МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой, к.п.н., доцент

_____ Л.Г. Юсупова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине
Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки:
20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль
Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрен на заседании кафедры
Иностранных языков и деловой коммуникации
(название кафедры)
Протокол № 1 от 19.09.2023
(Дата)

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины …….…….....3
Требования к оформлению контрольной работы ……..……..4
Содержание контрольной работы…….....4
Выполнение работы над ошибками……...…8
Критерии оценивания контрольной работы ……8
Образец титульного листа ……..…10

Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: повышение исходного уровня владения иностранным языком, достигнутого на предыдущей ступени образования, и достижение уровня иноязычной коммуникативной компетенции достаточного для общения в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах, а также для дальнейшего самообразования.

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:

универсальные:

- способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном(ых) языке(ах) (УК-4).

Для достижения указанной цели необходимо (задачи курса):

- владение иностранным языком как средством коммуникации в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах;
- развитие когнитивных и исследовательских умений с использованием ресурсов на иностранном языке;
- развитие информационной культуры;
- расширение кругозора и повышение общей гуманитарной культуры студентов;
- воспитание толерантности и уважения к духовным ценностям разных стран и народов.

Методические указания по выполнению контрольной работы предназначены для студентов очной и заочной формы обучения, обучающихся по специальности.

Письменная контрольная работа является обязательной формой *промежуточной аттестации.* Она отражает степень освоения студентом учебного материала по дисциплине Б1.О.03 Иностранный язык. А именно, в результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- особенности фонетического строя иностранного языка;
- лексические единицы социально-бытовой и академической тематики, основы терминосистемы соответствующего направления подготовки;
- основные правила грамматической системы иностранного языка;
- особенности построения устных высказываний и письменных текстов разных стилей речи;
- правила речевого этикета в соответствии с ситуациями межличностного и межкультурного общения в социально-бытовой, академической и деловой сферах;
- основную страноведческую информацию о странах изучаемого языка;
- лексико-грамматические явления иностранного языка профессиональной сферы для решения задач профессиональной деятельности;

Уметь:

- вести диалог/полилог и строить монологическое высказывание в пределах изученных тем;
- понимать на слух иноязычные тексты монологического и диалогического характера с различной степенью понимания в зависимости от коммуникативной задачи;
- читать аутентичные тексты прагматического, публицистического, художественного и научного характера с целью получения значимой информации;
- передавать основное содержание прослушанного/прочитанного текста;
- записывать тезисы устного сообщения, писать эссе по изученной тематике, составлять аннотации текстов, вести личную и деловую переписку;
- использовать компенсаторные умения в процессе общения на иностранном языке;
- пользоваться иностранным языком в устной и письменной формах, как средством профессионального общения;

Владеть:

- основными приёмами организации самостоятельной работы с языковым материалом с использованием учебной и справочной литературы, электронных ресурсов;
- навыками выполнения проектных заданий на иностранном языке в соответствии с уровнем языковой подготовки;
- умением применять полученные знания иностранного языка в своей будущей профессиональной деятельности.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «Иностранный язык (английский)» представлено три варианта контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется для студентов в соответствии с начальными буквами их фамилий в алфавитном порядке. Например, студенты, у которых фамилии начинаются с букв А, выполняют контрольную работу № 1 и т.д. (см. таблицу №1).

Таблица №1

начальная буква фамилии студента	***№ варианта контрольной работы***
А, Г, Ж, К, Н, Р, У, Ц, Щ	№1
Б, Д, З, Л, О, С, Ф, Ч, Э, Я	№2
В, Е, И, М, П, Т, Х, Ш, Ю	№3

Содержание контрольной работы №1

Контрольная работа проводится по теме *1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья) и теме 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:
- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. -

(Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435
Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*	102-104	6-8
Оборот *there+be*	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

Вариант №1

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Michael _____ everyone he meets because he is very sociable and easygoing. He has five brothers and two sisters, so that probably helped him learn how to deal with people.

A. gets divorced; **B. gets along well with;** C. gets married;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Заполните пропуски местоимениями some, any, no или их производными.

Пример: A: Is ***anything*** the matter with Dawn? She looks upset.

B: She had an argument with her friend today.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неопределённые местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски личными местоимениями (I, we, you, he, she, it, they, me, us, him, her, them).

Пример: My teacher is very nice. I like … . – I like **him**.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «личные и притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках, обращая при этом внимание на использованные в предложениях маркеры.

Пример: Every morning George **eats** (to eat) cereals, and his wife only **drinks** (to drink) a cup of coffee.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Paul was tired when he got home. – ***Was Paul tired when he got home? Yes, he was.***

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа
Вариант №2

Задание 1. Заполните пропуск, выбрав один вариант ответа.

Пример: A British university year is divided into three _____.

1) conferences; 2) sessions; **3) terms**; 4) periods;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите правильную форму глагола.

Пример: A: I have a Physics exam tomorrow.

B: Oh dear. Physics **is**/are a very difficult subject.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя существительное, функции и спряжение глаголов to be и to have».

Задание 3. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Continuous, Past Continuous или Future Continuous.

Пример: I **shall be studying** (study) Japanese online from 5 till 6 tomorrow evening.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 4. Составьте вопросы к словам, выделенным жирным шрифтом.

