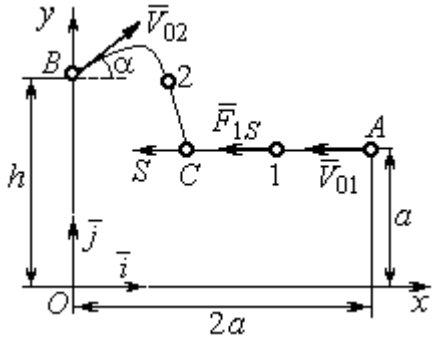
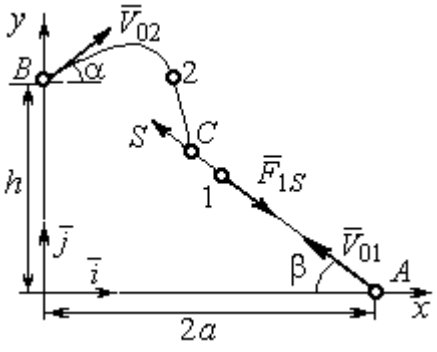
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с	Встреча в точке *C* в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1, кг	F_{1S}, Н	V_{01}, м/с	β, град	m_2, кг	$\vec{F}_2$, Н	a, м	h, м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i}+8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i}+2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i}+8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i}+2\vec{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i}+8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i}-4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i}+4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i}+10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i}-2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i}+2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^{\circ}$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

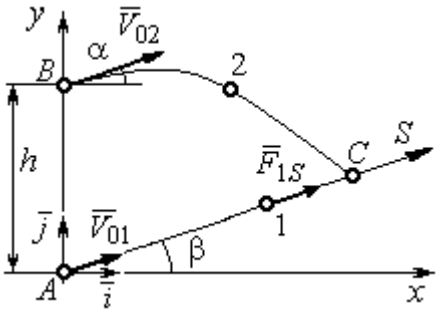


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x, y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2, дифференциальное уравнение движения точки 1 приводится к виду: $\dfrac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим

переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \dfrac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

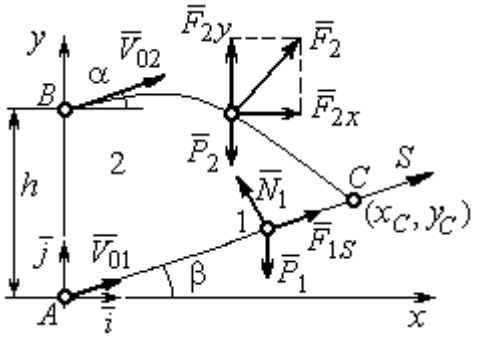


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \dfrac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние AC, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат

$F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат *x*, *y* имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось *x* как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \frac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось *x* на производную от координаты $V_{2x} = \frac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси *x*, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси *x*: $x = t^2 + 1{,}85t$

.

Закон движения точки 2 вдоль оси *y* находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\frac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось *y* от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось *y* производной от координаты $V_{2y} = \frac{dy}{dt}$, вторично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси *y* описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C = 1{,}12$ м. Получим $C_6 = 1$

, C_5 = 2,43. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при t = 0: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{{V_{02x}}^2 + {V_{02y}}^2}$ = 3,05 м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64^\circ$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$; $A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \frac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$.

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \dfrac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где $a,\ p$ – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \dfrac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалентной жесткости $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{\text{экв}} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

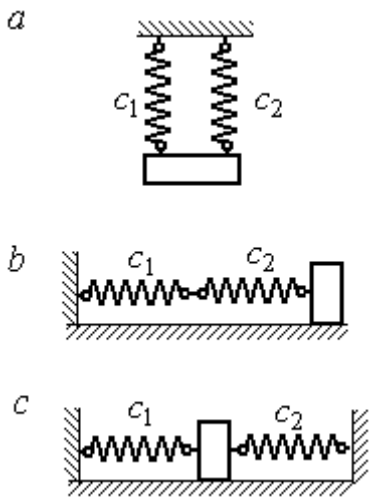


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
a – две параллельные пружины;
b – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

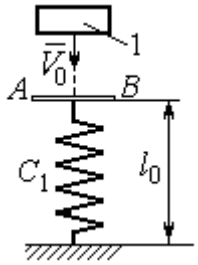
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

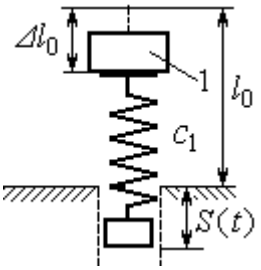
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

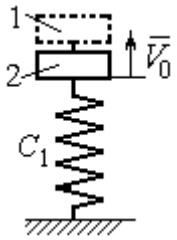
Задача 2



К верхнему концу пружины, сжатой на величину $\Delta\ell_0$, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

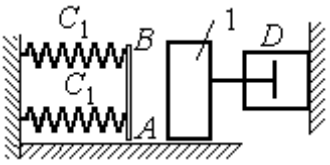
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх

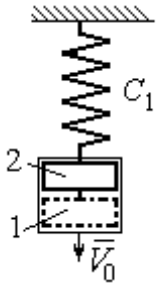
Задача 2



Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

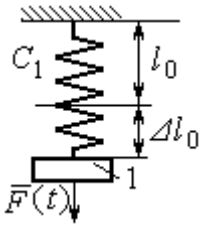
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укреплённого на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2

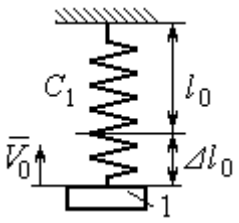


Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

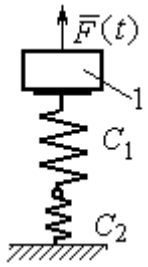
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вверх

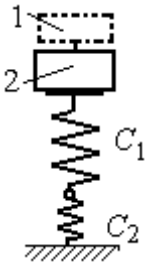
Задача 2



Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

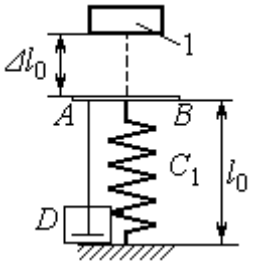
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укреплённых на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

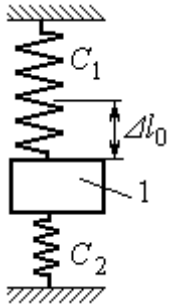
Задача 2



Груз 1 падает с высоты $\Delta\ell_0$ на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

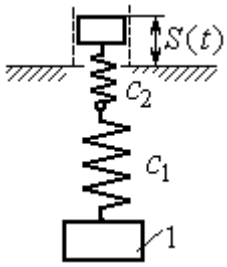
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости

Задача 2

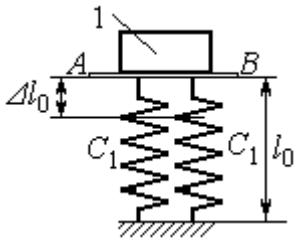


К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

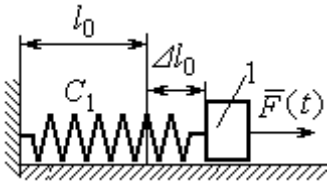
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вниз

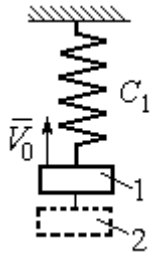
Задача 2



К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

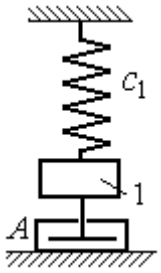
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх

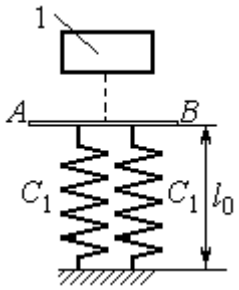
Задача 2



В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

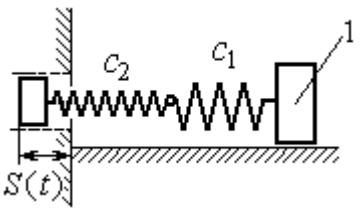
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2



К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания Д2

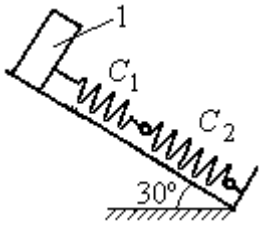
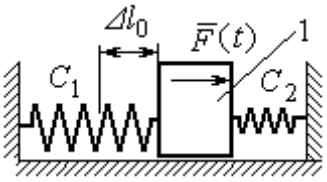
Варианты № 10, 20, 30	
Задача 1	Задача 2
 В положении статического равновесия груза 1, укреплённого на двух последовательно соединённых пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости	 Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	–	2,0	200	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	210	–	0,1	–	–	0,02sin12t
2	1	1,5	2,0	4	250	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	4	220	–	–	1,0	–	–
3	1	2,0	1,5	3	250	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	–	200	–	0,14	–	12sin5t	–
4	1	2,0	–	3	180	–	0,1	–	–	–
	2	1,5	–	2	150	120	–	–	8sin12t	–
5	1	1,0	2,0	–	120	100	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	50	–	0,5	18	–	–
6	1	1,2	–	–	120	180	0,12	–	–	–
	2	1,4	–	2,4	120	180	–	–	–	0,03sin14t
7	1	1,6	–	3,2	140	–	0,15	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,12	–	12sin6t	–
8	1	1,0	2,0	3,0	150	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	3,5	120	–	–	15	–	–

Продолжение табл. 4.2

Номер вари-анта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	–	–	100	–	–	–	–	–
	2	1,4	–	2,0	100	110	–	–	–	0,015sin8t
10	1	2,5	–	2,5	110	100	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	110	52	0,08	–	5sin9t	–
11	1	2,0	–	4,0	300	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	200	–	0,12	–	–	0,01sin4t
12	1	1,8	2,4	4	220	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	5	240	–	–	0,6	–	–
13	1	1,5	1,5	2	200	–	–	–	–	–
	2	1,8	–	–	180	–	0,08	–	10sin10t	–
14	1	2,0	–	2	200	–	0,12	–	–	–
	2	2,0	–	2	150	120	–	–	10sin8t	–
15	1	1,5	2,0	–	120	250	–	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,4	4	–	–
16	1	2,0	–	–	150	75	0,1	–	–	–
	2	2,0	–	2,5	150	75	–	–	–	0,01sin5t
17	1	1,5	–	2,1	160	–	0,11	–	–	–
	2	1,8	–	–	150	–	0,1	–	8sin12t	–
18	1	2,0	1,0	2,5	80	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	2,5	50	–	–	21	–	–
19	1	1,6	–	–	120	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	2,0	85	120	–	–	–	0,015sin7t
20	1	2,0	–	2,0	90	100	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	100	90	0,12	–	6sin10t	–
21	1	2,0	–	1,6	220	–	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	250	–	0,14	–	–	0,01sin10t
22	1	2,2	1,5	3	180	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	4	280	–	–	0,8	–	–
23	1	2,2	1,2	2	220	–	–	–	–	–
	2	1,6	–	–	200	–	0,12	–	5sin7t	–

Окончание табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	–	2,4	160	–	0,13	–	–	–
	2	1,0	–	3	150	300	–	–	6sin10t	–
25	1	0,8	1,2	–	120	80	–	–	–	–
	2	0,8	–	–	180	–	0,4	12	–	–
26	1	1,4	–	–	100	120	0,15	–	–	–
	2	1,8	–	2,2	150	120	–	–	–	0,015sin8t
27	1	2	–	4,0	150	–	0,12	–	–	–
	2	2	–	–	162	–	0,13	–	5sin9t	–
28	1	1,5	2,0	2,0	140	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	3,1	180	–	–	12	–	–
29	1	1,0	–	–	140	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	2,4	75	150	–	–	–	0,08sin5t
30	1	1,6	–	3	75	150	–	–	–	–
	2	1,5	–	3	80	70	0,15	–	8sin10t	–

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом $P = 20$ Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30º, коэффициент жесткости пружины $c = 400$ Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

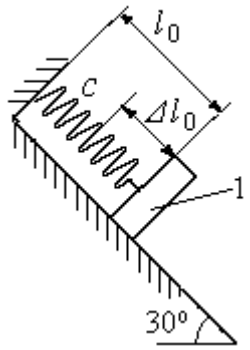


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение *x* относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

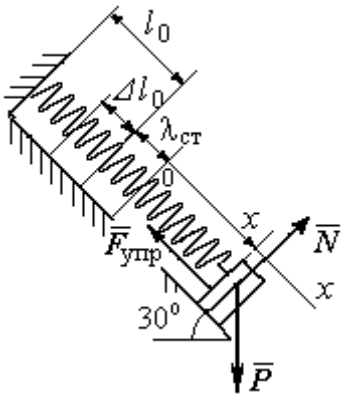


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось *x*: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ = 14,01 рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси *Ox*.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c}$ = 0,025 м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты *x* выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

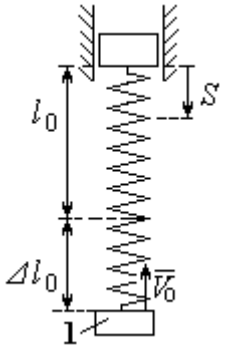


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

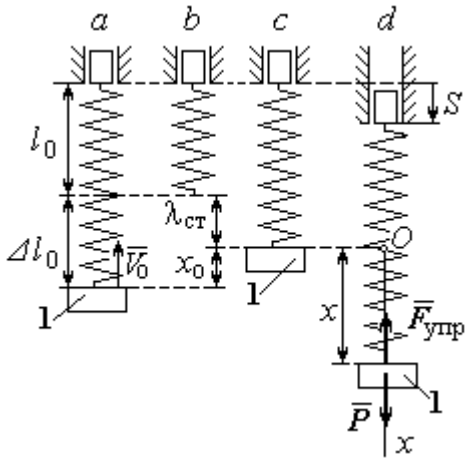


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*

$$F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение *x* относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, ω = 19,81 рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда x_0 = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin\omega t + C_2 \omega \cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2} \cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при t = 0 $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)} = -0{,}11$ м.

Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При α = 90° сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

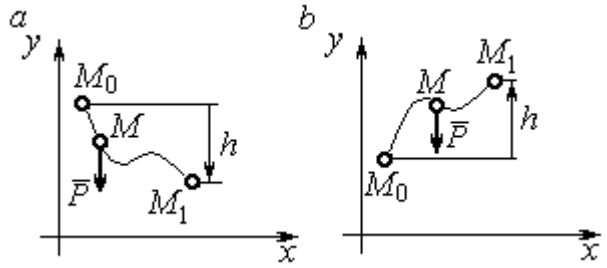


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ

всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

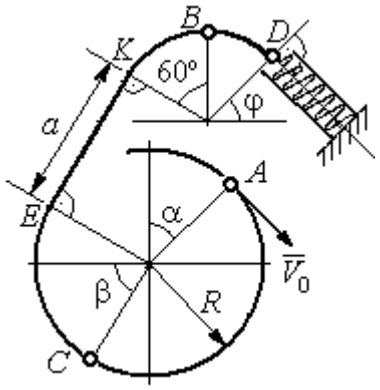
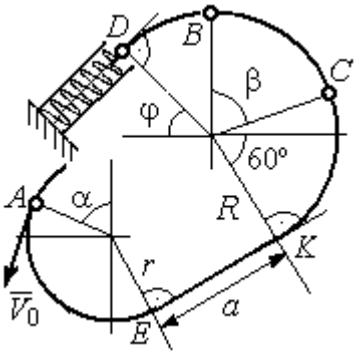
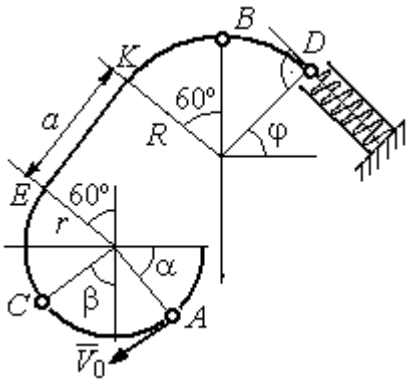
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой m расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами r и $R = 2r$, соединённых прямолинейным отрезком EK, сопряжённым с дугами окружностей в точках E и K. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка $EK = a$.

В точке A, положение которой на дуге окружности определяется углом α, шарику сообщают начальную скорость V_0. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f. На участках с вертикальным отрезком EK считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки D, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью c и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки D определяется углом φ.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку B со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге определяется углом β.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**	**Варианты № 3, 13, 23**
		

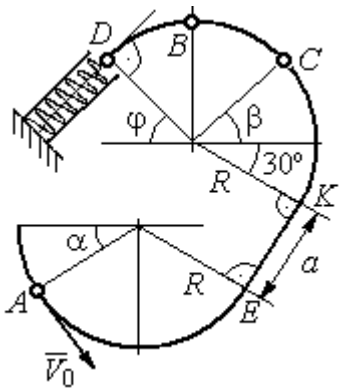
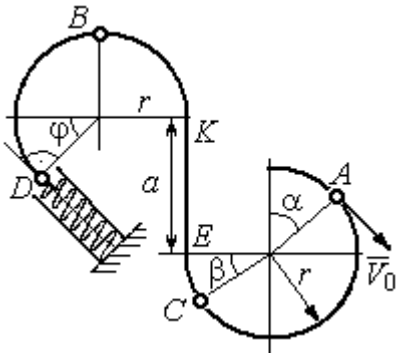
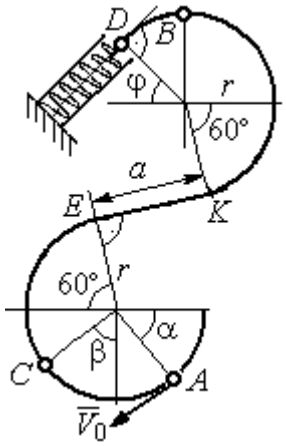
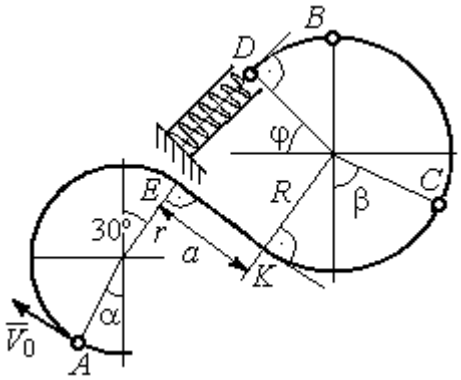
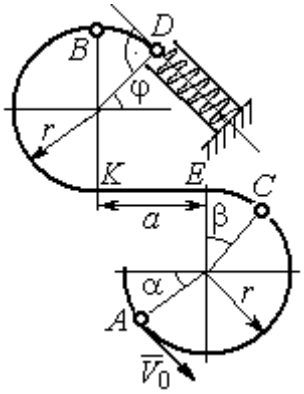
Варианты № 4, 14, 24	**Варианты № 5, 15, 25**	**Варианты № 6, 16, 26**
		

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д3

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

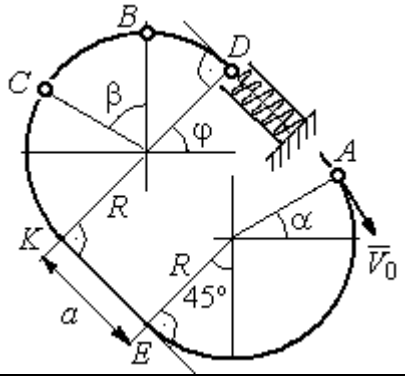
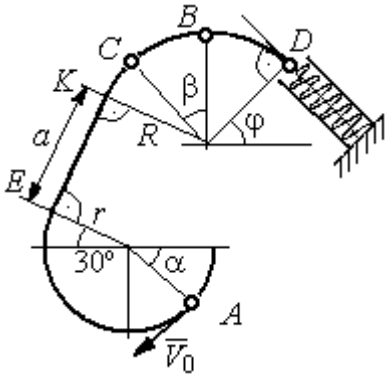
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
m, кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α, град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ, град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r, м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a, м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c, Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Окончание табл. 4.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m, кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α, град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β, град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ, град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r, м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a, м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c, Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках E и K с прямолинейным отрезком EK длиной a = 0,6 м (рис. 4.17). Радиусы окружностей R = 1 м и r = 0,5 м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках E и K, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой m = 0,5 кг. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60° (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f = 0,2. Достигнув точки D на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью c = 100 Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку B) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при k = 0,3. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

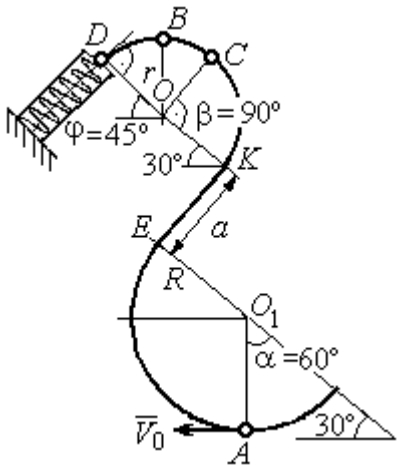


Рис. 4.17. Схема движения шарика

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения A в наивысшее положение – точку B.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой EK на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.18, b). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке A, $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке B, $V_B = 0{,}3V_0$. Для вычисления перепада высот точек A и B имеем выражение (рис. 4.18, a):

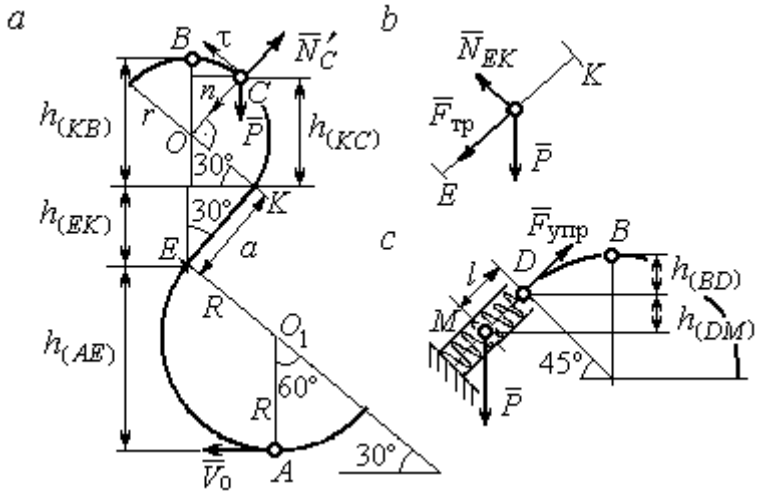


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} =$$

$$R(1+\sin 30^\circ) + a\cos 30^\circ +$$

$$r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения A в положение B, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{тр}})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$, $A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения AB и силы трения на отрезке EK. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, a, b).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в конечное положение B принимает

вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f\cdot\cos 60^\circ)\right]$. После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: V_0 = 7,81 м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке *C*.

Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, *а*). Уравнение движения шарика в точке *C* в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке *C*, N'_C – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *а* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся тем, что скорость шарика в точке *B* уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения *C* в конечное положение *B*. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках *C* и *B*; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек *C* и *B*; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ)$ = 0,5r (см. рис. 4.18, *а*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии V_B=0,3V_0 = 2,34 м/с, найдём V_C = 3,22 м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\frac{V_C^2}{r}$ = – 6,12 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке *C* (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке *C* равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки B до положения максимально сжатой пружины – точки M. Движение на этом участке происходит по дуге окружности BD и по прямой DM. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения B в M получим: $\frac{mV_M^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M, V_B – скорость шарика в точках M и B. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} =$ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке DM длиной l: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке M скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \frac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке B найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx},

F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{\,e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

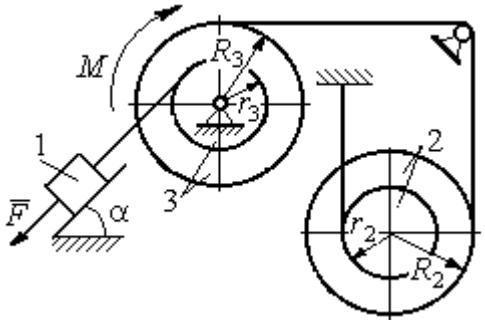
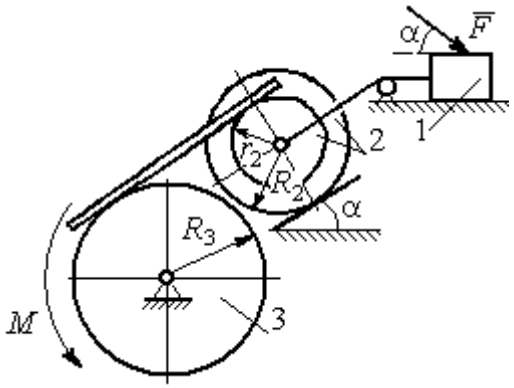
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

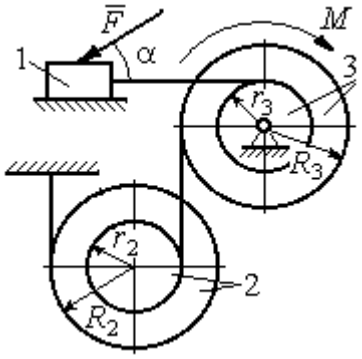
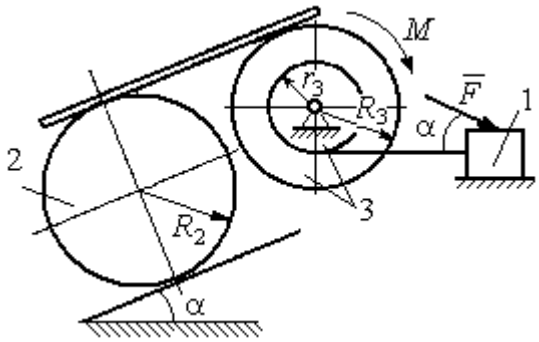
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3}.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

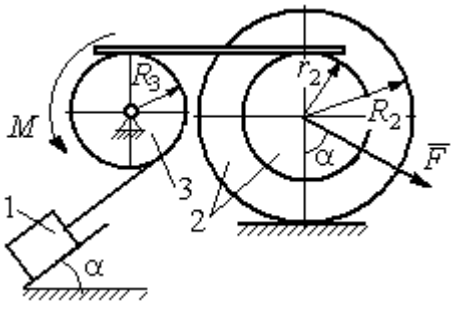
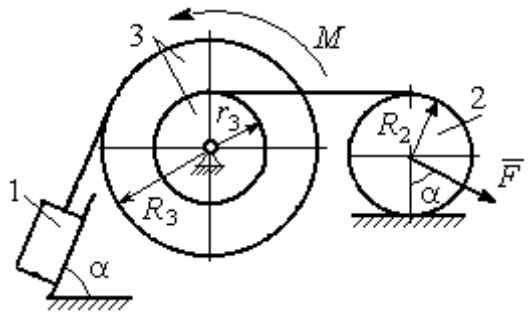
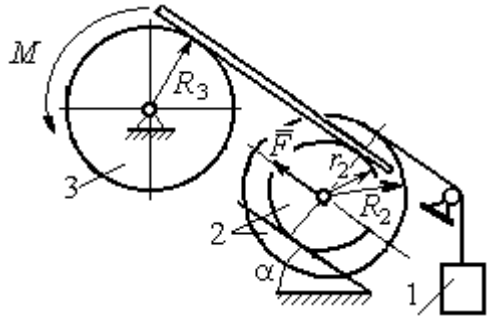
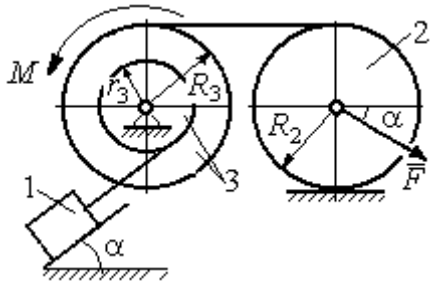
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д4

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

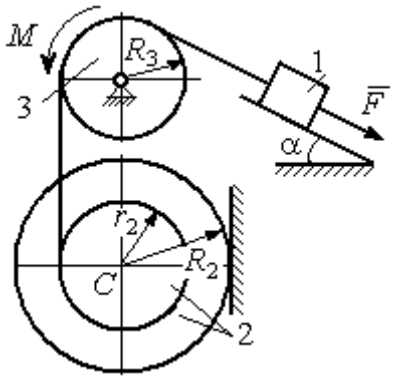
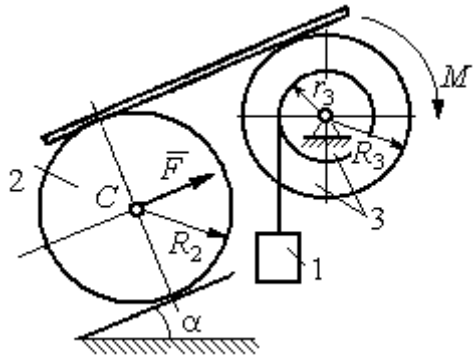
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	–	$2r$	–
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	–	$2r$	–
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	-	$r\sqrt{3}$	–

Окончание табл. 5.1

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	–	$r\sqrt{2}$	–
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	–	$r\sqrt{3}$	–
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$	–
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	-	$r\sqrt{3}$	
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	–	$2r$	–
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$2r$	–
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	–	$r\sqrt{3}$	–
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	-	$r\sqrt{3}$	
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	–	$2r$	–
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$, приложенных

к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

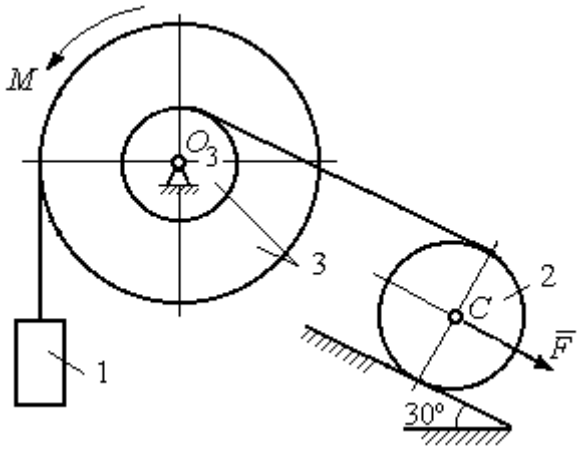


Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

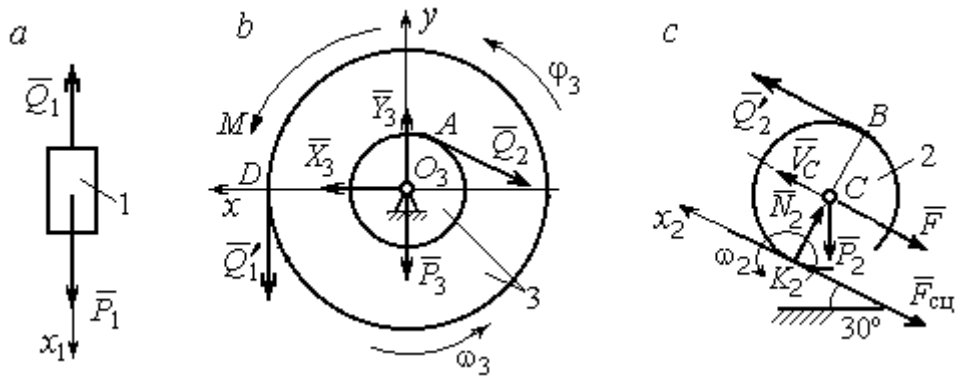


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
a – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
c – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1, a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через его центр масс O_3, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси *z*; ε_3 – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}}2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C, ε_2 – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{PR_2^2}{g} = \frac{4Pr^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$. Точка B катка 2 и точка A блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек A и B, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g}a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g}\varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g}\varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \frac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g}a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g}a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g}a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g}a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g}a_C = 7P - Q_2, \; \frac{3P}{g}a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \frac{10}{111}g$, $Q_2 = \frac{79}{37}P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \frac{34}{37}P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси *x*, *y* имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \; m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3, – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси *x*, *y* (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений Q_1 = 0,919*P* и Q_2 = 2,135*P*, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ =$

4,98P. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 5,31P.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа положительна. Если тупой – отрицательна. При α = 90° сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = = F \cdot V\cos\alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm Fh_O\omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса O.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T, T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сумма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

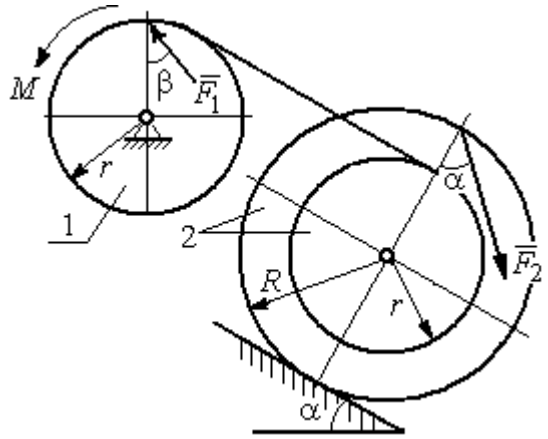
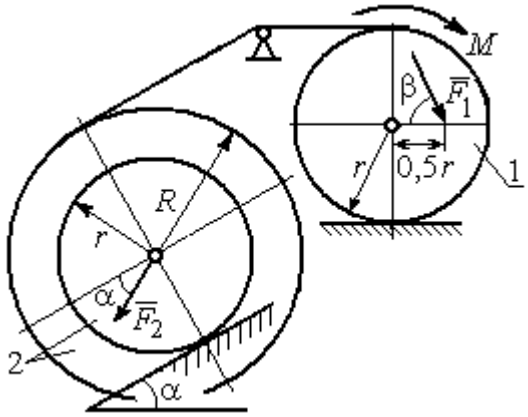
Вес дисков P_1 и P_2. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β, показанными на схемах механизмов.

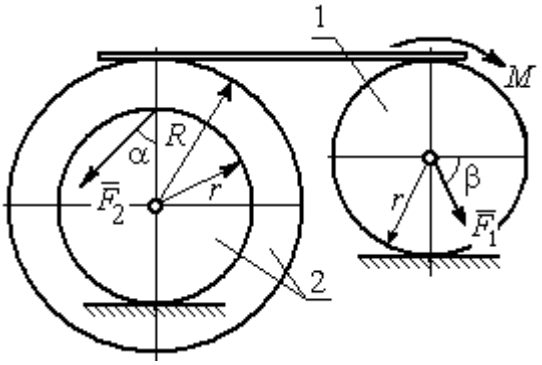
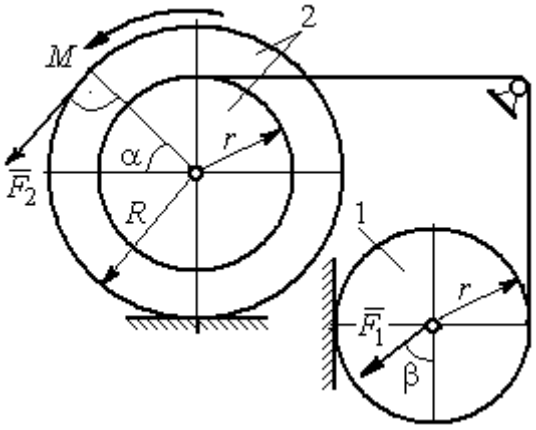
Радиус однородного диска r. Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

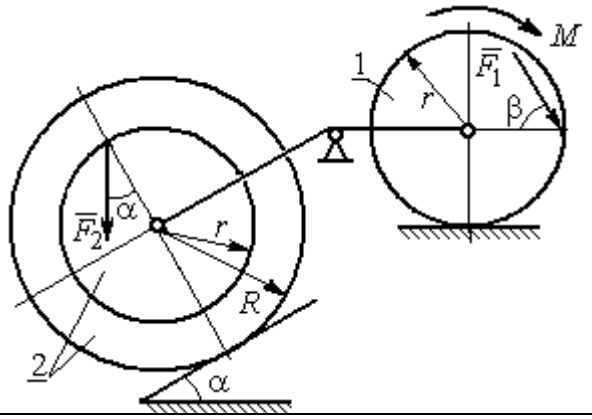
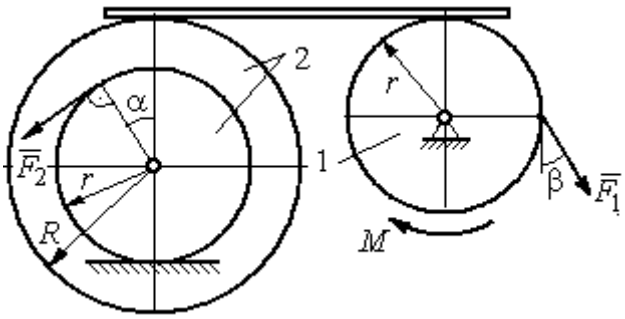
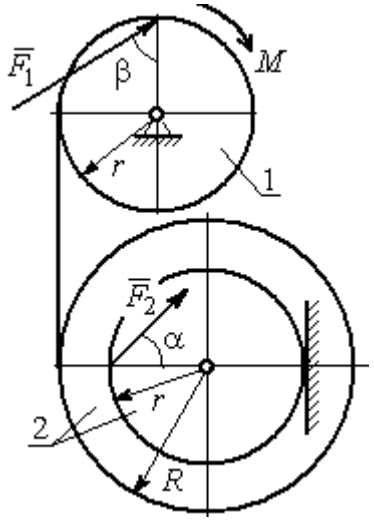
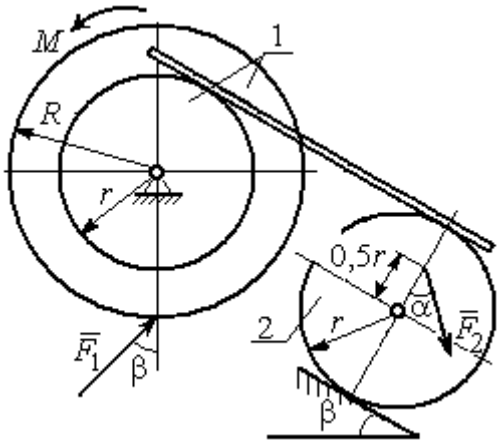
Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д5

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

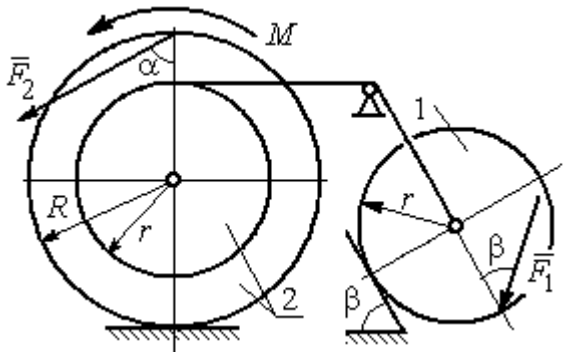
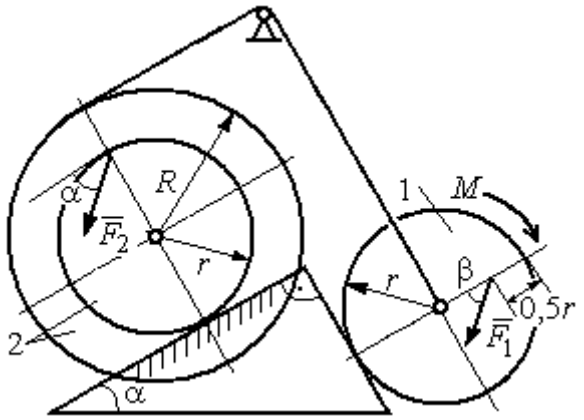
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты 10, 20, 30**
	

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Окончание табл. 5.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания. Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести P_1 = 40 Н, P_2 = 60 Н, модули сил F_1 = 80 Н, F_2 = 30 Н, величина момента M = 35 Н·м, углы наклона сил α = 30°, β = 45°, радиусы дисков R = 0,8 м, r = 0,6 м, радиус инерции диска 2 i_z = 0,4 м.

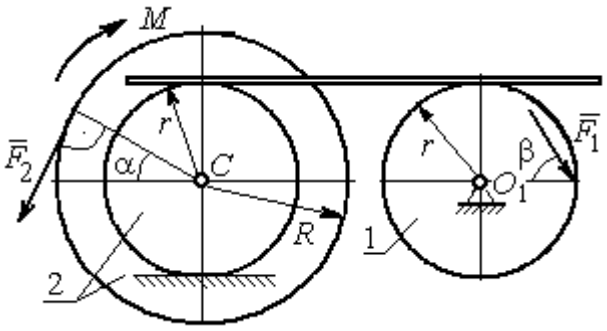


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

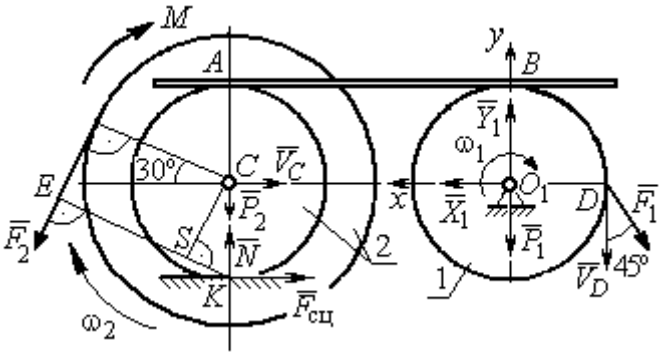


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C, ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка *K* на рис. 5.8). Тогда скорость точки *C* определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки *A* $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки A на диске 2 равна скорости точки *B* на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2.$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K; $\vec{\omega}_2$, ω_2 – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K. Мощность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке D, $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{r}\right)+M\frac{V_C}{r}+F_1 V_C\sqrt{2}.$$

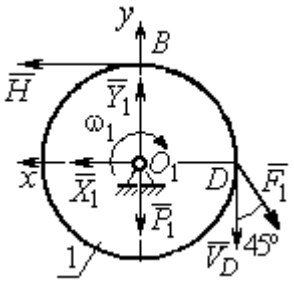


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g}+\frac{P_2}{2g}\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{r}\right)+M\frac{V_C}{r}+F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{r}\right)+\frac{M}{r}+F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1+P_2\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с^2.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки K – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{r} = \dfrac{a_C}{r} = 11{,}42$ рад/с^2. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с^2.

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси *z*, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси *z*.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси *z*: $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\dfrac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

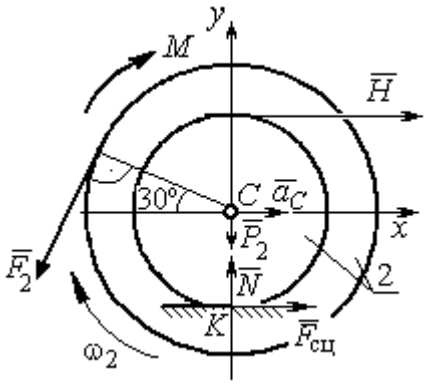


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 ε_1 = 22,84 рад/с^2, найдем реакцию стержня *H* = 28,63 Н.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0,\quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне *H* = 28,63 Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: X_1 = 27,94 Н, Y_1 = 96,57 Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ =100,53 Н.