Пример: **The Petersons** have bought a dog. – *Who has bought a dog?*

The Petersons have bought **a dog. –** *What have the Petersons bought?*

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Задание 5. Подчеркните правильный вариант ответа.

Пример: A: You haven't seen my bag anywhere, haven't you/**have you**?

B: No. You didn't leave it in the car, **did you**/didn't you?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа
Вариант № 3

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: The University accepts around 2000 new ____ every year.

1) students; 2) teachers; 3) pupils; 4) groups;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Поставьте в предложения подходящие по смыслу фразы:

as red as a beet (свекла), as slow as a turtle, as sweet as honey, as busy as a bee, as clumsy as a bear (неуклюжий), as black as coal, as cold as ice, as slippery as an eel (изворотливый как угорь), as free as a bird, as smooth as silk (гладкий)

Пример: Your friend is so unemotional, he is **as cold as ice**.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя прилагательное и наречие».

Задание 3. Переведите следующие предложения на английский язык.

Пример: Это самая ценная картина в Русском музее. **This is the most valuable picture in Russian Museum.**

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «степени сравнения имени прилагательного и наречий».

Задание 4. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Perfect, Past Perfect или Future Perfect.

Пример: Sam **has lost** (lose) his keys. So he can't open the door.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Задайте вопросы к предложениям.

Пример: There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which *book is Sue's*?' 'The one on the table.'

b) 'Whose *book is on the table*?' 'Sue's.'

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Mein Bruder ... Arzt geworden

A. hat; **B. ist**; C. wird;

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Пассивный залог».

Задание 2. Вставьте подходящее вопросительное слово.

Пример: **Was** machen Sie am Wochenende?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски возвратными местоимениями в нужной форме.

Пример: Wo wohnen d**eine** Eltern?

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках.

Пример: **Kannst** du mir bitte die Marmelade geben? (können)

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Sie wohnen in Berlin.

Ответ: Wo wohnen Sie? Wer wohnt in Berlin?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные предложения».

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Работа с оценкой «неудовлетворительно» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 1 балл. Максимум 44 балла.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

35-44 балла (80-100%) - оценка «отлично»;

29-34 балла (65-79%) - оценка «хорошо»;

22-28 баллов (50-64%) - оценка «удовлетворительно»;

0-21 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра иностранных языков и деловой коммуникации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки:
20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль
Комплексное управление техносферной безопасностью и защита в чрезвычайных ситуациях

формы обучения: очная, заочная

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа КУТБ-22

Преподаватель: Петров Петр Петрович,
к.т.н, доцент

Екатеринбург
2022

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль
Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности

год набора: 2024

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрено на заседании кафедры
Иностранных языков и деловой коммуникации
(название кафедры)
Зав.кафедрой _____
(подпись)
к.п.н., доц. Юсупова Л. Г.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 19.09.2023
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
горно-технологического факультета
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)……..... 3
1.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 3
1.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 5
1.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 6

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование) ……..... 35
2.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 35
2.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 36
2.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 38

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) ……..... 53
3.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 53
3.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 54
3.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 58

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность) ……..... 74
4.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы ……..... 74
4.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции ……..... 82
4.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения ……... 82

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)

Тематика общения:

1. Я и моя семья.
2. Дом, жилищные условия.
3. Мой рабочий день.
4. Досуг и развлечения.

Проблематика общения:

1. Взаимоотношения в семье, семейные традиции.
2. Устройство квартиры/загородного дома.
3. Рабочий день студента.
4. Досуг в будние и выходные дни, активный и пассивный отдых.

1.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

родственник relative, relation
родители parents
мать (мама) mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
отец (папа) father (dad, daddy, papa, pa)
жена wife
муж husband
супруг(а) spouse
ребенок, дети child, children
дочь daughter
сын son
сестра sister
брат brother
единственный ребенок only child
близнец twin
близнецы, двойняшки twins
брат-близнец twin brother
сестра-близнец twin sister
однояйцевые близнецы identical twins
тройняшки triplets
бабушка и дедушка grandparents
бабушка grandmother (grandma, granny, grandmamma)
дедушка grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
внуки grandchildren
внучка granddaughter
внук grandson
прабабушка great-grandmother
прадедушка great-grandfather
прабабушка и прадедушка great-grandparents
правнуки great-grandchildren
тётя aunt
дядя uncle
крестный (отец) godfather
крестная (мать) godmother
отчим, приемный отец stepfather
мачеха, приемная мать stepmother
сводный брат stepbrother
сводная сестра stepsister
брат по одному из родителей half-brother
сестра по одному из родителей half-sister