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения

и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат *xCy* показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2 \cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2 \cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с^2, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90{,}51$ Н.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{и} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

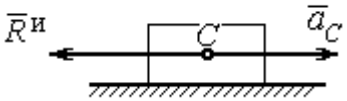


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{и}$, равному по величине $R^{и} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{и}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{и} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

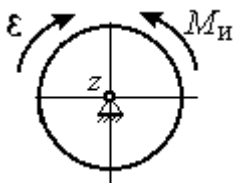


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{и}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{и}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный

вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_c$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_c$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_c\varepsilon$, где J_c – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

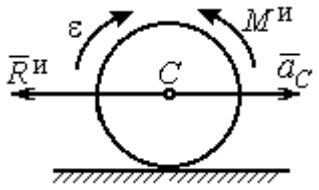


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{акт}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{акт})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

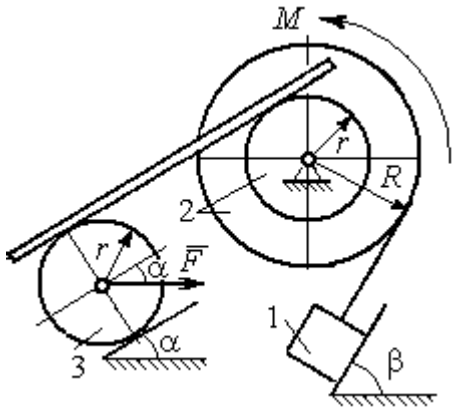
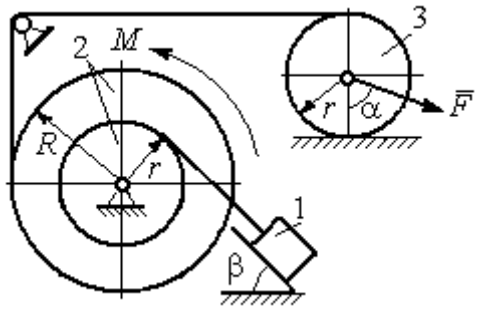
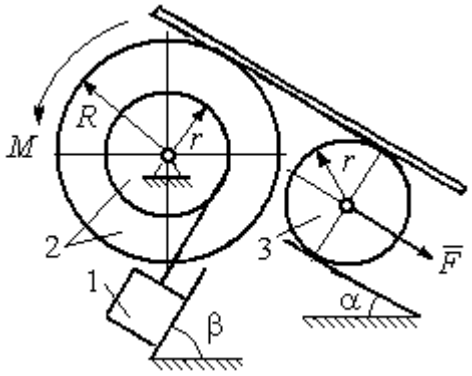
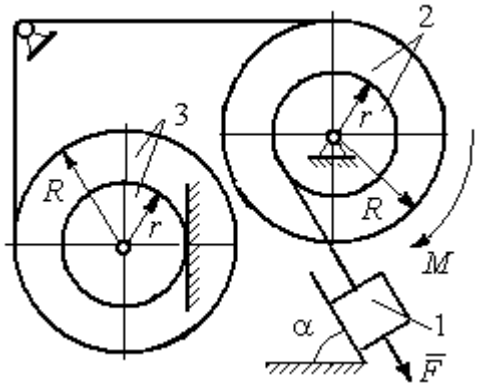
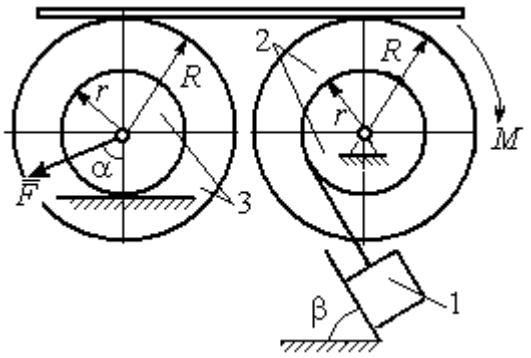
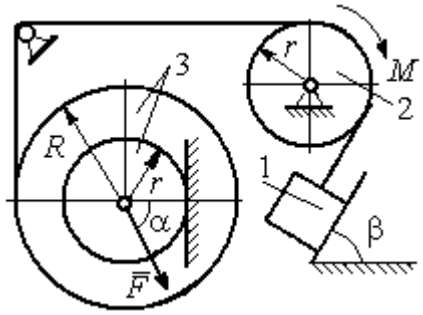
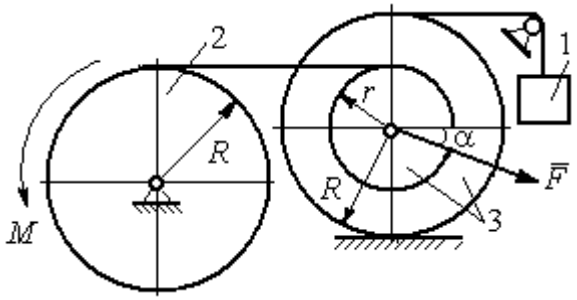
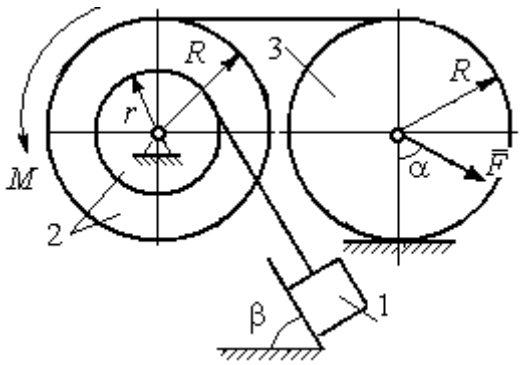
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

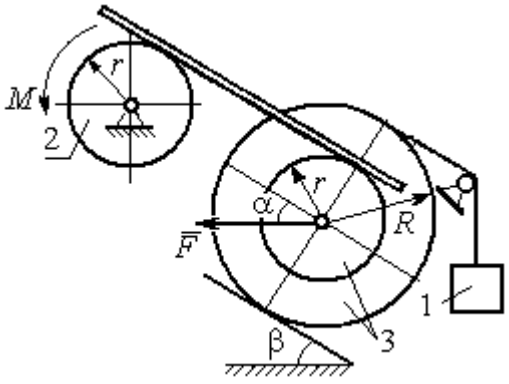
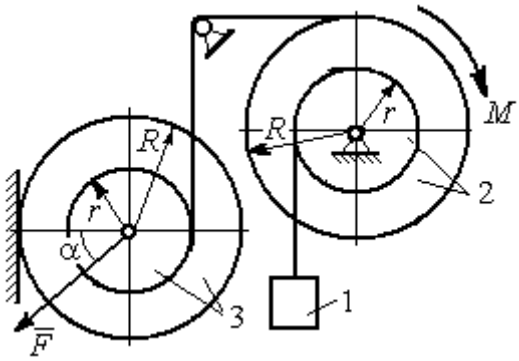
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+ t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+ t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилиндрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвиж-

ной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом *M*, приложенной к диску 3.

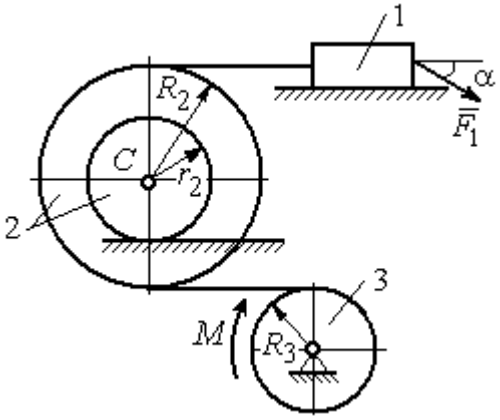


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент t = 1 с, если: P_1 = 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; i_{2C} = 0,6 м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом *M* (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3, ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C, a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1, a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

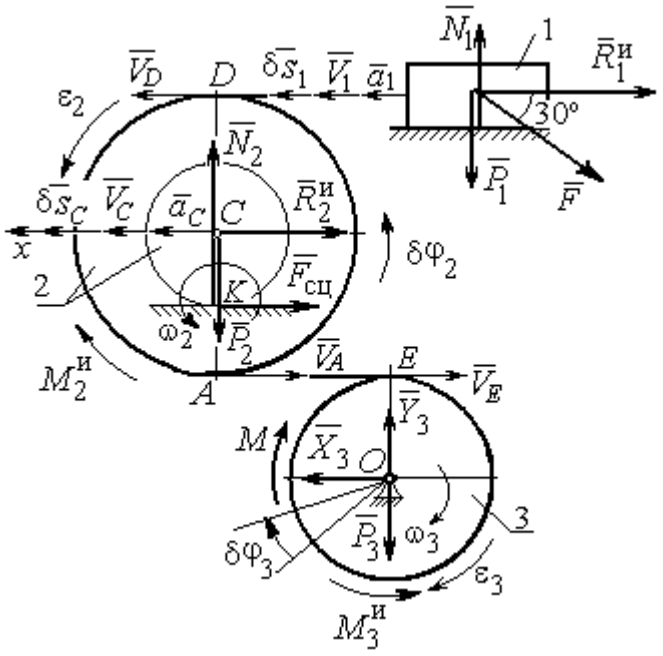


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^{\text{и}}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^{\text{и}} = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{\text{и}}$ в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой равен главному

моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке *K* касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки *A* катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) =$ $V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки *E* блока 3 равна скорости точки *A* катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки *D* катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0,\ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ =$$

$$= \left[6(1+2t)\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2}\right) - 5(t+1)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2}\right)0{,}866 \right]\delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1(R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2 g r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \dfrac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}} \delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}} \delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2} \delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g} \left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2} \right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось *x* по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось *x*, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\frac{t^2}{2} + 1{,}29\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом *M* и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

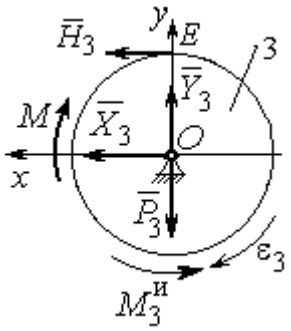


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3R_3 - M_3^{и} = 0$, где $M_3^{и} = J_{3O}\varepsilon_3 = = \frac{P_3R_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2}$.

Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2} = \frac{6(1+2t)}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)}{2gr_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на

вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -H_3 = -41{,}04$ Н, $Y_3 = P_3 = 15$ Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 43{,}69$ Н.

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s$. Величина Q_k, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

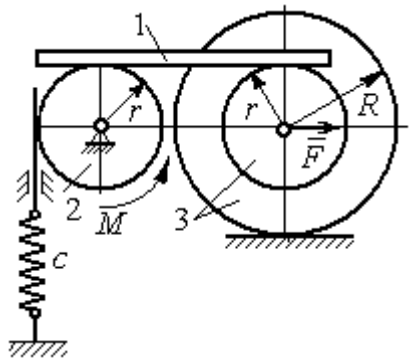
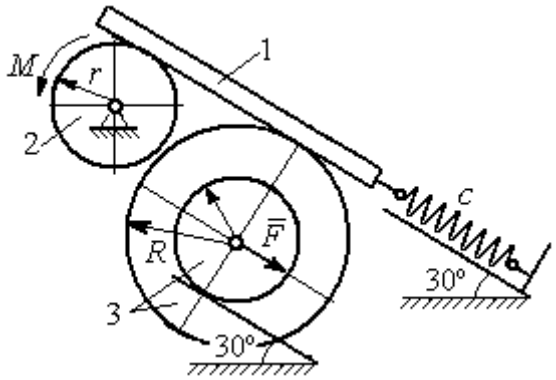
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

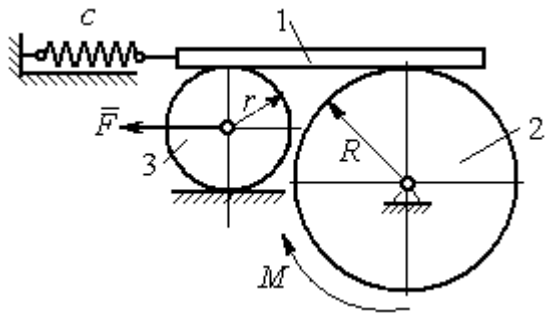
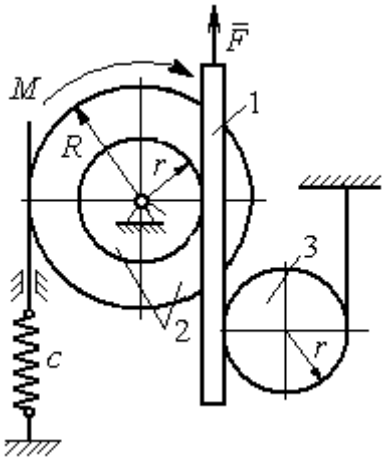
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20}, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

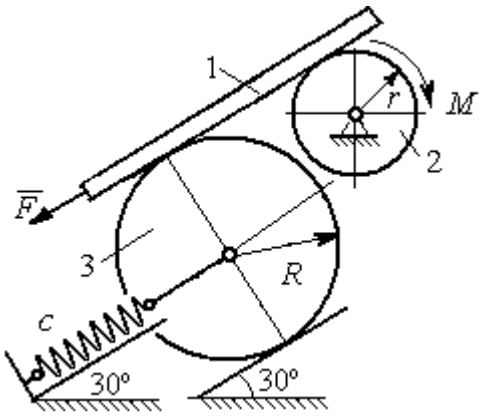
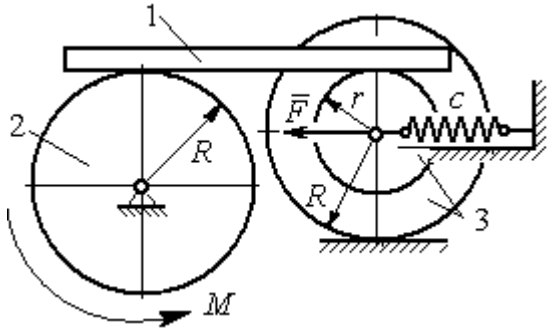
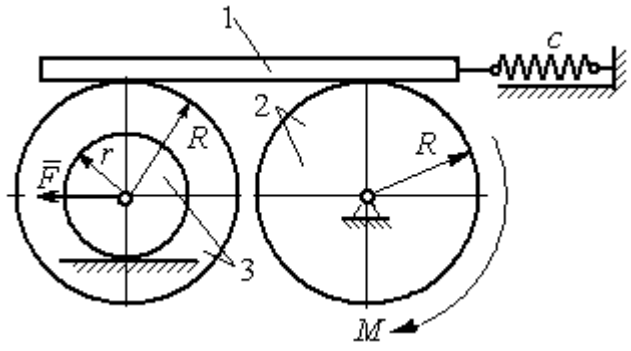
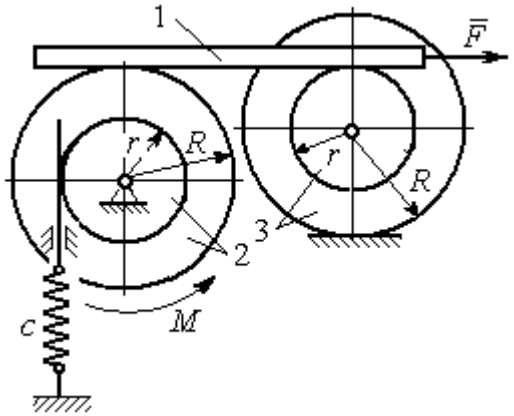
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

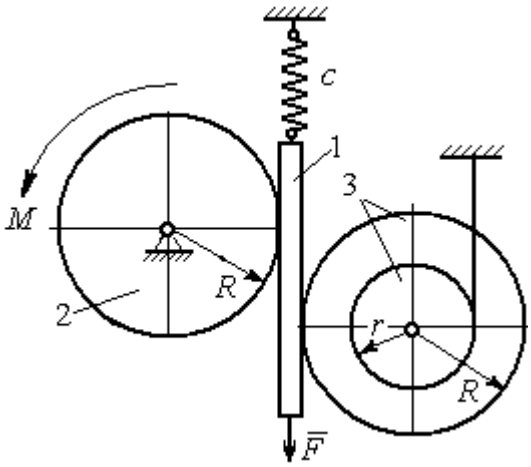
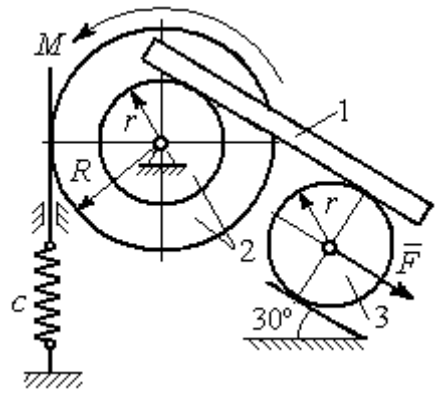
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер вари-анта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	–
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	–

Окончание табл. 6.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	–10	–2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	–8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	–12	–4	65	0,4	0,6	0,5	–
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	–10	2	70	0,2	1,2	0,6	–
16	10	12	12	–5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	–6	–2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	–10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	–3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	–3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	–2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	–8	2	45	0,2	0,8	0,6	–
24	12	20	18	–4	–8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	–6	–2	60	0,1	1,4	0,7	–
26	8	12	10	10	–3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	–3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	–6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	–10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r, радиус однородного диска r. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня

без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

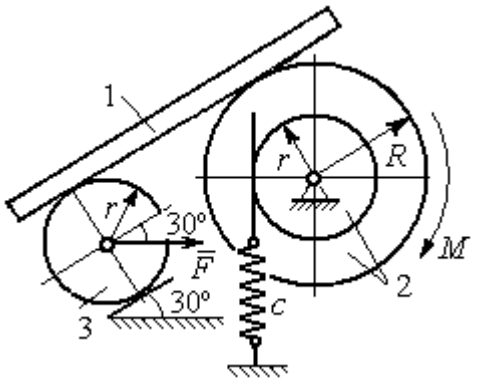


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

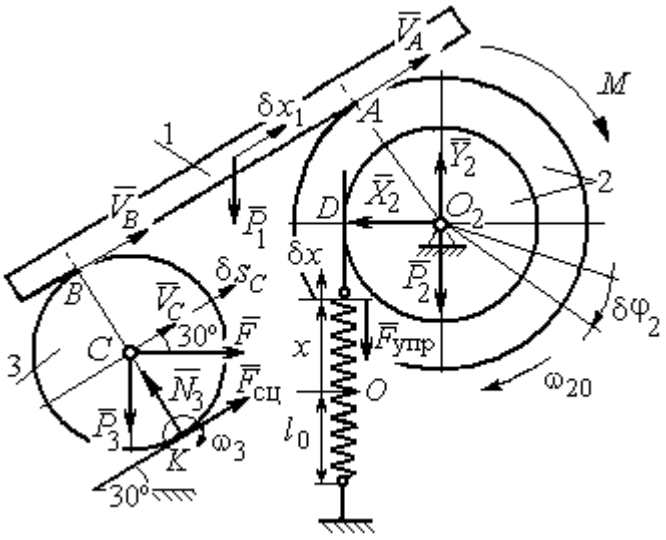


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где m_1, V_1 – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2, ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки *A* блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{P}{2g} \left(\frac{\dot{x} R}{r} \right)^2 = 1{,}125 \frac{P}{g} \dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2} \right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = 2 \frac{P}{g} \dot{x}^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x} R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P r^2}{2g} \left(\frac{\dot{x} R}{2r^2} \right)^2 = 0{,}422 \frac{P}{g} \dot{x}^2 .$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 3{,}547 \frac{P}{g} \dot{x}^2 .$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой *x*, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси *x* (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1: $\delta x_1 = \frac{\delta x R}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C: $\delta S_C = \frac{\delta x R}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом *M*, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента *M*, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1) = P_1 \delta x_1 \cos 120^\circ = -P_1 \delta x_1 \cos 60^\circ = -\frac{P_1 \delta x R}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы *F*: $\delta A(P_3) = P_3 \delta s_C \cos 120^\circ = -P_3 \frac{\delta x R}{4r}$, $\delta A(F) = F \frac{\delta x R}{2r} \cos 30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние *x*: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}} \delta x \cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1 \delta x R}{2r} - P_3\frac{\delta x R}{4r} + F\frac{\delta x R}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 2{,}63t + C_2 \cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20}, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1\cos 2{,}63t - 2{,}63C_2\sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим C_1 = 0,038. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038\sin 2{,}63t - 0{,}23\cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\,x(t) = 0{,}057\sin 2{,}63t - 0{,}34\cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

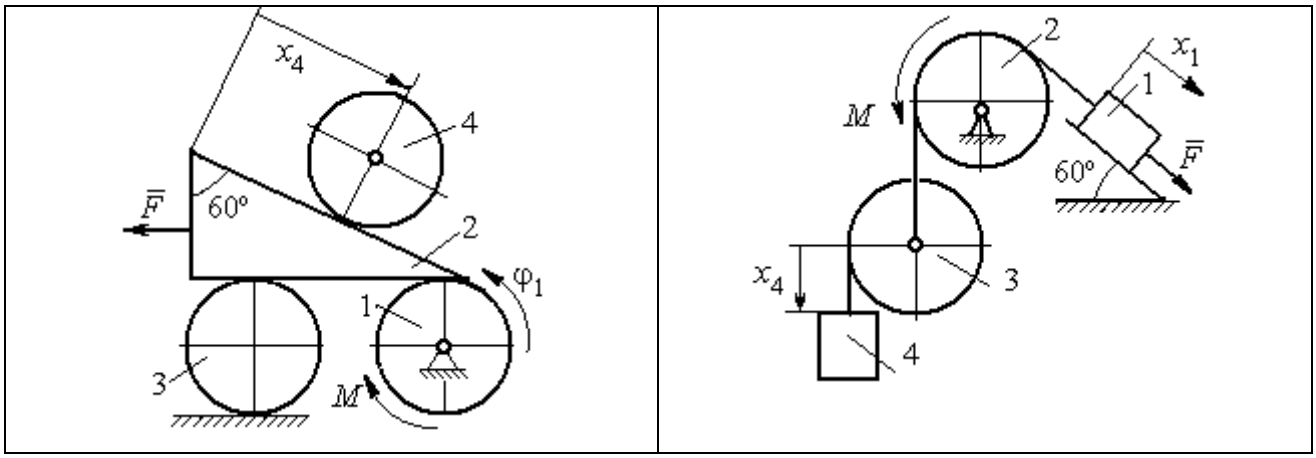
$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\,x(t) = 0{,}19\sin 2{,}63t - 1{,}15\cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

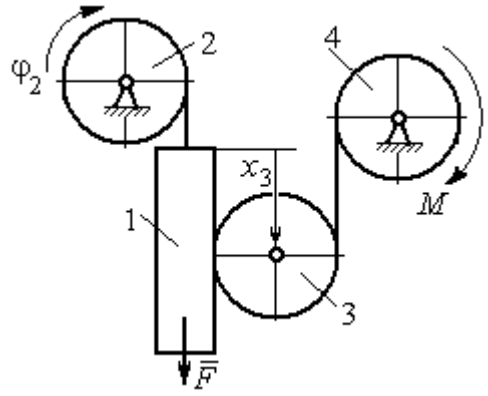
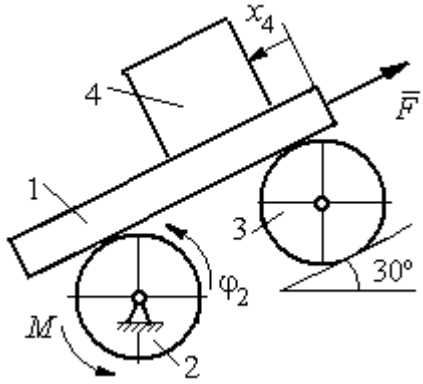
Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны R. Найти уравнения движения системы в обобщённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**



Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

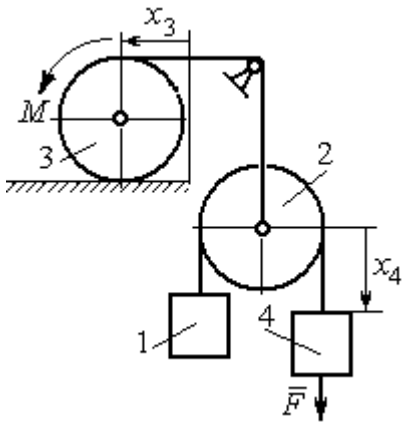
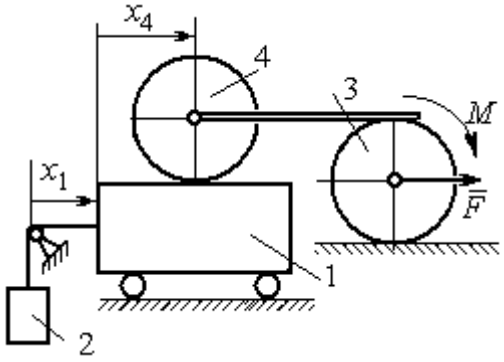
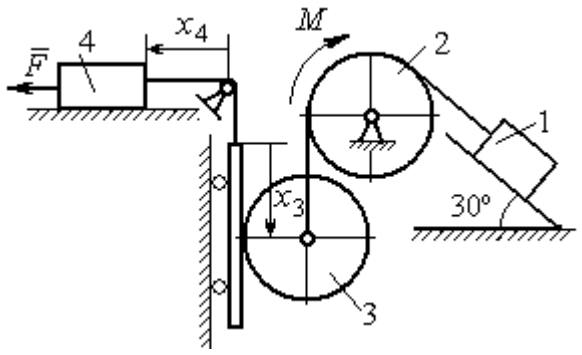
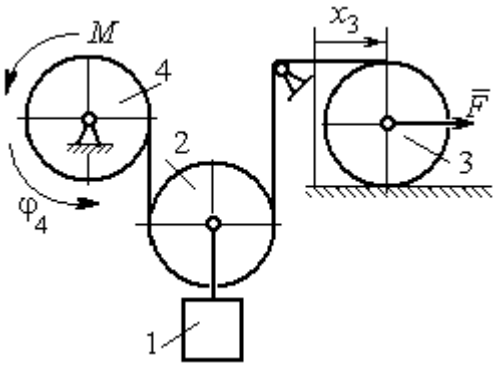
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д8

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

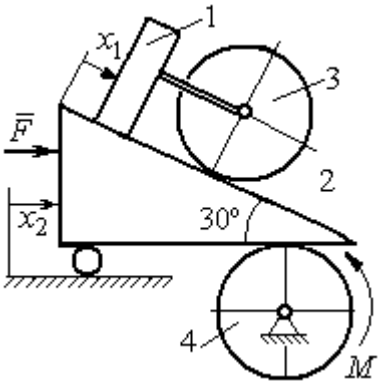
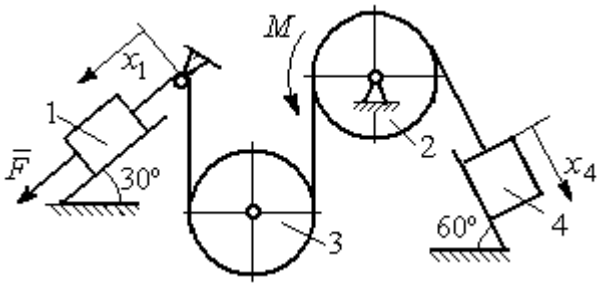
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P_1, Н	P	$2P$	P	$1{,}5P$	P	$3P$	P	$1{,}2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
P_2, Н	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
P_4, Н	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
R, м	$2r$	$1{,}5r$	$2{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	r	$1{,}5r$	r	$2r$	r	$1{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	$2r$	$2r$
F, Н	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$
M, Н·м	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Окончание табл. 6.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P_1, Н	$4P$	$1{,}5P$	P	$2P$	P	P	$1{,}5P$	$1{,}5P$	$2P$	P	P	$2P$	$1{,}2P$	$3P$	$1{,}2P$
P_2, Н	$2P$	$2P$	$2P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	$2P$	$1{,}2P$	$2P$	$3P$	$2P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	P	P	$3P$
P_4, Н	$1{,}5P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	P	$2P$	P	$2P$
R, м	$1{,}5r$	r	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}2r$	$2r$	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}2r$	$2r$
F, Н	$2P$	$2P$	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	P	$3P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$	$3P$
M, Н·м	$3Pr$	$2Pr$	$4Pr$	Pr	$4Pr$	$4Pr$	$2Pr$	Pr	$4Pr$	$2Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, переброшенному через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

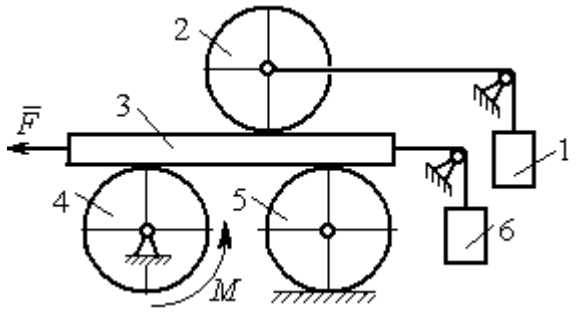


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно

края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

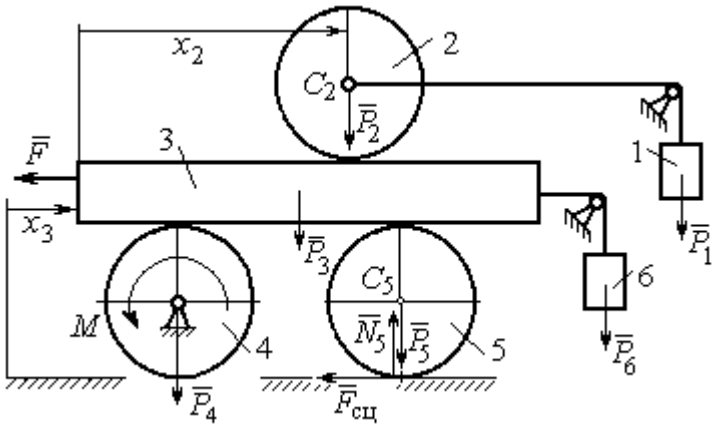


Рис. 6.16. Действующие силы
и обобщённые координаты механической системы

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где J_4, ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5=\frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2+\frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5, V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс

катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка *K* касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

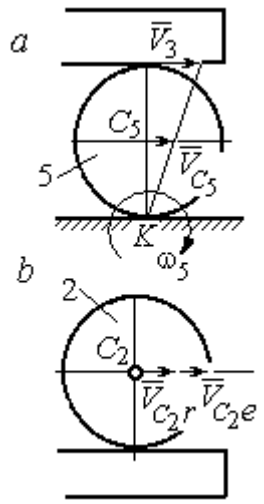


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном движении: $\omega_2 = \frac{V_{C_2r}}{R_2} = \frac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \frac{P_1}{2g}V_1^2$, $T_6 = \frac{P_6}{2g}V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

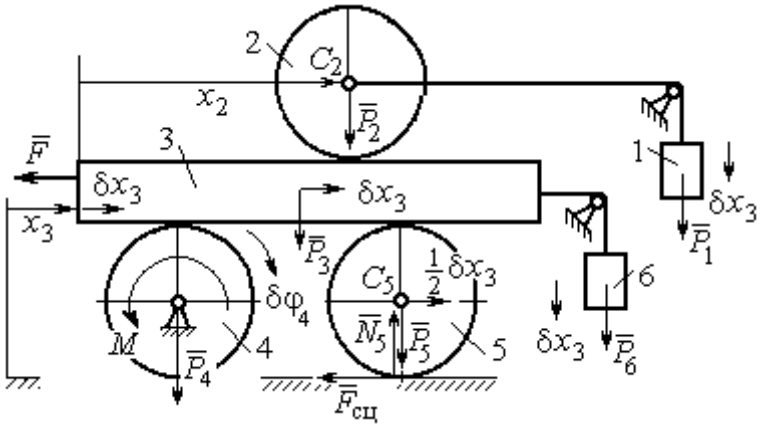


Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 +$$

$$\frac{P_3}{2g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 +$$

$$\frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2 + \frac{P_6}{2g}V_6^2,$$

где значения скоростей:

$V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \frac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$

. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \frac{P_2 R_2^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \frac{P_4 R_4^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \frac{P_5 R_5^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_2 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2

стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_3$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\vec{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

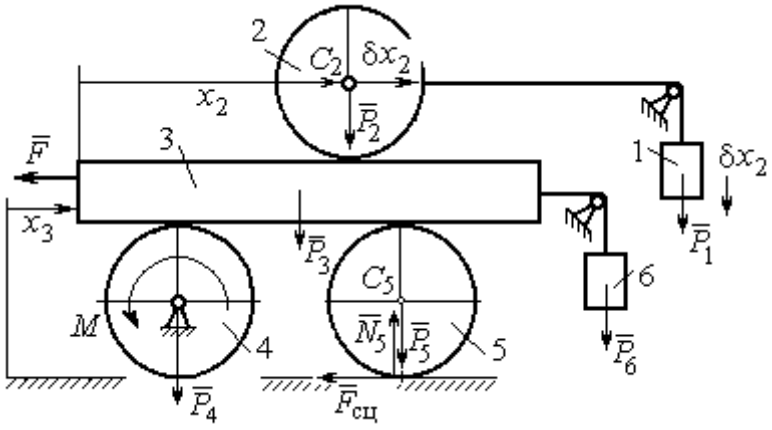


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2>0$, $\delta x_3=0$

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении δx_3: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \dfrac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении δx_3 с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -\dfrac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая

работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P\delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2: $Q_{x_2} = P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \ \text{ и } \ \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2} x_2 = \frac{1}{2r} x_2 = 0{,}097 \frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4} x_3 = \frac{1}{2r} x_3 = -0{,}047 \frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2} x_3 = -0{,}047 gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024 \frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев С. А*. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов, выполнению практических и контрольных работ

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета

«___» _____ 2018 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издание УГГУ Екатеринбург,
2018

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от «07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018
©Уральский государственный горный университет, 2018

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил.**

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной,** или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

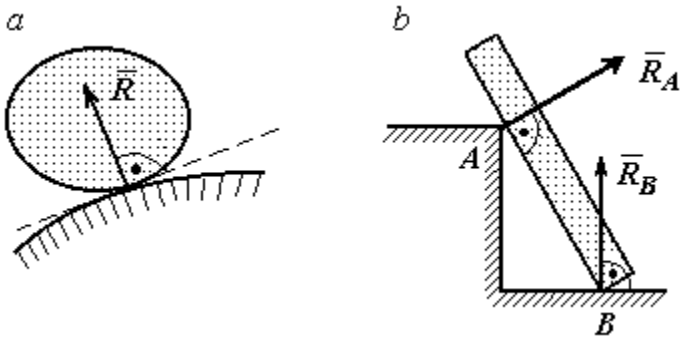


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормалям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

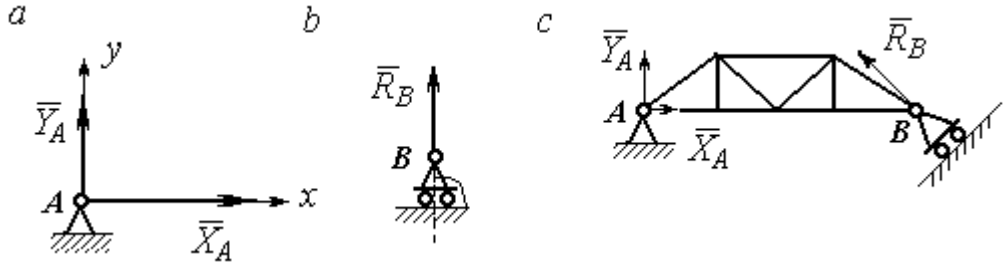


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

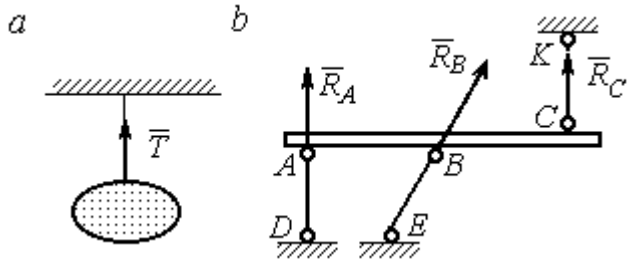


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити
и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира *A* разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

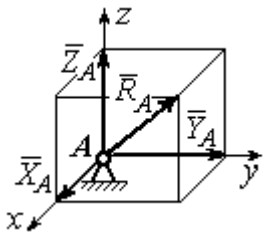


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

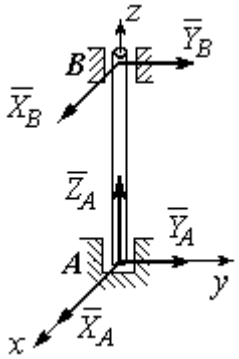


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшипника *B* разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные

координатным осям. Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник *A*). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, *a*, на ось *x*: $F_x = F\cos\alpha$, $Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi$, $P_x = P\cos 90^\circ = 0$.

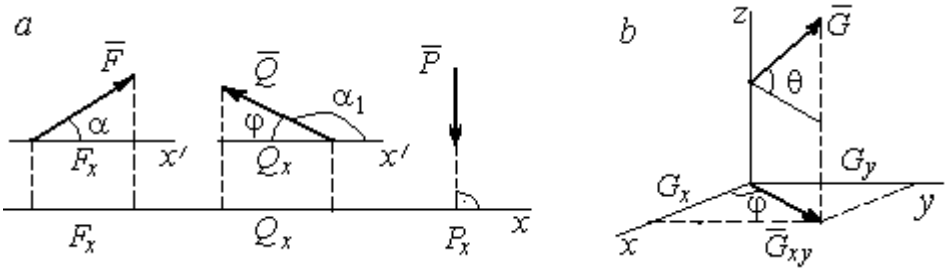


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
a – проекция силы на ось; *b* – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, *b* вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость *xy*. По величине $G_{xy} = G\cos\theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проекции

$\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz: $G_x = G_{xy}\cos\varphi = G\cos\theta\cos\varphi$, $G_y = G_{xy}\sin\varphi = G\cos\theta\sin\varphi$, $G_z = G\sin\theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120°$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

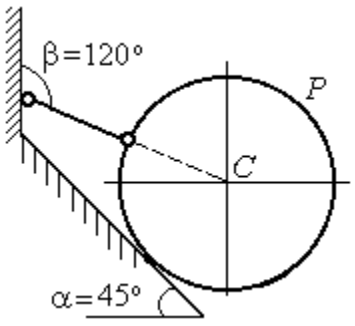


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0.$$

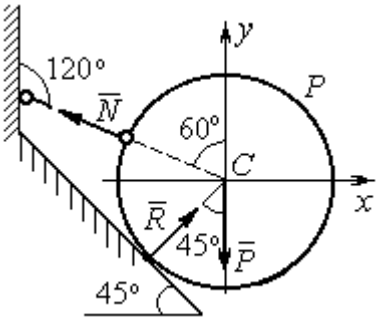


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N\cos 30^\circ + R\cos 45^\circ = 0;\ \sum F_{ky} =$$

$$N\cos 60^\circ + R\cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: N = 14,64 кН, R = 17,93 кН.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней *AC* и *BC*, скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень *BC* горизонтален, стержень *AC* составляет с горизонталью угол β = 60º. К шарниру *C* прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом G_1 = 10 кН и G_2 = 12 кН. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок *D* так, что угол наклона участка троса *CD* к вертикали α = 60º. Определить реакции стержней *BC* и *AC*.

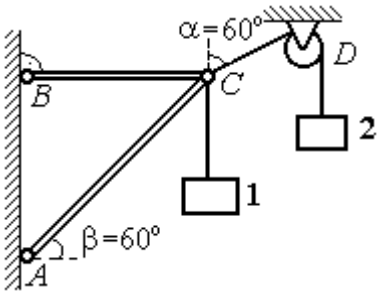


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла *C*, в котором закреплены стержни и тросы. На узел *C* действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней *BC* и *AC* (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xCy, как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

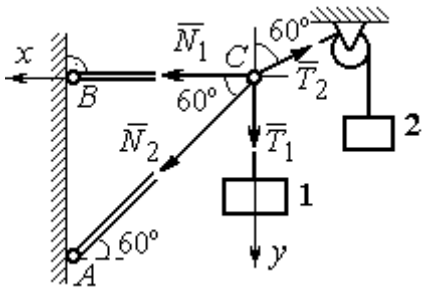


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел *C* при его равновесии

$$N_1 + N_2\cos 60^\circ - T_2\cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2\cos 30^\circ + T_1 - T_2\cos 60^\circ = 0.$$

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: N_1 = 12,7 кН, N_2 = – 4,62 кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня *AC* направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом *P* = 20 кН поднимается стержневым краном *ABC* посредством каната, перекинутого через блоки *B* и *D* (рис. 1.11). Блок *B* установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней *AB* и *BC*, блок *D* укреплён так, что участок троса *DB* составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни *AB* и *BC* соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз *P*, переброшен через блок *E* и на отрезке *BE* составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока *B*, определить усилия в стержнях *AB* и *BC* при равновесии груза.

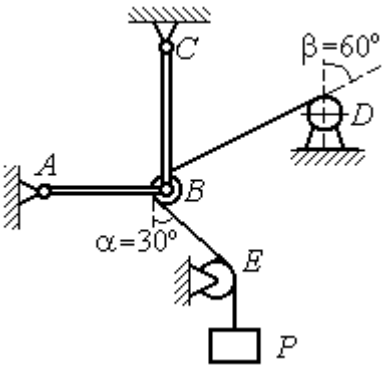


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

Решение

Рассмотрим равновесие блока *B* вместе с отрезками нити *BE* и *BD*. Освободим блок *B* от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити *BD*, приложенная в точке *D*, численно равная весу груза *P*, реакция $\vec{T}'$ нити *BE*, приложенная в точке *E* и также численно равная весу груза *P* и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

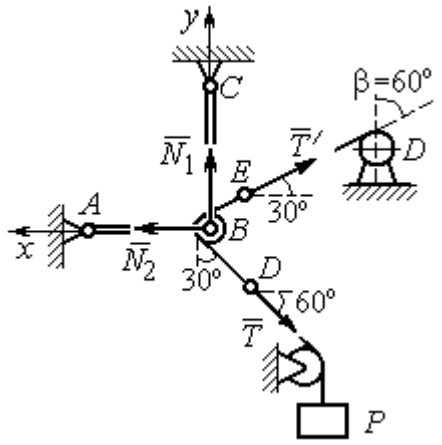


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок *B*, при его равновесии

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T'\cos 30^\circ - T\cos 60^\circ = 0;\ \sum F_{ky} = N_1 + T'\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P$ = 20 кН, получим: N_1 = 7,32 кН, N_2 = 27,32 кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса *CBDP*, натянутого грузом весом *P* = 50 Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса *CB*, *BD*, *DP* и натяжения оттяжек *BA* и *DE*, если угол отклонения оттяжки *BC* от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса *BD* от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

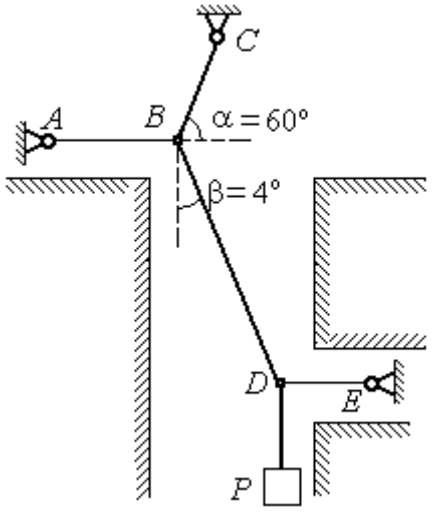


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла *D*, в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки *DE* и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP, равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат *xDy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *D:*

$$\sum F_{kx} = S\cos 86^\circ - T_E = 0; \quad \sum F_{ky} = S\cos 4^\circ - T_P = 0.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке *DP* $T_P = P = 50$ Н, находим натяжение S на среднем участке отвеса: $S = \dfrac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50{,}12$ Н. Из первого уравнения находим натяжение $T_E = S\cos 86^\circ = 3{,}49$ Н.

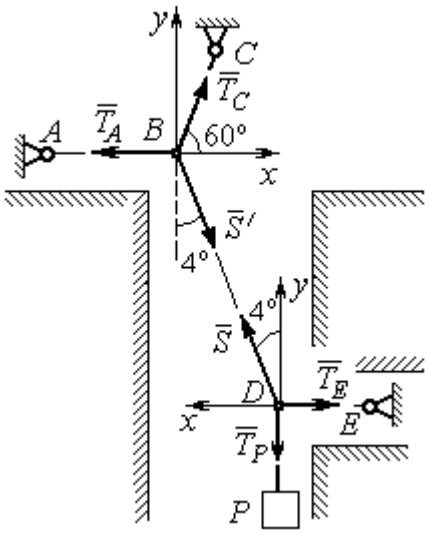


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах *B* и *D* при равновесии

Теперь рассмотрим равновесие узла *B*, на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки *BA*, реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса *BC* и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$, а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *B:*

$$\sum F_{kx} = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ - T_A = 0; \quad \sum F_{ky} = T_C\cos 30^\circ - S'\cos 4^\circ = 0.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке *BC* и натяжение T_A оттяжки *BA*: $T_C = \dfrac{S'\cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57{,}73$ Н; $T_A = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ = 32{,}36$ Н.

Задача 5. Груз *P* = 20 кН удерживается двумя стержнями *AC*, *AD* одинаковой длины и цепью *AB*, скреплённых в точке *A*, так, что плоскость треугольника *ADC* горизонтальна (рис. 1.15). Цепь *BA* отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние *CE* = *ED*. Трос закреплён одним концом в точке *A*, а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок *K* так, что отрезок троса *AK* находится в плоскости, параллельной плоскости

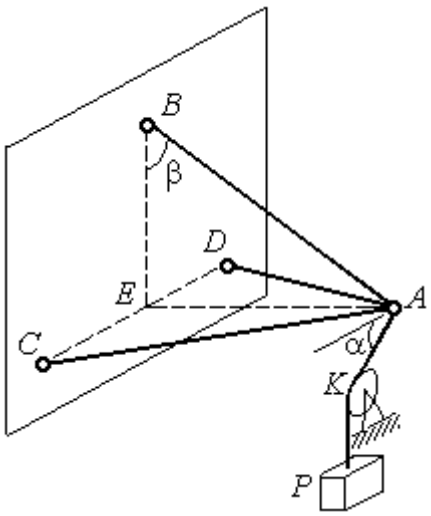


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

стены, и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

Решение

Рассмотрим равновесие узла *A*. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16).

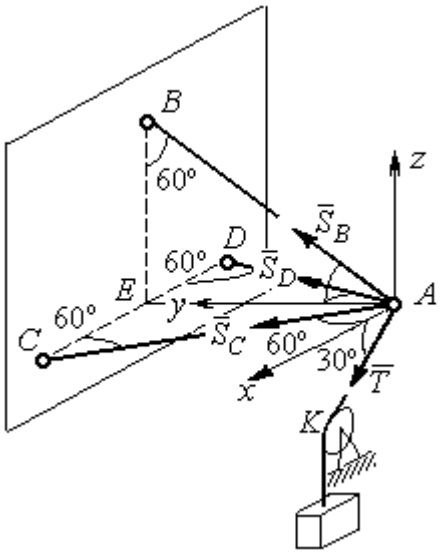


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел *A*, при его равновесии

Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии *AK* и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел *A* действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0$, где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27{,}32$ кН; $S_D = 7{,}32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор *DB* и *DA* и растяжки *DC*, соединённых в точке *D*. В точке *D* к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом *P* = 50 кН.

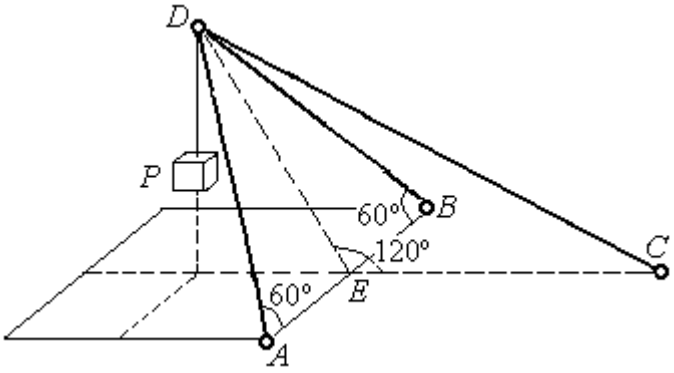


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла *D*. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

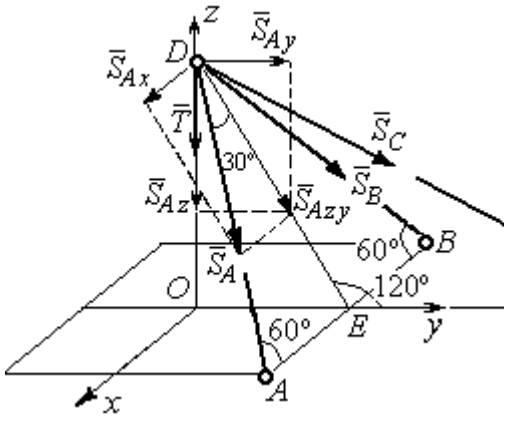


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел *D*, при его равновесии

На узел *D* действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат *Oxyz*, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции силы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$

на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz, а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz. На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A\cos 60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy}\cos 60^\circ = S_A\cos 30^\circ \cos 60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy}\cos 30^\circ = -S_A\cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C\cos 30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C\cos 60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A\cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_B\cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A\cos 60^\circ - S_B\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A\cos^2 30^\circ - S_B\cos^2 30^\circ - S_C\cos 60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил.**

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, *а*): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы.** Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

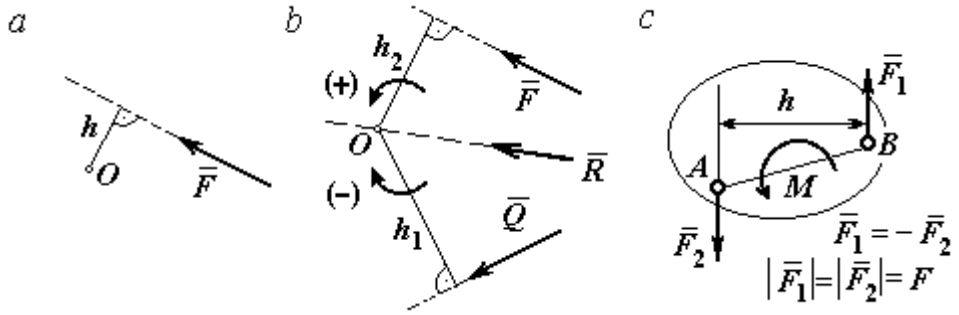


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, b – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо *h* и момент *M*: $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.19, *c*).

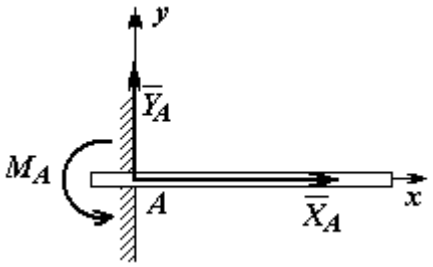


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных

осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно центра *O*. Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

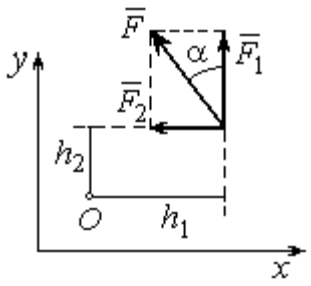


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределенными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*. Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна произведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

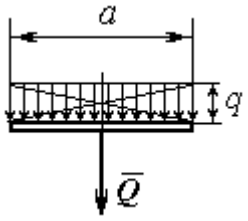


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы

проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка *AB* весом *P* = 100 кН прикреплена к стене шарниром *A* (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке *B*, перекинутого через блок *D* и несущего груз *Q*. Участок троса *DB* образует с вертикалью угол 30°. В точке *C* к балке подвешен груз *G* весом *G* = 200 кН. Определить вес груза *Q*, удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира *A*, пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0{,}25BA$.

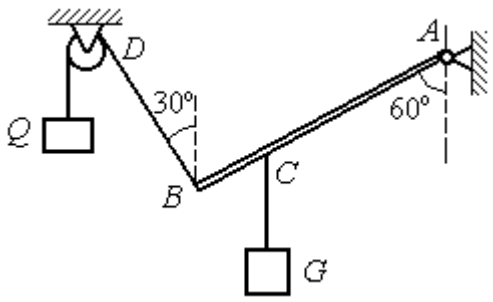


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка *AB*. На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка *AB*, реакция шарнира *A*, представленная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз *Q*, и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз *G*. Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Выберем систему координат *xAy*, как показано на рис. 1.24.

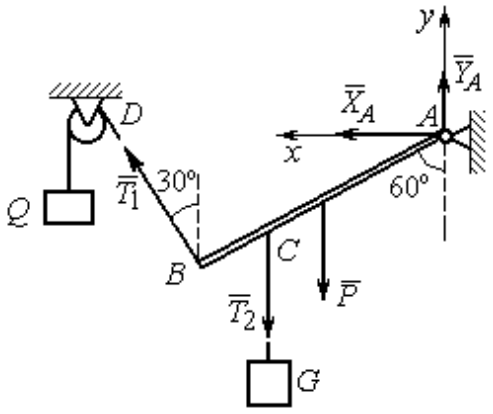


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1\cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку *A* и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра *A* имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1\ell + T_2\frac{3}{4}\ell\cos 30^\circ + P\frac{1}{2}\ell\cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз *Q*, по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз *G*, численно равна весу груза *G*: $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q\cdot 0{,}5 = 0,\ Y_A + Q\cdot 0{,}866 - 300 = 0,\ -Q + 173{,}2 = 0.$$

Решая систему, найдём Q = 173,2 кН, X_A = – 86,6 кН, Y_A = 150,01 кН.

Задача 8. Рама *ACE* (рис. 1.25, *а*) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара сил с моментом *M* = 8 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке *AB* нагрузка интенсивностью *q* =2 кН/м.

В точке *E* под прямым углом к отрезку *CE* рамы прикреплен трос, переброшенный через блок и несущий груз P = 20 кН.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если a = 2 м.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы *ACE*. Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.25, *b*.

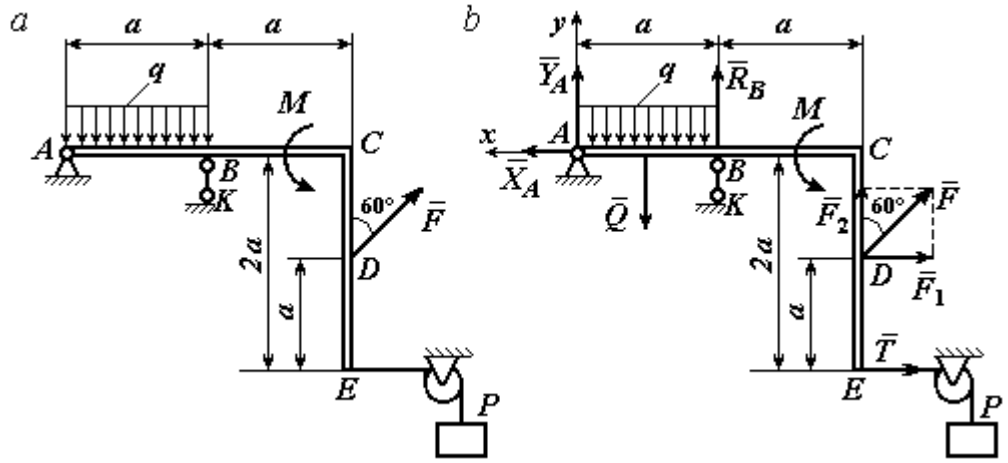


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
a – конструкция и нагрузка рамы; *b* – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси *Ax* и вертикальной *Ay*. Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Действие груза *P* на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой равен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и численно равна: $Q = qa$ = 2·2 = 4 кН. На рис. 1.25, *b* показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры *BK* выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы *ACE* действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M$) ~ 0. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *Ax*, *Ay*, первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0. \qquad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира *A*, проходят через центр *A*, плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, *b*). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы *F* на оси координат: $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра *A* равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра *A*: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0{,}5a + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0. \quad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B. Решая эту систему, найдем: X_A = 28,66 кН; Y_A = 59,66 кН; R_B = – 60,66 кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры *A* – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама *ABCED* (рис. 1.26) в точке *A* закреплена жёсткой заделкой. В точке *E* к раме прикреплена нить, составляющая угол 60º к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом *P* = 15 кН. На раму действуют: пара сил с моментом *M* = 12 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *C* под углом 30° к горизонтальному участку рамы *BE*, и равномерно распределенная на отрезке *BC* нагрузка интенсивностью *q* = 2 кН/м. В точке *D* под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

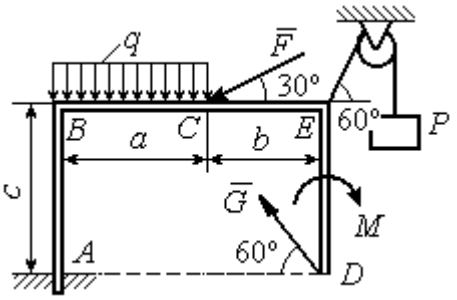


Рис. 1.26. Конструкция рамы

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке *A*, если размеры рамы: *a* = 2 м, *b* = 1 м, *c* = 5 м.

Решение

Объектом равновесия является рама *ABCED*. Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке *A* и нить, натянутая грузом *P*. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке *A* в виде силы, которую представим двумя ее составляющими – $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная

к раме в точке *E*, направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ риложена в середине отрезка *AB* и численно авна: $Q = qa = 4$ кН.

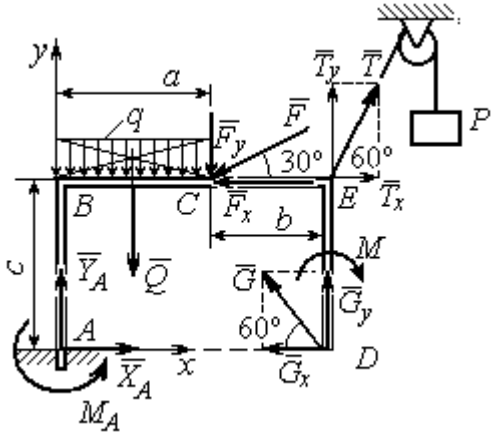


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Действующие на раму силы составляют равновешенную произвольную плоскую истему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия для такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - G\cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F\cos 60^\circ + T\cos 30^\circ + G\cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F\cos 30^\circ$, $F_y = F\cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра *A* равно *c* (как длина перпендикуляра, проведённого из центра *A* на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние *a*. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a.$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G\cos 30^\circ \cdot (a+b)$; $M_A(\vec{T}) = -T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

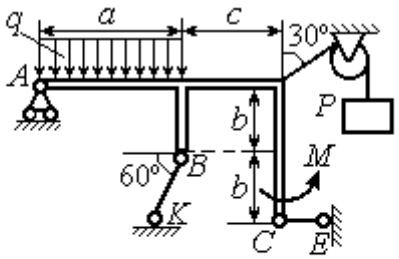
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a - T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b) +$$

$$+ G\cos 30^\circ \cdot (a+b) - Q\frac{a}{2} - M + M_A = 0. \qquad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A, откуда найдём значения реакций: $X_A = 11{,}16$ кН; $Y_A = -21{,}31$ кН; $M_A = -70{,}73$ Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 24{,}05$ кН.

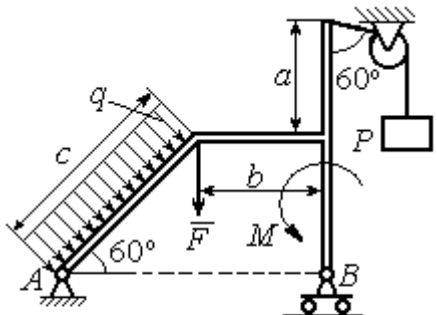
Упражнения

Упражнение 1.1



$a = 3$ м, $b = 1$ м, $c = 2$ м,
$P = 15$ кН, $M = 3$ кНм, $q = 5$ кН/м.
Найти реакцию стержней BK, CE
и реакцию шарнира A

Упражнение 1.2

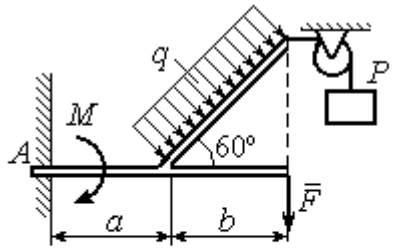


$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 3$ м,
$M = 3$ кНм, $q = 3$ кН/м,
$P = 2$ кН, $F = 4$ кН.
Найти реакцию шарниров A и B

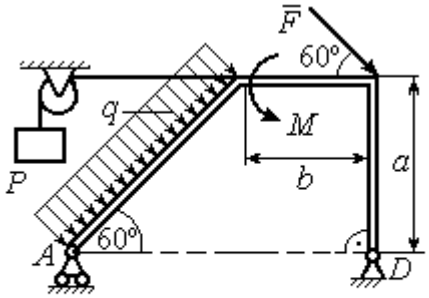
Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3

Упражнение 1.4



$a = 1$ м, $b = 2$ м, $F = 2$ кН,
$P = 3$кН, $M = 3$ кН·м,
$q = 2$ кН/м
Найти реакцию жесткой заделки



$a = 3$ м, $b = 1$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН,
$M = 3$ кН·м, $q = 2$ кН/м.
Найти реакцию шарниров A и D

Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. **При этом реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом Q = 100 кН опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB. На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30º к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом G = 80 кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60º к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B, а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P. Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P, удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB ℓ = 6 м, радиус диска r = 1 м.

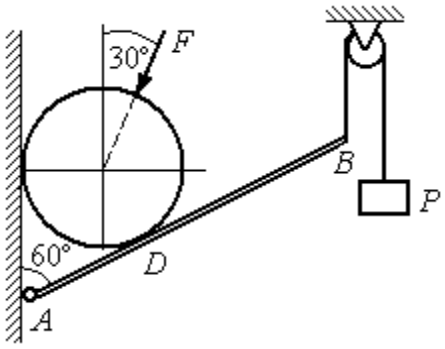


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

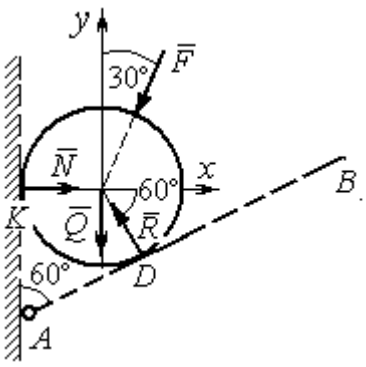


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

$$\sum F_{kx} = -F\cos 60^\circ - R\cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F\cos 30^\circ + R\cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A, (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P, и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ противоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей.

Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

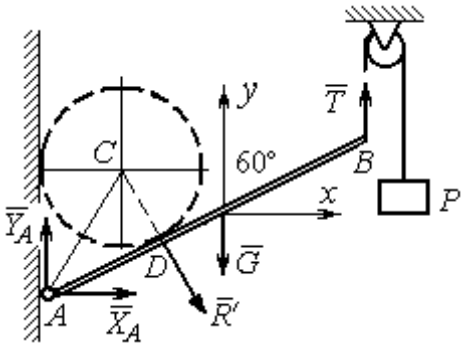


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку *A* центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R'\cos 60^\circ = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R'\cos 30^\circ - G + T = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + T\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{1.10}$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки *AB* уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: R = 165,47 кН; N = 107,74 кН; P = 95,26 кН; X_A = – 82,73 кН; Y_A = 128,03 кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

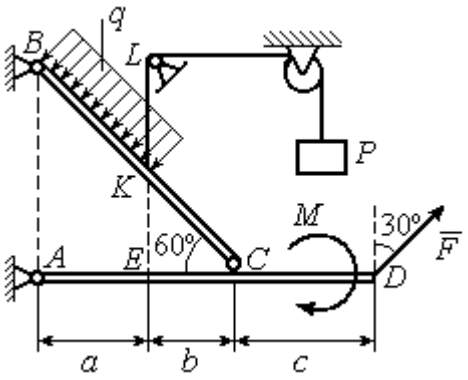


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки *AD*, прикрепленной к вертикальной стене в точке *A*, и откоса *BC*, соединённого с балкой *AD* в точке *C* под углом 60º и прикреплённого к вертикальной стене в точке *B* (рис. 1.33). Все соединения шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* под углом 30º к вертикали и равная по модулю F =10 кН, пара сил с моментом M = 8

кН·м и равномерно распределенная на отрезке *BK* нагрузка интенсивностью q = 3 кН/м. В точке *K* к балке *BC* прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом P = 5 кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров *A*, *B* и *C*, если a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м, а на отрезке *KL* нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки *BC* и балки *AD*. Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

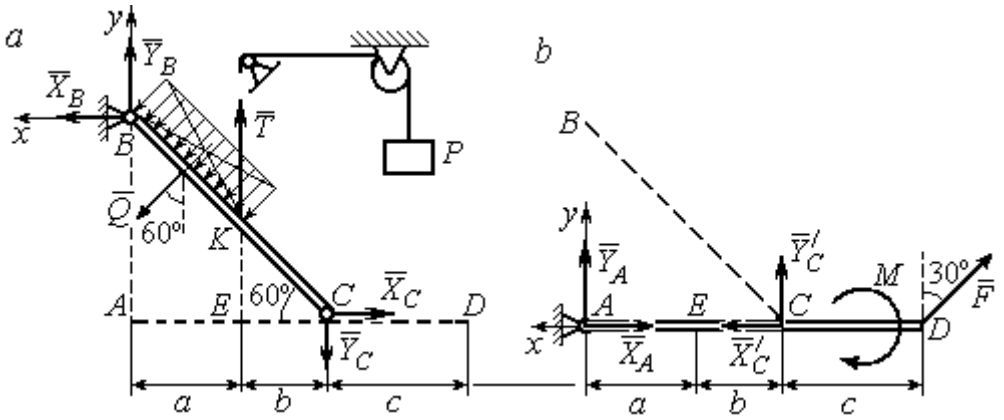


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кронштейна:
a - силы, действующие на балку *BC*; *b* - силы, действующие на балку *AD*

На рис. 1.34, *a* показаны реакции внешних и внутренних связей балки *BC* : реакция $\vec{R}_B$ шарнира *B*, реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T = P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакции шарниров *B* и *C* представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка *BK* (см. рис. 1.34, *a*) и численно равной $Q = q \cdot BK = q \cdot \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил ($\vec{Q}$, $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}$), действующая на балку *BC*, является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат

xBy, как показано на рис. 1.34, *а*, и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $AB = (a+b)\mathrm{tg}60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки *AD* (рис. 1.34, *b*).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира *A* и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, *b* реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат *xAy* как показано на рис. 1.34, *b*, и составим уравнения равновесия балки *AD*, вычисляя моменты сил относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \tag{1.15}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \tag{1.16}$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$$X_A = 5{,}99 \text{ кН},\ Y_A = 5{,}99 \text{ кН},\ X_C = 10{,}99 \text{ кН},\ Y_C = -14{,}65 \text{ кН};$$

$$X_B = 0{,}6 \text{ кН},\ Y_B = -13{,}65 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8{,}47 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18{,}31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13{,}65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка *AB* с горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *LC* балки *AB*, а в точке *E* опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил с моментом $M = 5$ кН·м. Определить реакцию жесткой заделки *A* и реакции шарниров *C* и *E*, если параметр *a*, определяющий размеры конструкции, равен $a = 2$ м.

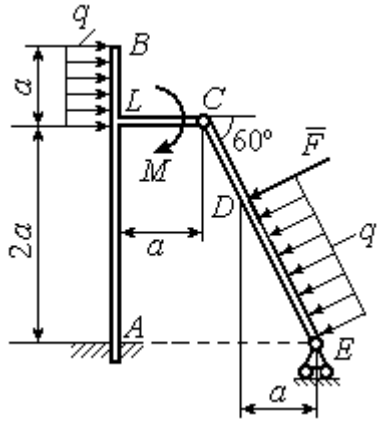


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

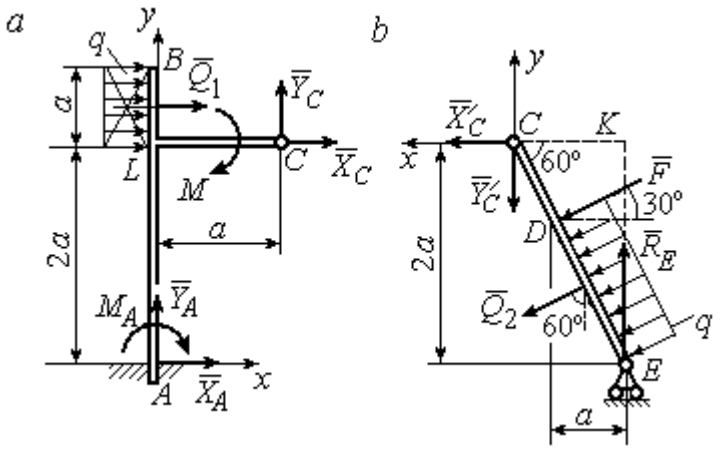


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку *AB*;
b - силы и реакции связей, действующие на балку *CE*

Разделим систему на две части по шарниру *C* и рассмотрим равновесие балок *ABC* и *EC* отдельно.

Рассмотрим балку *ABC* (рис. 1.36, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, численно равной $Q_1 = qa = 4$ кН. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом *M* и реакции связей – жёсткой заделки в точке *A* и шарнира *C*.

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_A. Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a,* и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \tag{1.17}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \dfrac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8$ кН. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a, b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b*, и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 0. \tag{1.21}$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

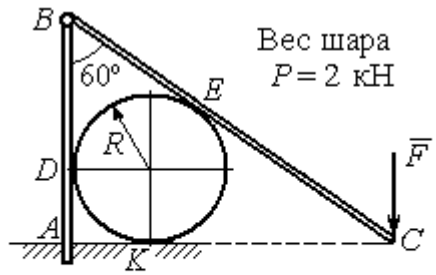
$$X_A = 11{,}59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2{,}76 \text{ кН}; \quad M_A = 42{,}87 \text{ кН·м};$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2{,}76 \text{ кН}; \quad R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91$ кН; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83$ кН.

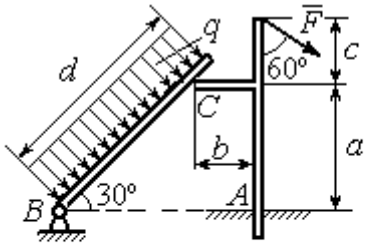
Упражнения

Упражнение 1.5



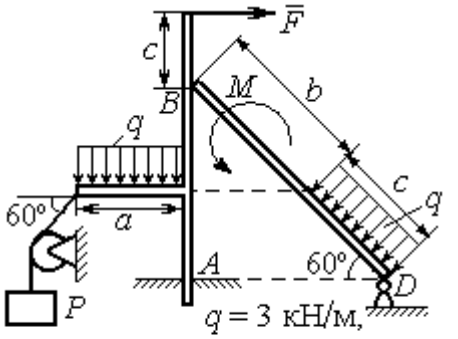
$R = 1$ м, $F = 8$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B, реакцию опоры шара в точках D, K, E

Упражнение 1.6



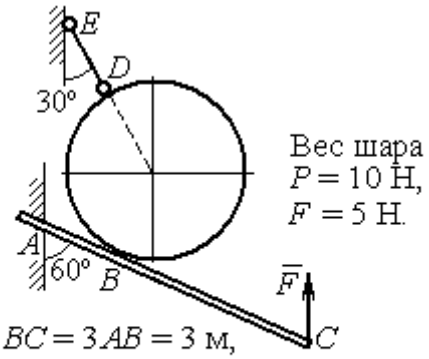
$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $d = 5$ м,
$q = 3$ кН/м, $F = 4$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Упражнение 1.7



$F = 4$ кН, $P = 3$ кН, $M = 2$ кН·м,
$a = 2$м, $b = 3$м, $c = 1$м
Найти реакцию заделки A, шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



Найти реакцию жесткой заделки A, реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси *z*:

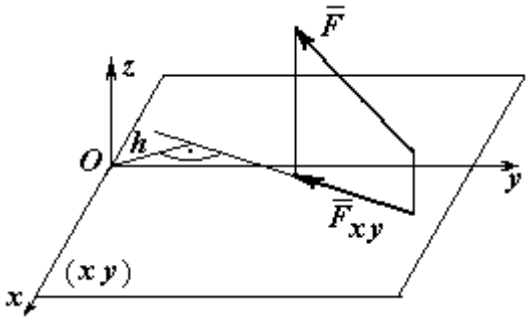


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy, перпендикулярной оси z; $\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O. Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, k = 1, 2, ...

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив *B* радиуса *R* и шкив *D* радиуса *r*.

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*.

Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива *D* по касательной в точке *L* параллельно плоскости *zCx*, так что радиус шкива *D*, проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30º.

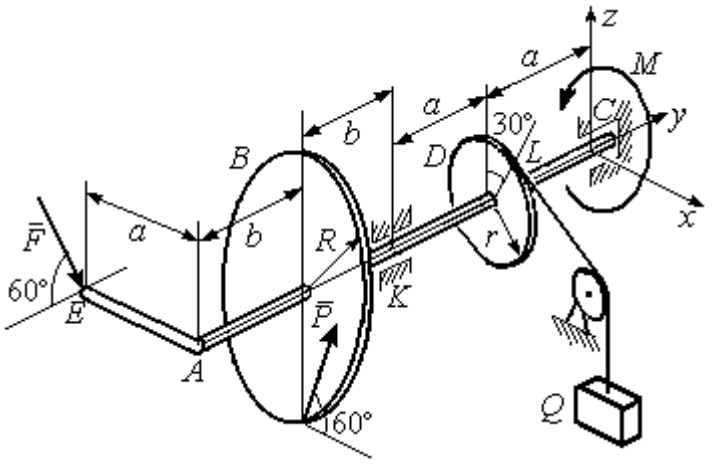


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива *B*, параллельна плоскости *zCx* и составляет угол 60° с направлением оси *Cx*. Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если P = 4 кН; F = 2 кН; M = 3 кН·м; R = 0,6 м; r = 0,3 м; a = 0,8 м; b = 0,4 м.

Решение

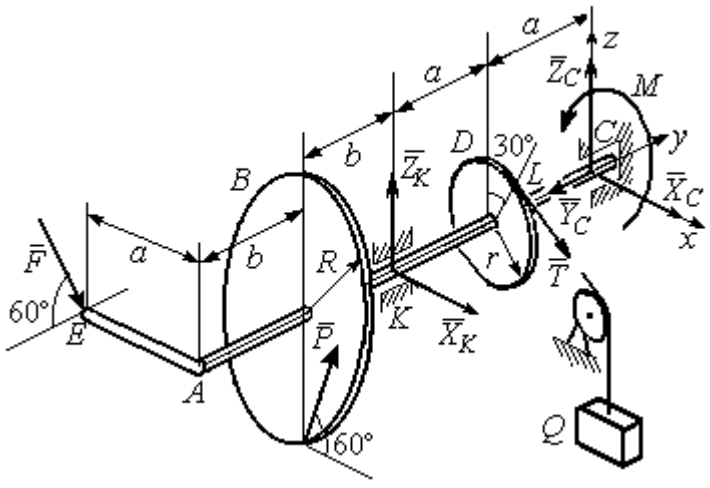


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора

$\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *L* и по модулю равна весу груза *Q*.

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

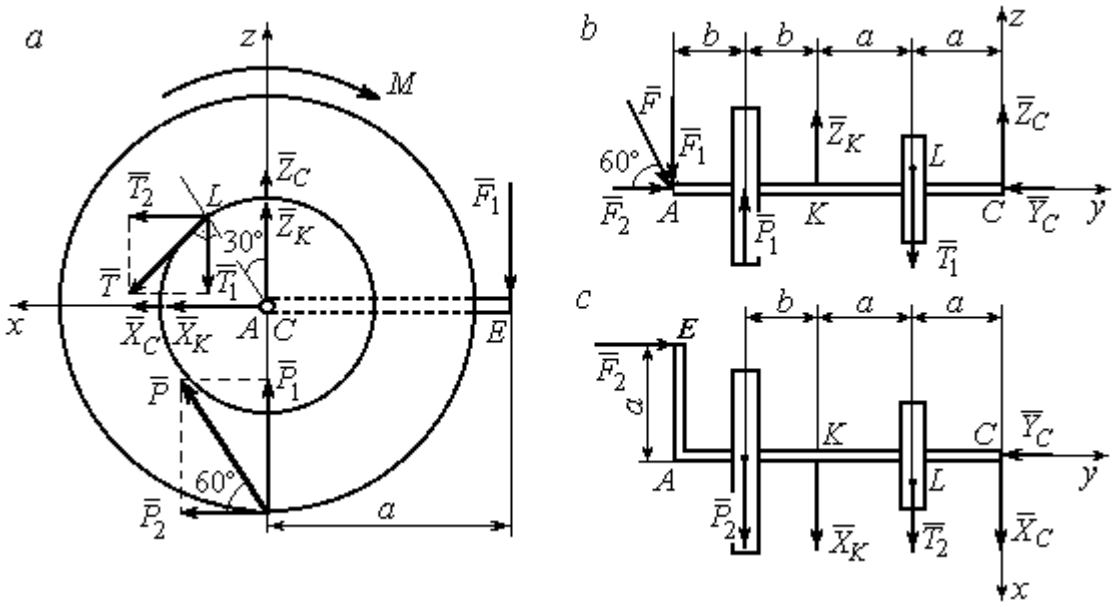


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*

На рис. 1.41, *a* показаны проекции вала и всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций сил относительно точки *C*, получим значения моментов этих сил относительно оси *y*. При вычислении моментов сил относительно оси *x* достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (рис. 1.41, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси *z* (рис. 1.41, *c*).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P\cos 30^\circ$; $P_2 = P\cos 60^\circ$; $T_1 = T\cos 60^\circ$; $T_2 = T\cos 30^\circ$; $F_1 = F\cos 30^\circ$; $F_2 = F\cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P\cos 60^\circ + X_K + T\cos 30^\circ + X_C = 0;\ \sum F_{ky} = F\cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P\cos 30^\circ + Z_K - T\cos 60^\circ + Z_C - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T\cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P\cos 30^\circ \cdot (2a + b) +$$

$$+ F\cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F\cos 30^\circ \cdot a - P\cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T\cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P\cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F\cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8{,}09 \text{ кН},\ Y_C = 1 \text{ кН},\ Z_C = 4{,}65 \text{ кН},\ Z_K = 2{,}92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10{,}02 \text{ кН},\ T = 18{,}6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9{,}4 \text{ кН},\ R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10{,}44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза Q равен реакции нити T.

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира A, подшипника B и удерживается в вертикальном положении стержнем CO, лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10$ кН, приложенная на верхней стороне плиты в точке H под углом 30° к линии EC, и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5$ кН, приложенная в точке D параллельно стороне AB. В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K, подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

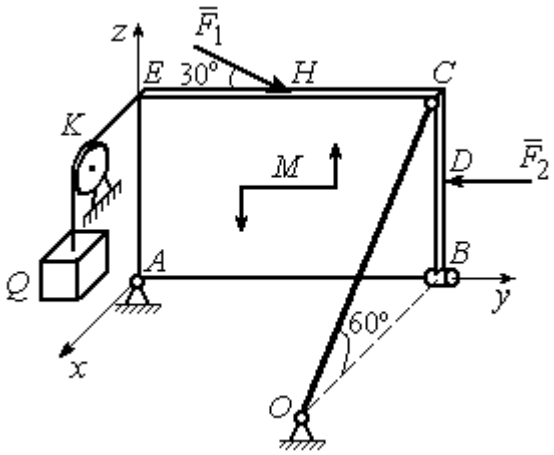


Рис. 1.42. Равновесие плиты

Определить реакции шарнира *A*, подшипника *B* и реакцию стержня *CO*, если ширина плиты *AB* = 3 м; высота *AE* = 2 м; *EH* = *HC*, *CD* = *DB*.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты *ABCE*. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир *A*, нить, натянутая грузом Q, подшипник *B* и невесомый стержень *CO*.

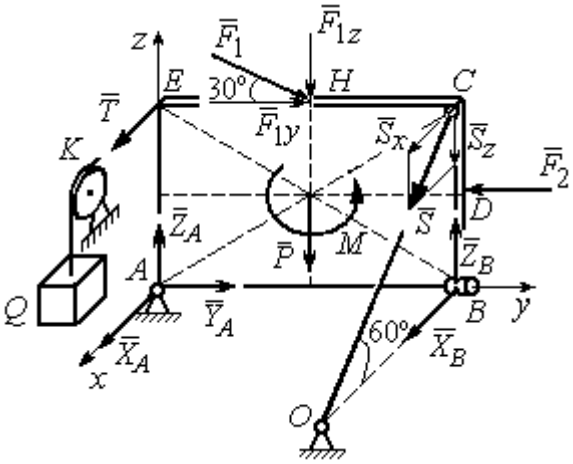


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси *Ax* и равна весу груза $T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника *B* расположена в плоскости, перпендикулярной оси *Ay*, и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня *CO* направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1\cos 60^\circ - P + Z_B - S\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -F_1\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - F_1\cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0{,}5 \cdot AB +$$

$$+ F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S\cos 30^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S\cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S\cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: S = – 40 кН; X_B = – 20 кН; Z_B = – 17,53 кН; X_A = 20 кН; Y_A = – 3, 66 кН; Z_A = 12,89 кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга *ACEB* весом P = 50 Н, закрепленная в точках A и B цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60º (рис. 1.44). На фрамуге в точке H закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок K, несёт груз Q. При этом линия верёвки HK параллельна прямой ED. На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке C перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине F = 15 Н.

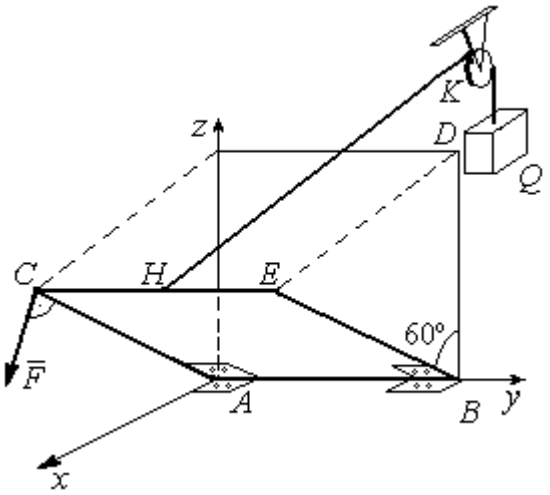


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза Q, необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров A и B, если размеры фрамуги $BE = BD$ = 2 м; AB = 3 м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги *ABCE*. Изображаем внешние активные силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира *A* и *B* (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом Q. Выберем систему координат *Axyz*, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров *A* и *B* раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось *Ay*), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

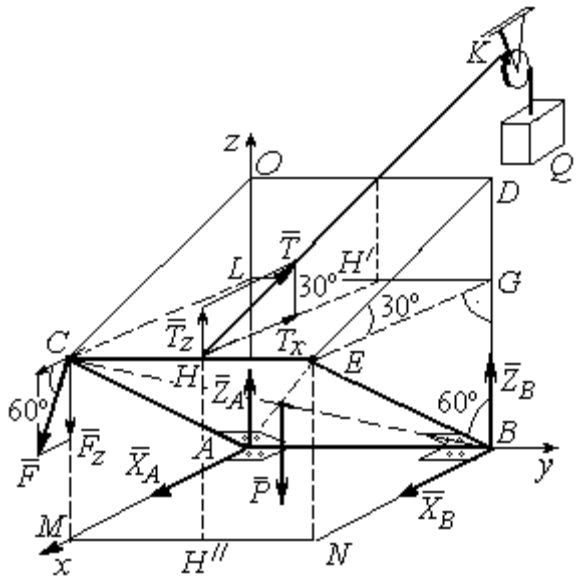


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси *Ax* определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость *zAy* относительно точки *A* – пересечения оси *Ax* и перпендикулярной ей плоскости *zAy* (см. рис. 1.46, *a*). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси *Az* достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость *xAy* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *b*).

Значения моментов сил относительно оси *Ay* получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость *zAx* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *c*).

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

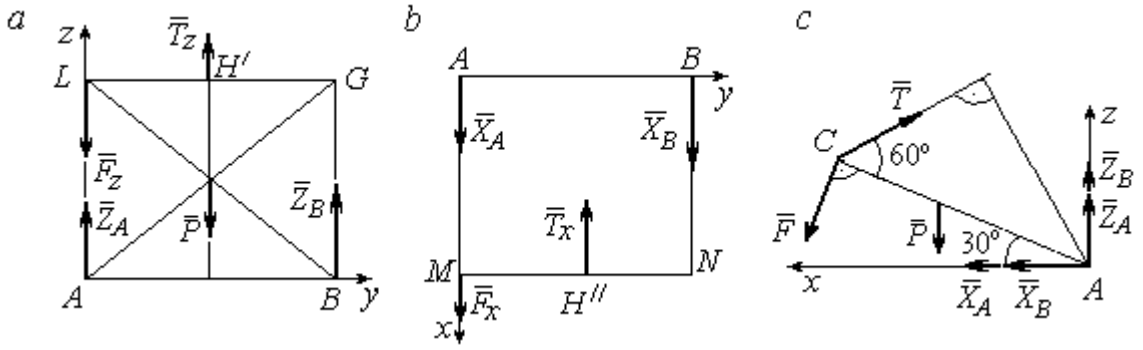


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:
a – проекция на плоскость *zAy* со стороны положительного направления оси *x*; *b* – проекция на плоскость *xAy* со стороны положительного направления оси *z*; *c* – проекция на плоскость *zAx* со стороны положительного направления оси *y*

$$X_A + X_B + F\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T_z \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = =$$

$$T\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0{,}5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18{,}22 \text{ Н},\ Z_B = 14{,}41 \text{ Н},\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23{,}31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10{,}83 \text{ Н},\ Z_A = 27{,}41 \text{ Н},\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29{,}47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42{,}37$ Н.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал *AD* (рис. 1.47) закреплен в подпятнике *A* и подшипнике *C*. Вал имеет шкив радиуса r и рукоять *DH*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *DH* образует угол 30º к направлению оси *Ax*. Колено вала расположено в горизонтальной плоскости *xAy*. Нить, удерживающая груз *Q*, намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}, \vec{P}, \vec{G}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ приложена в верхней точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси *Ay* и находится в плоскости z*Ay*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке *H* рукояти параллельно оси *Az*. Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке *K* стойки колена вала под углом 60º к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом *M* создаёт вращение вала вокруг оси *Ay*.

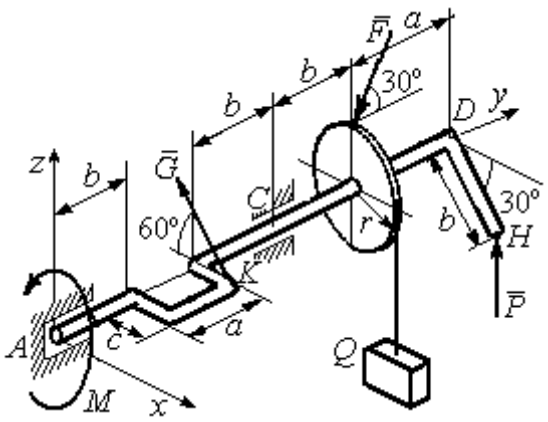


Рис. 1.47. Равновесие вала

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: P = 10 кН; F = 12 кН; G = 6 кН; M = 3 кН·м; r = 0,3 м; a = 0,8 м; b = 0,4 м; c = 0,2 м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *A* и подшипник *C*.