приемный, усыновленный сын adopted son
приемная, удочеренная дочь adopted daughter
приемный ребенок adopted child
патронатная семья, приемная семья foster family
приемный отец foster father
приемная мать foster mother
приемные родители foster parents
приемный сын foster son
приемная дочь foster daughter
приемный ребенок foster child
неполная семья (с одним родителем) single-parent family
родня the kin, the folks
племянница niece
племянник nephew
двоюродный брат cousin (male)
двоюродная сестра cousin (female)
двоюродный брат (сестра), кузен (кузина) first cousin
троюродный брат (сестра) second cousin
четвероюродный брат (сестра) third cousin
родня со стороны мужа или жены in-laws
свекровь mother-in-law (husband's mother)
свёкор father-in-law (husband's father)
тёща mother-in-law (wife's mother)
тесть father-in-law (wife's father)
невестка, сноха daughter-in-law
зять son-in-law
шурин, свояк, зять, деверь brother-in-law
свояченица, золовка, невестка sister-in-law
семейное положение marital status
холостой, неженатый, незамужняя single
женатый, замужняя married
брак marriage
помолвка engagement
помолвленный, обрученный engaged
развод divorce
разведенный divorced
бывший муж ex-husband
бывшая жена ex-wife
расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей separated
вдова widow
вдовец widower
подружка, невеста girlfriend
друг, парень, ухажер boyfriend
любовник, любовница lover
ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный fiance
свадьба wedding
невеста на свадьбе bride
жених на свадьбе (bride)groom
медовый месяц honeymoon

1.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My family

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

My student's life

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV

programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

My flat

I live in Ekaterinburg in a sixteen-storied dwelling house in the center of the city.
Five years ago our old wooden house was pulled down & we moved here into three-room flat with all modern conveniences.

Now we have running water, gas, electricity, central heating & a refuse chute. We live on the top floor & from the balcony we have a good view of the park. Besides we needn't mount the staircase because there is a lift to take us up.

The entrance hall is rather small. There is a hallstand & a mirror-stand there.

The sitting-room is a spacious simply furnished room. The floor spacious is about 15 square meters. It is not overcrowded with furniture. Everything fits in well. Nothing is out of place here. Next to the window there is a sofa with a stand – lamp. The bookcase in the corner of the room is full of books. On the left there are two comfortable arm-chairs opposite the TV-set & leaf – table.

In the bedroom we have dark brown suite of furniture of the latest model & thick carpet. Near the wall there is a divan-bed. In the built-in-wardrobe we keep our clothes & bed linen.
The adjoining room is the children's room. The bright pattern of the curtains & of wall paper makes the room look gay. There is a writing desk with a desk lamp, a small sofa & a lot of toys there.

In the kitchen there is a fridge, a cupboard, a kitchen table & a gas-stove. Over the sink there is a plate-rack. All kitchen utensils are close at hand.

In the corridor there is a built-in-closet, where we keep our vacuum-cleaner, electric iron & other household objects.

In the bathroom there is a bath-tub & a shower, a towel-rack & a wash-basin with a shelf above it. There tooth-brushes, a cake of soap & some shaving articles on it. Near the bath-room there is a lavatory.

There is nothing special about our flat, no rich decorations but we are accustomed to it & cannot compare it to the old one.

1.3 Систематизация грамматического материала:

1. Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях. Порядок слов в вопросительном предложении. Безличные предложения.
2. Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные).
3. Имя существительное. Артикли (определенный, неопределенный, нулевой).
4. Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have.* Оборот *there+be*.
5. Имя прилагательное и наречие. Степени сравнения. Сравнительные конструкции.
6. Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат).

Порядок слов в английском предложении

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

I	II	III Дополнение	IV

					Обстоятельство
Подлежащее	**Сказуемое**	**Косвенное без предлога**	**Прямое**	**Косвенное с предлогом**	
We Мы	study изучаем		math математику		
He Он	gives дает	us нам	lessons уроки		in this room. в этой комнате
She Она	reads читает		her notes свои заметки	to Peter Петру	every day. каждый день

Вопросительное предложение

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

Общие вопросы

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.

Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?

Примеры с модальными глаголами:

She can drive a car. – Она умеет водить машину.

Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot)

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.

Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?

Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

Ответы на общие вопросы

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not

Например: Are you a student? - Ты студент?

Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.

Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

Специальные вопросы

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.

Специальные вопросы могут начинаться словами:

who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?

when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?

how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?

how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

Вопрос к прямому дополнению:

What are you reading? Что ты читаешь?

What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

Вопрос к обстоятельству

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.

When will he come back? – Когда он вернется?

What did he do it for? Зачем он это сделал?

Where are you from?

Вопрос к определению

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?

Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

Вопрос к сказуемому

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: "Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?", например:

What does he do? Что он делает?

Специальные вопросы к подлежащему

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)

what - что (для неодушевленных существительных)

The teacher read an interesting story to the students yesterday.

Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):
Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

Альтернативные вопросы

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

Разделительные вопросы

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:
You speak French, don’t you? You are looking for something, aren’t you? Pete works at a plant, doesn’t he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:
It is not very warm today, is it? John doesn’t live in London, does he?

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Write questions and answers for the following statements, as in the example.

1 Paul was tired when he got home.
…Was Paul tired when he got home? Yes, he was…
2 They live in London.
3 She can't play the piano.
4 The film starts at nine o'clock.
5 You had an English lesson last night.
6 She has got blue eyes.
7 We didn't want to go to the beach.
8 He should follow the doctor's advice.

2. Write the short form of the following negative questions

1 Can they not decide where to go on holiday?

...Can't they decide where to go on holiday?...

2 Did Claire not invite you to her party?

3 Do you not enjoy watching horror films?

4 Have you not finished your homework yet?

5 Can she not go to town on her own?

6 Does he not know where we live?

7 Has Sue not done the shopping for you?

8 Did he not give you any details?

3. Fill in the gaps with the correct question word(s).

A: Now for the general knowledge part of the quiz.

1) ...*What*... is the capital of Egypt?

B: Cairo.

A: That's correct. 2) … can you see the Mona Lisa?

B: In the Louvre, in Paris.

A: Well done, that's right. 3) … wrote 'Romeo and Juliet'?

B: Charles Dickens.

A: No, that's incorrect. It was Shakespeare. 4) … are the Olympic Games held?

B: Every four years.

A: Correct. 5) … did the Second World War begin?

B: I think it was in 1939.

A: Yes, you're right. And the final question in this round is: 6) … players are there in a hockey team?

B: Eleven.

A: Correct. Well, at the end of that round, Contestant 2 has the most points, so he goes through to the final round to play for our star prize.

4. Fill in who, whose, what, which, where, when, how long, how often, what time, why, how much or how many.

is your jacket?' 'It's the red one.'

1. '...*Which*... is your jacket?' 'It's the red one.'
2. '…is your birthday?' 'It's next week.'
3. '… is Mary?' 'She's in her bedroom.'
4. '… have you been waiting?' Only five minutes.'
5. '… do you go shopping?' Once a week.'
6. '… are you doing at the moment?' I'm watching TV.'
7. ' … are you writing to?' 'Uncle Tom.'
8. '…do you start work?' At nine o'clock in the morning.'
9. '… pieces of toast do you want?' Two, please.'
10. '… isn't she at work today?' Because she's ill.'
11. '… did you spend last month?' About £500.'
12. ' … party are you going tonight?' 'Alison's'

5. Fill in the gaps with what, which or how.

1 A: ...*What*... do you want to do when you leave school?
B: I'm not really sure. I'd like to be a vet.

2 A: … bag do you prefer - the black one or the brown one?
B: I like the black one best.

3 A: … old are you?
B: It was my birthday last week. Now I'm fifteen.

4 A: … did you get my telephone number?
B: I looked in the staff address book.

5 A: … shall we do on Saturday?
B: Let's just stay at home and watch a video.

6 A: … house did you prefer — the one we saw first or second?
B: I didn't like either. We'll have to keep looking.
7 A: … many pairs of shoes did you buy last year?
B: Only two. One in the summer and one in the winter.
8 A: … is your favourite food?
B: Roast chicken.

6. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The tiger** is the largest member of the cat family.
…Which is the largest member of the cat family?...
2 A mature male tiger weighs **between 160 and 230 kg**.
3 Tigers are usually **orange with black stripes**.
4 Tigers live **in Russia, China, India and South-East Asia.**
5 **The Javan tiger, the Bali tiger and the Caspian tiger** are extinct.
6 Tigers eat **a variety of smaller animals, including deer.**
7 Tigers can produce young **at any time of year.**
8 Tigers usually have **two or three** cubs at a time.
9 Tigers live **for an average of eleven years.**
10 Tigers are hunted **for sport or for their fur**.

7. Write questions to which the words in bold are the answers.

Claudette is **32 years old**. She lives **in Paris, France**, and has lived there **since she was 5 years old.** Claudette works as **a lawyer** for a successful law firm, and she travels to work **by car** every day. Claudette is married. Her husband's name is **Jean**. They have **two** dogs. She loves **to take the dogs for long walks** every evening **after work.** Claudette has several hobbies, such as **reading and playing the piano**, but her **favourite hobby is cooking**. Jean thinks this is good, too, **because he gets to eat the wonderful meals she makes.**

8. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The Petersons** have bought a dog.
…Who has bought a dog?...
2 The Petersons have bought **a dog.**
…What have the Petersons bought?...
3 Rachel is writing **a letter**.
4 **Rachel** is writing a letter.
5 **Brian** likes this car.
6 Brian likes **this car**.
7 Dad broke **the window**.
8 **Dad** broke the window.
9 **Mother** will make a birthday cake.
10 Mother will make **a birthday cake**.
11 **Robin** is going to bake some biscuits.
12 Robin is going to bake **some biscuits**.

9. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 Wendy doesn't agree with **her friend's decision**.
…What doesn't Wendy agree with?...
2 James is listening to **some old records**.
3 Sharon is waiting for **the bus**.
4 The boys were talking about **football**.
5 She has got a letter from **her pen-friend**.
6 Martin is thinking about **his holiday**.
7 This jacket belongs to **Stacey.**
8 Pauline was married to **Nigel.**

10. Complete the questions.

1 There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which …*book is Sue's*...?' 'The one on the table.'
b) 'Whose …*book is on the table*…?' 'Sue's.'
2 Steven wrote four letters.
a) 'Who … ?' 'Steven.'
b) 'How many … ?' 'Four.'
3 Teresa is going to wash the car.
a) 'Who … ?' Teresa.'
b) 'What … ?' 'The car.'
4 Kate visited John in hospital yesterday.
a) 'Who … ?' 'Kate.'
b) 'Who … ?' 'John.'
5 David has taken Frank's new CD.
a) 'Whose …?' 'Frank's.'
b) 'Who …?' 'David.'
6 Alice is going to the cinema tonight.
a) 'Who …?' 'Alice.'
b) 'Where …?'The cinema.'

Безличные предложения

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

Местоимение. The Pronoun.
Классификации местоимений.