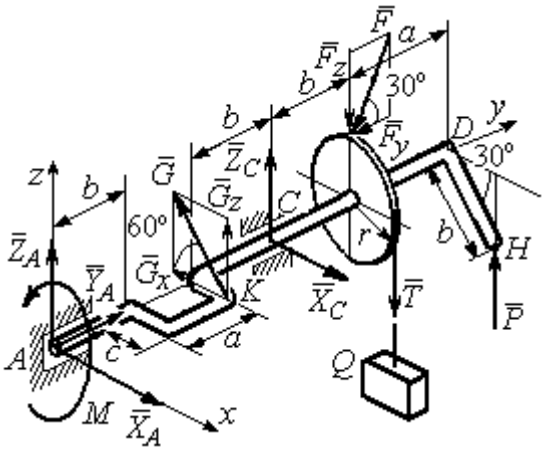


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляю-щие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей *Ax*, *Az*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G\cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G\cos 30^\circ + Z_C - F\cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r -$$

$$-T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb\cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G\cos 30^\circ$; $G_x = G\cos 60^\circ$; $F_z = F\cos 60^\circ$; $F_y = F\cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

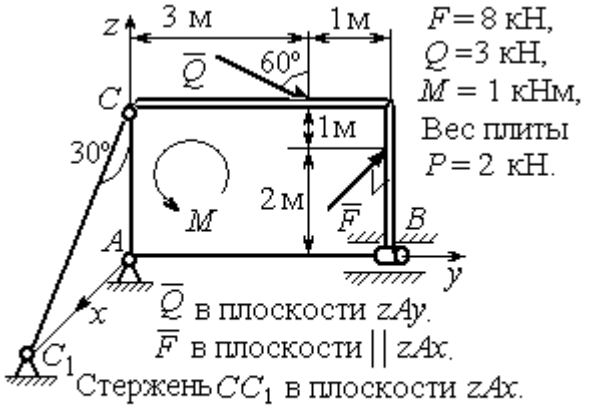
$$X_C = 2{,}25 \text{ кН};\ Z_C = 13{,}57 \text{ кН};\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0{,}39 \text{ кН};\ Y_A = 10{,}39 \text{ кН};\ X_A = 0{,}75 \text{ кН};\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10{,}42 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25{,}03$ кН.

Упражнения

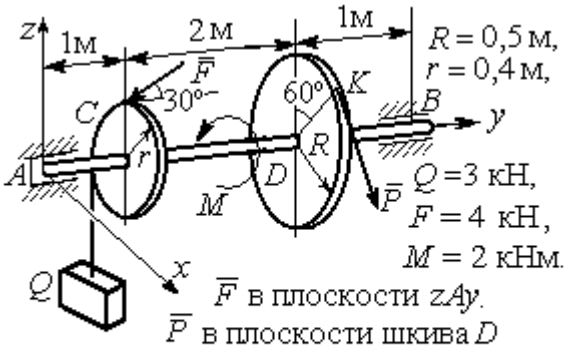
Упражнение 1.9



$F = 8$ кН,
$Q = 3$ кН,
$M = 1$ кНм,
Вес плиты $P = 2$ кН.

$\overline{Q}$ в плоскости zAy.
$\overline{F}$ в плоскости $\| zAx$.
Стержень CC_1 в плоскости zAx.
Найти реакцию шарнира A, реакцию подшипника B и реакцию стержня CC_1

Упражнение 1.10



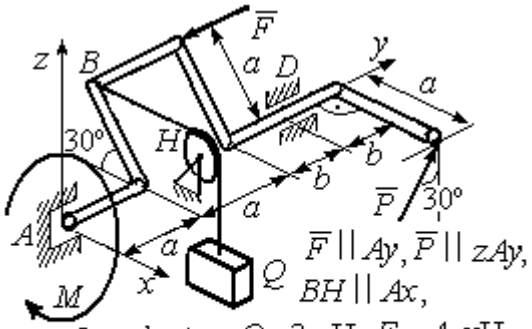
$R = 0{,}5$ м,
$r = 0{,}4$ м,
$Q = 3$ кН,
$F = 4$ кН,
$M = 2$ кНм.

$\overline{F}$ в плоскости zAy.
$\overline{P}$ в плоскости шкива D и направлена по касательной в точке K.
Найти реакцию подпятника A, подшипника B и уравновешивающую силу P

Упражнение 1.11

$\overline{P}$ направлена по касат. к шкиву в точке K.
$\overline{F}$ в плос-ти zAy.
Нить сходит со шкива $\|$ оси Ay.
$a = 1$ м, $b = 2$ м,
$R = 0{,}5$ м, $r = 0{,}4$ м,
$Q = 3$ кН, $F = 4$ кН,
$M = 2$ кНм.
Найти реакцию Q подпятника A, подшипника B и уравновешивающую силу P

Упражнение 1.12



$\overline{F} \| Ay$, $\overline{P} \| zAy$,
$BH \| Ax$,
$a = 2$м, $b = 1$м, $Q = 3$ кН, $F = 4$ кН,
$M = 2$ кНм. Найти реакцию подпятника A, подшипника D и уравновешивающую силу P

Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**. Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

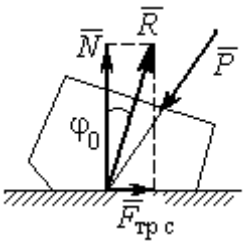


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$ смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально.

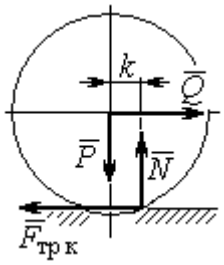


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент, создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$. Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном

положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой ($\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q}$) (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q, а к другому, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом P. Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30º к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P, при которых груз Q может начать скольжение по плоскости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0{,}4$.

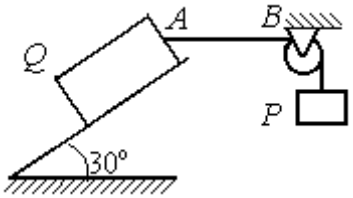


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P. На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, *а*). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравновешивающего груза *P* имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз *Q* начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза *P*, направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *a*).

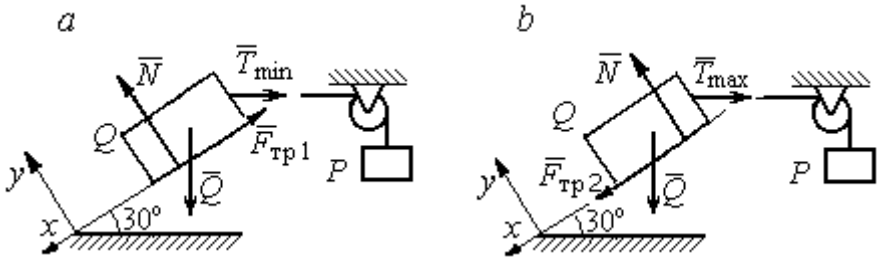


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
a – минимальный вес уравновешивающего груза;
b – максимальный вес уравновешивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\min}\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\min}\cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7{,}21$ Н. Минимальное значение веса уравновешивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7{,}21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза *Q* при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза *P*. На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, *b*).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза *P* больше максимального вызывает движение груза *Q* вверх по наклонной

плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза *Q*:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\max}\cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\max}\cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза *P*: $P_{\max} = T_{\max}$ = 63,54 Н.

Таким образом, груз *Q* будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравновешивающего груза находится в пределах 8,87 < *P* < 48,87 Н.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса *r* = 0,5 м, весом *P* = 50 Н удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец которой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом *Q* (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_{\text{к}}$ = 0,02 м. Наклонная плоскость составляет угол 30º с горизонтом.

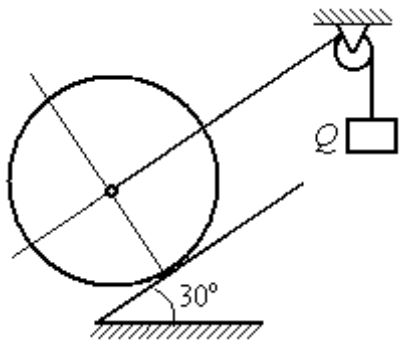


Рис. 1.54. Равновесие катка

Определить наименьшую и наибольшую величину веса *Q*, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{с}}$, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза *Q* . На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1, слева от нормального к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара ($\vec{N}$, $\vec{P}_y$) должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

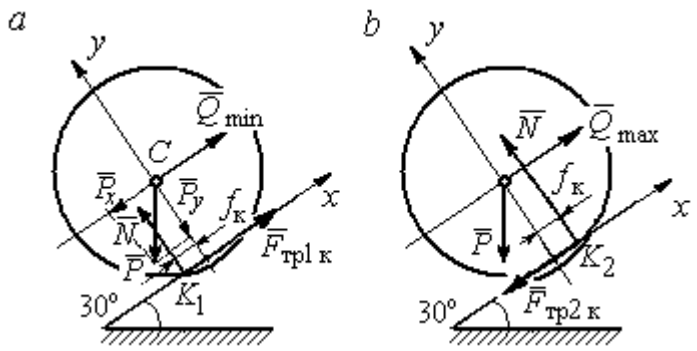


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

На каток действует плоская уравновешенная система сил ($\vec{Q}_{\min}$, $\vec{F}_{тр1\,к}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$) ∞ 0. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{тр1к} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P\cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P\cos 30^\circ \cdot f_к = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min}$ = 7,68 Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости N = 43,3 Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{тр1к}$ = 17,32 Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка

приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил ($\vec{Q}_{\max}$, $\vec{F}_{\text{тр2 к}}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$) ∞ 0. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр2 к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P\cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42{,}32$ Н; $N = 43{,}3$ Н; $F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7{,}68 \le Q \le 42{,}32$ Н.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр с}}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр с}} > F_{\text{тр к}}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр с}} = f_{\text{с}} N = 43{,}3 f_{\text{с}}$, где $f_{\text{с}}$ – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр к}} = F_{\text{тр1 к}} = F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43{,}3 f > 17{,}32$, откуда $f > 0{,}4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота R = 0,5 м и r = 0,2 м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединённого цепью CD с концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота f = 0,4. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n, удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m, составляет 30°.

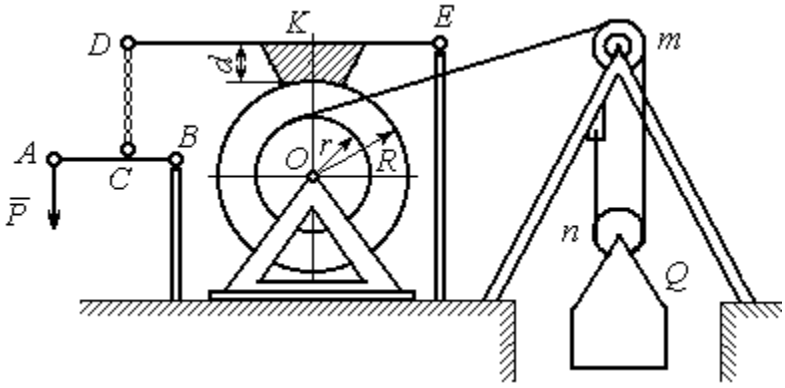


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

Определить величину силы $\vec{P}$, уравновешивающей груз Q, и реакции шарниров O и E, если вес ворота G = 140 Н, высота тормозной колодки d = 0,1 м, расстояния AB = 1 м, BC = 0,1 м; ED = 1,2 м; EK = 0,6 м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, *а*). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n.

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \qquad T''r_{бл} = T'r_{бл},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{бл}$ – радиус блока *n*. Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0{,}5Q = 500$ Н.

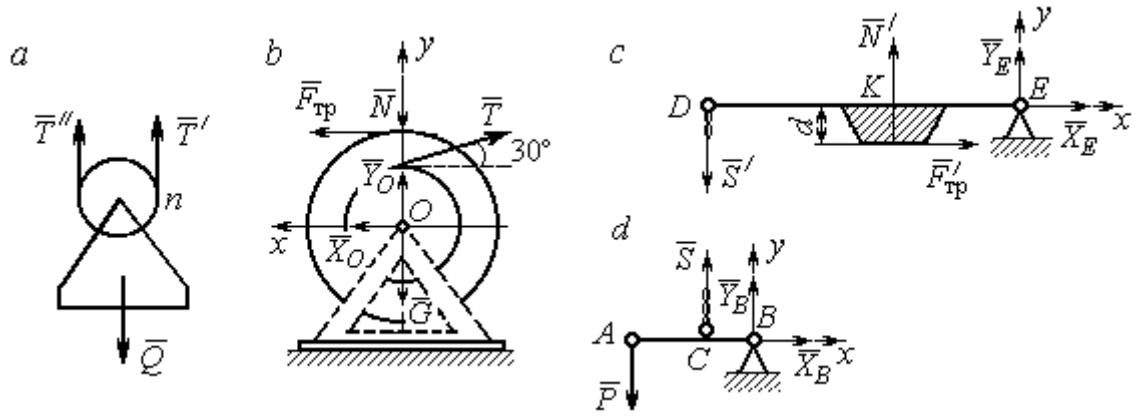


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
a – равновесие груза; *b* – силы, действующие на барабан; *c* – силы, действующие на тормозной рычаг *DE*; *d* – силы, действующие на рычаг *AB*

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира *O*, представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, *b*).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{G}$, $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}, \vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$) ~ 0. Составим уравнение моментов относительно точки *O*:

$$-Tr + F_{тр}R = 0,$$ откуда с учётом $T = T'$ $F_{тр} = 200$ Н.

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{тр} = f N$, тогда $N = \dfrac{F_{тр}}{f} = 500$ Н.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, *b*:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{тр} - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T\cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира *O*:

$$X_O = 233 \text{ Н};\ Y_O = 390 \text{ Н};\ R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454{,}3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага *DE* (см. рис. 1.57, *c*).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке *D* на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира *E*, разложенная на составляющие $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ вдоль осей *x*, *y*. Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200$ Н, $N' = N = 500$ Н, определим усилие S', с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира *E*:

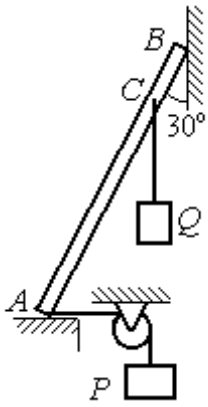
$$S' = 233{,}33 \text{ Н};\ X_E = -200 \text{ Н};\ Y_E = -266{,}67 \text{ Н};\ R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333{,}34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравновешивания груза *Q*, найдём рассматривая равновесие рычага *AB* (см. рис. 1.57, *d*) . На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира *B*, показанная на рис. 1.57, *d* составляющими $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки *B*: $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдем $P = 23{,}3$ Н.

Упражнения

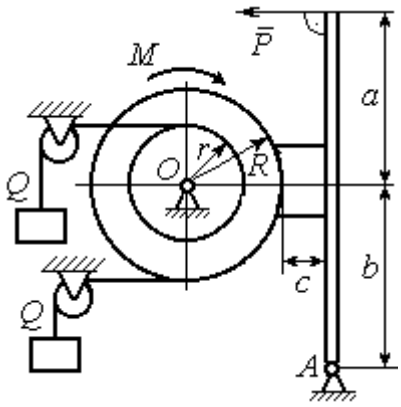
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0{,}2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30°. В точке C к стержню подвешен груз Q. Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P. В каких границах можно изменять вес груза P, не нарушая равновесия стержня?

$AB = 3$ м, $AC = 2$ м, $Q = 200$ Н.

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r. На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q. К шкиву приложена пара сил с моментом M. Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0{,}4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравновешивающую шкив. Найти реакцию шарнира A.

$a = b = 1$ м; $c = 0{,}1$ м; $Q = 100$ Н; $M = 120$ Н·м;
$R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}2$ м.

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

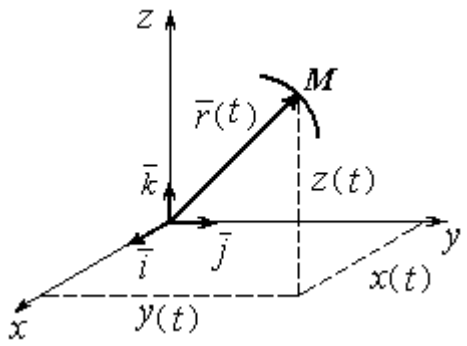


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x, V_y, V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки**,** или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x, a_y, a_z проекций вектора ускорения на координатные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$;

$a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$; $a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

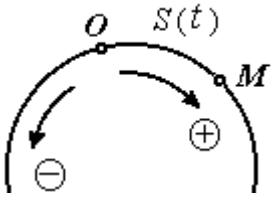


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось *n*):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau,\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

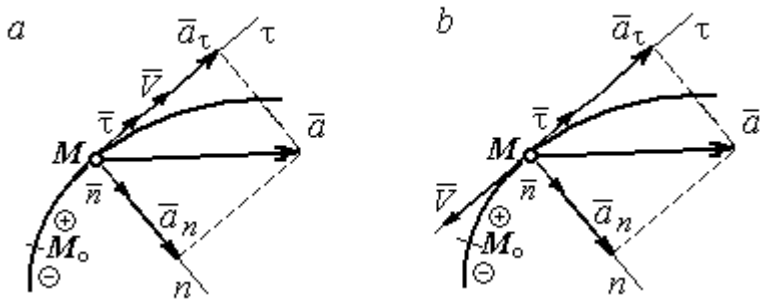


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: V_τ = const.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: a_τ = const.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где *x*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени t_1 = 0,25 с, t_2 = 0,75 с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

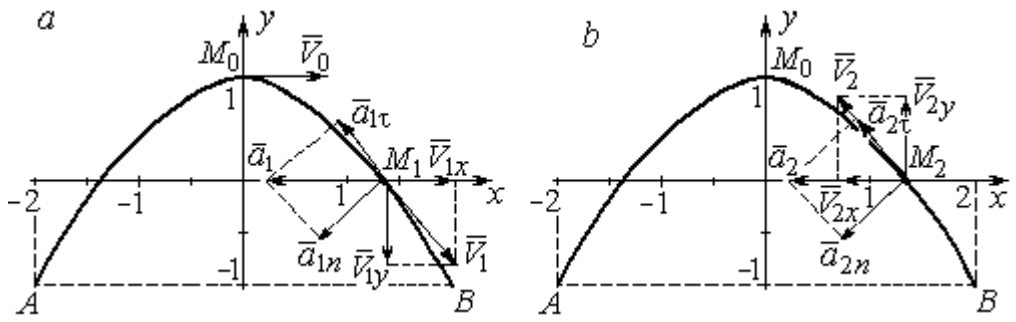


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к *B*;
b – ускоренное движение точки на участке от *B* к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени t_1 = 0,25 с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1:

$$x_1 = x(0{,}25) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0{,}25) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t; \; V_y(t) = \dot{y} = -2\pi\sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0{,}25) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0{,}25) = -2\pi\sin\frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x}, a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin \pi t\,;\; a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t\,;$$

$$a_{1x} = a_x(0{,}25) = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\; a_{1y} = a_y(0{,}25) = -4\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2\sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0{,}25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, *а*.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, *а*). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0{,}75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1:

$$x_2 = x(0{,}75) = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см};\; y_2 = y(0{,}75) = \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0{,}75) = 2\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с};\; V_{2y} = V_y(0{,}75) = -2\pi\sin 2\pi\frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0{,}75) = -2\pi^2 \sin\frac{3\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\; a_{2y} = a_y(0{,}75) = -4\pi^2 \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0{,}75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с};\;\; a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени t_2 = 0,75 с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 (t_0 = 0) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения *B* на траектории (t_B = 0,5 с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 (t_{M_0} = 1 с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса *R* = 1 км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0, где поезд выходит на закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты *S*. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

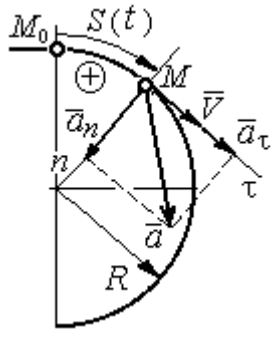


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: a_τ = const. Так как $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную ось. Далее, поскольку $V_\tau = \dfrac{dS}{dt}$, имеем

$S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = = 54$ км/ч = 15 м/с. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: $C_1 = 15$ м/с; $C_2 = 0$.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t .$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь $S = 500$ м. Подставляя это условие во второе уравнение, получим $a_\tau = 7$ м/с^2. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения $V_\tau = 85$ м/с. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса $R = 1000$ м в момент времени $t = 10$ с равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R} = 7{,}23$ м/с^2. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 10{,}06$ м/с^2. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса $R = 80$ м. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной $V_0 = 18$ км/ч до конечной $V_1 = 9$ км/ч.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь $S = 60$ м.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t\,;\;\; S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2{,}5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м. Получим систему:

$$-2{,}5 = a_\tau t_1;\;\; 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0{,}16$ м/с^2.

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0{,}31$ м/с^2.

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0{,}35$ м/с^2. В конце движения нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}08$ м/с^2. Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0{,}18$ м/с^2.

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ, при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: ω_z = const. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: ε_z = const. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела **(**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от этих точек до оси вращения: $\dfrac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \dfrac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

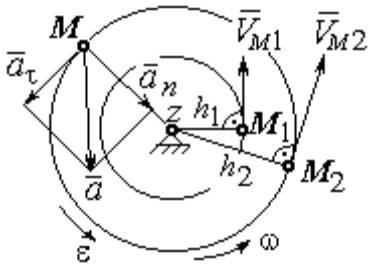


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторону, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

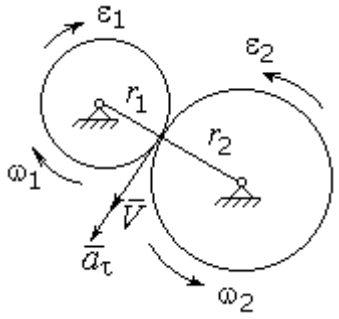


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси z происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1$ = 2 мин = 120 с; φ_1 = 3600 об = 7200π рад. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: r_2 = 6 см, r_3 = 10 см, r_4 = 4 см.

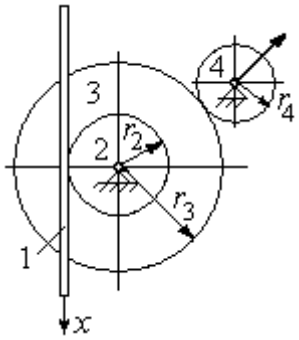


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси *x* (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось *x* $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2: $\omega_{2z} = \dfrac{V_{1x}}{r_2} = \dfrac{4\pi\cos\pi t}{6} = \dfrac{2\pi}{3}\cos\pi t$ рад/с. Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одного тела другому: $\dfrac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \dfrac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \dfrac{V_{1x} r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{5\pi}{3}\cos\pi t$ с$^{-1}$. Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с

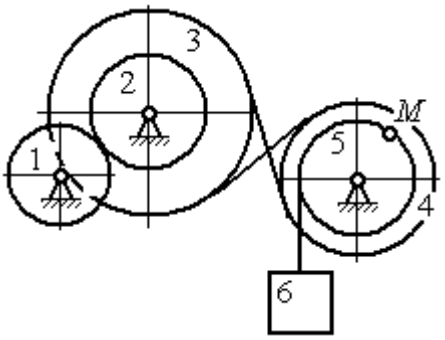


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1.

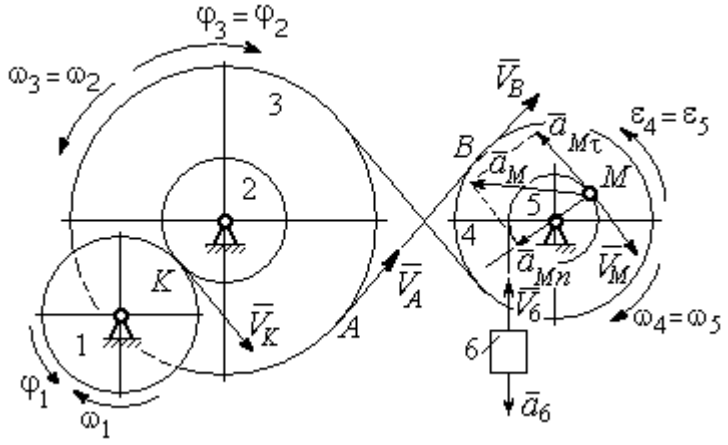


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1. Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1.

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта *K*. Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3 = \omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2.

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки *A*, где ремень сходит со шкива 3, и до точки *B*, где ремень набегает на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек *A* и *B* равны: $V_A = V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3 = \omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5 = \omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4.

Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_5 r_5$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4} = 5$ рад/с и $V_M = 20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке *M* и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки *M*: $V_6 = V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1 = 1$с груз поднимается со скоростью $V_6 = 20$ см/с.

Определим ускорение точки *M*. Вектор ускорения точки *M* равен сумме векторов: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5: $\omega_{5z} = \dfrac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25$ рад/с. Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20$ рад/с^2. Так как в момент времени $t_1 = 1$ с знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5$ рад/с $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$ $\varepsilon_{5z} = +20$ рад/с^2), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5.

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = 5$ рад/с и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^{\,n} = 100$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^{\,n}$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128{,}06$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^{\,n}$ и $\vec{a}_M^{\,\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos\pi t + \sin\pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси *x*. Положительное направление движения задаётся направлением оси *x* (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi\sin\pi t + \pi\cos\pi t$.

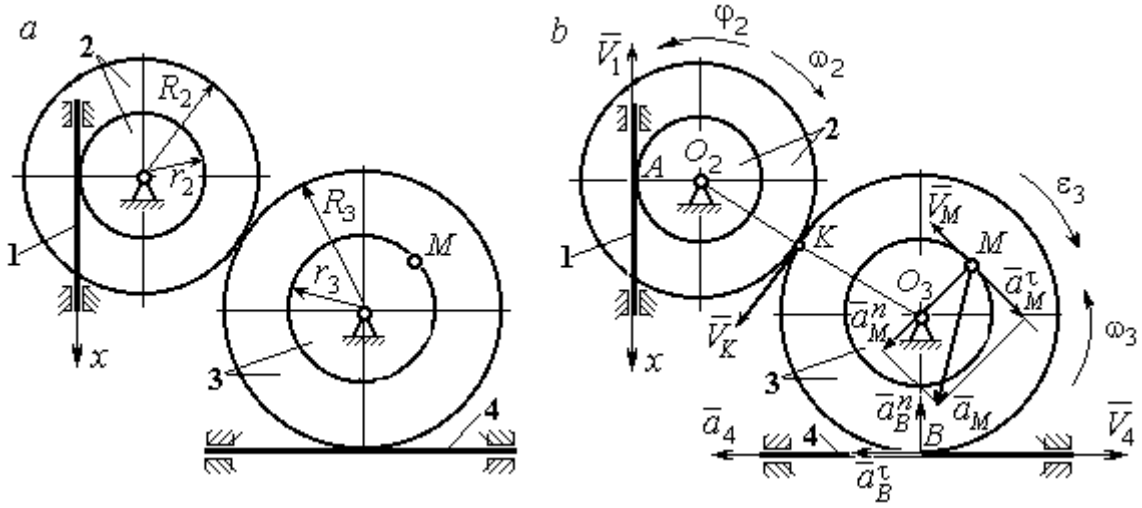


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей
и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_2.

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке *K*. Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_3.

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки M в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки B касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки M. Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 $(\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}; \varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2})$ показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис 2.11, *b* направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3.

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^\tau = 2\pi^2$ см/с^2. Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^\tau$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, *b*).

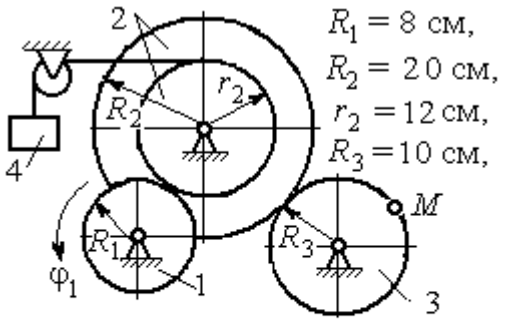
Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M: $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \pi^2\sqrt{5}$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^\tau$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^\tau = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с^2. Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B.

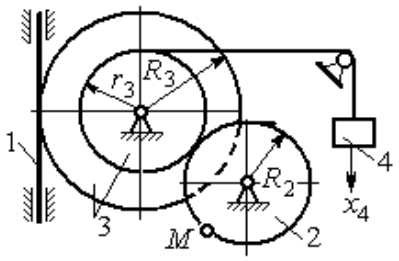
Упражнения

Упражнение 2.1



$\varphi_1 = 3t + 2\sin\frac{\pi t}{2}$ рад,
Найти скорость и ускорение точки M и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2



$R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}3$ м,
$x_4 = t - 1 - \sin\frac{\pi t}{3} + \cos\frac{\pi t}{3}$ м.
Найти скорость и ускорение точки M и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

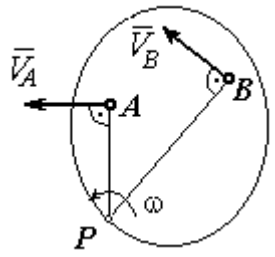
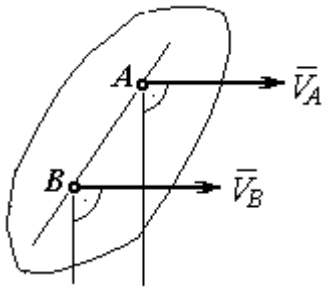
Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

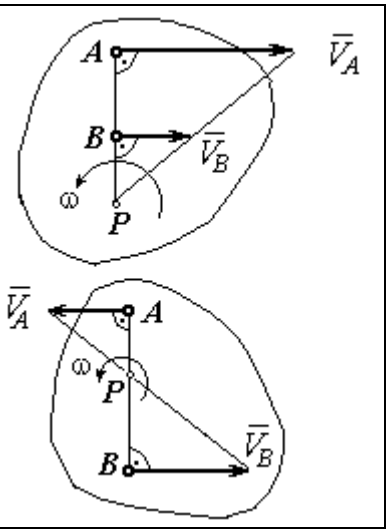
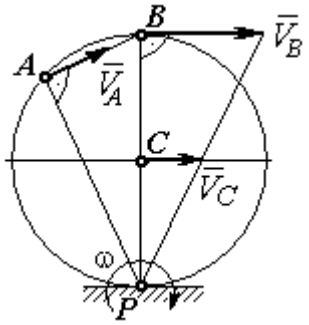
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A\cos\alpha = V_M\cos\beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью ω_{O_1C} = 2 рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа. Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC, коромысла AB и штока AD, если O_1C = 20 см, $OB = 2 \cdot OA$ = 40 см, AD = 60 см.

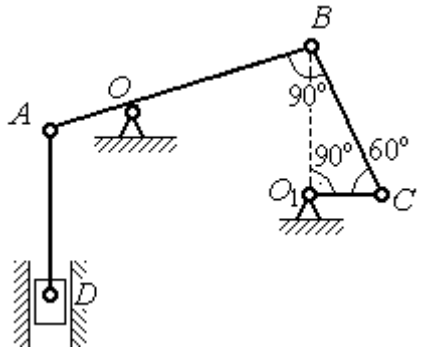


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C, в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O, параллельно оси вращения кривошипа. Скорость точки B направлена перпендикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

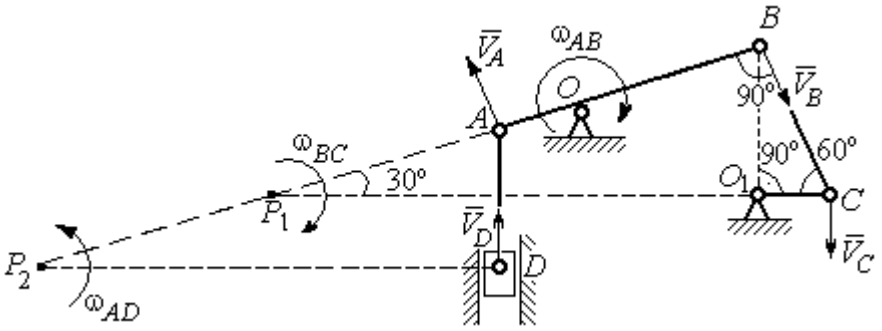


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_1} = 0{,}5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC. Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB}.

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B: $V_A = \frac{1}{2}V_B$ = $10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD. Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD}.

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA, вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

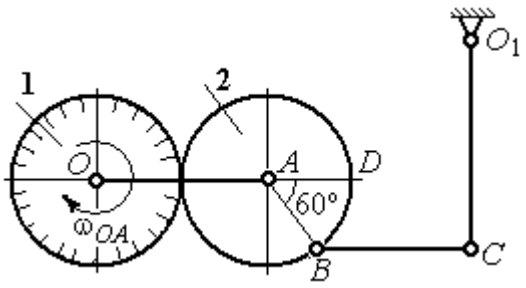


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC, коромысла CO_1, а также скорости точек A, B, C, D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2}$ = 4 рад/с. Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2.

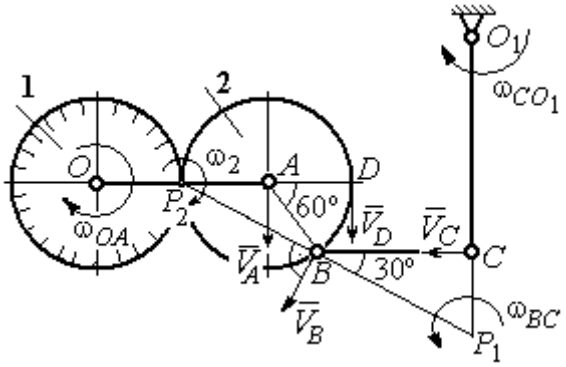


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ}$ = $6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = $24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D: $V_D = \omega_2 \cdot P_2D$ = 48 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1. Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1, которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC. Расстояние $P_1B = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ}$ = $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = $\dfrac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость точки C: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C$ = $\dfrac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC.

Угловая скорость коромысла CO_1: $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C}$ = $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип *OA* длиной *OA* = 25 см вращается вокруг неподвижной оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью ω_{OA} = 3,6 рад/с. На конец *A* кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса r_1 = 45 см, соосным с кривошипом *OA* и вращающимся с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. Шатун *BC*, шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке *B*, приводит в движение кривошип CO_1. Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна *BC* и кривошипа CO_1, скорости точек *A, B, C* в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна *BC* = 100 см, длина кривошипа CO_1 = 50 см.

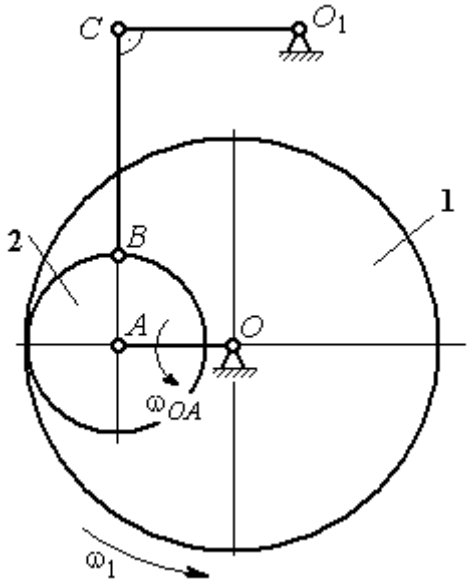


Рис. 2.17. Планетарный механизм

Решение

Найдём скорости точек *A* и *D*

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу *OA* в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу *OD* колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки *A* и *D*, и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек *A* и *D* Расстояние P_2D от центра скоростей до точки *D* находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда P_2D = 20 см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \dfrac{V_D}{P_2 D} = 2{,}25$ рад/с. Направление угловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2.

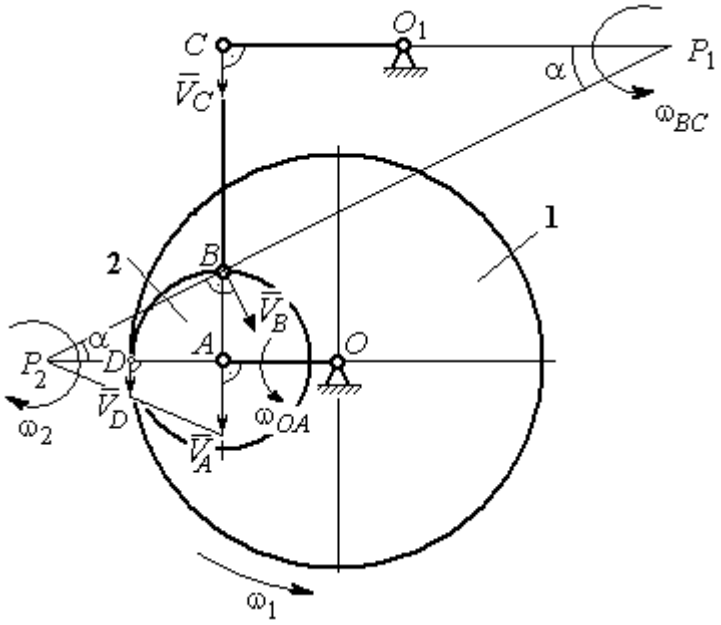


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Скорость точки *B,* которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна *BC*. Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC: $P_1B = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha = \dfrac{AB}{P_2B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $P_1B = 100\sqrt{5}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1 B} = 0{,}45$ рад/с. Скорость точки *C* шатуна *BC* найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек *C* и *B* на линию, проходящую через эти точки Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos\alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1 C} = 1{,}8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA}. На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2. Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC, закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C. Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A, B, C и угловые скорости шатуна BC, шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

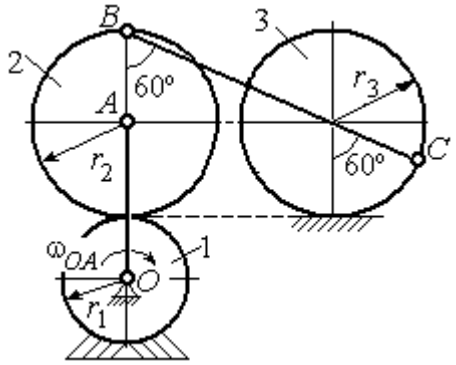


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA =$ 48 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

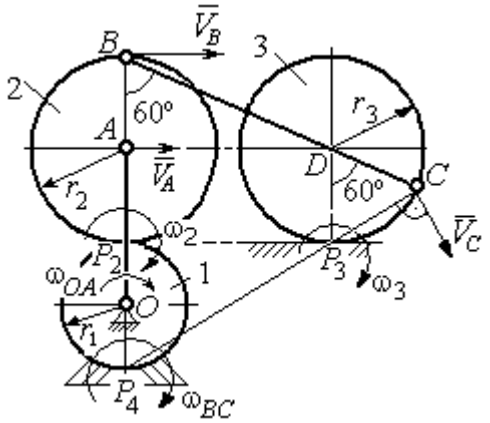


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} =$ 6 рад/с.

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 =$ 96 см/с.

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C. По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC, вращаясь вокруг неподвижной оси O, приводит в движение два шатуна CD и CE, присоединённых к кривошипу в точке C. Шатун CE прикреплён в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплён ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

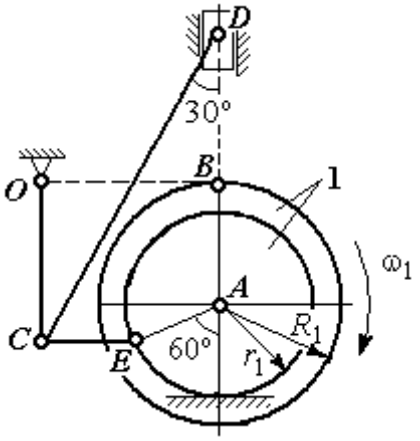


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A, E, C, D и угловые скорости диска 1, шатунов CE, CD и кривошипа CO, если известна скорость точки B на ободе диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

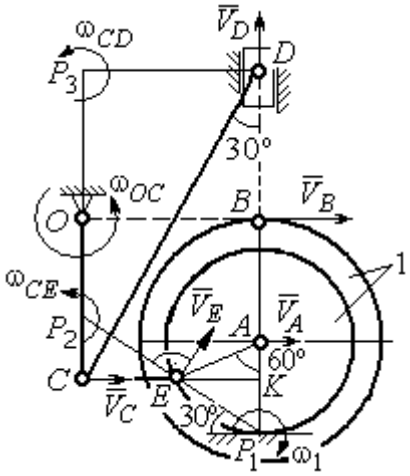


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1}$ = 2 рад/с. Скорость точки A $V_A = \omega_1 \cdot AP_1$ = 4 см/с. Скорость точки E $V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны, соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E. Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

Расстояние $EP_2 = \dfrac{EC}{\cos 30^\circ}$ = 4,62 см. Угловая скорость шатуна CE $\omega_{CE} = \dfrac{V_E}{EP_2}$ = 0,86 рад/с. Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E, на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой ω_{CE}. Скорость точки C шатуна CE $V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \dfrac{V_E}{2} = 2$ см/с.

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ =$ 4 см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \dfrac{V_C}{OC} = 0{,}5$ рад/с.

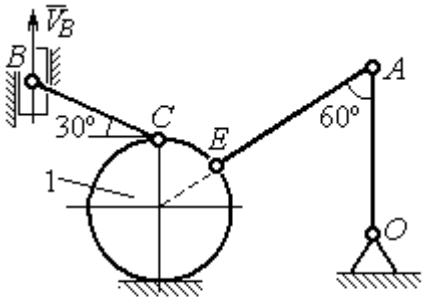
Для шатуна *CD* известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки *C* и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки *D*. Мгновенный центр скоростей шатуна *CD* находится в точке P_3, полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK =$ $(CE + r_1 \cos 30^\circ)\operatorname{ctg} 30^\circ =$ 9,92 см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна *CD:* $\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}21$ рад/с.

Скорость ползуна *D:* $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD}(CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1{,}2$ см/с.

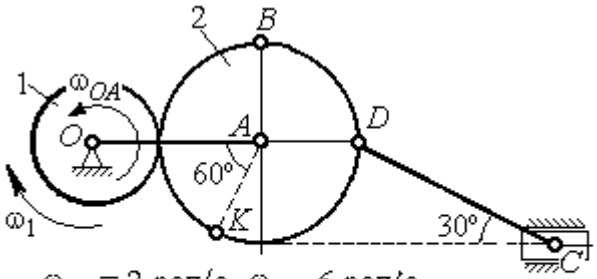
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
$BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
Найти: $\omega_{OA}, \omega_{AE}, \omega_{CB}, \omega_1, V_C, V_A, V_E$

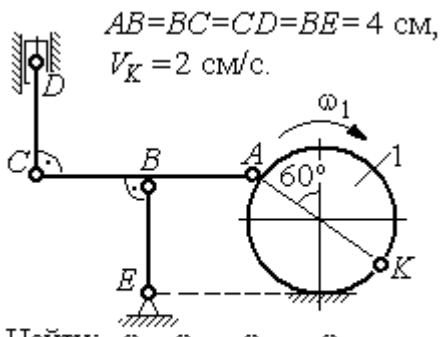
Упражнение 2.4



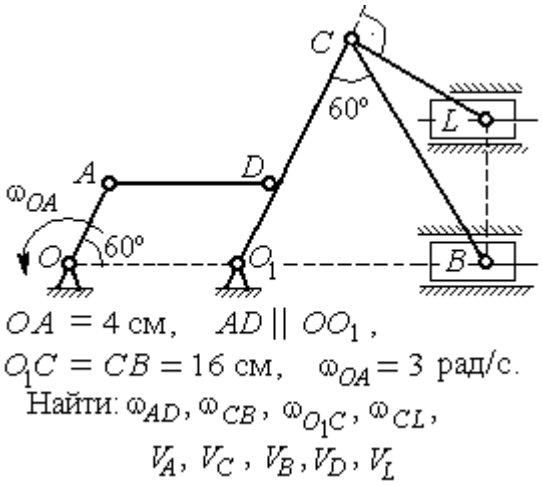
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
Найти: $\omega_2, \omega_{DC}, V_B, V_K, V_D, V_C$

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

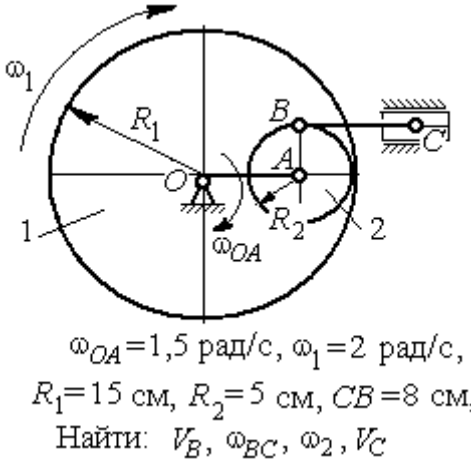
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

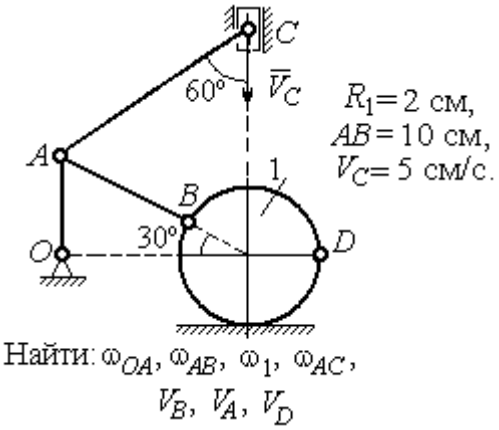


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{MA}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, *a*), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, *b*). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам: $a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A.