1	**personal**	личные
2	**possessive**	притяжательные
3	**demonstrative**	указательные
4	**indefinite and negative**	неопределенные и отрицательные
5	**quantifiers**	количественные
6	**reflexive**	возвратные
7	**reciprocal**	взаимные
8	**relative**	относительные
9	**defining**	определительные
10	**interrogative**	вопросительные

I. Личные (personal) местоимения

Общий падеж		**Объектный падеж**	
I	я	**me**	мне, меня
he	он	**him**	его, ему

she	она	**her**	ей, о ней
it	оно, это	**it**	ей, ему, этому
we	мы	**us**	нам, нас
they	они	**them**	им, их
you	ты, вы	**you**	тебе, вам

Внимание! He (он) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

he	**she**	**it**
a boy – мальчик **a man –** мужчина **brother –** брат **father –** отец **Nick –** Николай **Mr Grey –** мистер Грей	**a girl –** девочка **a woman –** женщина **sister – с**естра **motherч–** мама **Kate –** Катя **Mrs Grey –** миссис Грей	**a cat –** кот **a wall –** стена **rain –** дождь **love –** любовь **a hand –** рука **an apple -** яблоко

Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).

II. Притяжательные (possessive) местоимения

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы** - **основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
Whose pen is it? - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

Личное местоимение	**Основная форма**	**Абсолютная форма**
I – я **he –** он **she –** она **it – оно,** это **we –** мы **you –** ты, вы **they -** они	**my (toy) -** моя (игрушка) **his (toy) -** его (игрушка) **her (toy) -** ее (игрушка) **its (toy) -** его (не о человеке) **our (toy) -** наша (игрушка) **your (toy) -** ваша, твоя (игрушка) **their (toy) -** их (игрушка)	**his -** его **hers -** ее **its -** его (этого) **ours -** наша **yours -** ваша, твоя **theirs -** их

III. Указательные (demonstrative) местоимения

this (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения

Местоимения some, any, every, и их производные

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
I have/l have got three apples. *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

Производные от неопределенных местоимений

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

Thing используется для неодушевленных (что-то):

some **something –** *что-то, что-нибудь*

any	**anything -** *что-то, что-нибудь*
thing	
no	**nothing -** *ничего, ничто*
every	**everything -** *все*
Body/one - для одушевленных (кто-то):	
some	**somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь*
any	**anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь*
body/one	
no	**nobody / no one -** *никого, никто*
every	**everybody /everyone –** *все, каждый*

Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*

somewhere - *где-нибудь, куда-нибудь*	**anywhere -** *где угодно*
nowhere - *нигде*	**everywhere -** *везде*

V. Количественные (quantifiers) местоимения

Many и much - оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.

many girls - *много девочек*	**much snow -** *много снега*
many boys - *много мальчиков*	**much money -** *много денег*
many books - *много книжек*	**much time -** *много времени*

How many? } **сколько?** **How many girls? -** *Сколько девочек?*
How much? } **сколько?** **How much sugar? -** *Сколько сахара?*
How much sugar? - *Сколько сахара?*

a lot of... - много - используется и с исчисляемыми, girls – много девочек
и с неисчисляемыми существительными **a lot of**
a lot без (of) используется и без существительного. sugar - много сахара

Сравните: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.*
He writes **a lot.** *Он много пишет.*

В утвердительных предложениях используйте **a lot of.**
В отрицательных и в вопросительных **many/much,**

Сравните:

(+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*.
(-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?*
Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":**
Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.

Few, little, a few, a little
С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало), а с исчисляемыми - few (мало).

few books - мало книг	**little time -** мало времени
few girls - мало девочек	**little money -** мало денег
few boys - мало мальчиков	**little snow -** мало снега
little } **мало (т.е. надо еще)**	**a little** } **немного (т.е. пока хватает)**

few	a few

VI. Возвратные (reflexive) местоимения

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

Личное местоимение	Возвратное местоимение	Пример	Перевод
I	myself	I did it myself.	Я сделал это сам
he	himself	He did it himself.	Он сделал это сам.
she	herself	She did it herself.	Она сделала это сама
you	yourself	You did it yourself.	Вы сделали это сами.
they	themselves	They did it themselves.	Они сделали это сами.
we	ourselves	We did it ourselves.	Мы сделали это сами.

VII. Взаимные (reciprocal) местоимения

Each other - друг друга (относится к двум лицам или предметам).
One another - друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
They spoke to <u>each other</u> rather friendly. *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
They always help <u>one another</u>. *Они всегда помогают друг другу.*

VIII. Относительные (relative) местоимения

Who (whom), whose, which, that

who	**Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)** **The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.*
	Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение) **The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.*
which	**Для неодушевленных предметов и животных** **The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.*
whose	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.*
	Для неодушевленных существительных **We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.*
that	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.*
	Для неодушевленных существительных **This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.*

IX. Определительные (defining) местоимения

all

Употребление	Примеры	Перевод
определяет неисчисляемые существительные	He spent **all his** time fishing on the lake**.**	Он провел все свое время, ловя рыбу на озере.
определяет исчисляемые существительные	**All the** boys like football. **(the после all!)**	Все мальчишки любят футбол.
all = everything	I know **all/everything.**	Я знаю всё.
all = everybody	**All** were hungry. **Everybody** was hungry.	Все были голодны. Все были голодны.
we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them	We **all** love you very much = **All** of us love you very much.	Мы все тебя очень любим

both

Употребление	Примеры	Перевод
определяет существительные	**Both (the/my) friends like football.**	Оба моих друга любят футбол
допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both	**Both these/the men are Russian.**	Оба (эти) мужчины - русские.
употребляется вместо существительного	**He gave me two apples. Both were sweet.**	Он дал мне два яблока. Оба были сладкими.
they both = both of them you both = both of you we both = both of us	**They both (both of them) came to visit us.**	Они оба пришли навестить нас.
в устойчивой конструкции **both...and.**	**Both mother father were at home**	И мама, и папа были дома.
в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither**	**Both of them know English. Neither of them know English.**	Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского.

either/neither

	Употребление	Примеры	Перевод
either	любой из двух (артикль не ставится)	**I've got 2 cakes. Take either cake.**	У меня 2 пирожных. Возьми любое.
	каждый, оба, и тот, и другой	**There are windows on either side of the house.**	С обеих сторон дома есть окна.
	заменяет существительное (глагол в ед. числе)	**Either of dogs is always hungry.**	Любая из собак вечно голодная.
neither	отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой)	**Neither of examples is correct.**	Ни один из примеров не верен.
	в констр. neither.. .nor (ни.. .ни)	**I like neither tea, nor coffee.**	Я не люблю ни чай, ни кофе.

other, another, the other, the others (другой, другие)

	Употребление	Примеры	Перевод
the other	другой (второй), другой из двух	**You've got 2 balls: one and the other.**	У тебя 2 мяча: один и другой.
another	другой из многих, еще один	**Take another ball.**	Возьми другой мяч.

			(Любой, но не этот.)
other	другие (любые), не последние	**Take other 2 balls.**	Возьми другие 2 мяча. (Из многих.)
the others	другие (определенные)	**There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.**	Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие.

X. Вопросительные (interrogative) местоимения

what	что	**What's this?**	Что это?
which	который	**Which of them?**	Который из них?
who	кто, кого	**Who was that?**	Кто это был?
whom	кого	**Whom did you meet?**	Кого ты встретил?
whose	чей	**Whose book is it?**	Чья это книга?

Имя существительное. The Noun

Категории	Существительное в русском языке	Существительное в английском языке
Число	**Изменяется**	**Изменяется**
Падеж	**Изменяется**	**Не изменяется**

Выполните упражнения на закрепление материала:

. Fill in the gaps with the correct subject or object pronoun.

1 A: Do your brothers play football?
B: Yes, ...*they*... play … all the time … think …'s a brilliant game.
2 A: Does Susan eat chocolate?
B: Yes … eats … all the time … says …'s her favourite food.
3 A: Do your parents know Mr. Jones?
B: Yes, … know … very well … lives next door to … .
4 A: Does Claire like David?
B: No, … doesn't like … very much. … says …'s too noisy.
5 A: Do you listen to rock music?
B: Yes, … listen to … all the time. … think …'s fantastic.
6 A: Does Tony enjoy fishing?
B: Oh, yes … enjoys … very much. .... says … relaxes him.

2. Fill in the gaps with there or it.

1 By the time I got home, ...*it*… was nearly ten o'clock.
2 'Is … your birthday today?" No, … was last week.'
3 Come here, Simon … is someone here to see you. I think … is your friend, Rod.
4 … wasn't warm enough to go to the beach, so we went to the cinema.
5 … wasn't very much money left after I had paid for the shopping.

3. Fill in the gaps with one or it.

1 A: I need a loaf of bread.
B: I'll buy ...*one*... this afternoon.
2 A: Is the phone ringing?
B: I can't hear … .
3 A: 'Titanic' is an amazing film.
B: I know. I've seen … twice.
4 A: When was the last time you read a book?
B: I haven't read … for months.

5 A: Have you got a car?
B: No. I can't afford … .
6 A: Do you like the new Rolling Stones CD?
B: I haven't heard … yet.
7 A: I need a dress for the party.
B: I'll lend you … .

4. Fill in the correct possessive adjective or pronoun.

1 A: Have you met ...*your*... new neighbours yet?
B: No. I've seen … children in the garden, though.
2 A: You took … coat home last night.
B: I know, I'm sorry. I thought it was … because they're both black.
3 A: What's wrong with Rosie?
B: Oh, she's been having problems with … back recently.
4 A: James is doing well at school.
B: I know … teacher says he's very advanced for his age.
5 A: Is this bag … ?
B: Oh, yes, thank you. I nearly forgot it.
6 A: Julie and Frank are so lucky … house is beautiful.
B: Yes, and it's so much bigger than … I envy them.
7 A: I like … shirt. It's like Sandra's.
B: Actually, it is … I borrowed it from her yesterday.
8 A: Why did you lend Tom … car?
B: Because … is being repaired at the moment.

5. Fill in its or it's.

1 The car is nice to drive, but I don't like ...its... colour.
2 This town is wonderful … got lots of shops!
3 I'm staying at home today because … cold outside.
4 Let's go in here … my favourite restaurant.
5 A bird has built … nest in our garden.
6 The company I work for has changed … name.