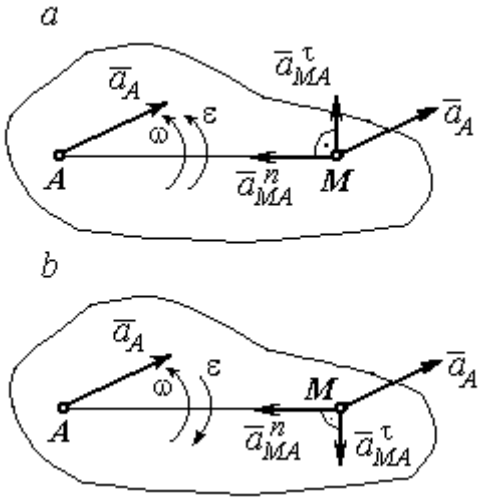


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M, то для определения ускорения точки M используется векторное равенство $\vec{a}^{\tau}_{M} + \vec{a}^{n}_{M} = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}^{\tau}_{M}$, $\vec{a}^{n}_{M}$, $\vec{a}^{\tau}_{A}$, $\vec{a}^{n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень D гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $OABD$. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка L рычага имеет скорость V_L = 0,6 м/с и ускорение a_L = 0,5 м/с^2. Длина рычага $OA = 2 \cdot AL$ = 0,6 м, длина звена AB = 0,4 м. Определить скорость и ускорение поршня D, угловую скорость и ускорение звена AB.

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL: $\omega_{OL} = \dfrac{V_L}{OL} = \dfrac{2}{3}$ рад/с.

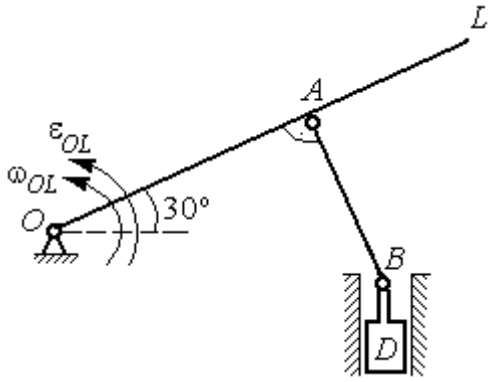


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^{\,\tau} + \vec{a}_L^{\,n}$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0{,}4$ м/с^2. Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^{\tau} = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0{,}3 \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_{OL} = \frac{a_L^{\tau}}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0{,}4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ - определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB. Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0{,}4\sqrt{3}$ м.

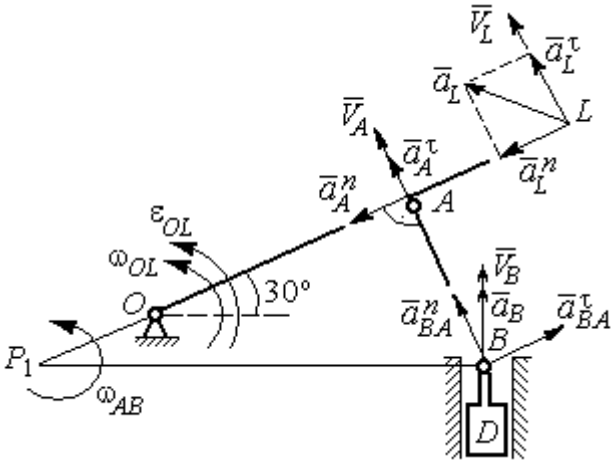


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{P_1A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A. Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O, ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a^{n}_A = \omega^2_{OL} \cdot OA = 0{,}27 \text{ см/с}^2;\ a^{n}_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 0{,}13 \text{ см/с}^2;$$

$$a^{\tau}_A = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x, y, где ось x проходит вдоль линии звена AB, ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a^{\tau}_A + a^{n}_{BA};\ \ a_B \cdot \cos 60^\circ = -a^{n}_A + a^{\tau}_{BA}.$$

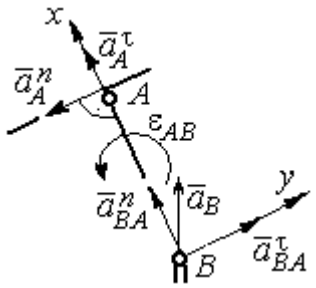


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B: $a_B = 0{,}38$ см/с^2 и величину касательного ускорения: $a^{\tau}_{BA} = 0{,}46$ см/с^2. Угловое ускорение стержня AB $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 1{,}15$ рад/с^2. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B: $a_D = a_B = 0{,}38$ см/с^2.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0{,}6$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

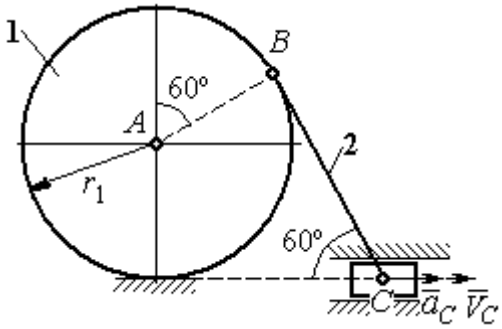


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C: $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с^2.

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B. Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

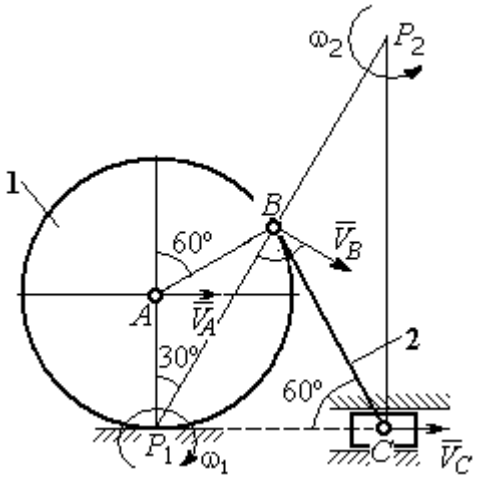


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов: $P_1B = r_1\sqrt{3} = 1{,}04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C: $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}8$ м.

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{P_2C}$ = 5рад/с. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки *B* найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = 5,2 м/с.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = 5 рад/с. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A$ = 3 м/с.

Найдём ускорение точки *A*.

Примем точку *B* за полюс и выразим ускорение точки *A* через полюс *B*: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^{\tau}_{AB} + \vec{a}^{n}_{AB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса *B*; $\vec{a}^{\tau}_{AB}$, $\vec{a}^{n}_{AB}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *A* при вращении диска 1 вокруг полюса *B* (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\tau}_{AB}$ точки *A* выбраны в предположении ускоренного движения диска.

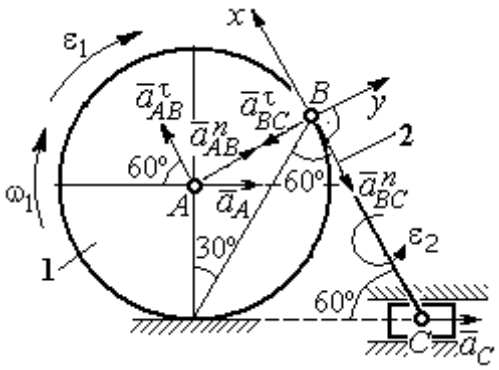


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса *B* выразим через полюс *C*: $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{BC} + \vec{a}^{n}_{BC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса *C*; $\vec{a}^{\tau}_{BC}$, $\vec{a}^{n}_{BC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *B* при вращении шатуна 2 вокруг полюса *C*. Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\tau}_{BC}$ точки *B* выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки *A* выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{AB} + \vec{a}^{n}_{AB} + \vec{a}^{\tau}_{BC} + \vec{a}^{n}_{BC} + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускорение a^{τ}_{AB} точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a^n_{AB} = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2;\ a^n_{BC} = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние P_2C от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x, y, выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x\text{: } -a_A \cos 60^\circ = a^{\tau}_{AB} - a^n_{BC} - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y\text{: } a_A \cos 30^\circ = a^n_{AB} - a^{\tau}_{BC} + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a^{\tau}_{AB} = a_A$, найдём ускорение точки A: a_A = 18,67 м/с^2. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a^{\tau}_{BC} = 2{,}29$ м/с^2. Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|a^{\tau}_{BC}\right|}{BC} = 2{,}2$ рад/с^2. Из того, что касательное ускорение a^{τ}_{BC} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BC}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2, насаженная в центре на кривошип OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2. Длина стержня $BC = 1$ м.

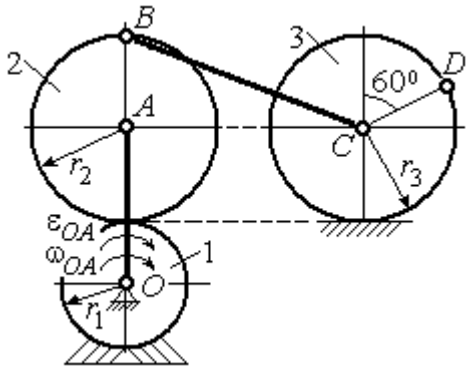


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость его точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2{,}4$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с. Скорость точки *B* шестерни 2:

$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 4{,}8$ м/с.

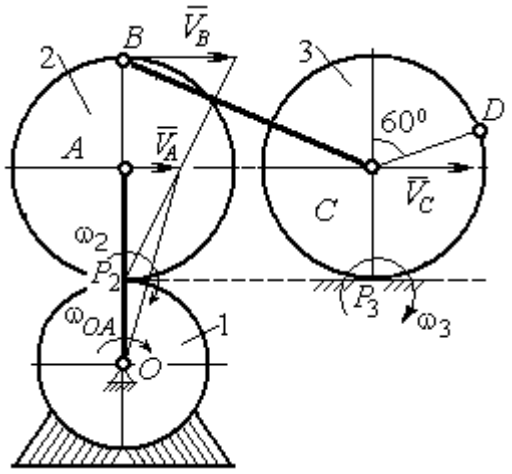


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня *BC* заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки *B* и *C* не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня *BC* отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение. При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня *BC* одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B = 4{,}8$ м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки *C*, направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс *B*. Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса *B*; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки *C* при вращении стержня *BC* вокруг полюса *B*. Вектор $\vec{a}^{\,n}_{CB}$ направлен вдоль стержня от точки *C* к

полюсу B, вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ перпендикулярен стержню BC. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC, показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB}.

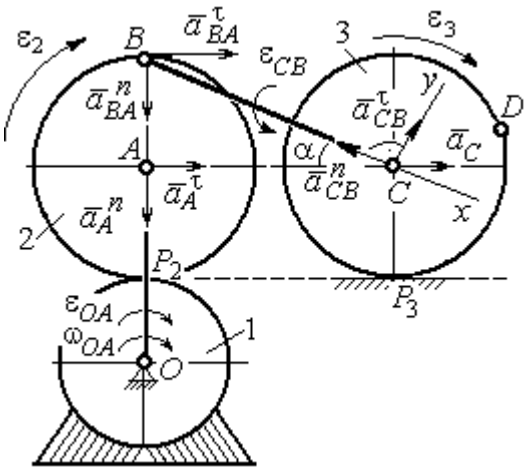


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A, вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен линии BA. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA. Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A. Вектор $\vec{a}^{n}_{A}$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}^{\tau}_{A}$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14{,}4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, получим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3$ рад/с^2 и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1{,}2$ м/с^2.

Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C. Получим систему уравнений:

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin\alpha = -a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha - a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C: $a_C = 12{,}83$ м/с^2, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B: $a_{CB}^\tau = 33{,}95$ м/с^2. Величина углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 33{,}95$ рад/с^2. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как движение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равенство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32{,}07$ рад/с^2.

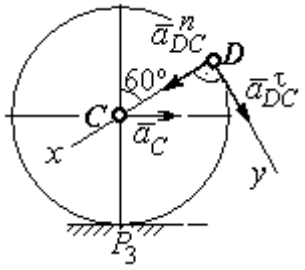


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Выразим ускорение точки D через полюс C, ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Модули ускорений

$$a_C = 12{,}83 \text{ м/с}^2;\ a^n_{DC} = \omega_3^2 DC = 57{,}6 \text{ м/с}^2;\ a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 DC = 12{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a^n_{DC};\quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a^\tau_{DC}.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46{,}49$ м/с^2; $a_{Dy} = 19{,}25$ м/с^2.

Величина ускорения точки D: $a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = 50{,}32$ м/с^2.

Заметим, что для определения ускорения точки *D* невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки *D* через ускорения полюсов *C*, *B* и *A*, так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx}, a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ}.

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип *OA*, вращающийся вокруг неподвижной оси *O*, шестерню 1 радиуса r_1, насаженную на кривошип в точке *A* и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун *BC*, присоединённый одним концом в точке *B* к шестерне, а другим – в точке *C* к коромыслу CO_1. В положении, указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $\varepsilon_{OA} = 4$ рад/с^2; $OA = 0{,}8$ м; $r_1 = 0{,}4$ м; $AB = 0{,}2$ м; $BC = 0{,}6$ м. Для этого же положения определить ускорение точки *C*.

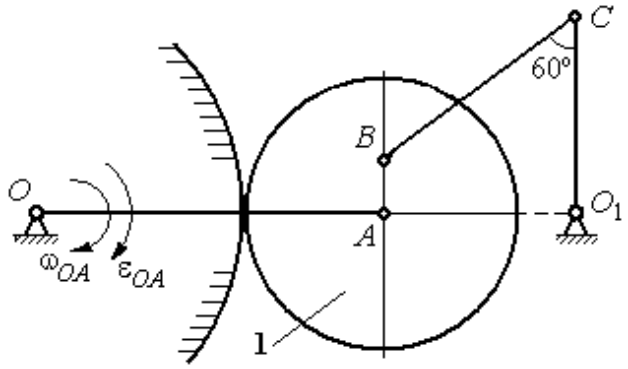


Рис. 2.36. Механизм качалки

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки *A* кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}6$ м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1.

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B P_1B = 0,45 м. Скорость точки B: $V_B = \omega_1 \cdot P_1B =$ 1,8 м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C, является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC\cos 30^\circ = 0{,}52$ м; $\cos\alpha = \dfrac{AP_1}{BP_1} = 0{,}89$; $P_2B = \dfrac{BK}{\cos\alpha} = 0{,}58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = 3{,}1$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC}.

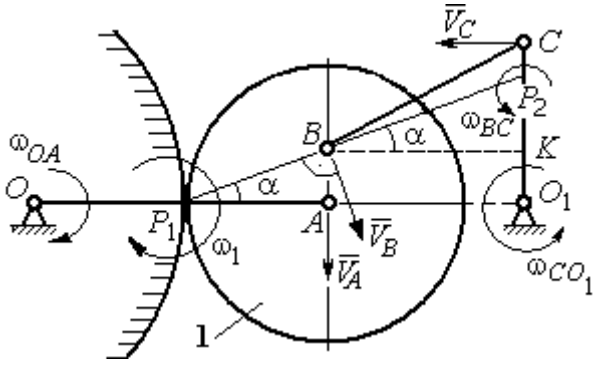


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Расстояние $P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin\alpha = 0{,}04$ м. Скорость точки C шатуна BC: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0{,}12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0{,}5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{CO_1} = 0{,}24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC, выразим ускорение точки C через полюс B: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B.

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$

, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A.

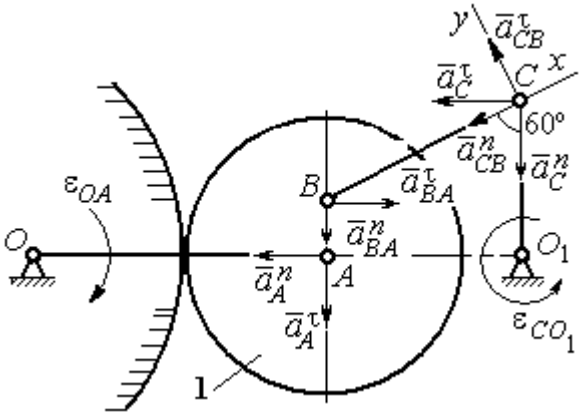


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA, а точка C – коромыслу CO_1, вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих точек можно представить в виде сумм векторов:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_C = \vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau},$$

где $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_A^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O; $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_C^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1.

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau} = \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;\ \ a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5{,}77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ \ a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференцируем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^{\tau} = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A^{\tau}}{r_1} = 8$ рад/с^2.

Тогда $a_{BA}^{\tau} = 1{,}6$ м/с^2.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ и $\vec{a}^{\tau}_{C}$. Выберем ось *x* вдоль шатуна *BC*, как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a^{n}_{C}\cos 60^{\circ} - \vec{a}^{\tau}_{C}\cos 30^{\circ} = -a^{n}_{CB} - a^{n}_{BA}\cos 60^{\circ} + a^{\tau}_{BA}\cos 30^{\circ} - a^{n}_{A}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{A}\cos 60^{\circ},$$

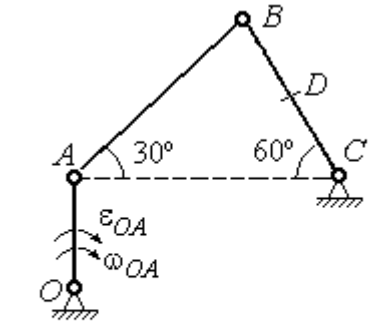
откуда найдём ускорение a^{τ}_{C} = 11,94 м/с^2. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{\left|a^{\tau}_{C}\right|}{CO_1} = 23{,}88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a^{τ}_{C} свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}^{\tau}_{C}$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки *C* (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

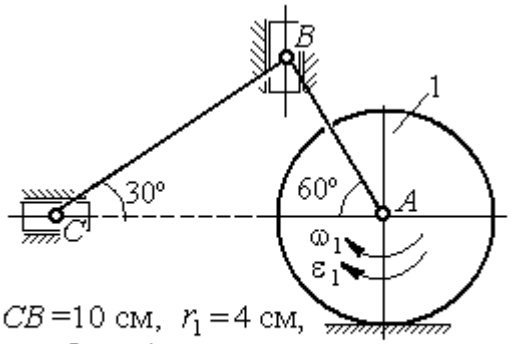
Упражнения

Упражнения 2.9



$OA = 4$ см, $BD = DC = 4$ см,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки *D*

Упражнения 2.10



$CB = 10$ см, $r_1 = 4$ см,
$\omega_1 = 3$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки *C*

Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной.**

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным.**

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса:** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора

соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_{\text{к}}$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_{\text{к}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_{\text{к}}| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

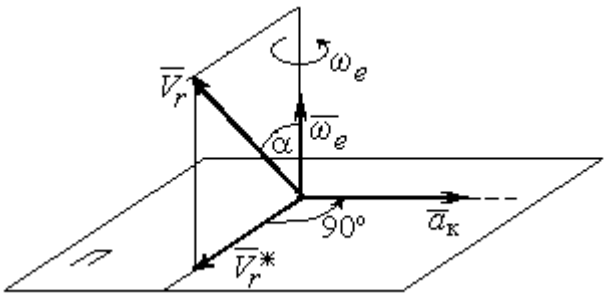


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость *П*, перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости *П* вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_{\text{к}} = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу *AB* с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке *A* и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат *xOy*, если радиус $OA = 0{,}5$ м, радиус кривизны канала в точке *A* $\rho = 0{,}8$ м, угол между нормалью *n* к кривой *AB* в точке *A* и радиусом *OA* $\alpha = 30^\circ$.

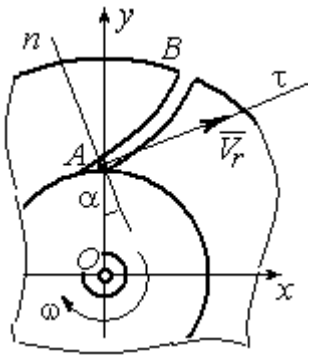


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки *A* компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу *OA* и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой *AB* (стенки канала) в точке *A*.

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси *x*, *y*. Получим систему уравнений:

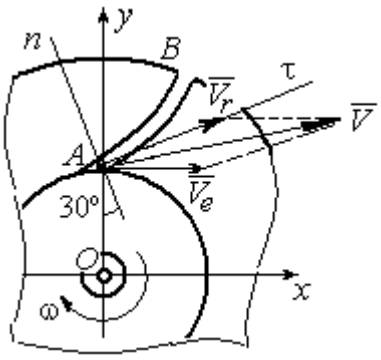


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8{,}46 \text{ м/с}; \; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_к .$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

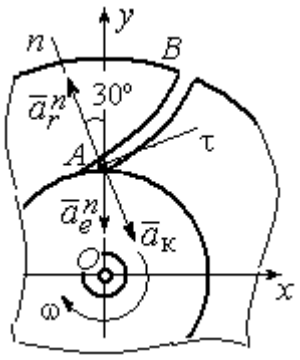


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки A вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$, где $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке А выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_к .$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0,\ a_r^{n} = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2;\ a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^{n} = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2;\ a_к = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат *xOy*. Получим:

$$a_x = -a_r^{n}\cos 60^\circ + a_к \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_к \cos 30^\circ = -101{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106{,}28$ м/с^2.

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворота крана (рис. 3.5) груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан B радиуса $r_1 = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0{,}5$ рад/с^2.

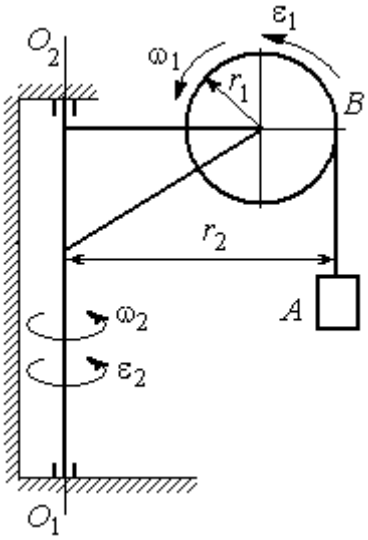


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза A на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана B из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3$ рад/с. Скорость подъёма груза A в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1) r_1 = 1{,}5$ м/с. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$. При t_1 = 1 с ω_2 = 0,5 рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2: $V_e = \omega_2 r_2$ = 5 м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

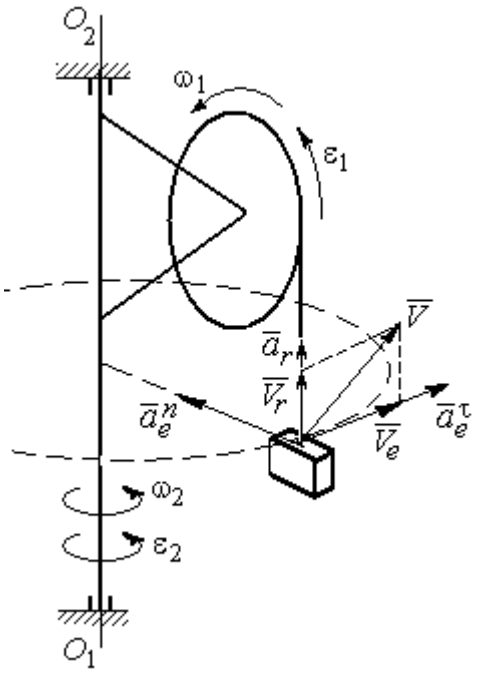


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$ = 5,22 м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_к = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_к$, где $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_r^\tau$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_к$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: a_r^n = 0, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1$ = 1,5 м/с^2. Направление вектора $\vec{a}_r^\tau$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2$ = 2,5 м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2$ = 5 м/с^2. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса $a_к$ равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_к = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (\vec{a}_e^\tau)^2 + (\vec{a}_r)^2}$ = 5,79 м/с^2.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ.

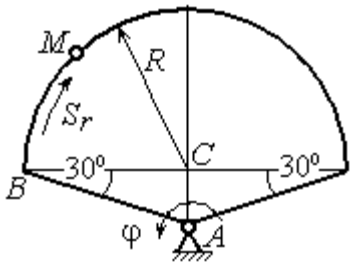


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M. Уравнение движения точки: $B\breve{M} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска R = 9 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A, относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом: $\alpha = \frac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1.

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\varphi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с. Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла φ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e.

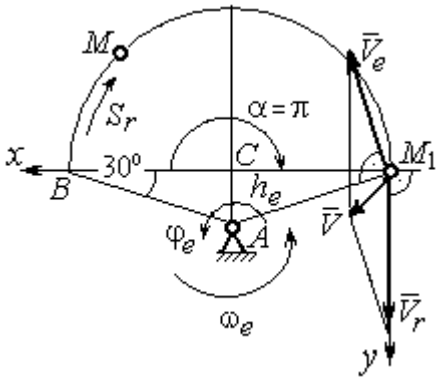


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = = \omega_e AM_1 = \frac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10{,}39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость точки, выберем оси координат M_1x, M_1y, как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 5{,}2 \text{ см/с}, \; V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = 47{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47{,}8$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$.

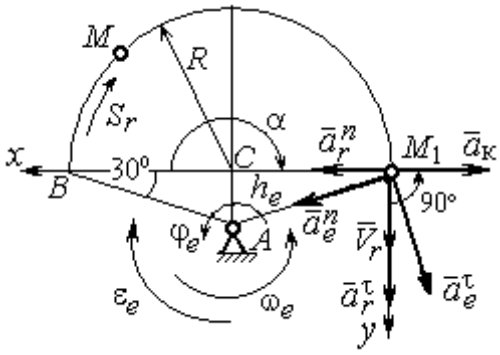


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$, где $\vec{a}_e^{\,\tau}$ и $\vec{a}_e^{\,n}$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$.

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1.

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное

нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$ и в момент t_1 = 1 с равно 355,3 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени t_1 = 1 с, $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e|$ = 4 рад/с^2. Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e. Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени t_1 = 1 с равен 41,6 см/с^2. Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени t_1 = 1 с: a_e^n = 10,4 см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени t_1 = 1 с $a_к = 2\omega V_r$ = =113,1 см/с^2. По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y, как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 230{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^{\tau}\cos 30^\circ + a_e^{n}\cos 60^\circ + a_r^{\tau} = 97{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2, проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ. Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30º к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t-1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r. Радиус диска R = 4 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

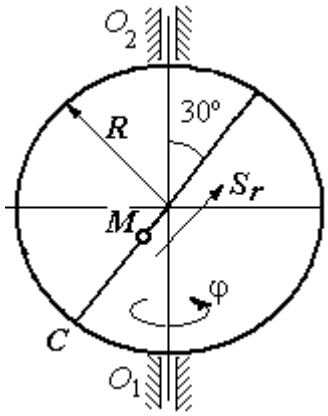


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r, пройденное точкой, к моменту времени t_1 = 1 с равно 8 см. При радиусе диска R = 4 см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1.

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi|$ и при t_1 = 1 с ω = 2 рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi}$ = – 2 рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону,

противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω.

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1. Очевидно, $KM_1 = 0{,}5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, *a*).

(На рис. 3.11, *a* символ $\odot$ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ $\oplus$ – «от нас».)

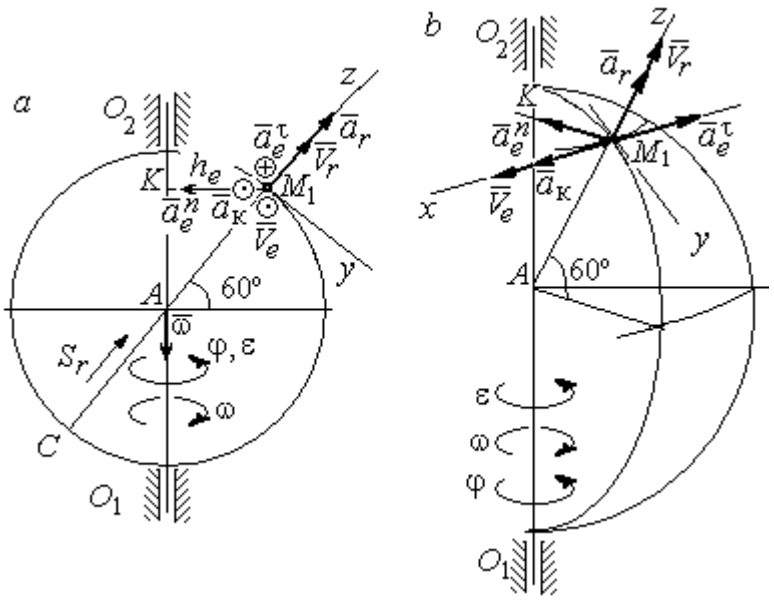


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
a – плоская модель движения;
b – пространственная модель движения

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = = \left|8(4t-1)\right|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно

перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} =$ 24,33 см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}$.

Относительное ускорение точки $a_r = \left|\ddot{S}_r\right|$ = 32 см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \left|\dot{\omega}\right| = \left|4t - 4\pi\sin\pi t\right|$. В момент времени t_1 = 1 с ε = 4 рад/с^2. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega}$ = 4 рад/с^2) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε. Модуль переносного касательного ускорения a_e^{τ} определяется по формуле $a_e^{\tau} = \varepsilon h_e$, и при t_1 = 1 с a_e^{τ} = 8 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_e^{\tau}$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^{n} рассчитывается по формуле $a_e^{n} = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при t_1 = 1 с a_e^{n} = 8 см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{n}$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150º. Модуль ускорения Кориолиса на момент времени t_1 = 1 с $a_{\text{к}} = 2\left|\omega\right|\left|V_r\right|\sin 150^\circ =$ 48 см/с^2.

Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, *а* это будет проекция на линию KM_1. Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, *а* вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x, M_1y и M_1z, как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, *а* ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

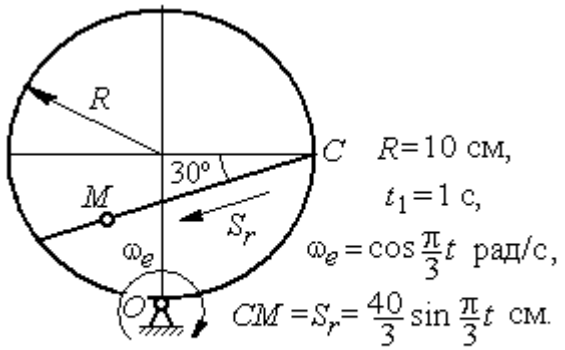
$$a_x = -a_e^{\tau} + a_{\text{к}} = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49{,}32$ см/с^2.

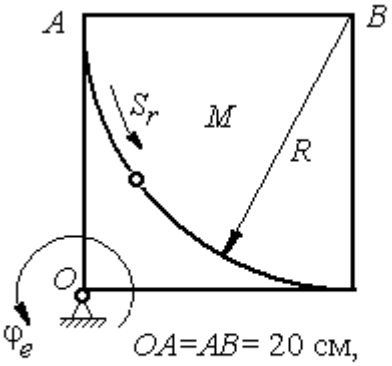
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



$\overset{\smile}{AM} = S_r = 5\pi t^2$ см, $\varphi_e = t^2 - 5t$ рад.

Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1$ с

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,…, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \; m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \; m\ddot{z} = \sum F_{kz},$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}; \; m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}; \; m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz},$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \; m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \; 0 = \sum F_{kb},$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0, направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f. Дойдя до края стола в точке B, частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h. На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

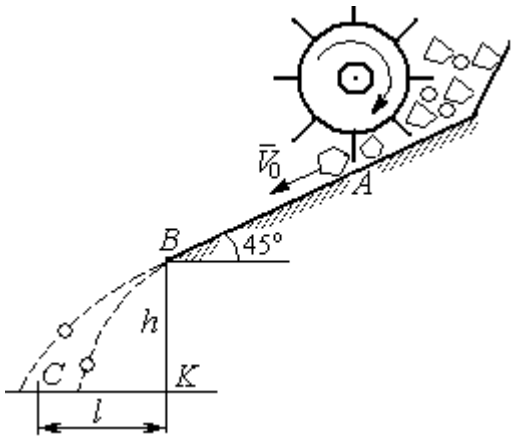


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1{,}2$ м, угол наклона $\alpha = 45°$, высота точки отрыва $BK = h = 1{,}5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0{,}4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему

координат *xAy*, направив ось *x* вдоль линии движения, а ось *y* – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси *y* частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения, которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

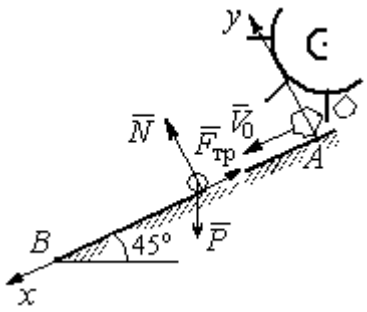


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1 - f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0{,}4:\ \frac{dV_x}{dt} = 4{,}18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4{,}18t + C_1;\ \ x = 2{,}09t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0,\ C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке *AB* сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4{,}18t + 1$; $x = 2{,}09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола *B* в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения

движения, получим систему: $V_B = 4{,}18t_B + 1$, $S = 2{,}09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8{,}36S}$. При длине стола S = 1,2 м скорость отрыва V_B = 3,32 м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B, направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$$

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3$; $x = C_3 t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4. определяются из начальных условий движения: при t = 0 , $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось x, V_{Bx} = $V_B \cos 45^\circ$ = 2,35 м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: C_4 = 0, C_3 = 2,35. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2{,}35t$.

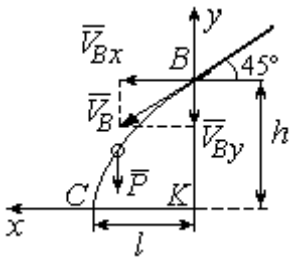


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y. Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5 t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y: при t = 0 , $y(0) = h$ = 1,5 м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B \cos 45^\circ = -2{,}35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось y. Подставляя начальные условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2{,}35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4{,}91t^2 - 2{,}35t + 1{,}5$.

В момент $t = t_{\text{п}}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2{,}35t_{\text{п}},\ 0 = -4{,}91t_{\text{п}}^2 - 2{,}35t_{\text{п}} + 1{,}5.$$

Исключая в системе время $t_{\text{п}}$, выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1{,}12\ell - 1{,}68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0{,}85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0{,}4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0{,}4$) – недолетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0{,}5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k, при котором скорость точки за первую секунду от начала движения увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

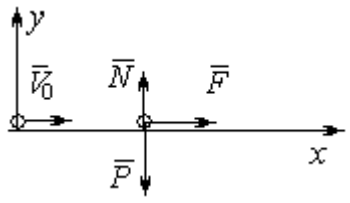


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения,

когда проекция силы на ось x положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс x у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента k, получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51{,}86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой $m = 1$ кг, находясь на высоте $h_1 = 2$ м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью $V_0 = 4$ м/с (рис. 4.5, *а*). При движении на точку действует сила

сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0{,}5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H, на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

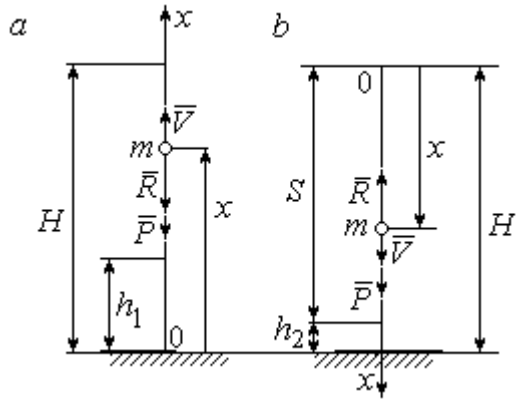


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось *x*, вдоль которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось *x*: $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось *x*: $P_x = -P = -mg$; $R_x = -0{,}5mV^2$. Полагая $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, получим уравнение движения точки в виде: $\dfrac{dV}{dt} = -(g + 0{,}5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}=\frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g+0{,}5V^2}=-2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g+0{,}5V^2)=-x+C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C=h_1+\ln(g+0{,}5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x=h_1+\ln\left(\frac{g+0{,}5V_0^2}{g+0{,}5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x=H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H, получим: $H=h_1+\ln\left(1+\frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2{,}6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки: $m\frac{dV}{dt}=P_x+R_x=mg-0{,}5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду: $\frac{dV^2}{g-0{,}5V^2}=2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g-0{,}5V^2)=-x+C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1=\ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением $x = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V^2}\right)$.

Расстояние S, которое пролетела точка с высоты H, приобретя скорость, V_0: $S = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V_0^2}\right)$. Высота h_2 этого положения от уровня Земли: $h_2 = H - S$ (см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости V_0 = 4 м/с, максимальной высоты подъёма точки H = 2,6 м высота h_2 = 0,91 м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1 на высоте h. Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

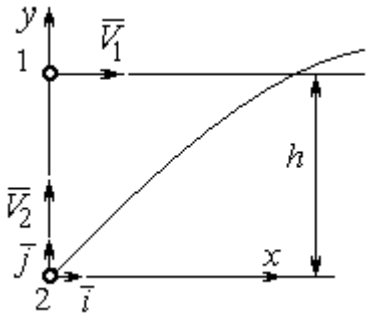


Рис. 4.6. Схема встречного движения точек

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y, точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2. В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представлена в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат xy: $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где p, q – const. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y: $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

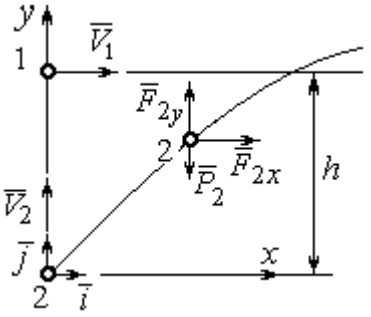


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

Уравнения движения точки в проекциях на оси xy имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p,\ m_2\ddot{y} = q - m_2 g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, получим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2} t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y: $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g \right) t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g \right) \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y: $y = \left(\frac{q}{m_2} - g \right) \frac{t^2}{2} + V_2 t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1 t_1 = \frac{p}{2m_2} t_1^2; \quad h = \left(\frac{q}{m_2} - g \right) \frac{t_1^2}{2} + V_2 t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g \right) \frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1 m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы m = 2 кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения f = 0,4. На тело действует сила $F = kt + 0{,}5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь S = 2 м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы m = 1 кг, находящуюся на высоте H = 10 м над уровнем Земли, бросили под углом φ = 30° к горизонту с начальной

скоростью V_0. Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту h =7 м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.** В случае гармонического возмущения $Q = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt$, а в случае возникновения резонанса (p = ω) определяется формулой: $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t - \dfrac{ht}{2p} \cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой m = 400 кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью V = 10 м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

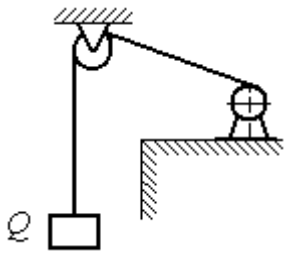


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* (точка *O*) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox* имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем

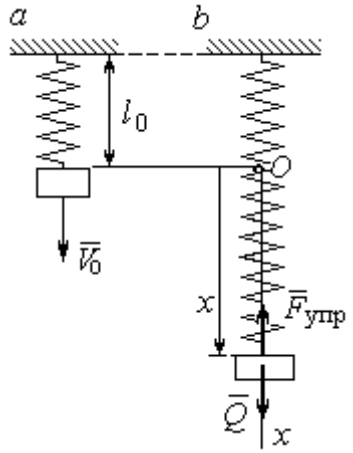


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

неоднородное дифференциальное уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ = 14,14 рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при t = 0 груз находился в положении x = 0, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 =$ 10 м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -$ 0,69 м. Для определения второй константы вычислим скорость

груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при t = 0, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} =$ 0,71 м. Окончательно, движение груза после защемления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0{,}69\cos 14{,}14t + 0{,}71\sin 14{,}14t + 0{,}69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}] = A + \frac{g}{\omega^2} =$ 1,68 м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} =$ 134,4 кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60º. Масса груза m = 9 кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости c_1 = 300 Н/м и c_2 = 600 Н/м.

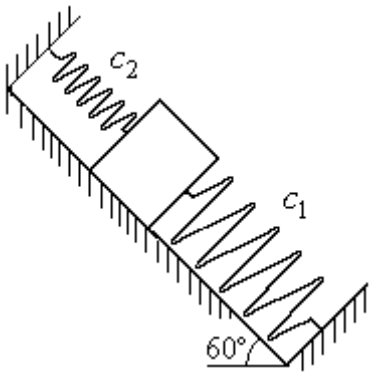


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell$ = 0,12 м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикреплённого к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_э = c_1 + c_2$ = 900 Н/м (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза *x* выберем в положении его статического равновесия (точка *O*) (см. рис. 4.11).

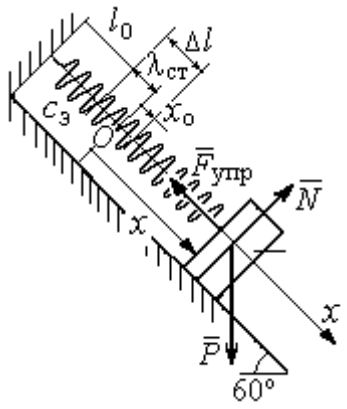


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x} = P_x - F_{упр\,x}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{упр\,x} = -c_э \Delta\ell$, где $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст})$ – удлинение пружины, включающее её растяжение $\lambda_{ст}$ относительно положения нерастянутой пружины и растяжение *x* относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{ст}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P\cos 30^\circ - F_{упр} = 0{,}87mg - c_э\lambda_{ст} = 0.$$

Находим $\lambda_{ст} = \dfrac{0{,}87mg}{c_э}$ = 0,085 м.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0{,}87mg = c_э\lambda_{ст}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_э x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 10 рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{ст}$ = 0,035 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,035 м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2 \sin\omega_2 t + C_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0{,}035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний A = 0,035 м. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины c = 350 Н/м. Груз массой m = 5 кг падает с высоты h = 0,3 м.

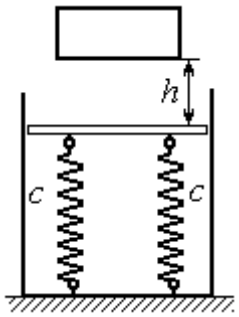


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

Решение

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_э = 2c$ = 700 Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, *с* предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, *c*), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния (см. рис. 4.13, *a*) составляет величину: $\Delta\ell = x + \lambda_{ст}$. Величина $\lambda_{ст}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, *b*): $P - F_{упр\ ст} = P - c_э\lambda_{ст} = 0$.

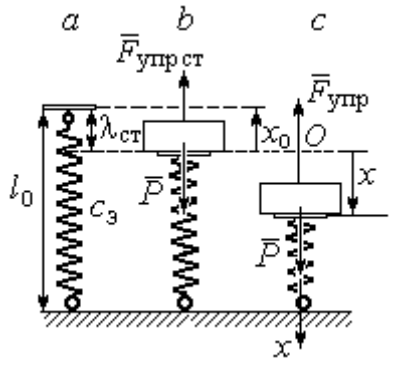


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
a – недеформированная пружина;
b – положение статического равновесия груза; *c* – произвольное положение

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} + c_э x = 0$ или $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 11,83 рад/с – угловая частота колебаний.

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{ст} = -\dfrac{mg}{c_э}$ = – 0,07 м.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая s = 0,3, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: V = 2,43 м/с. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V$ = 2,43 м/с.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -\ 0{,}07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} =\ 0{,}2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0{,}07\cos 11{,}83t + 0{,}2\sin 11{,}83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0{,}28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c. К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A. В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза m = 1 кг, жесткость пружины c = 10 Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a\sin pt$ см, где амплитуда a = 0,02 м, частота колебаний платформы p = 7 рад/с.

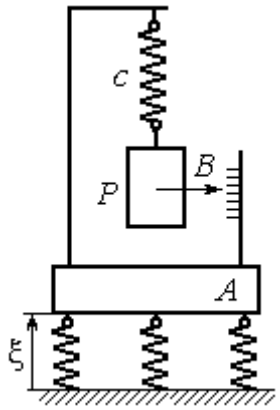


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x, связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x+\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия груза, определяемое из условия $P-c\lambda_{ст}=0$. Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины. В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме: $\Delta\ell=(x+\lambda_{ст}+\xi)$.

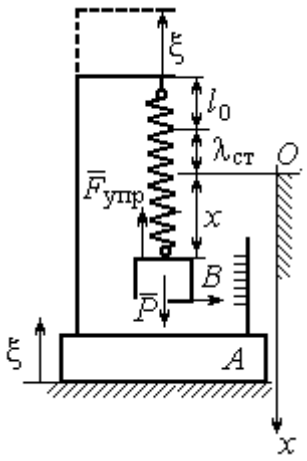


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x}=P_x+F_{упр\,x}$, где проекции $P_x=P$, $F_{упр\,x}=-c\Delta\ell=-c(x+\lambda_{ст}+\xi)$. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P-c\lambda_{ст}=0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2x=-h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=3{,}16$ рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h=\dfrac{ca}{m}=0{,}2$ м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, $p=7$ рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x=x_1+x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения $\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний: $\ddot{x}_2+\omega^2x_2=-h\sin pt$.

Решив однородное уравнение, находим: $x_1=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b\sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2\sin pt + \omega^2 b\sin pt = -h\sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \dfrac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2}\sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим C_1= 0. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \dfrac{hp}{p^2 - \omega^2}\cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\dfrac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0{,}01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t - 0{,}02\sin 7t = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}03\sin 7t.$$

Упражнения

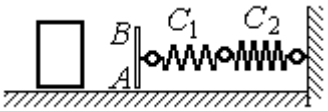


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы m = 0,5 кг, получив начальную скорость V_0 = 6 м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью C_1 = 120 и C_2 = 40 Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если k = 0,5 Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы m =1 кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости C = 160 Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость V = 4 м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

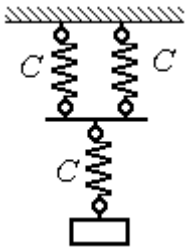


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется скалярная величина $A(\vec{F}) = FS\cos\alpha$, где F – модуль силы; S – конечное перемещение точки приложения силы; α – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

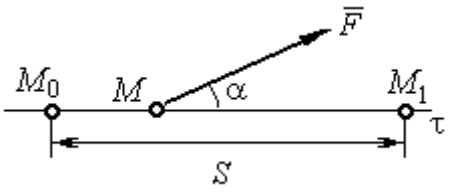


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

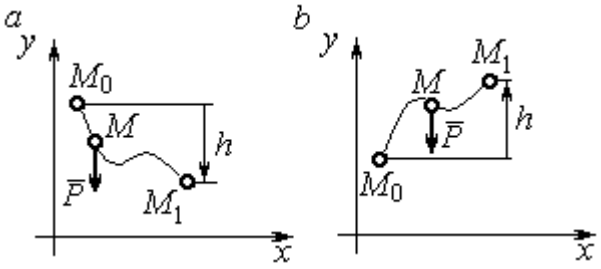


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1. При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью V_0 = 6 м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s$, где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть V = 0. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_0^2}{2} = \left(P - F_{\text{тр}}\right)s$, откуда находим требуемую для остановки груза силу трения: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}}$ = 5,81 кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов R = 1 м и r = 0,5 м (рис. 4.20). Линия OO_1, соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик весом P = 10 Н. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60°, шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он скользит по стержню без трения. Определить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет

наивысшей точки *B* со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге радиуса *r* определяется углом $\beta = 90°$ относительно линии центров.

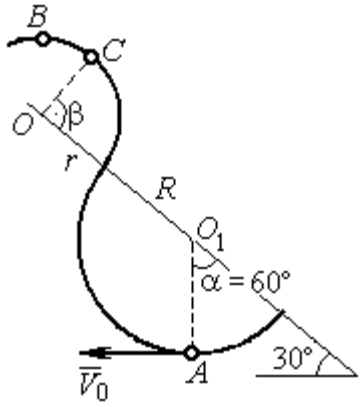


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и потому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её из начального положения *A* в положение *B* имеем равенство:

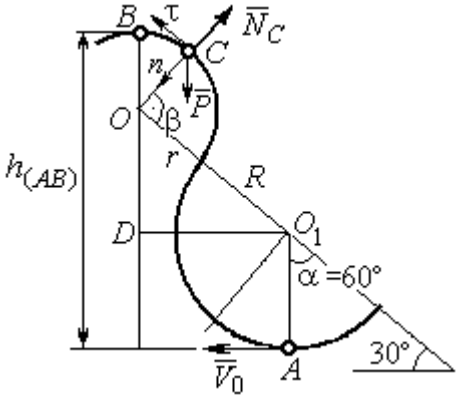


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек *B* и *A*, $h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r)$ (см. рис. 4.21); V_A, V_B – скорость шарика в точках *A* и *B*, причём $V_A = V_0$, $V_B = 0{,}5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда $V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7{,}67$ м/с.

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарику, в момент, когда он находится в точке *C*. Проведём в точке *C* оси естественной системы координат –

касательную $C\tau$ и нормаль Cn. Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *C* в положение *B*. Получим равенство $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения *C* в положение *B*. С учётом известных значений $V_B = 0{,}5V_0 =$ 3,84 м/с и $h_{(CB)} = r\cos 30^\circ =$ 0,43 м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}}$ = 4,82 м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P\cos 30^\circ - m\frac{V_C^2}{r}$ = – 38,7 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой *AB* и гладкой дуги окружности радиуса r = 0,8 м, сопряжённых в точке *B* так, что прямая *AB* является касательной к окружности в точке *B* (рис. 4.22). Положение точки *B* на дуге задаётся углом 30º относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой m = 0,5 кг начинает движение из точки *A* со скоростью V_0 = 0,2 м/с.

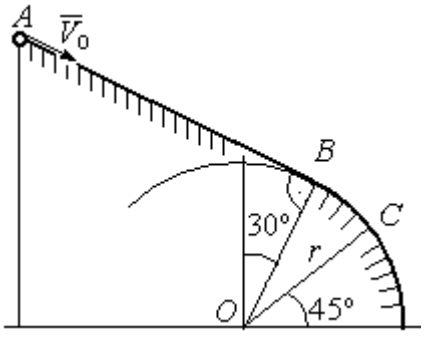


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины *S* должен быть желоб *AB*, чтобы шарик оторвался от окружности в точке *C*, определяемой углом 45º относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой *AB* шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения f = 0,4.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C. Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C. Реакция опоры $N_C = P\cos 45^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r}$.

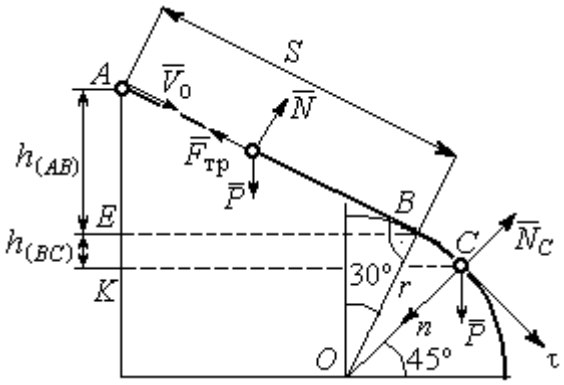


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg\cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2{,}36$ м/с.

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB, сила трения $\vec{F}_{тр}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки $\dfrac{mV_C^2}{2} - \dfrac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{тр}S$, где S – длина участка AB; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right)$.

Модуль силы трения: $F_{тр} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB, составим проекцию уравнения движения шарика на ось y, перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана).

Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB:

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A, при котором линия OA составляет с вертикалью угол $60°$. В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1, расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

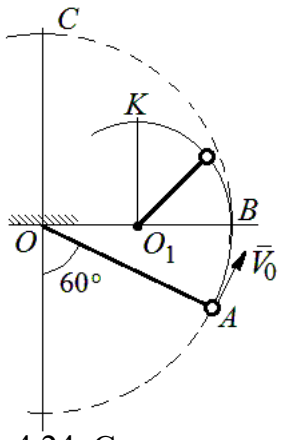


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A, чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K. На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $n K \tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0{,}5l$ с центром O_1 (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид: $m\dfrac{V_K^2}{r} = P + N_K$, где V_K – скорость груза в точке K; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза; $r = 0{,}5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m\dfrac{2V_K^2}{l} - P$.

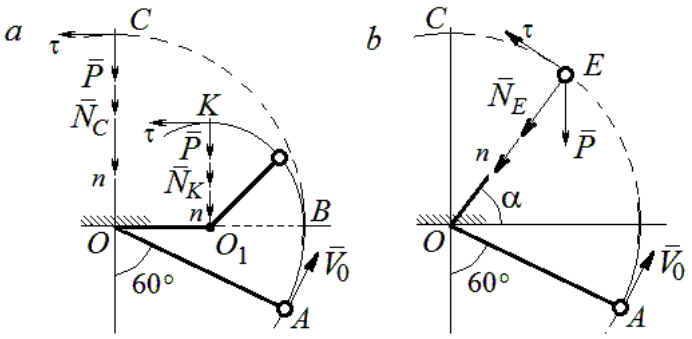


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
a – нить навивается на препятствие;
b – свободное движение

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \dfrac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K. Имеем равенство $\dfrac{mV_K^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки *K*. Однако, натяжение нити в точке *K* обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения *A* с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, *b*). Построим в точке *E* оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке *K*. Уравнение движения груза в проекции на ось *En* имеет вид: $m\frac{V_E^2}{l} = P\sin\alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке *E*; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке *E* составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения *A* в положение *E*. Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек *A* и *E*; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l\sin\alpha$ (см. рис. 4.25, *b*). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl\sin\alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке *E* натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl\sin\alpha$. Приравнивая выражения, получим $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B. Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l. Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой m = 0,5 кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса R = 0,6 м и прямолинейного участка BD, сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60°. Начальная скорость шарика V_0 = 5 м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью c = 100 Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

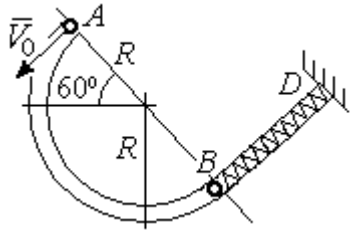


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B. Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B. Получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}$, где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B, $h_{(AB)} = 2R\sin 60^\circ = 1{,}04$ м (рис. 4.27).

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B: $V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}}$ = 6,74 м/с.

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD. На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарику (см. рис. 4.27).

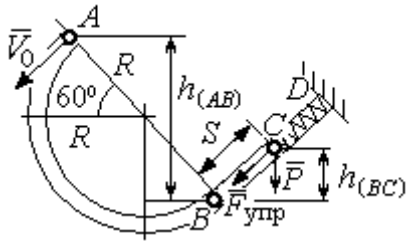


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC. На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке BC, имеем уравнение $\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{упр}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2}$,

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C; $h_{(BC)} = S\sin 30^\circ = 0{,}5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6{,}74$ м/с, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0{,}05S - 0{,}23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: S = 0,45 м.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ, с начальной скоростью V_0. Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R, сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

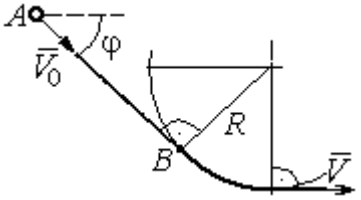


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт - сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью C = 100 Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a$ = 0,3 м, выталкивает шарик массой m = 0,5 кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB, окружности радиуса R = 1 м, затем – по горизонтальному участку BD. Определить давление шарика на трубку в точке C. Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD, если здесь на него действует сила трения с коэффициентом f = 0,4.

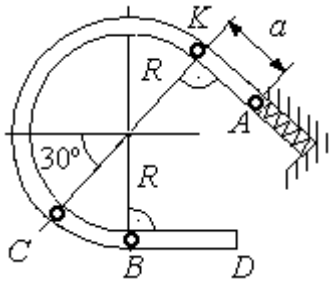


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C, координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k \ , \quad my_C = \sum m_k y_k \ , \ mz_C = \sum m_k z_k \ ,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды *ABCD*, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 m_1 = 15 кг, груза 2 m_2 = 20 кг, пирамиды m = 50 кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

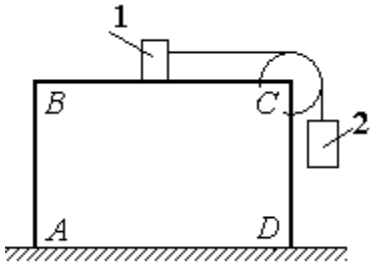


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока C и пирамиды *ABCD*.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат *Axy*, как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось *Ax,* имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

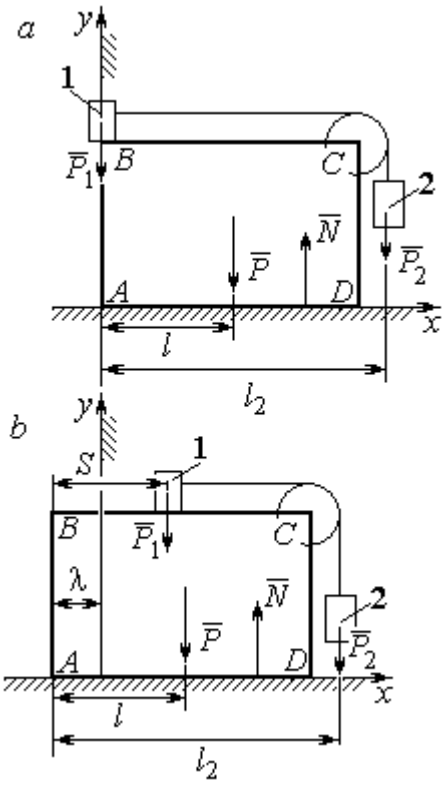


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: *a* – начальное положение; *b* – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние *S*

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, *a* не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси *Ax* остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, *a*.

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс груза 2 на оси *Ax*); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести

пирамиды (см. рис. 5.2, *a*). Тогда начальная координата центра масс системы: $x_{C0} = \dfrac{m_2 l_2 + ml}{(m_1 + m_2 + m)}$.

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние *S*, и положение призмы показано на рис. 5.2, *b*. На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние *S* призма *ABCD* сместилась влево на расстояние λ. Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнивая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды $\lambda = \dfrac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}$. Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0{,}18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом *R*, массой *m* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска: $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$. **Для неоднородных тел момент инерции** относительно оси *z* вычисляется по формуле: $J_z = mi_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси *z* называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, **кинетический момент**: $L_z = J_z\omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси**. Производная по времени от кинетического момента системы

относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R. Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z. На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60$ Н·м. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t$ Н·м, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 50$ кг, $m_3 = 20$ кг. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}4$ м; $i_z = 0{,}5$ м.

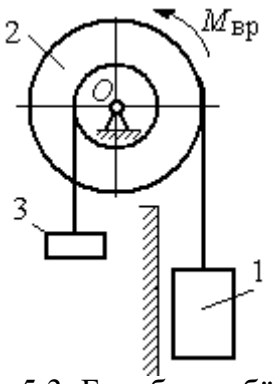


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вращения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c. Направления векторов сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси y, вдоль

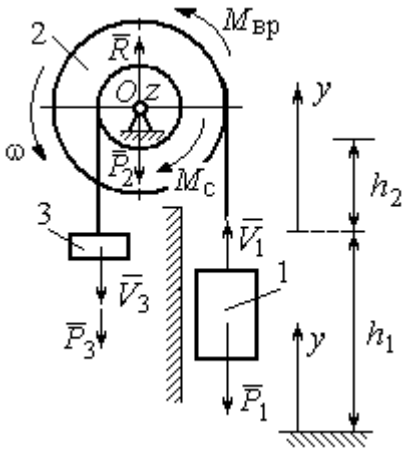


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси z, проходящей через центр O: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$. Кинетический момент системы относительно оси z равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z: $L_z^{бар} = J_z\omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси z, $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси z: $L_z^{гр} = M_z(m_1\vec{V}_1) = m_1V_1R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3\vec{V}_3) = m_3V_3r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2\omega + m_1V_1R + m_3V_3r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ - и подставим их в выражение кинетического момента. Получим $L_z = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\omega = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{V_1}{R}$.

Суммарный момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{dV_1}{dt} = (M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r)R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0{,}58 + 0{,}35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0{,}58t + 0{,}175t^2; \quad y(t) = 0{,}29t^2 + 0{,}058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1{,}62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1{,}86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2)\frac{dV_1}{dt} = (-M_c - P_1 R + P_3 r)R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6{,}61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь уравнение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6{,}61$. Интегрируя его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути $\frac{V_1^2}{2} = -6{,}61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1. Из начальных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1{,}86$ м/с, получим: $C_3 = 1{,}73$.

Максимальную высоту h_2, на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6{,}61h_2 + 1{,}73$, откуда $h_2 = 0{,}26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1{,}88$ м.

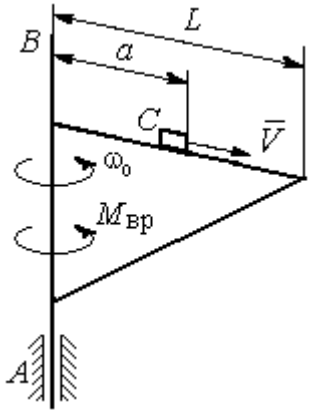


Рис. 5.5. Поворотный кран

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Длина стрелы $L = 10$ м, масса тележки с грузом $m_1 = 100$ кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза $J = 1800$ кг·м^2. Двигатель крана создаёт

постоянный вращающий момент $M_{вр}$ = 400 Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью ω_0 = 2 рад/с, а тележка находилась на расстоянии a = 1 м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с грузом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{вр}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z, направленной вдоль линии AB.

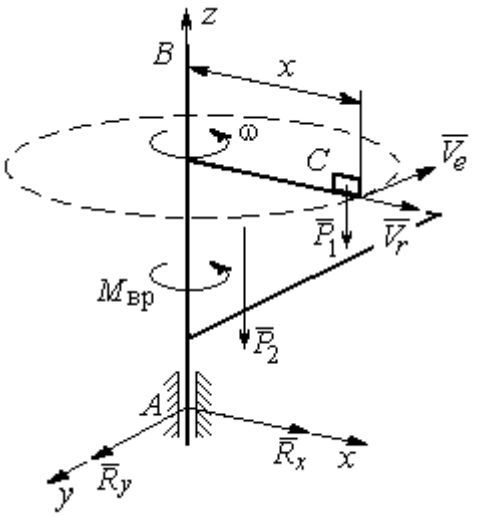


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{вр}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{вр}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{кран} + L_z^{груз}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: $L_z^{кран} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{груз}$, как момент вектора количества

движения тележки относительно оси z. Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1\vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1\vec{V}_e + m_1\vec{V}_r) = M_z(m_1\vec{V}_e) = m_1V_e x = m_1\omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = \left(J + m_1x^2\right)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = \left(J + m_1a^2\right)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $\left(J + m_1x^2\right)\omega - \left(J + m_1a^2\right)\omega_0 = M_{\text{вр}}t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \dfrac{M_{\text{вр}}t + \left(J + m_1a^2\right)\omega_0}{\left(J + m_1x^2\right)}$. Момент времени $t_{\text{к}}$, когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $Vt_{\text{к}} = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_{\text{к}}) = 0{,}93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \dfrac{1}{2}J_z\omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела; **при плоскопараллельном движении**: $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2 + \dfrac{1}{2}J_{zC}\omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра

масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FS\cos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом** M при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В

неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом OA (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными m и r, и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

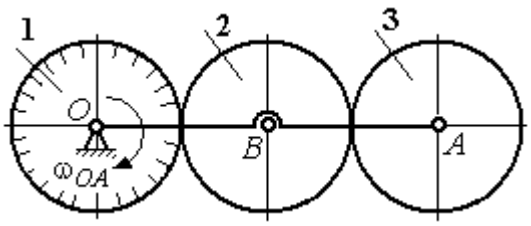


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма T равна сумме энергий колёс 2 и 3: $T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2: $T_2 = \dfrac{mV_B^2}{2} + \dfrac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \dfrac{mr^2}{2}$.

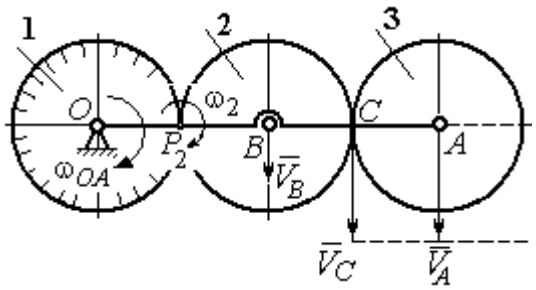


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA.

Скорость точки B, лежащей на кривошипе OA: $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \dfrac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C, считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA} r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA} r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного движения колеса 3: $T_3 = \dfrac{mV_A^2}{2} = \dfrac{m(4\omega_{OA} r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R. Их общий вес равен Q, а общий радиус инерции относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также

катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: P_1 = 40 Н, Q = 60 Н, F = 50 Н, M = 45 Н·м, R = 0,8 м, r = 0,6 м, i_z = 0,4 м.

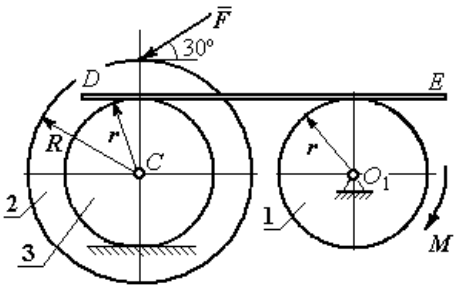


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

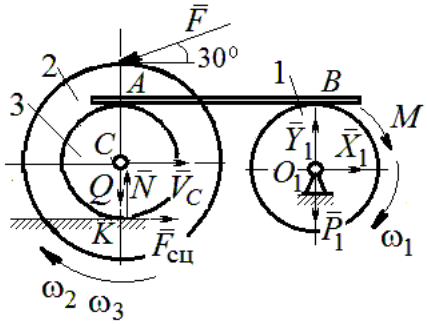


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1, ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, двигается плоскопараллельно. Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – момент инерции фигуры относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \dfrac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \dfrac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g}\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M\omega_1 = M\dfrac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90°.

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F})\vec{\omega}_2 =$$

$$= - F(r + R)\omega_2 \cos 30° = - FV_C\left(1 + \frac{R}{r}\right)\cos 30°.$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра *K*, противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = - FV_C\left(1 + \frac{R}{r}\right)\cos 30° + M\frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы $\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]$ и приравниваем суммарной мощности внешних сил. Получим:

$$\frac{1}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = - F\left(1 + \frac{R}{r}\right)\cos 30° + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 a_C = 2,88 м/с^2. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \frac{2a_C}{r}$ = 9,6 рад/с^2.

Задача 59. Каток радиуса *r*, весом *P* закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы *F* = 2*P*. В начальном положении центр катка имел скорость V_0.

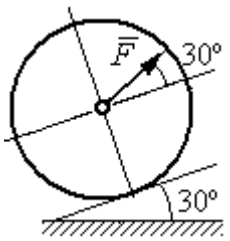


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

На какое расстояние S переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние S вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F\cos 30° S$ и сила тяжести: $A(\vec{P}) = -Ph$, где h – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

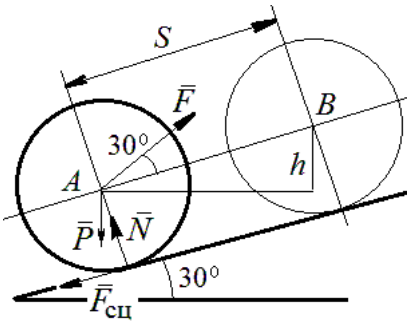


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

Кинетическая энергия катка $T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} J_{zA} \omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \frac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через скорость центра масс $\omega = \frac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, получим энергию катка в виде: $T = \frac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S: $\frac{3}{4} m V_B^2 - \frac{3}{4} m V_A^2 = F\cos 30° S - Ph$, где $V_A = V_0$ $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30°$.

Найдём искомое перемещение: $S = \frac{9V_0^2}{4g(2\cos 30° - \sin 30°)}$.

Упражнения

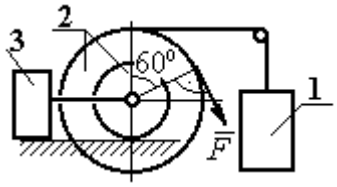


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l, на другом конце которого привязан груз массы m_2. Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

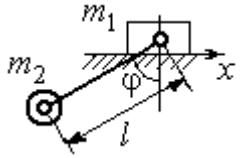


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

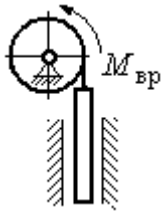


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{ВР} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

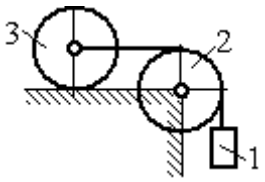


Рис. 5.15. Схема движения системы

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3, радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h, если к катку 3 приложен момент M.

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твердого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}^e$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e$, $ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e$, $ma_{Cz} = \sum F_{kz}^e$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e – проекции внешних сил.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$ или алгебраическим уравнением: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e;\ ma_{Cy} = \sum F_{ky}^e;\ J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^e),$$

где a_{Cx}, a_{Cy}– проекции ускорения центра масс тела; F_{kx}^e, F_{ky}^e – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^e)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса,

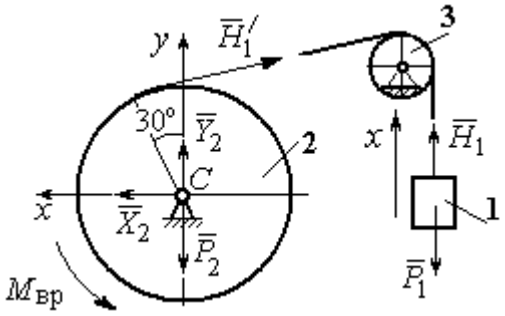


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

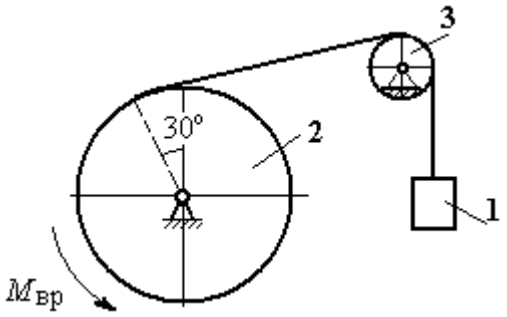


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0{,}8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось x по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось x: $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z: $J_z\varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1'r$, где момент инерции барабана $J_z = \dfrac{m_2 r^2}{2}$.

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напишем уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \quad m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим a_1= 1,82 м/с^2, H_1 = 581,8 Н. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1'\cos 30^\circ = 0, \; m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1'\cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда X_2 = 503,84 Н, Y_2 = – 94,7 Н, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$ = 512,66 Н.

Задача 60. Барабан весом G, радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30°, опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M.

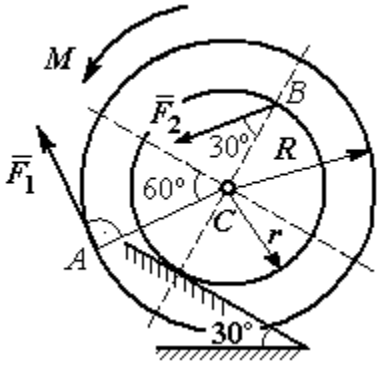


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравновешивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: R = 0,6 м, r = 0,2 м, G = 100 Н, F_1 = 60 Н, F_2 = 25 Н, радиус инерции барабана i_z = 0,4 м.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления барабана с поверхностью. Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

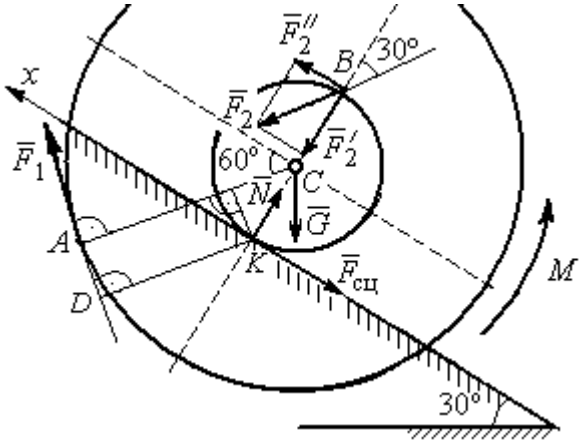


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Для определения момента M, приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки K. Точка K выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2\cos 30°$, $F_2'' = F_2\sin 30°$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки K: $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2\sin 30° \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки K:

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r\cos 30°).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r\cos 30°) + F_2\sin 30° \cdot 2r - Gr\sin 30° + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину уравновешивающего момента $M = 30{,}61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента M, удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1{,}2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось x, направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G\cos 60° - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1R + F_2r\cos 60° + F_{\text{сц}}r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) = -F_1\left(\frac{R}{r} - \cos 30°\right) + 2F_2\cos 60° - G\cos 60° + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0{,}6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0{,}3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x.

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ = 3 рад/с^2.

Задача 61. Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M, приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30º происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2. Радиусы ступеней барабана 3: R_3, r_3, радиус инерции барабана i_3.

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от

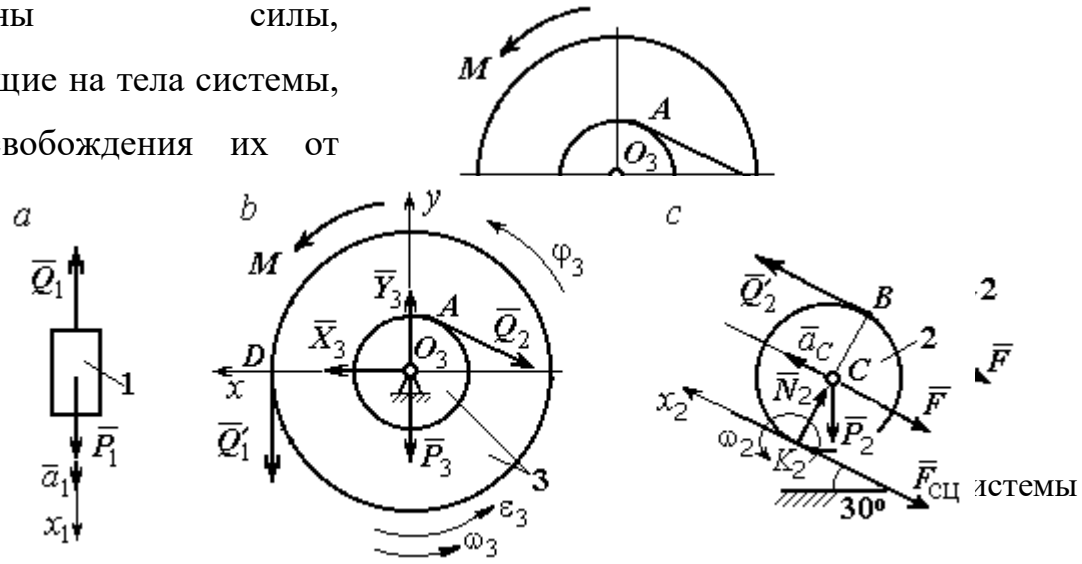


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

связей и направление движения каждого тела.

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1, ускорением a_1. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, *a*). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1 .$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через центр масс O_3. На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$), пара сил с моментом M и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1' R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1' 3r + Pr - Q_2 r ,$$

Момент инерции барабана относительно оси z: $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \dfrac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2' - 3P - F_{\text{сц}} - P ;$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q_2' R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2' 2r + F_{\text{сц}} 2r , \quad J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} .$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см. рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK_2} = \dfrac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{R_2} = \dfrac{a_C}{2r}$.

Скорость точки *B* катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки *A* к скорости точки *B* (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \dfrac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ получим систему:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1; \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

откуда находим: $a_C = 0{,}09g$, $Q_1 = 0{,}92P$, $Q_2 = 2{,}14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, *b*), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси *x*, *y* имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0{,}92P$ и $Q_2 = 2{,}14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1, радиусом r_1, ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1 g r_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, походящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

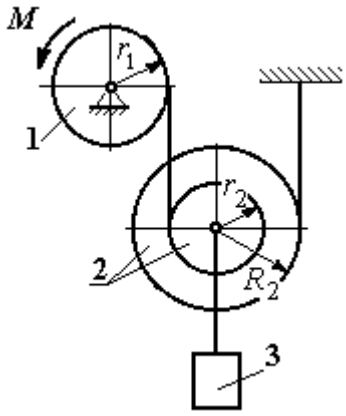


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

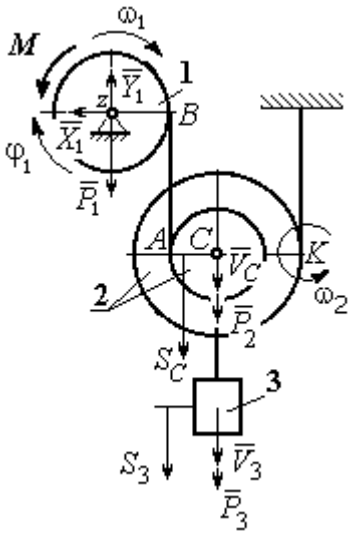


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси *z*. Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где *CK* – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A. Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\omega_2 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2}\left[\frac{m_1}{2}\left(1+\frac{r_2}{R_2}\right)^2 + m_2\left(1+\frac{i_{2C}^2}{R_2^2}\right) + m_3\right] = \frac{209}{64}m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M. Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует соотношение $\varphi_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M\frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2}\right]S_3 = \frac{15}{4}m_1 g S_3.$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64}m_1 V_3^2 = \frac{15}{4}m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209}g S_3.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3\dfrac{dV_3}{dt}=\dfrac{240}{209}g\dfrac{dS_3}{dt}$. Так как $\dfrac{dS_3}{dt}=V_3$, а $\dfrac{dV_3}{dt}=a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3=\dfrac{120}{209}g$ м/с^2.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3. Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x: $m_3a_3=P_3-H_3$, где H_3 –реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3=\dfrac{178}{209}m_1g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

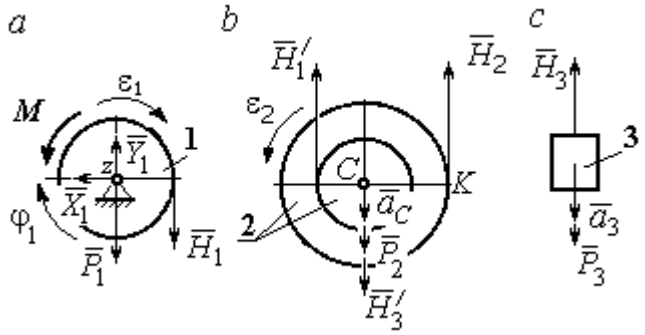


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1=\sum M_z(F_k)=H_1r_1-M$. Момент инерции диска 1 относительно оси z, $J_{1z}=\dfrac{m_1r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, *b*) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции

на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \;\; J_{2C}\varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2 .$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, *c*). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3 ,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \dfrac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует:

$a_3 = a_C$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}_3'$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8} m_1 a_3 = H_1 - m_1 g ; \;\; 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3 ;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1 ; \;\; 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3 .$$

Решая систему, найдём $a_3 = \dfrac{120}{209} g$ м/с^2, $H_3 = \dfrac{178}{209} m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными

выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P, радиуса r. Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r. Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

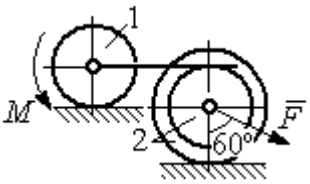


Рис. 5.26. Система катков

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r, затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2{,}5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреплён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

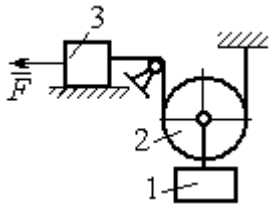


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r. Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

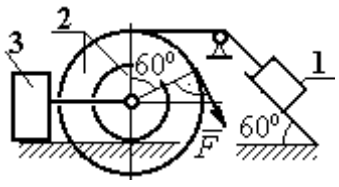


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

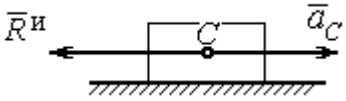


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

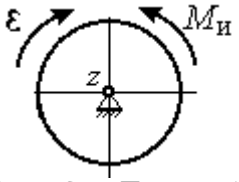


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3).

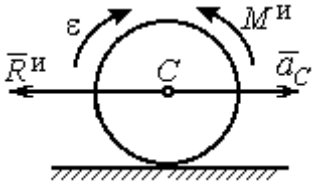


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{\text{и}} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{\text{и}} = 0,\ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{\text{и}} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ –внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{\text{и}}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{\text{и}}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра *O*.

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы m_1 = 10 кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60º с горизонтом, и посредством нити, переброшенной через блок 2, укреплённый в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы m_3 = 5 кг (рис. 6.4). Клин *ABC* массы m_4 = 15 кг стоит гранью *AC* на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ *E*.

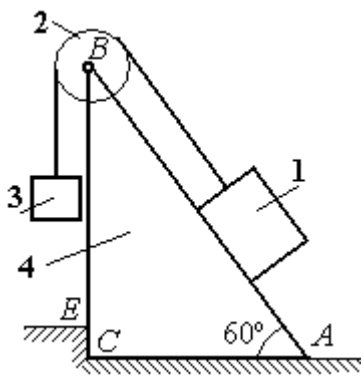


Рис. 6.4. Клин с грузами

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина *ABC*, блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в

выступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира *B* блока 2 для данной системы являются внутренними.

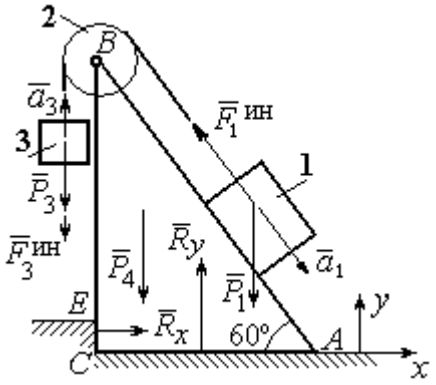


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_3^{ин} = 0$.

Выберем оси *xy*, как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось *x*. Получим: $R_x - F_1^{ин}\cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a*, *b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы: силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{ин}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось *x*, расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{ин} = 0$, где $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

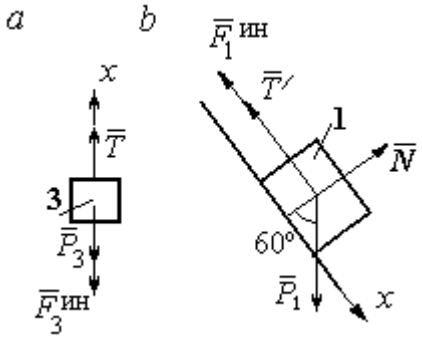


Рис. 6.6. Равновесие грузов

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{ин}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравнение

равновесия системы сил в проекции на ось *x*, выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим: $a_1 = a_3 = \dfrac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}$. Тогда давление клина на уступ:

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ .$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём R_x = 11,97 Н.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3. Лебёдка установлена на горизонтальной балке *AB*, которая закреплена в точке *A* на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке *B*. Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

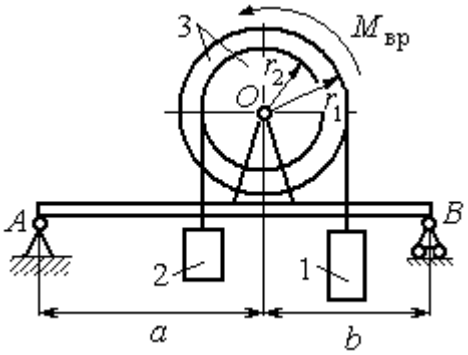


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана r_1 = 0,8 м, r_2 = 0,2 м, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3=0,6 м, масса груза 1 m_1 = 100 кг, противовеса 2 m_2 =30 кг, масса барабана m_1 = 50 кг, величина вращающего момента $M_{\text{вр}}$ = 1050 Н·м, расстояния от крайних точек балки *A* и *B* до линии вертикального диаметра барабана *a* = 2 м, *b* = 1 м.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O. Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

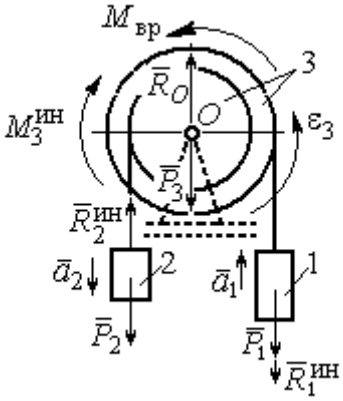


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0; \;\; M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}} r_2 + P_2 r_2 - P_1 r_1 - R_1^{\text{ин}} r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3 i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{r_1}$ и $a_2 = \dfrac{r_2}{r_1} a_1$, найдём ускорение груза 1: $a_1 = \dfrac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2 r_2 - P_1 r_1)}{m_3 i_3^2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}$. Подставляя данные задачи, получим a_1 = 3,49 м/с^2.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$=349 Н; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$ = 26,17 Н.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O:

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088{,}63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O, реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B. Составим уравнения равновесия балки:

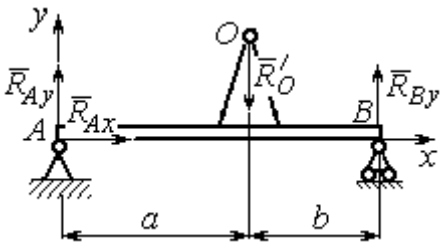


Рис. 6.9. Равновесие балки

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0,\ \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a+b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём реакции опор балки: $R_{By} = R_O \dfrac{a}{a+b}$ = 1392,42 Н; $R_{Ay} = R_O - R_{By}$ = 696,21 Н.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане R_{By} = 1419,18 Н, R_{Ay} = 346,62 Н.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m. Массой нити и блока пренебречь.

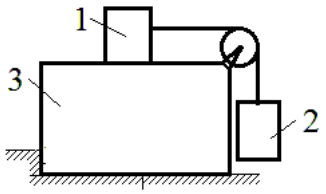


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для

которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0.$

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1, нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1.

Какой вращающий момент M, постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P, прикреплённый в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

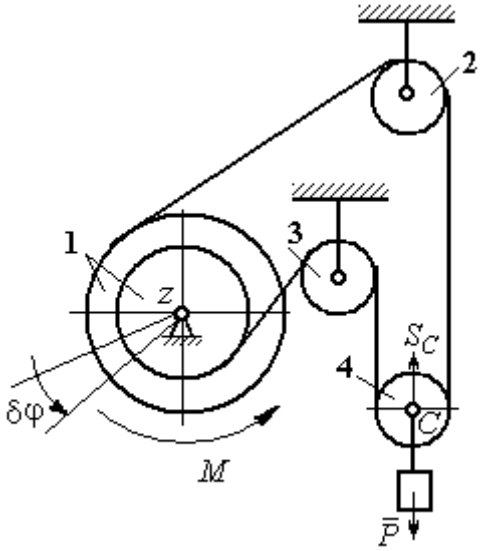


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M. По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C. Предположим, в механизме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки *K*. Здесь скорость точки *A* блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки *B* – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию $\frac{V_B}{V_A}=\frac{BK}{AK}=\frac{r_4+CK}{r_4-CK}$, где r_4 – радиус блока 4 (см. рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек *A* и *B* $V_A=\omega_1 r_1$, $V_B=\omega_1 R_1$, найдём расстояние: $CK=\frac{(R_1-r_1)r_4}{R_1+r_1}$.