6. Fill in a possessive adjective or the.

1 A dog bit him on ...*the*... leg.
2 I banged … head on the cupboard door.
3 Karen put … arm around Jane's shoulder.
4 Don't put … feet on the tablel
5 You shouldn't have punched Tom in … stomach.
6 Paul patted Lisa on … shoulder.

7. Fill in the gaps with of where necessary, and my, your, etc. own.

1 John doesn't live with his parents any more. He's got a flat ...*of his own*...
2 She doesn't travel by bus any more because she's got … car.
3 I don't need to borrow your umbrella. I've got one … .
4 Haven't you got … pen? You're always borrowing mine.
5 My job includes doing research in … time.
6 Sam is tired of using his friend's computer, so he is going to buy one… .
7 The couple moved into … house after they got married.
8 Don't let the dog sleep on your bed. It's got a bed … .

8. Connect the nouns using -'s, -' or ...of…

1 car/Helen ...*Helen's car*…
2 the manager/the restaurant
3 shoes/women
4 the results/the test
5 bicycles/my daughters

6 secretary/the assistant manager
7 the corner/the room
8 house/their parents
9 the back/the classroom
10 shoes/William
11 walk/an hour
12 partner/Jim
13 Rome/the streets
14 UN/headquarters

9. Rewrite the sentences using the correct possessive form.

1 Nobody went to **the meeting last week**.

...Nobody went to last week's meeting....

2 The **drive** to the airport takes **two hours**.
3 They will get their exam results **six weeks from now**.
4 I look after **James - Karen — children**.
5 I received the letter in **the post - yesterday**.
6 It's autumn. **The tree - the leaves** are falling off.
7 Graham never listens to **his doctor - the advice.**
8 Are you going to **Jane - Paula - the party**?
9 He has never done a hard **day of work** in his life.
10 At the moment I'm staying with **a friend - my**.
11 I think I'll order **the special of today**.
12 The man knocked on **the house - the door**.
13 The ticket inspector looked at **the people – the tickets.**
14 **Mrs Jones - Miss Smith - cars** are being serviced.
15 **The sales target this month** is two million pounds.

10. Fill in the gaps with the correct reflexive pronoun.

1 The girl has hurt … *herself...* .
2 He put the fire out by …
3 She is looking at … in the mirror.
4 They are serving …
5 He cooked the food by …
6 They bought this house for …
7 They are enjoying …
8 He introduced …

The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

Способ образования	Примеры	Перевод
после глухих согласных	**a book - books** **a cup - cups**	**книга - книги** **чашка - чашки**
после звонких согласных и гласных -	a name - names a girl - girls	**имя - имена** **девочка - девочки**
после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es	a palace - palaces a bush - bushes a box - boxes a church - churches	дворец - дворцы куст - кусты коробка - коробки церковь - церкви
слово заканчивается на -y: 1) гласная +y	**a toy - toys** **a boy - boys**	игрушка - игрушки мальчик - мальчики

2) согласная + y	**a family - families** **a story - stories**	**семья - семьи** **история - истории**
слово заканчивается на *-file*	**a leaf - leaves** **a shelf - shelves**	лист - листья полка - полки

Особые случаи образования множественного числа

Ед. число	**Мн. число**	**Перевод**
man	men	мужчина - мужчины
woman	women	женщина - женщины
foot	feet	нога (стопа) - ноги (стопы)
child	children	ребенок - дети
goose	geese	гусь - гуси
mouse	mice	мышь - мыши
ox	oxen	**бык - быки**
tooth	teeth	**зуб - зубы**

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):
This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

Со словами one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.**	
What apple do you want? **Какое ты хочешь яблоко?** **The red one. Красное.**	**What apples do you want?** **Какие яблоки ты хочешь?** **The red ones. Красные.**

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски.	This girl speaks English well.
Р. п. Это собака той девочки.	It’s a dog of that girl.
Д. п. Я дал яблоко той девочке. .	I gave an apple to that girl.
В. п. Я вижу маленькую девочку. .	1 can see a little girl.
Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой.	1 like to play with this girl.
П. п. Я часто думаю об этой девочке.	1 often think about this girl.

Притяжательный падеж. The Possessive Case
Образование притяжательного падежа

	Образование	**Примеры**	**Перевод**
существительные в единственном числе	**’s**	**bird’s house** **child’s ball**	домик птички мячик ребенка
существительные во множественном числе (группа исключений}	**’s**	**children’s bail** **women’s rights**	мячик детей права женщин
существительное во множественном числе	**’**	**girls’ toy** **birds’ house**	игрушка девочек домик птичек

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother’s book - мамина книга,

this girl’s bail - мячик девочки,

the bird’s house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with an appropriate noun + of to indicate quantity.

1 a ... carton/glass/jug of ... orange juice
2 a … cheese
3 a … bread
4 a … coffee
5 a … water
6 a … wine
7 a … chocolate
8 a … crisps
9 a … honey
10 a … meat
11 a … spaghetti
12 a … flour

2. Fill the gaps with a, an, or some where necessary.

1 a) We had ...some... delicious food last night,
b) We had ...a... delicious meal last night.
2 a) There is … beautiful furniture in that shop,
b) There is … beautiful table in that shop.
3 a) I'm thirsty. I need … drink.
b) I'm thirsty. I need … water.
4 a) She's just bought … expensive clothes.
b) She's just bought … expensive dress.
5 a) They booked … room in advance.
b) They booked … accommodation in advance
6 a) The band played … lovely song.
b) The band played … lovely music.
7 a) We had … heatwave last week.
b) We had … hot weather last week.
8 a) I can't do this job alone. I need … assistant
b) I can't do this job alone. I need … help.
9 a) He has got … heavy luggage to carry.
b) He has got … heavy suitcase to carry.
10 a) I need … cutlery to eat this food with.
b) I need … knife and fork to eat this food with.
11 a) She has got … important job to do.
b) She has got … important work to do.
12 a) He found … coin on the ground.
b) He found … money on the ground.