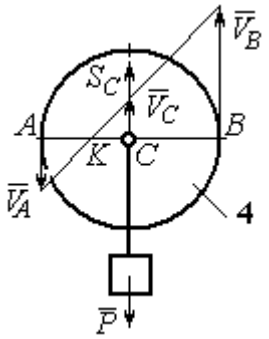


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_B}{r_4+CK}=\frac{\omega_1(R_1+r_1)}{2r_4}$. Скорость его центра: $V_C=\omega_4\cdot CK=\frac{\omega_1(R_1-r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки *C* и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме: $dS_C=d\varphi_1\frac{(R_1-r_1)}{2}$. Поскольку действительное перемещение является одним из возможных (т. е. $ds=\delta s$, $d\varphi=\delta\varphi$), получим связь между возможными перемещениями барабана 1 и груза: $\delta S_C=\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}$.

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных перемещений, представим его в окончательном виде: $M\delta\varphi_1-P\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}=0$, откуда найдём значение уравновешивающего момента: $M=\frac{P(R_1-r_1)}{2}$.

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r, и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = =Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

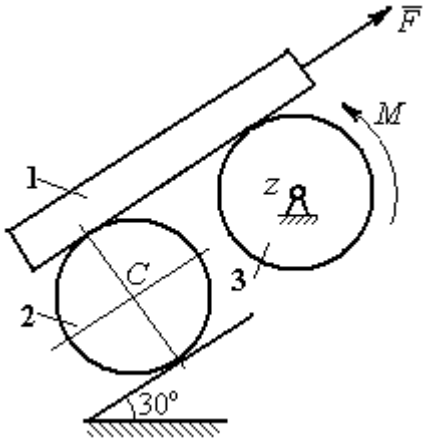


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

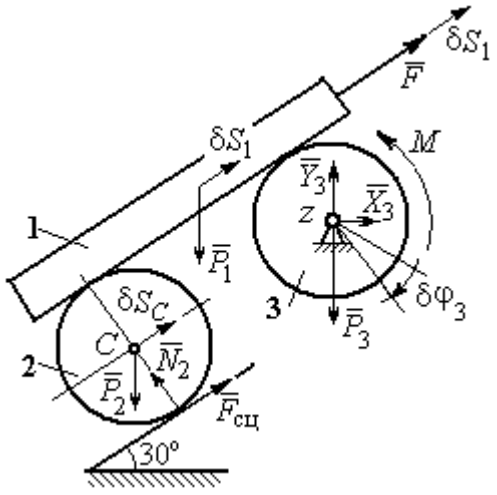


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда центр

катка 2 переместится на расстояние δS_C, а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1. Допустим, скорость бруса равна V_1. Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом *M*, приложенных к блоку 2.

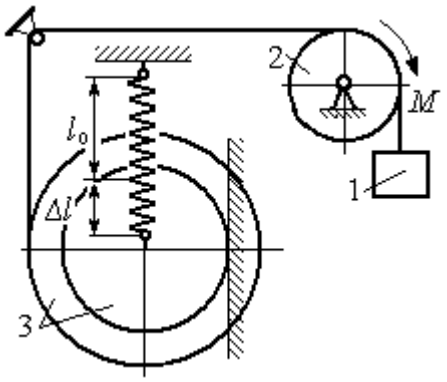


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

Каток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов *r* и *R* = 2*r* с общей массой 3*m*. Масса груза 1 равна *m*. При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg/r$.

Какой величины уравновешивающий момент *M* приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2.

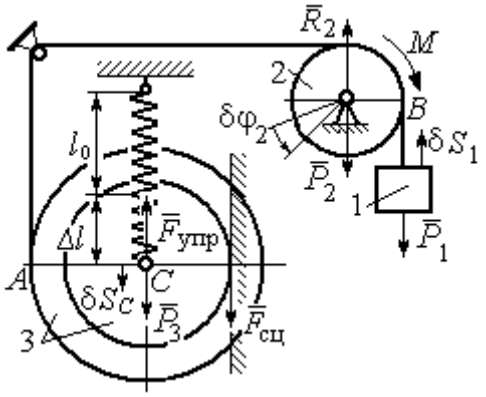


Рис. 6.16. Расчётная схема уравновешивания ролика

Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C, направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1. Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C. Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C. Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \dfrac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r} = \dfrac{R+r}{r^2}V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r}\delta S_C = 3\delta S_C;\ \ \delta\varphi_2 = \frac{R+r}{r^2}\delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3\delta S_C - c\Delta l\delta S_C + M\frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравновешивающего момента $M = \frac{1}{3}mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой *F*, приложенной к внешнему рычагу, и силой *Q*, сжимающей деталь *A* вдоль центральной оси.

Длины рычагов *a*, *b*, *c*, *d* показаны на рис. 6.17.

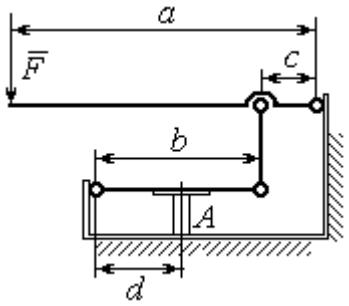


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными валы (рис. 6.18).

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скреплённых на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравновешивающего момента M_2, приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса *P*.

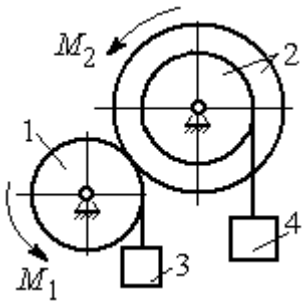


Рис. 6.18. Схема уравновешивания валов

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M. Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с, если P_1= 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_{2C} = 0,6 м.

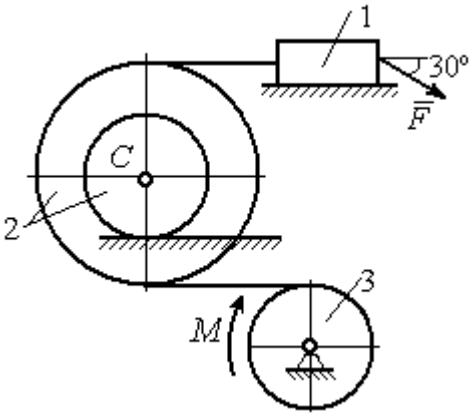


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция шарнира O блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

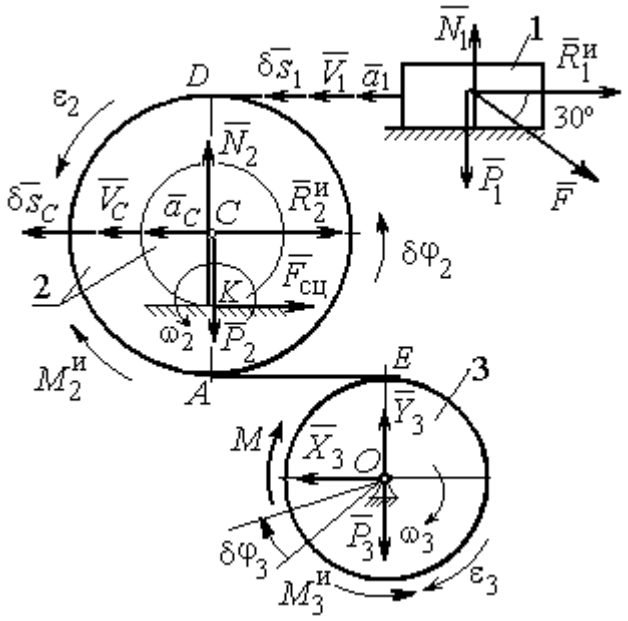


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении поворота, создаваемого моментом M. Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2, а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{\text{и}}$, $\vec{R}_2^{\text{и}}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{\text{и}}$, $\vec{M}_3^{\text{и}}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение

динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 (R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2}.$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_E}{R_3} = V_C \dfrac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2 (R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0; \ \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0; \ \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C .$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\frac{(R_2 + r_2)}{r_2}a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{r_2}a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = -R_1^{\text{и}}\delta s_1 = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = -R_2^{\text{и}}\delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2}\delta s_C .$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{gr_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{gr_2^2}\delta s_C -$$

$$-\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2gr_2^2}\delta s_C = -52{,}75\, a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0{,}02 + 0{,}45t .$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0{,}02 + 0{,}45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0{,}01t^2 + 0{,}075t^3 .$$

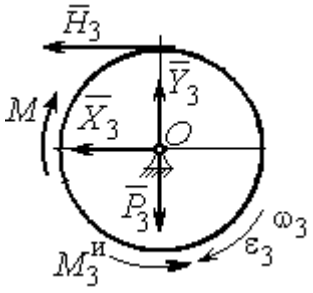


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21). Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен нулю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения: $M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \dfrac{M}{R_3} - \dfrac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1)$ = 0,7 Н·м и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени t = 1 с, $M(1)$ = 9 Н·м найдём реакцию нити $H_3(1)$= 20,75 Н.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0,\ Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с: X_3 = – 20,75 Н, Y_3 =15 Н. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 25,6 Н.

Задача 69. Груз 2 весом P_2, поднимаемый лебёдкой (рис. 6 22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3. Нерастяжимая нить одним концом прицеплена к грузу 1 весом P_1, лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок B, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

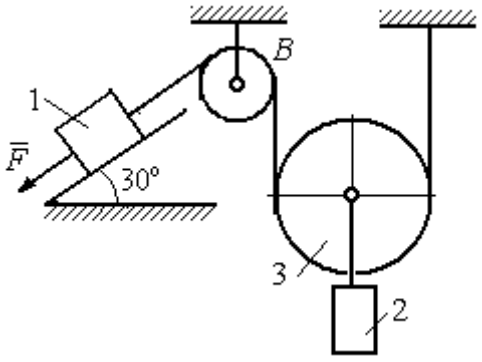


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока B и

реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1. Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

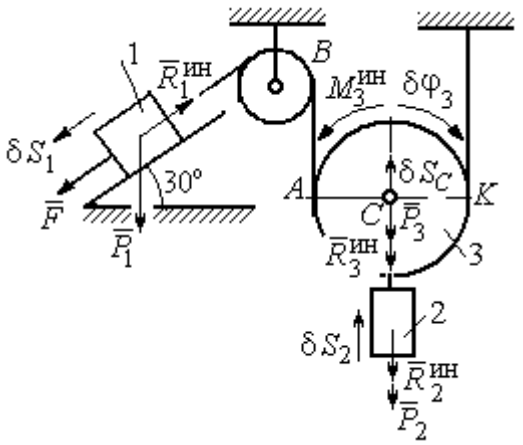


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1. В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C, а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1\delta S_1\cos 60° - P_2\delta S_2 - P_3\delta S_C -$$

$$- R_1^{\text{ин}}\delta S_1 - R_2^{\text{ин}}\delta S_C - R_3^{\text{ин}}\delta S_C - M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$, $R_3^{ин} = m_3 a_C$, $M_3^{ин} = \frac{m_3 r^2}{2}\varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta\varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \frac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \frac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\frac{1}{2}P\delta S_1 = \frac{17}{8g}Pa_1\delta S_1$.

Отсюда $a_1 = \frac{4}{17}g = 0{,}23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \frac{a_1}{2} = 0{,}12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0{,}12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0{,}06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

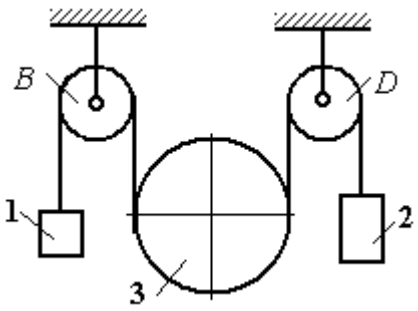


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D. Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо составлять для каждого из независимых перемещений.

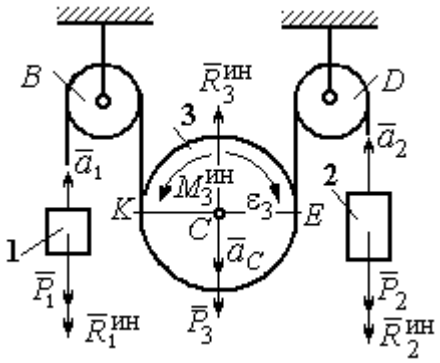


Рис.6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ε_3, направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{\text{ин}} = J_{3C}\varepsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \dfrac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела.

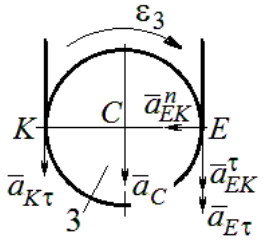


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Выберем точку K за полюс. Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}^{\,n}_{EK} + \vec{a}^{\,\tau}_{EK}$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K; $\vec{a}^{\,n}_{EK}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{EK}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$. Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a^{\tau}_{EK}$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a^{\tau}_{EK} = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \dfrac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a^{\tau}_{CK} = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D. Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2.

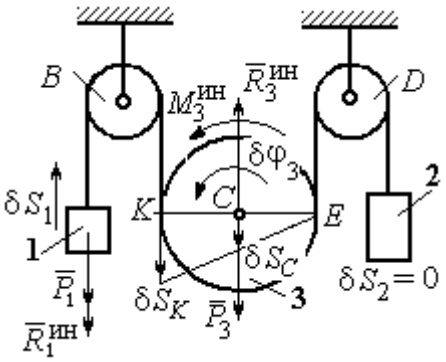


Рис.6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1, а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \frac{V_K}{2r} = \frac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \frac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) + \sum \delta A\left(\vec{R}_k^{\text{ин}}\right) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C}\varepsilon_3\delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3 a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей блока 3.

Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

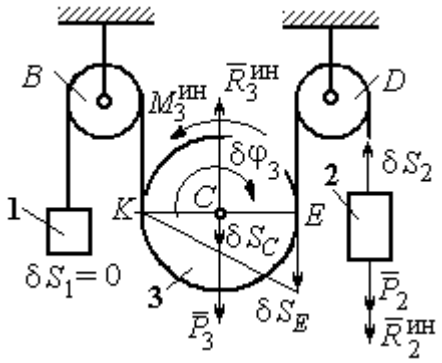


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{ин}$, $\vec{R}_3^{ин}$ и пара сил с моментом $M_3^{ин}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{ин}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{ин}\delta s_C - M_3^{ин}\delta\varphi_3 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{a_2-a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3 a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2, получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2.

Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса r и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов r и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень, двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{\text{вр}} = mgr\sin\omega t$.

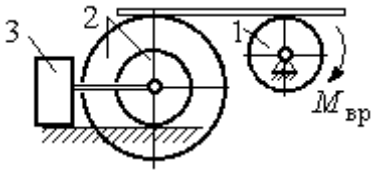


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1{,}5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t+1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны P, вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана r и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

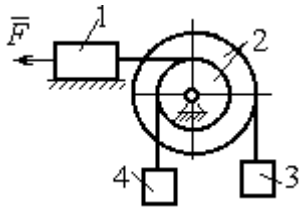


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$, называемые **вариациями обобщенных координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина Q_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей

данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1,2,...,s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, ..., q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы m_5 = 50 кг.

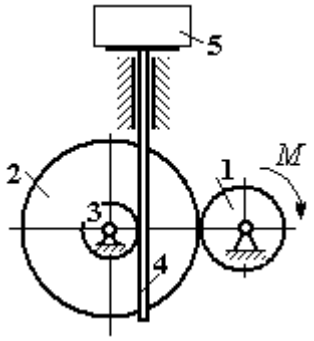


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс r_1 = 5 см, r_2 = 12 см, r_3 = 6 см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс m_1 = 0,8 кг, m_2 = 1,6 кг, m_3 = 0,6 кг, масса зубчатой рейки m_4 = 1 кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени t = 2 с груз 5 имел скорость V_5 = 1 м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату x, отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты x имеет вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1=\frac{J_1\omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1=\frac{m_1r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно: $T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}$, $T_3=\frac{J_3\omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2=\frac{m_2r_2^2}{2}$, $J_3=\frac{m_3r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5=V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5: $T_4=\frac{m_4V_4^2}{2}$, $T_5=\frac{m_5V_4^2}{2}$.

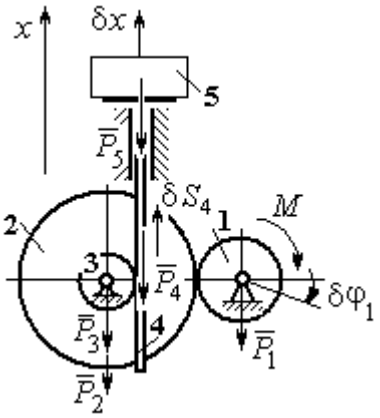


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

Имеем: $\omega_2=\omega_3=\frac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2r_2=\omega_1r_1$ следует $\omega_1=\frac{\omega_2r_2}{r_1}=\frac{V_4r_2}{r_1r_3}$.

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{4}\left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} =$$

$$= \left[\frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5\right]\frac{V_4^2}{2} = 28{,}05 V_4^2 = 28{,}05\,\dot{x}^2.$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4, а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5\delta x - P_4\delta s_4 + M\delta\varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 r_3}\delta x$. В результате сумма работ сил на возможном перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M\frac{r_2}{r_1 r_3}\right)\delta x$. Отсюда обобщённая сила Q_x, соответствующая координате *x*: $Q_x = -(m_5 + m_4)g + M\frac{r_2}{r_1 r_3} = -500{,}31 + 40M$.

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56{,}1\,\ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение движения имеет вид: $56{,}1\,\ddot{x} = -500{,}31 + 40M$ или $\ddot{x} = -8{,}92 + 0{,}71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8{,}92+0{,}71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13{,}27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c. Радиусы ступеней блока r и $R = 1{,}5r$, радиус катка 3 равен r. Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M. Качение катка по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

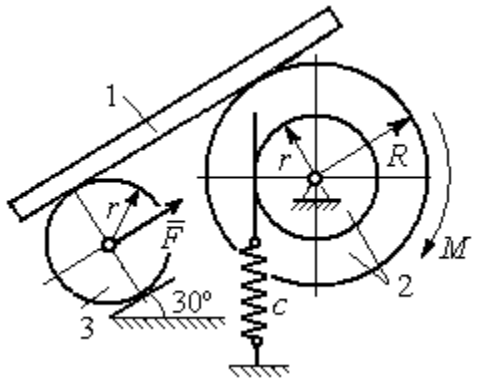


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x

верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате *x*.

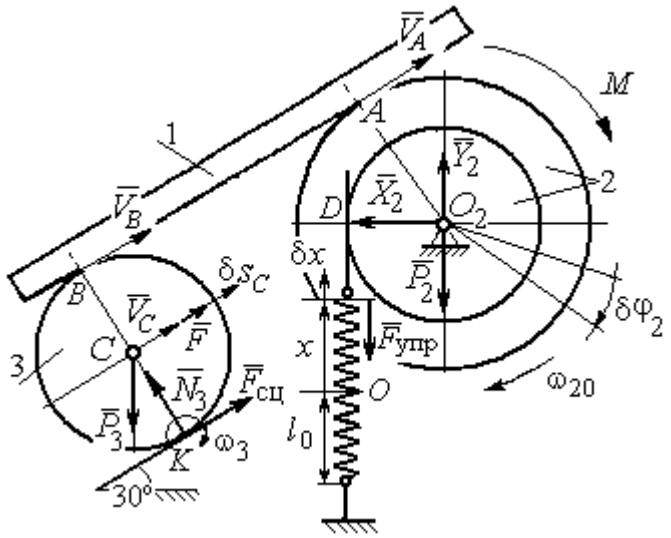


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси *z*, $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C, ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2, ω_3, а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$.

Скорость точки *A* блока 2: $V_A = \omega_2 R = \dfrac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек *A* и *B* равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \dfrac{V_B}{2r} = \dfrac{V_A}{2r} = \dfrac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \dfrac{V_B}{2} = \dfrac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой *x*, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси *x* (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta s_C = \dfrac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом *M*, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\dfrac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 120^\circ = -P_3\dfrac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F: $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\dfrac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{2P}{g}\left(2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ и, подставляя их в общий вид уравнений Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10{,}2x = 4{,}34 \text{ (здесь } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2\text{).}$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10{,}2}$ = 3,19 рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив

его в уравнение колебаний, получим: $b = 0{,}42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3{,}19t + C_2 \cos 3{,}19t + 0{,}42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, то при $r = 0{,}2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3{,}19 C_1 \cos 3{,}19t - 3{,}19 C_2 \sin 3{,}19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}03 \sin 3{,}19t - 0{,}42 \cos 3{,}19t + 0{,}42$ м. Уравнение колебательного движения блока 2: $\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = 0{,}15 \sin 3{,}19t - 2{,}1 \cos 3{,}19t + 2{,}1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r. Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет 30º. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными

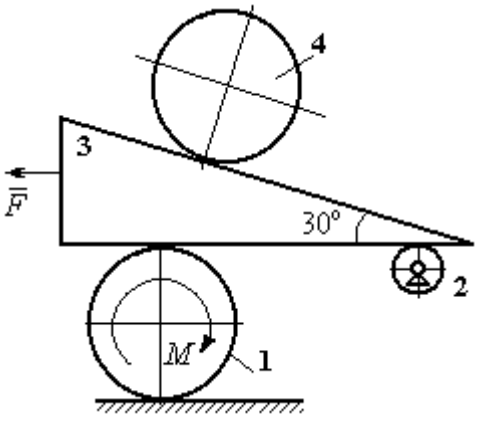


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

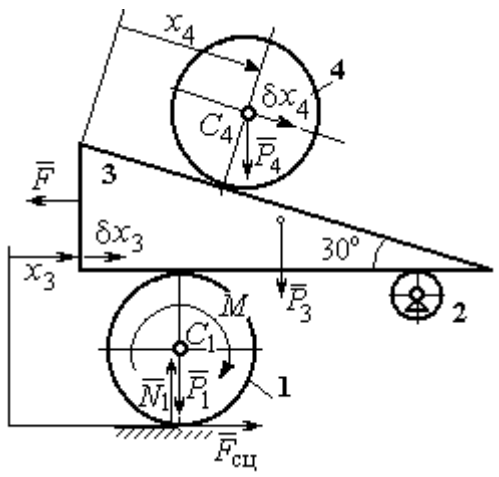


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$; J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}$.

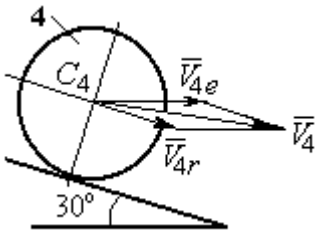


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

При расчёте кинетической энергии катка 4 по формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ .$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении $\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}$.

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

$$= \frac{P}{2g}\left(\frac{27}{8}\dot{x}_3^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_4^2 + \dot{x}_3\dot{x}_4\sqrt{3}\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M, приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r}\right)\delta x_3 .$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4 \delta x_4 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}P\delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4: $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3;\ \ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6{,}75\ddot{x}_3 + 1{,}73\ddot{x}_4 = g\,; \;\; 3\ddot{x}_4 + 1{,}73\ddot{x}_3 = g\,.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0{,}07g$, $\ddot{x}_4 = 0{,}29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0{,}035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0{,}145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины *c*. Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен *r*. Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса *R*. К блоку 3 приложена пара сил с моментом *M*. Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0.

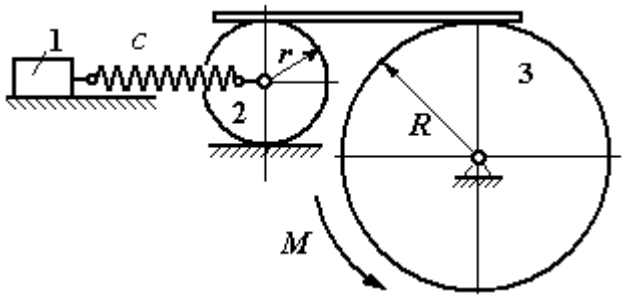


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно P_1 = 10 Н, P_2 = 20 Н, P_3 = 30 Н, M = 5 Н·м, R = 24 см, c = 207 Н/м, Δl_0 = 5 см.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

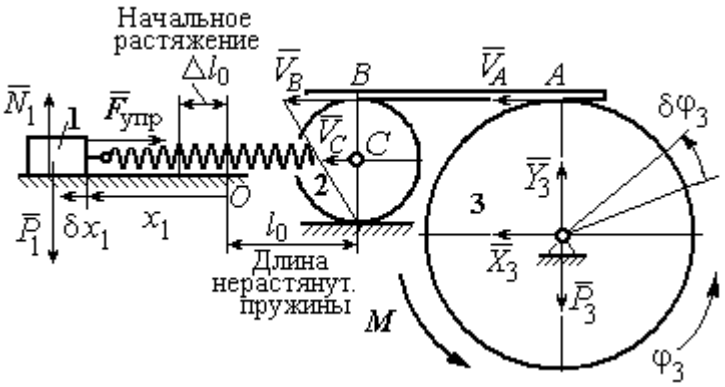


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2} V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизонтальную ось. Полагая, что движение системы происходит в

положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_\varphi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и φ_3.

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R \right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4} m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3: $T_3 = \frac{1}{2} J_{3z} \omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Окончательно $T_3 = \frac{1}{4} m_3 \dot{\varphi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R)^2 + \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi}_3 R + \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{4} m_3 \right) \dot{\varphi}_3^2 R^2.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta\varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1: $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x, соответствующая координате x_1: $Q_x = -cx_1 = -207\,x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta\varphi_3$: $\delta\varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка *C* движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta\varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\dot{\varphi}_3;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2}m_1R\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\dot{\varphi}_3R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\ddot{\varphi}_3;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{1}{2}m_1R\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\ddot{\varphi}_3R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\varphi}_3$:

$$1{,}02\ddot{x}_1 + 0{,}12\ddot{\varphi}_3 = -207x_1;\ \ 0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительных колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4{,}35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: b = – 0,02.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1 \sin 15t + C_2 \cos 15t - 0{,}02.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние Δl_0 = 0,05 м. Следовательно, $x_{01} = 0{,}05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0{,}07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15 \cos 15t - C_2 15 \sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1 $\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0{,}07\cos 15t - 0{,}02 \text{ м}.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим: $\ddot{\varphi}_3 = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\dfrac{d\omega_3}{dt} = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33{,}33t + 0{,}84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 3: $\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + C_3 t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0{,}056$, $C_3 = =0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + 0{,}056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0{,}06\cos 15t - 0{,}01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r, движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P / r$, прикреплённой одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

Найти закон движения груза 2 и максимальное растяжение пружины, если движение системы началось из состояния покоя при недеформированной пружине.

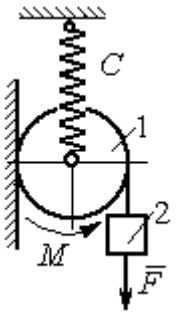


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом P_1 = 20 Н и P_2 = 30 Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки *B* и *D* и охватывает снизу подвижный блок 3 весом P_3 = 40 Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков *B* и *D* пренебречь.

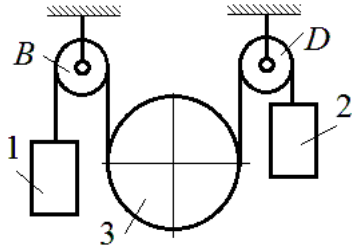


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса *r* весом *P* катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом *M* = 2*Pr*. Каток передаёт движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса *r* и веса *P*, который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы *F* = *P*, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

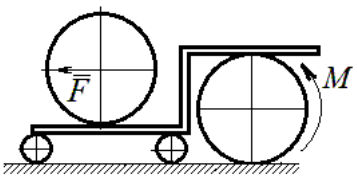


Рис. 6 42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

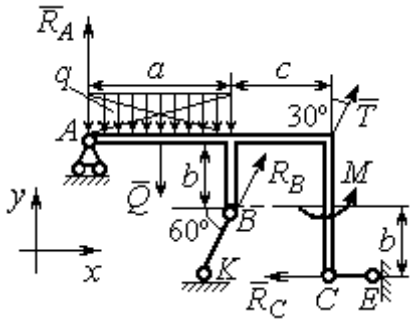


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$T = 15$ кН, $Q = 15$ кН.

$$R_B\cos 60^\circ + T\cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B\cos 30^\circ + T\cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{a}{2} + R_B\cos 30^\circ\cdot a + R_B\cos 60^\circ\cdot b + T\cos 30^\circ\cdot(a+c) + + M - R_C\cdot 2b = 0.$$

$R_B = -3{,}8$ кН, $R_C = 5{,}6$ кН, $R_A = 5{,}3$ кН.

1.2

$Q = 9$ кН. $T = 2$ кН.

$$X_A + T\cos 30^\circ + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60^\circ + R_B - T\cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{c}{2} + R_B(b + c\cos 60^\circ) - Fc\cos 60^\circ + M -$$

$$-T\cos 60^\circ(b + c\cos 60^\circ) - T\cos 30^\circ(a + c\sin 60^\circ) = 0.$$

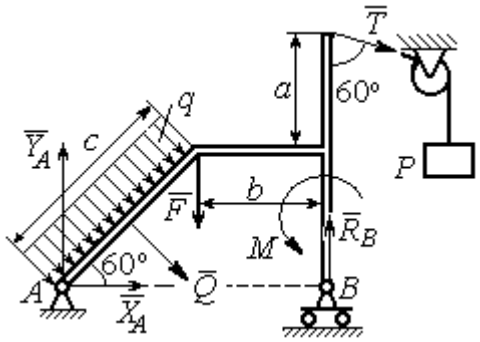


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

$R_B = 10{,}02$ кН, $X_A = -9{,}53$ кН, $Y_A = -0{,}52$ кН.

1.3

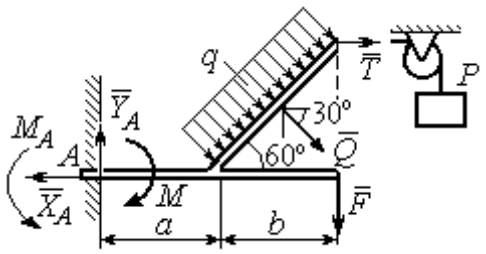


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$Q = 8$ кН. $T = 3$ кН.

$$-X_A + T + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-T\,2b\cos 30^\circ - F(a+b) + M_A - M\ -$$

$$-Q\cos 60^\circ\left(a + \frac{b}{2}\right) - Q\cos 30^\circ\left(b\cos 30^\circ\right) = 0.$$

$M_A = 18{,}61$ кН·м, $X_A = 9{,}93$ кН, $Y_A = 6$ кН.

1.4

$Q = 6{,}93$ кН, $T = 2$ кН.

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - Fa\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

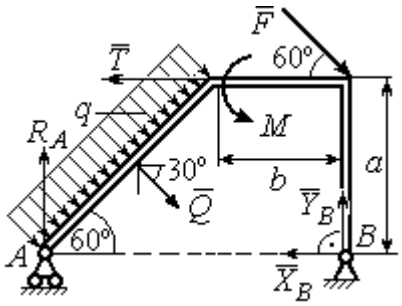


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

$R_A = 0{,}72$ кН, $X_B = -5{,}5$ кН, $Y_B = 5{,}34$ кН.

1.5

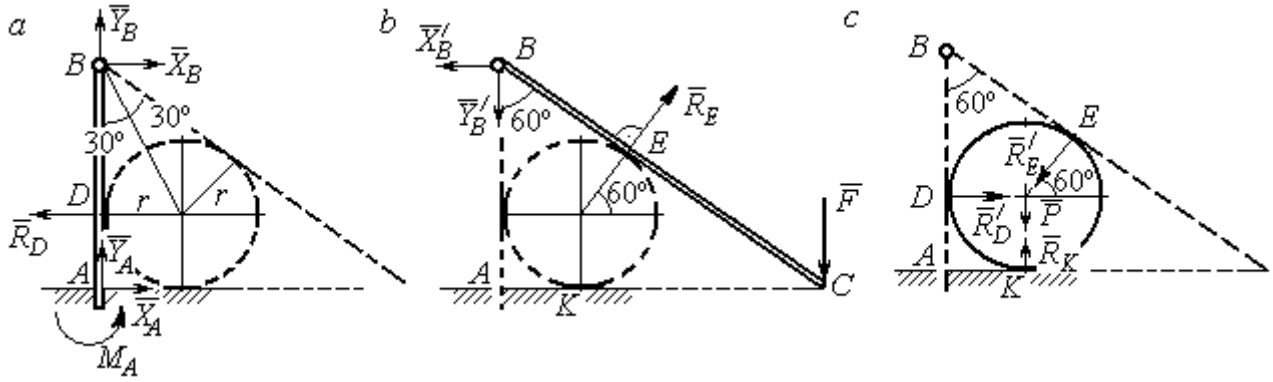


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$, $R_D = R'_D$, $R_E = R'_E$.

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\,\mathrm{ctg}\,30^\circ = 2{,}73$ м.

$$X_A - R_D + X_B = 0,\ Y_A + Y_B = 0,\ M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка BC. $BE = BD$ = 1,73 м. $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ$ = 4,73 м.

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0,\ RE\sin 60\circ - Y'B - F = 0,\ R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0,\ R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

R_E = 21,87 кН, Y_B = 10,94 кН, X_B = 10,94 кН, R_D = 10,94 кН;

R_K = 20,94 кН, X_A = 0, Y_A = – 10,94 кН, M_A = 18,93 кН·м.

1.6

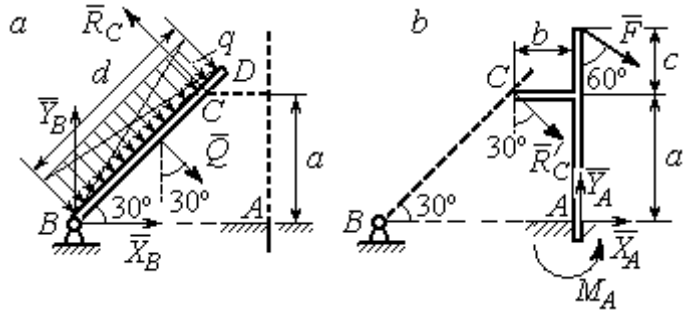


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
a – равновесие балки *BD*; *b* – равновесие балки *AC*

Балка BD. Q = 15 кН.

$$X_B + Q\cos 60^\circ - R_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q\cos 30^\circ + R_C\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q\frac{d}{2} + R_C 2a = 0.$$

Балка AC. $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0,\ Y_A - R'_C\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C\cos 60^\circ \cdot a + R'_C\cos 30^\circ \cdot b - F\cos 30^\circ(a + c) = 0.$$

X_B = 0,61 кН, Y_B = 8,3 кН, R_C = 9,37 кН;

X_A = – 8,15 кН, Y_A = 10,11 кН, M_A = 11,65 кН·м.

1.7

Балка AB. Q_1 = 6 кН.

$T = P$ = 3 кН.

$$X_A + R_B - T\cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T\cos 30^\circ = 0;$$

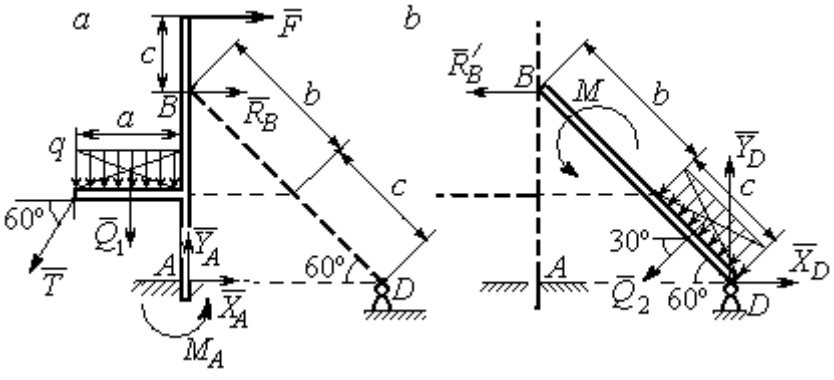


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BD*

$$M_A - R_B(b+c)\cos 30^\circ + Q_1\frac{a}{2} +$$

$$+ T\cos 30^\circ a + T\cos 60^\circ c\cos 30^\circ -$$

$$- F\left[c + (b+c)\cos 30^\circ\right] = 0.$$

Балка DB. $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2\cos 30^\circ = 0,\ Y_D - Q_2\cos 60^\circ = 0,\ M + R'_B(b+c)\cos 30^\circ + Q_2\frac{c}{2} = 0.$$

$X_A = -1{,}49$ кН, $Y_A = 8{,}6$ кН, $M_A = 8{,}86$ кН, $R_B = -1{,}01$ кН;

$X_D = 1{,}59$ кН, $Y_D = 1{,}5$ кН.

1.8

Шар.

$$R_B\cos 60^\circ - R_D\cos 60^\circ = 0;$$

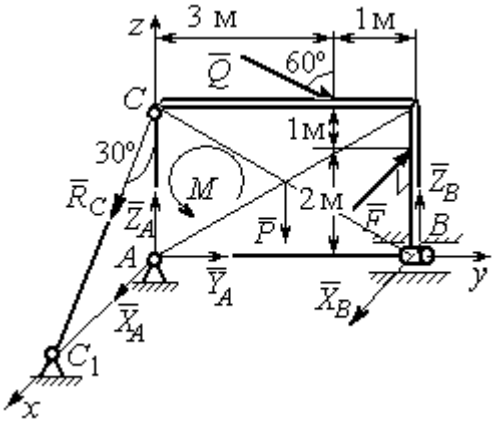


Рис. 7.9. Расчётная схема к упражнению 1.9

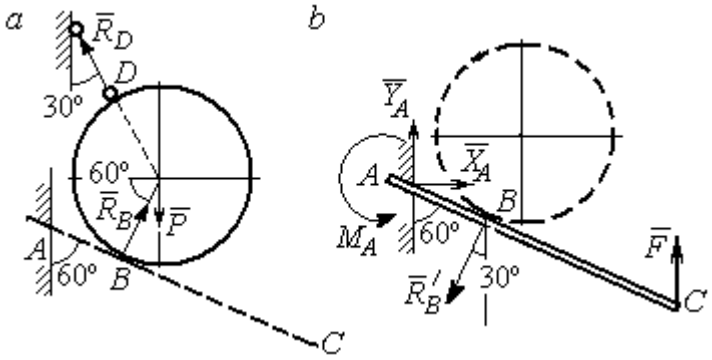


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8: *a* – равновесие шара; *b* – равновесие балки AC

$$R_B\cos 30^\circ + R_D\cos 30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B\cos 60^\circ = 0;\ Y_A - R'_B\cos 30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F\cdot AC\cos 30^\circ = 0.$$

$X_A = 2{,}89$ кН, $Y_A = 0$ кН, $M_A = -11{,}55$ кН·м, $R_B = 5{,}77$ кН, $R_D = 5{,}77$ кН.

1.9

$$X_A + R_C\cos 60^\circ + X_B - F = 0;\ Y_A + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C\cos 30^\circ - Q\cos 60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q\cos 60^\circ\cdot 3 - Q\cos 30^\circ\cdot 3 + Z_B\cdot 4 - P\cdot 2 = 0;$$

$$R_C\cos60^\circ\cdot 3 - F\cdot 2 = 0,\ -X_B\cdot 4 + F\cdot 4 = 0.$$

$$X_A = 5{,}34 \text{ кН},\ Y_A = 2{,}6 \text{ кН};$$

$$Z_A = 8{,}92 \text{ кН},\ R_C = 10{,}67 \text{ кН};$$

$$X_B = 8 \text{ кН},\ Z_B = 3{,}82 \text{ кН}.$$

1.10

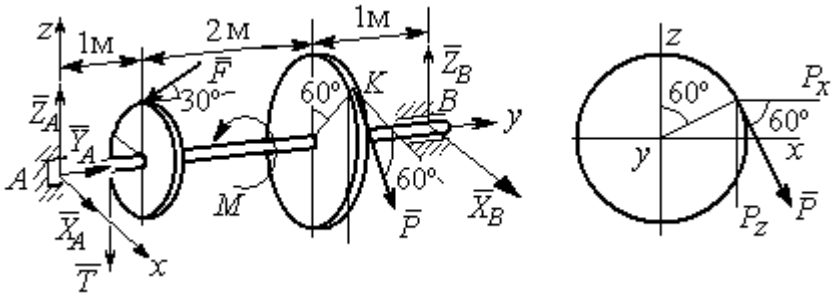


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$T = Q = 3$ кН.

$$X_A + P\cos60^\circ + X_B = 0,\ Y_A - F\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos60^\circ - P\cos30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T\cdot 1 - F\cos60^\circ\cdot 1 + F\cos30^\circ\cdot r - P\cos30^\circ\cdot 3 + Z_B\cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0,\ -P\cos60^\circ\cdot 3 + X_B\cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}6$ кН, $Y_A = 3{,}46$ кН, $Z_A = 5{,}48$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 2{,}4$ кН, $Z_B = 5{,}06$ кН.

1.11

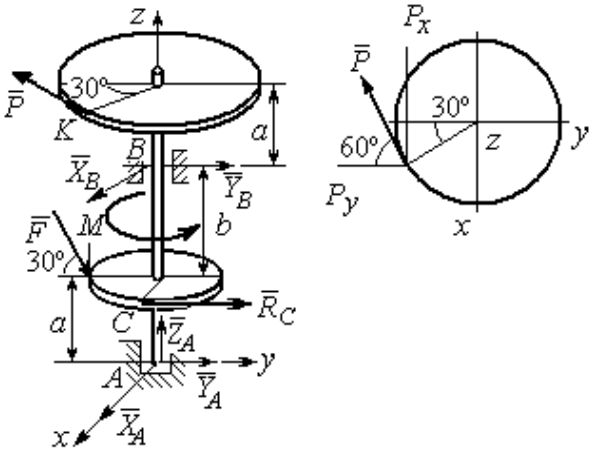


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$R_C = Q = 3$ кН.

$$X_A + X_B - P\cos30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos60^\circ + R_C + F\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos60^\circ(2a+b) - R_C a - -$$

$$F\cos30^\circ\cdot a + F\cos60^\circ\cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$X_A = -1{,}85$ кН, $Y_A = -5{,}64$ кН, $Z_A = 2$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 7{,}39$ кН, $Y_B = 2{,}38$кН.

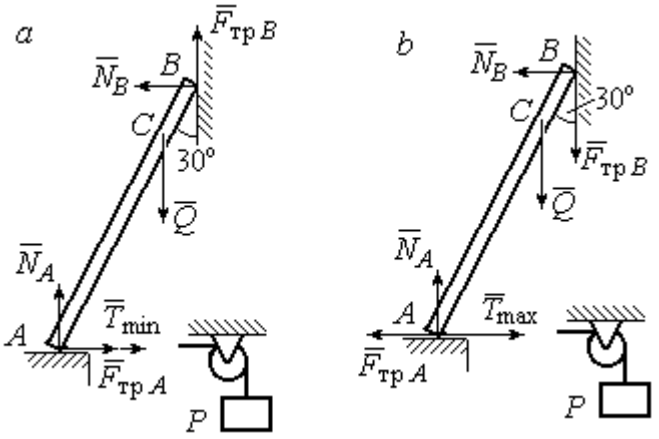


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
a – расчёт минимального веса груза;
b – расчёт максимального веса груза

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + T + X_D = 0;$$

$$Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Fa\sin 30^\circ + Z_D(b + 2a) + P(2b + 2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$Ta\sin 30^\circ - Pa\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b + 2a) + Pa\cos 60^\circ + Fa\cos 30^\circ = 0.$$

$X_A = 0{,}8$ кН, $Y_A = 2{,}56$ кН, $Z_A = 1{,}3$ кН;

$P = 2{,}89$ кН, $X_D = 0{,}76$ кН, $Z_D = -3{,}80$ кН.

1.13

Минимальный вес груза *P*:

$$T_{\min} + F_{\text{тр}A} - N_B = 0; \quad F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0$$

Максимальный вес груза *P*:

$$T_{\max} - F_{\text{тр}A} - N_B = 0; \quad -F_{\text{тр}B} + N_A - Q = 0;$$

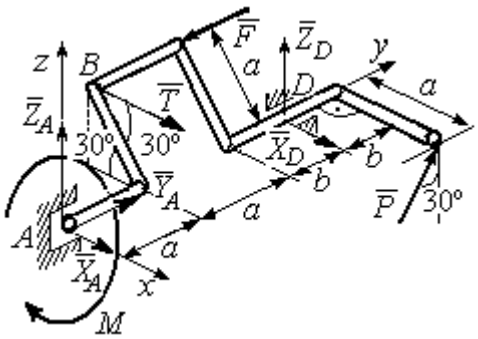


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$-F_{\text{тр}B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0;$$

$$F_{\text{тр}A} = f N_A, \quad F_{\text{тр}B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31.77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130{,}51 \text{ Н}.$$

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266{,}67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666{,}67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a+b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

X_A=346,67 Н, Y_A=266,67 Н.

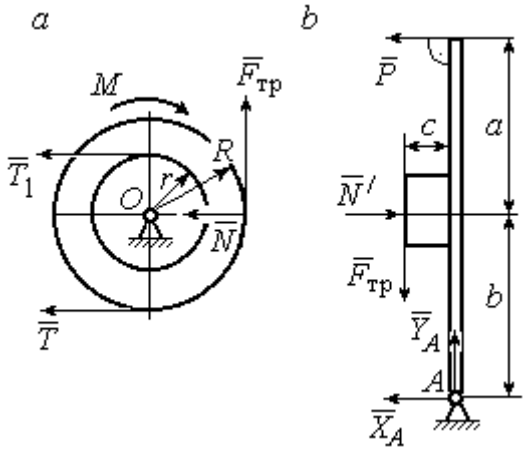


Рис. 7.14. Расчётные схемы к упражнению 1.14: *a* – равновесие шкива; *b* – равновесие рычага

$$\omega_{3z} = \omega_{1z} \frac{R_1}{r_2} \frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi \cos\frac{\pi t}{2}\right)\frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi \cos\frac{\pi t}{2},\ \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3$$

рад/с.

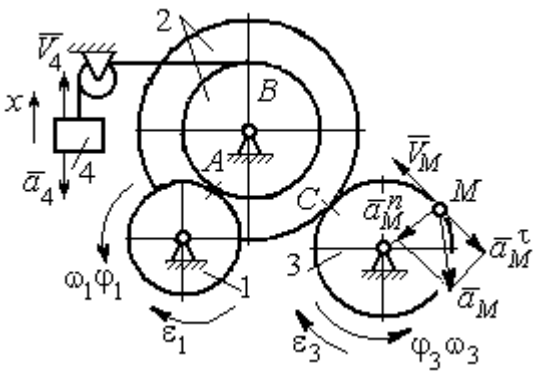


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$V_M(1) = \omega_3(1) R_3 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\frac{\pi t}{2}, \quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6{,}58 \text{ рад/с}^2.$$

$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau$, $a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160$ см/с^2, $a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65{,}8$ см/с^2.

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z}R_1 = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)8; \quad V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с}.$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2\sin\frac{\pi t}{2}, \; \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2; \; a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39{,}48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2{,}05 \text{ м/с}, \; V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6{,}83 \text{ рад/с}; \; \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3}\left(\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}\right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3{,}65 \text{ рад/с}^2; \; \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

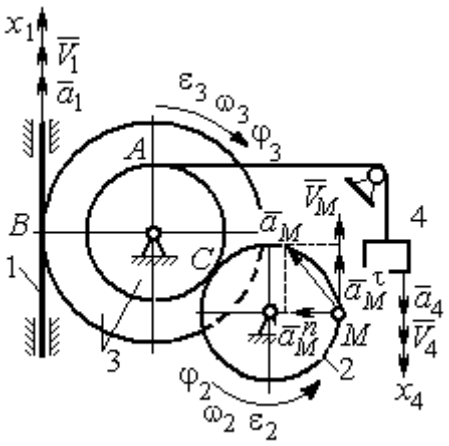


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_3}; \; \omega_2 = \omega_3\frac{r_3}{R_2} = 10{,}25 \text{ рад/с}; \; V_M = \omega_2 R_2 = 2{,}05 \text{ м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_3}; \; \varepsilon_2 = \varepsilon_3\frac{r_3}{R_2} = 5{,}47 \text{ рад/с}^2.$$

$$a_M^n = \omega_2^2 R_2 = 20{,}4 \text{ м/с}^2; \; a_M^\tau = \varepsilon_2 R_2 = 1{,}09 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} = 20{,}43 \text{ м/с}^2.$$

$$V_1 = \omega_3 R_3 = 2{,}73 \text{ м/с}; \; a_1 = \dot{V}_1 = \dot{\omega}_3 R_3 = \varepsilon_3 R_3 = 2{,}19 \text{ м/с}^2.$$

2.3

$BP_2 = BC\cos 30° = 4{,}33$ см; $CP_2 = 2{,}5$ см.

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = 1{,}15 \text{ рад/с};\quad V_C = \omega_{BC} CP_2 = 2{,}87 \text{ см/с};$$

$$\omega_1 = \frac{V_C}{CP_1} = 0{,}72 \text{ рад/с};\quad EP_1 = 2R_1\cos 30^\circ = 3{,}46 \text{ см};$$

$$V_E = \omega_1 EP_1 = 2{,}49 \text{ см/с};\quad EP_3 = 2AE\cos 30^\circ = 10{,}39 \text{ см};$$

$$\omega_{AE} = \frac{V_E}{EP_3} = 0{,}24 \text{ рад/с};\quad EA = AP_3;$$

$$V_A = \omega_{AE} AP_3 = 1{,}44 \text{ см/с},\quad \omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0{,}24 \text{ рад/с}.$$

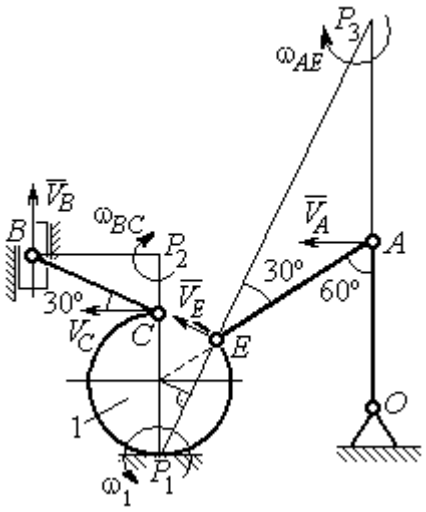


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

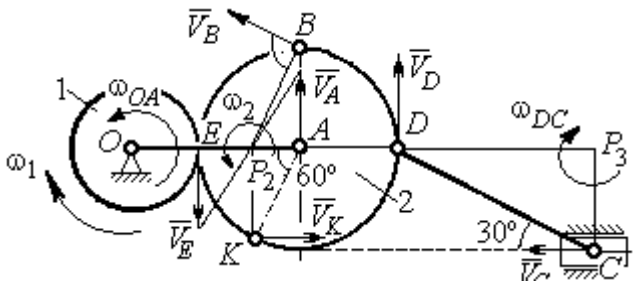


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E = \omega_1 r_1 = 18 \text{ см/с}.$$

$$V_A = \omega_{OA}(r_1 + r_2) = 18 \text{ см/с}.$$

$$EP_2 = P_2 A = 3 \text{ см},\ \omega_2 = \frac{V_E}{EP_2} = 6 \text{ рад/с}.$$

$$V_K = \omega_2 P_2 K = 31{,}18 \text{ см/с}.$$

$$V_B = \omega_2 P_2 B = 40{,}25 \text{ см/с};\ V_D = \omega_2 P_2 D = 54 \text{ см/с}.$$

$$DC = 2r_2,\ \omega_{DC} = \frac{V_D}{DP_3} = 5{,}197 \text{ рад/с};\ V_C\cos 30^\circ = V_D\cos 60^\circ,\ V_C = 31{,}18 \text{ см/с}.$$

2.5

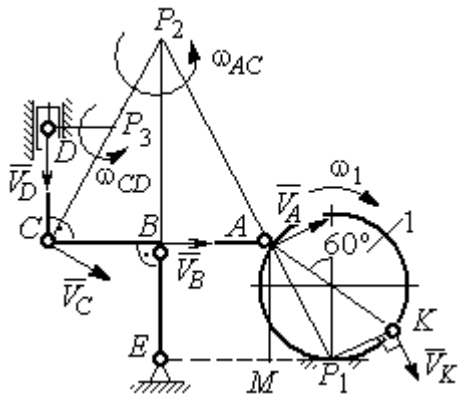


Рис. 7. 19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$$BE = 1{,}5R_1;\ R_1 = 2{,}67 \text{ см}.$$

$$KP_1 = R_1;\ \omega_1 = \frac{V_K}{KP_1} = 0{,}75 \text{ рад/с}.$$

$$AP_1 = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 4{,}62 \text{ см};\ V_A = \omega_1 P_1 A = 3{,}46 \text{ см/с}.$$

$$AP_2 = 2AB = 8 \text{ см};\ \omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}43 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ;\ V_B = 2{,}99 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BE} = \frac{V_B}{BE} = 0{,}75 \text{ рад/с};\ V_C = V_A = 3{,}46 \text{ см/с};\ CP_3 = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62 \text{ см};$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0{,}75 \text{ рад/с};\ V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ;\ V_D = 1{,}73 \text{ см/с}.$$

2.6

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12 \text{ см/с};\ \omega_{AD} = 0,\ V_D = V_A.$$

$$\omega_{O_1C} = \frac{V_D}{DO_1} = 3 \text{ рад/с};$$

$$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48 \text{ см/с}.$$

$$CB = CP = 16 \text{ см};\ \omega_{CB} = \omega_{CL} = \frac{V_C}{CP} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$PL = \frac{CP}{\cos 30^\circ} = 18{,}48 \text{ см};\ PB = 2BC\cos 30^\circ.$$

$$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55{,}44 \text{ см/с};$$

$$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83{,}13 \text{ см/с}.$$

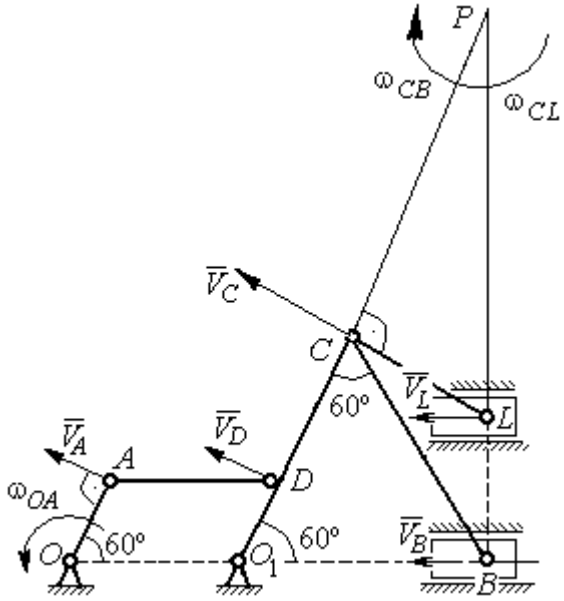


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$V_D = \omega_1 R_1 = 30$ см/с; $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15$ см/с.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21{,}21 \text{ см/с.}$$

$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ$; $V_C = 15$ см/с.

$$CP_3 = CB;\ \omega_{BC} = \frac{V_C}{CP_3} = 1{,}87 \text{ рад/с.}$$

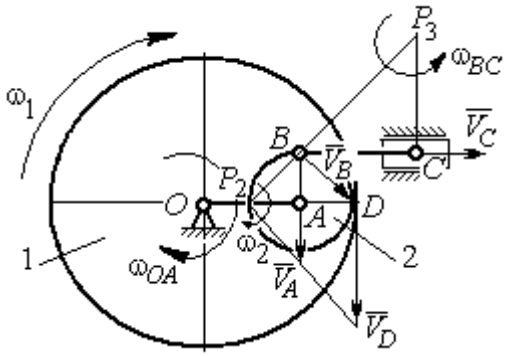


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

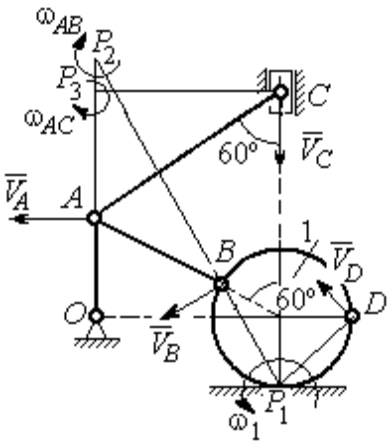


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$AC = AB + R_1 = 12$ см; $CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10{,}39$ см.

$\omega_{AC} = \frac{V_C}{CP_3} = 0{,}48$ рад/с; $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2{,}89$ см/с.

$$AB = AP_2;\ \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ см.}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5{,}02 \text{ см/с.}$$

$OA = (AB + R_1)\sin 30° = 6$ см; $\omega_{OA} = \frac{V_A}{AO} = 0{,}48$ рад/с.

$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3{,}46$ см; $\omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1{,}45$ рад/с.

$$DP_1 = R_1\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ см; } V_D = \omega_1 DP_1 = 4{,}09 \text{ см/с.}$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ см/с;}\quad AP = 2AB = 2BC \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 27{,}71 \text{ см.}$$

$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0{,}43$ рад/с; $V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ$; $V_B = 10{,}38$ см/с.

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA};\quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC},\ a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO},\ a_O = 0.$$

$$\bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO} + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.\ \text{Найти}\ a^\tau_{BC}$$

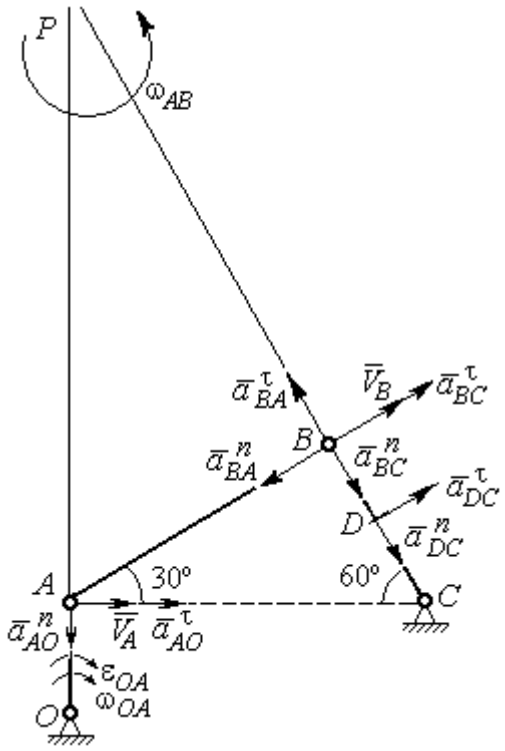


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

$$a^n_{AO} = \omega^2_{AO} \cdot AO = 36\ \text{см/с}^2;$$

$$a^\tau_{AO} = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8\ \text{см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \text{tg}60^\circ = 13{,}86\ \text{см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2{,}56\ \text{см/с}^2;\ \ a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_{BC} \cdot BC = 13{,}31\ \text{см/с}^2;\ \ a^\tau_{BC} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a^\tau_{BC} = -a^n_{AO}\cos 60^\circ +$$

$$+ a^\tau_{AO}\cos 30^\circ - a^n_{BA} = 13{,}63\ \text{см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\left|a^\tau_{BC}\right|}{BC} = 1{,}7\ \text{рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}.$$

$$a^n_{DC} = \omega^2_{BC} \cdot DC = 6{,}65\ \text{см/с}^2;\ \ a^\tau_{DC} = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6{,}8\ \text{см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{\left(a^n_{DC}\right)^2 + \left(a^\tau_{DC}\right)^2} = 9{,}51\ \text{см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12\ \text{см/с};\ P_2A = \frac{1}{2}BC = 5\ \text{см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2A} = 2{,}4\ \text{рад/с}.$$

$$V_B\cos 30^\circ = V_A\cos 60^\circ;\ V_B = 6{,}93\ \text{см/с}.$$

$$P_3B = BC\cos 30^\circ = 8{,}66\ \text{см};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3B} = 0{,}8\ \text{рад/с}.$$

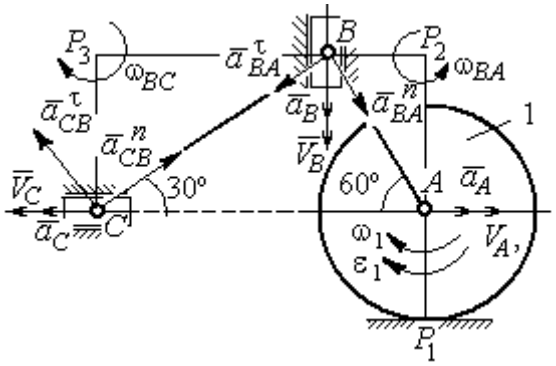


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.\ \text{Найти}\ a_B.$$

Проекция на BA: $a_B\cos30° = a_A\cos60° + a^n_{BA}$.

$$a_A = a^\tau_A = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ см/с}^2;\ AB = BC\operatorname{ctg}30° = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{BA}\cdot BA = 33{,}23 \text{ см/с}^2;\ \ a_B = 43{,}03 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar a_C = \bar a_B + \bar a^n_{CB} + \bar a^\tau_{CB}.$$

Проекция на BC: $a_C\cos60° = a_B\cos60° - a^n_{CB}$,

$$a^n_{CB} = \omega^2_{CB}\cdot CB = 6{,}4 \text{ см/с}^2;\ \ a_C = a_B - 2a^n_{CB} = 30{,}23 \text{ см/с}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 11{,}55 \text{ см}.$$

Так как $CM_1\cos30° = 10$ см $= R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

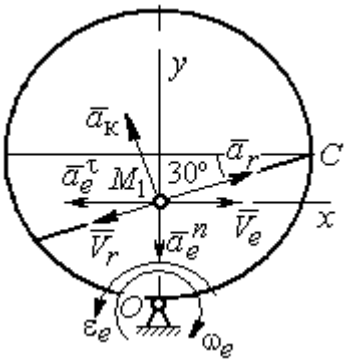


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$V_r = \dot S_r = \frac{40\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ V_r(1) = 6{,}98 \text{ см/с}.$$

$$\omega_e(1) = 0{,}5 \text{ рад/с};\ OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4{,}23 \text{ см}.$$

$$V_e = \omega_e OM_1;\ \ V_e(1) = 2{,}12 \text{ см/с}.$$

$$\bar V_M = \bar V_e + \bar V_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r\cos30° = -3{,}93 \text{ м/с};\ V_{My} = -V_r\cos60° = -3{,}49 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5{,}26 \text{ см/с}.$$

$$\bar a_M = \bar a_e + \bar a_r + \bar a_к.$$

$$\bar a_e = \bar a^n_e + \bar a^\tau_e,\ \ a^n_e = \omega^2_e OM_1;\ \ a^n_e(1) = 1{,}06 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot\omega_e = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3},\ \ \dot\omega_e(1) = -0{,}91 \text{ рад/с}^2;\ \ \varepsilon_e = |\dot\omega_e(1)| = 0{,}91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a^\tau_e(1) = \varepsilon_e\cdot OM_1 = 3{,}85 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27}\sin\frac{\pi t}{3},\ \dot{V}_r(1) = -12{,}66;\ a_r = \left|\dot{V}_r(1)\right| = 12{,}66\ \text{см/с}^2$$

$$a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 6{,}98\ \text{см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r\cos 30° - a_к\cos 60° = 3{,}62\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r\cos 60° + a_к\cos 30° = 11{,}31\ \text{см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11{,}87\ \text{см/с}^2.$$

3.2

Положение M_1:

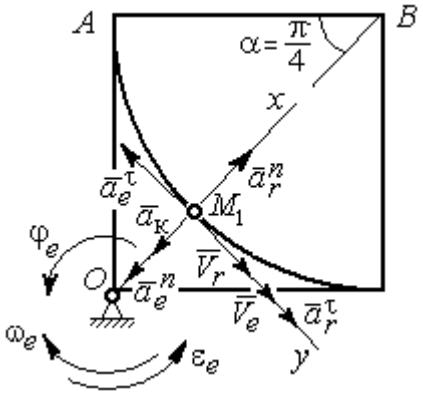


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4};\ \ OM_1 = 8{,}28\ \text{см}.$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t;\ \ V_r = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 31{,}42\ \text{см/с}.$$

$$\dot{\varphi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\varphi}_e(1) = -3\ \text{рад/с},\ \ \omega_e = \left|\dot{\varphi}_e(1)\right| = 3\ \text{рад/с}.$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24{,}6\ \text{см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot\ V_{Mx} = V_e + V_r = 56{,}02\ \text{см/с};$$

$$V_{My} = 0;\ V_M = 56{,}02\ \text{см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau \cdot\ a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74{,}52\ \text{см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2\ \text{рад/с}^2;\ \varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|;\ \ a_e^\tau(1) = \varepsilon_e OM_1 = 16{,}56\ \text{см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi;\ a_r^\tau = \left|\dot{V}_r\right| = 10\pi = 31{,}42\ \text{см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49{,}36\ \text{см/с}^2;\ \ a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 62{,}84\ \text{см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_к = -88\ \text{см/с}^2;\ a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14{,}86\ \text{см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89{,}24\ \text{см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60° - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30° = 0.$$

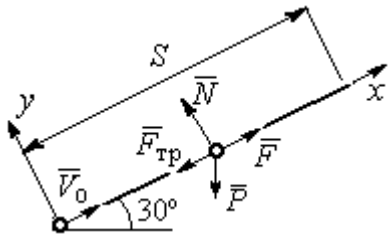


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30°;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3{,}4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3{,}4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1{,}7t^2 + V_0 t.$$

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6{,}8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3{,}4 + V_0.$$

$$k = 8{,}4; \; V_0 = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

4.2

Уравнения движения точки:

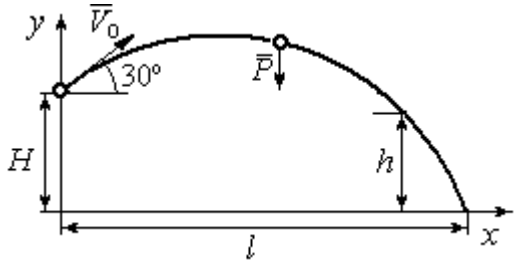


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

$$m\ddot{x} = 0; \; \dot{x} = V_0\cos 30°; \; x = V_0 t\cos 30°.$$

$$m\ddot{y} = -P; \dot{y} = -gt + V_0\cos 60°;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\cos 60° + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h:

$$t = 1 \text{ с}; \; y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3{,}81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \; x = l; \; y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0 t_{\text{пад}}\cos 30°; \; 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0 t_{\text{пад}}\cos 60° + H.$$

Находим: $t_{\text{пад}} = 1{,}64$ с; $l = 5{,}41$ м.

4.3

Уравнение движения груза (рис. 7.29, *a*): $m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}$.

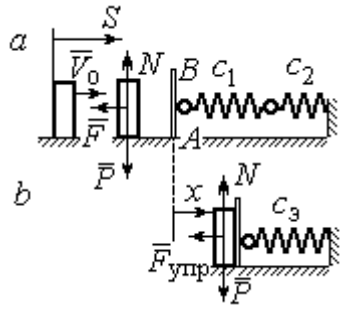


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3: *a* – движение груза до начала колебаний; *b* – колебания груза

Начальные условия: $t = 0$; $S = 0$; $\dot{S} = V_0$.

Решение: $S = \frac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 6\left(1 - e^{-t}\right)$ м.

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой *AB*: $V_1 = \dot{S}(1) = 0{,}21$ м/с.

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, *b*):

$$m\ddot{x} = -F_{упр} = -c_э x;\ c_э = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м}.$$

Начальные условия движения: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 7{,}75$ рад/с, где константы: $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{V_1}{\omega} = 0{,}28$ м. Закон движения груза $x = 0{,}28\sin 7{,}75t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_э = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э(\lambda_{ст} + x) = -c_э x.$$

Общее решение:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 10{,}33 \text{ рад/с}.$$

Начальные условия: $t = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = -V_0$.

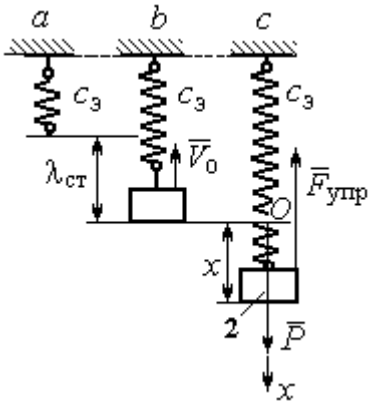


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4: *a* – нерастянутая пружина; *b* – положение статического равновесия; *c* – произвольное положение груза

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0$; $C_2 = \dfrac{V_0}{\omega} = 0{,}39$ м.

Закон движения груза: $x = 0{,}39\sin 10{,}33t$.

Амплитуда $A = 0{,}39$ м, частота $\omega = 10{,}33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right].$$

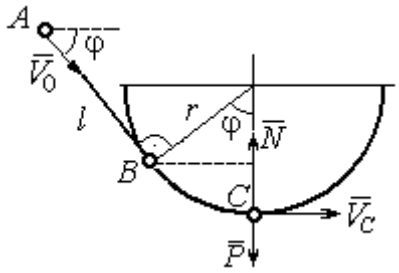


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right]$.

Уравнение движения человека, двигающегося вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\dfrac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \le 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \le 2gr$, или

$$V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right] \le 2gr.$$ Откуда $r \ge \dfrac{V_0^2 + 2gl\sin\varphi}{2g\cos\varphi}$.

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg\left[R + R\cos 60° - a\cos 30°\right].$$

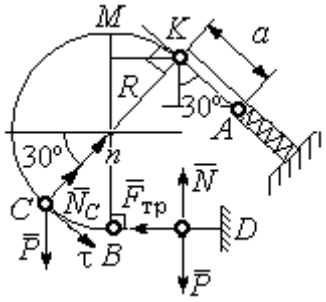


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: s = 5,39 м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60°.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство $N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60° = \frac{1}{R}\left[mV_B^2 - 2mgR(1-\cos 60°)\right] + mg\cos 60°$, где кинетическая энергия шарика в точке B: $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR\left[(1+\cos 60°) - \frac{a}{R}\cos 30°\right]$. Получим: $N_C = 18{,}71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

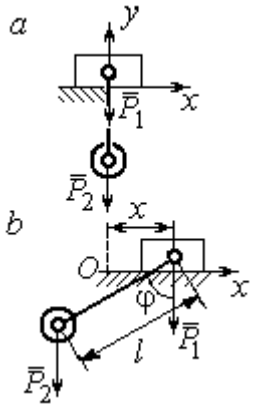


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:
a – начальное положение системы;
b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, x_0 = 0 (см. рис.7.33); x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения груза 2: $x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi$.

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси z: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

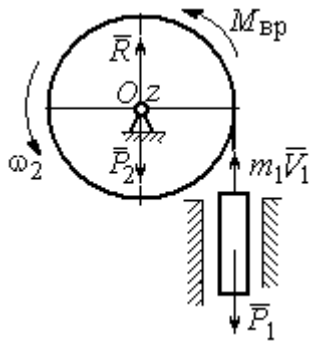


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} = \frac{m_2 r^2}{2}\omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z: $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - P_1 r = kt - m_1 g r$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 g r.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \dfrac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

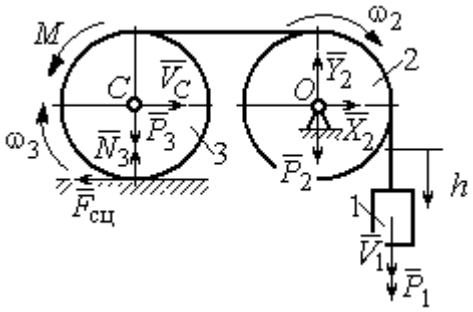


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \dfrac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока: $J_O = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3: $T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_C^2 + \dfrac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходящей

через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа вешних сил на перемещении h: $\sum A(F_k) = P_1 h - M\frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h.$$

Скорость груза на высоте h: $V_1 = 4\sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

5.4

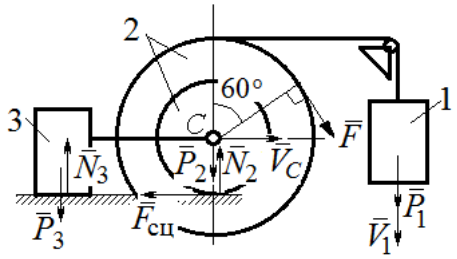


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1. Скорость центра масс катка V_C.

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$, $J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \frac{9P}{2g}V_C^2$.

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы): $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{17P}{2g}V_C^2$. Производная $\frac{dT}{dt} = \frac{17P}{g}V_C\frac{dV_C}{dt} = \frac{17}{g}V_C a_C$.

Мощности сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{сц}$, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле: $N(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F})\cdot\vec{\omega}_2 = FV_C\cos 60° + FR\omega_2$. Мощность силы $\vec{P}_1$ $N(\vec{P}_1) = P_1V_1$. Суммарная мощность внешних сил: $\sum N(F^e) = 7PV_C$.

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\frac{17P}{g}V_C a_C = 7PV_C$, откуда $a_C = \frac{7}{17}g$ м/с^2.

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

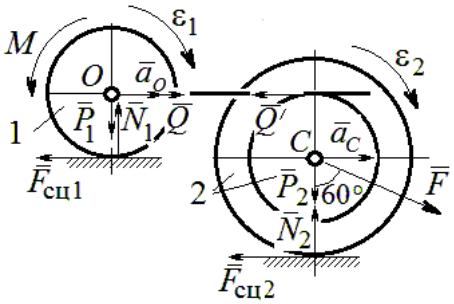


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

$$m_1 a_O = Q - F_{сц1},\ J_{1O}\varepsilon_1 = F_{сц1}r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{сц2} + F\cos 30°;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = F_{сц2}3r - Q'r.$$

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{сц1}$, $\vec{F}_{сц2}$ – силы сцепления катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \frac{m_1 r^2}{2}$, $J_{2C} = m_2 i_2^2$. Подставляя кинематические соотношения $\varepsilon_2 = \frac{a_C}{3r}$; $a_O = \frac{4}{3}a_C$; $\varepsilon_1 = \frac{4a_C}{3r}$, с учётом данных задачи, получим систему уравнений:

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{сц1};\ \ \frac{2P}{3g}a_C = F_{сц1} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{сц2} + P\sqrt{3};\ \ \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{сц2} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \dfrac{3\left(3\sqrt{3}-16\right)g}{46} \approx -\,0{,}7g$. Каток движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2{,}6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. Допустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

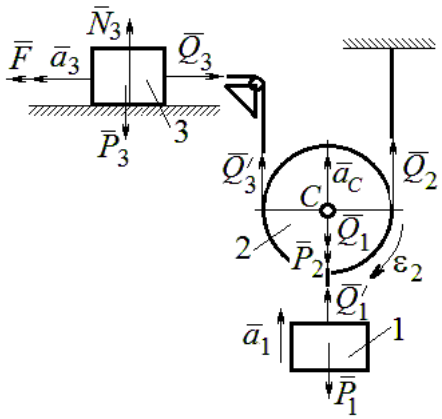


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

Уравнения движения тел:

$$m_3a_3 = F - Q_3,\ m_2a_C = Q'_3 + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = Q'_3r - Q_2r,\ m_1a_1 = Q'_1 - P_1.$$

С учётом, что $\left|\vec{Q}_3\right| = \left|\vec{Q}'_3\right|$, $\left|\vec{Q}_1\right| = \left|\vec{Q}'_1\right|$ и

$$a_C = a_1,\quad a_3 = 2a_1,\quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r},\quad J_{2C} = \frac{m_2r^2}{2},$$

подставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2{,}5mg - Q_3;\ \ ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2;\ m_1a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \dfrac{2}{17}g \approx 0{,}12g;\ \ Q_3 = 2{,}26mg;\ Q_2 = 2{,}15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями. Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1a_1 = P_1\cos 30° - Q_1;\ \ m_3a_3 = Q_3;$$

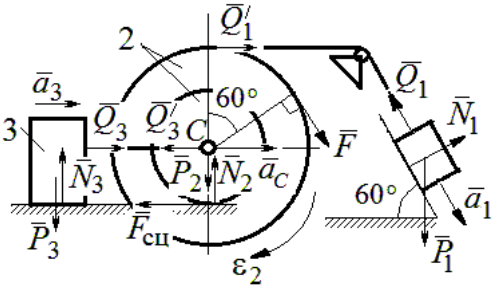


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q_1' - Q_3' - F_{\text{сц}} + F\cos 60^\circ;\ J_{2C}\varepsilon_2 = Q_1' R + FR + F_{\text{сц}} r,\ J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R+r}$, $a_C = \dfrac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q_1' = Q_1$ и $Q_3' = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1;\ \frac{2}{3}ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2}mg;\ 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \dfrac{3}{46}\left(5+3\sqrt{3}\right)g \approx 0{,}44g;\ Q_1 = 0{,}21mg;\ Q_3 = 0{,}44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$ Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, *a*). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

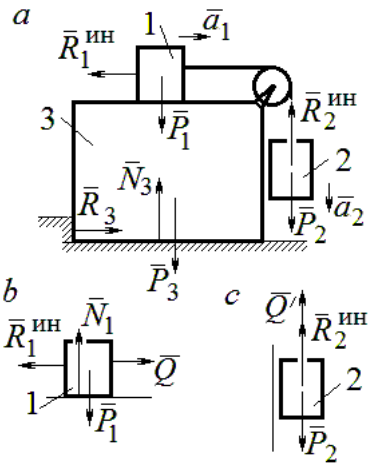


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0,\ N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, *b*, *c*). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил - для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – на вертикальную:

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0;\ P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0{,}5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2{,}5mg$.

6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A(\vec{F}) + \delta A(\vec{Q}) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

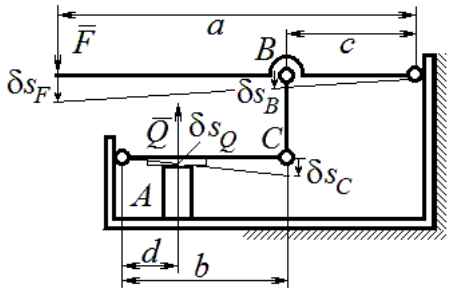


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Имеем соотношения: $\dfrac{\delta s_F}{\delta s_B} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \dfrac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \dfrac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \dfrac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2. Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(\vec{P}_3) + \delta A(\vec{P}_4) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

$$P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4 + M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота

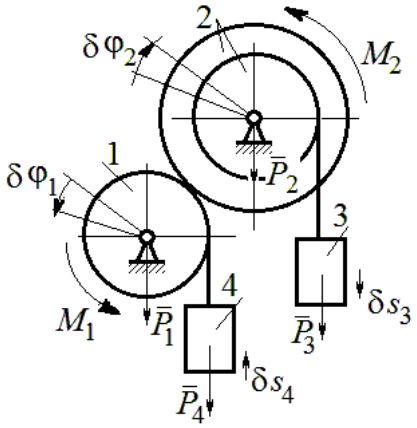


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

вала 2: $\delta s_3 = \delta\varphi_2 r$, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$, $\delta s_4 = 3r\delta\varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{\text{вр}}$ (рис. 7.43).

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta\varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta\varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

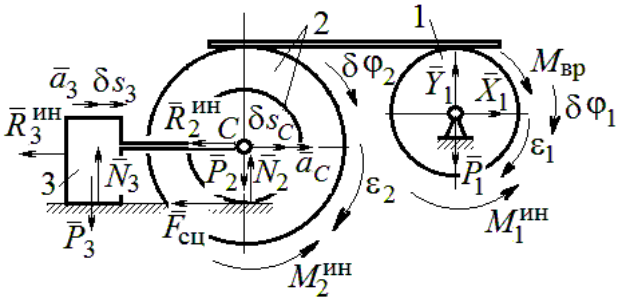


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями: $\delta s_C = \delta s_3$, $a_C = a_3$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_3}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{r}$, $\delta\varphi_1 = \dfrac{3\delta s_3}{r}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{3a_3}{r}$.

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = ma_3$; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2ma_3$; $M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4{,}5mra_3$; $M_1^{\text{ин}} = \dfrac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = 1{,}5mra_3$.

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{\text{вр}}\delta\varphi_1 = (mg\sin\omega t)3\delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_2^{\text{ин}}\delta s_C - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - M_1^{\text{ин}}\delta\varphi_1 =$$

$$= -ma_3\delta s_3 - 2ma_3\delta s_3 - 4{,}5ma_3\delta s_3 - 1{,}5ma_3 3\delta s_3 = -12ma_3\delta s_3.$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g\sin\omega t - 12a_3)\delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0{,}25g\sin\omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0{,}25g\sin\omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \dfrac{0{,}25g}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил: $\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F\delta s_1 + P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4$ и сил инерции $\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_4^{\text{ин}}\delta s_4 - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2$, где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \dfrac{P_3}{g}a_3$, $R_4^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_4$, $M_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2$.

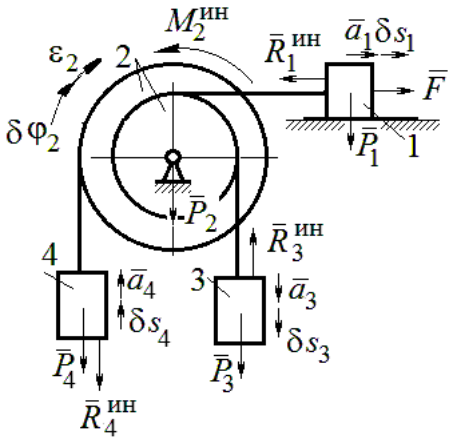


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$.

Общее уравнение динамики:

$$\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = P(t+1)\delta s_1 + P\delta s_1 - 2P\delta s_1 -$$

$$-\left(\frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{2P}{g}2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g}2r^2\frac{a_1}{r}\frac{\delta s_1}{r}\right) = P\left(t - \frac{14a_1}{g}\right)\delta s_1 = 0.$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \dfrac{1}{14}gt$, или $\ddot{x}_3 = \dfrac{1}{14}gt$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \dfrac{1}{84}gt^3 \approx 0{,}012gt^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0. Обобщённая скорость $\dot{x}$.

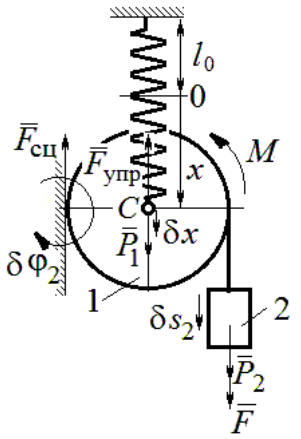


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Кинетическая энергия катка: $T_1=\frac{1}{2}m_1V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2$, где ω_1, V_C – угловая скорость катка и скорость его центра масс, $V_C=\dot{x}$, $\omega_1=\frac{V_C}{r}=\frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC}=\frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2=\frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2=2V_C=2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T=T_1+T_2=\frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x, дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum\delta A(F_{\text{к}})=P_1\delta x-F_{\text{упр}}\delta x+(P_2+F)\delta s_2-M\delta\varphi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2=2\delta x$, $\delta\varphi_1=\frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}}=cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum\delta A(F_{\text{к}})=(3P-cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x=3P-cx$.

Уравнение Лагранжа $\frac{7P}{g}\ddot{x}=3P-cx$, или $\ddot{x}+\frac{4g}{7r}x=\frac{3g}{7}$.

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями): $x = \frac{3}{4} r(1 - \cos\omega t)$. Закон движения груза: $s_2 = 2x = \frac{3}{2} r(1 - \cos\omega t)$.

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1, x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных центров блоков *B* и *D* (рис. 7.46, *a*). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

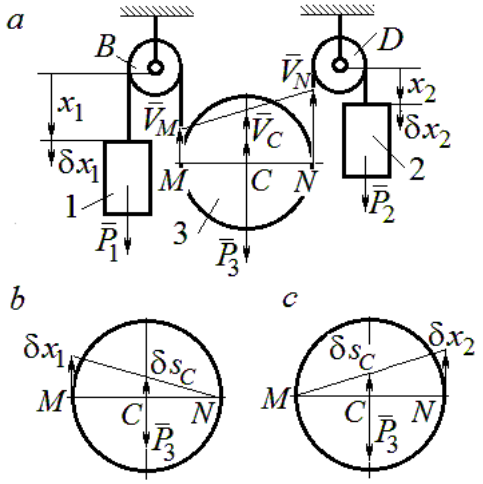


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7:
a – кинематика механизма;
b, *c* – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g},\ T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}\right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, *a*): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1, оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *b*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3$.

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2, так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *c*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_2.$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2}P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8}P_3\right)\frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8}P_3\frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2}P_3,\ \ \frac{1}{8}P_3\frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8}P_3\right)\frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2}P_3 \text{ или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0,\ \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g.$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31}g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31}g$. Ускорение центра масс блока $\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31}g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы. Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

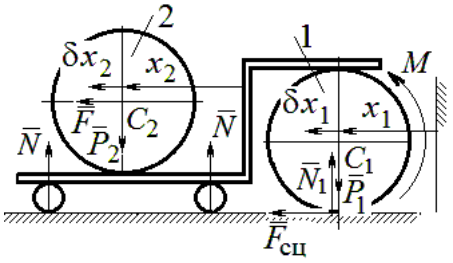


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2\left(\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1\right)^2 + \frac{m_2 r^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2\right] = \frac{P}{g}\left(\frac{11}{4}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 $\left(\delta x_1 \neq 0\right)$, оставляя другую координату x_2 неизменной $\left(\delta x_2 = 0\right)$. Работу совершают момент M и сила $\overline{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_к) = M\delta\varphi_1 + F\delta s_{C_2} = M\frac{\delta x_1}{r} + F\,2\delta x_1 = 4P\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_к) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2, равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g}\left(\frac{11}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2\right) = 4P,\ \frac{P}{g}\left(2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1\right) = P, \text{ или}$$

$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g,\ 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси x_1. Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Ляпцев, С. А. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №
Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА..... **Error! Bookmark not defined.**
1.1. Основные понятия статики..... **Error! Bookmark not defined.**
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия**Error! Bookmark not defined.**
1.3. Произвольная плоская система сил..... **Error! Bookmark not defined.**
1.4. Равновесие систем тел ..... **Error! Bookmark not defined.**
1.5. Произвольная пространственная система сил**Error! Bookmark not defined.**
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения..... **Error! Bookmark not defined.**
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА..... **Error! Bookmark not defined.**
2.1. Криволинейное движение точки ..... **Error! Bookmark not defined.**
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела .**Error! Bookmark not defined.**
вокруг неподвижной оси ..... **Error! Bookmark not defined.**
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела ....**Error! Bookmark not defined.**
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела ..**Error! Bookmark not defined.**
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ..... **Error! Bookmark not defined.**
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки .....**Error! Bookmark not defined.**
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ ..... **Error! Bookmark not defined.**
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки.....**Error! Bookmark not defined.**
4.2. Колебания материальной точки ..... **Error! Bookmark not defined.**
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки ..**Error! Bookmark not defined.**
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ..... **Error! Bookmark not defined.**
5.1. Теорема о движении центра масс системы... **Error! Bookmark not defined.**
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы
относительно оси ..... **Error! Bookmark not defined.**
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы**Error! Bookmark not defined.**
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию
движений твёрдого тела ..... **Error! Bookmark not defined.**
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ..... **Error! Bookmark not defined.**
6.1. Принцип Даламбера для системы ..... **Error! Bookmark not defined.**
6.2. Принцип возможных перемещений ..... **Error! Bookmark not defined.**
6.3. Общее уравнение динамики ..... **Error! Bookmark not defined.**
6.4. Уравнения Лагранжа II рода..... **Error! Bookmark not defined.**
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ .....**Error! Bookmark not defined.**
7.1. Ответы к упражнениям главы 1 .....**Error! Bookmark not defined.**
7.2. Ответы к упражнениям главы 2 .....**Error! Bookmark not defined.**
7.3. Ответы к упражнениям главы 3 .....**Error! Bookmark not defined.**
7.4. Ответы к упражнениям главы 4 .....**Error! Bookmark not defined.**
7.5. Ответы к упражнениям главы 5 .....**Error! Bookmark not defined.**
7.6. Ответы к упражнениям главы 6 .....**Error! Bookmark not defined.**

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**Error! Bookmark not defined.**

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

В. Г. Брагин, Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Екатеринбург
2018