3. Complete the sentences using the noun in brackets in the singular or plural form and a/an where necessary.

1. He gave me a box' of my favourite ...chocolates.... (chocolate)
2. His favourite food is … . (chocolate)
3. She bought … on her way to work. (paper)
4. He placed all the important … in his briefcase. (paper)
5. I need some … to write this message on. (paper)
6. Hurry up! We don't have much …. (time)
7. She has visited us several … this month. (time)
8. He has no … but he is keen to learn. (experience)
9. She had a lot of exciting … during her travels. (experience)
10. We went far a walk in the … after lunch. (wood)
11. His desk is made of ……. . (wood)
12. Jane is in her… reading a book. (room)
13. We have got plenty of … for a party in here. (room)
14. I am going to have my … cut tomorrow. (hair)
15. There was …in my soup. (hair)
16. I'm thirsty. I need … of water. (glass)
17. Susan only wears her … when she reads. (glass)
18. This ornament is made of coloured …. . (glass)
19. Helen bought … in the sale at the electrical store. (iron)
20. The old gate was made of … .(iron)

4. Cross out the expressions which cannot be used with the nouns, as in the example.

1 There are **several, many, <u>much,</u> plenty of, <u>too little</u>** things you can do to help.
2 He has met **a couple of, a few, very little, plenty of, too much** interesting people.
3 She earns **few, hardly any, plenty of, several, a great deal** of money.
4 We have got **no, many, lots of, a great deal of, a few** work to do.
5 Don't worry, there's **a little, plenty of, a couple of, many, a lot of** time.
6 **Both, Several, A large quantity of, Plenty of, Too much** students applied for the course.
7 He's got **no, hardly any, a little, some, a small amount of** qualifications.
8 She's got **hardly any, several, a little, a few, a lot of** experience in dealing with customers.
9 There is **too much, a lot of, hardly any, few, several** salt in this soup.
10 There is **a little, many, too much, a great number of, some** traffic on the roads today.

5. Underline the correct word.

1 A: I have a Physics exam tomorrow.
B: Oh dear. Physics **<u>is</u>/are** a very difficult subject.
2 A: My office is three miles from my house.
B: Three miles **is/are** a long way to walk to work.
3 A: My little brother has got measles.
B: Oh dear. Measles **is/are** quite a serious illness.
4 A: Jane looked nice today, didn't she?
B: Yes. Her clothes **were/was** very smart.
5 A: I've got two pounds. I'm going to buy a CD.
B: Two pounds **is/are** not enough to buy a CD.
6 A: The classroom was empty when I walked past.
B: Yes. The class **was/were** all on a school outing.
7 A: Have you just cleaned the stairs?
B: Yes, so be careful. They **is/are** very slippery.
8 A: Did you ask John to fix your car?
B: Yes. His advice **was/were** that I take it to a garage.

9 A: Did you enjoy your holiday?
B: Yes, thank you. The weather **was/were** wonderful.
10 A: These trousers **is/are** very old.
B: You should buy a new pair.
11 A: How **is/are** the company doing lately?
B: Great. We opened up two more branches.
12 A:' I am going to travel for two years when I finish school.
B: Two years **is/are** a long time to be away from home.

6. Finish the sentences, as in the example.

1 You need a lot of experience to do this job. A lot of experience ...is needed to do this job...
2 They gave us some interesting information. The information …
3 She likes Maths more than any other subject. Maths …
4 We had mild weather this winter. The weather …
5 We called the police immediately. The police …
6 I told them some exciting news. The news …
7 He was irritated because of the bad traffic. He was irritated because the …
8 I stayed in very luxurious accommodation. The accommodation …
9 The driver took the luggage out of the car. The luggage …
10 She gave me very sensible advice. The advice she gave me …
11 These shorts are too big for me. This pair of shorts …
12 The hotel is in magnificent surroundings. The hotel surroundings …
13 She's got long blonde hair. Her hair …

Артикль. The Article

1. Неопределенный a/an (используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

2. Определенный the (может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово “an hour” (час) начинается с согласной буквы “h”, но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю “a” также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

Использование неопределенного артикля a

один из множества (любой)	This is a cat.
первое упоминание в тексте	I see a bird.
при упоминании профессии	My brother is a pilot.
в восклицательных предложениях	What a good girl! What a surprise!

	Such a fine room!
вместо слова один	She is coming for a weak.
в определенных конструкциях there is a... I have a… he has a... I see a... this is a... that is a… It is a... Iama… he/she is a…	There is a book here. I have got a nice coat. He has a kind smile. I see a wolf. This is a dog. That is a doctor. It is a red pen. I am a good swimmer. He/she is a tourist
в ряде устойчивых словосочетаний at a quarter.., in a loud, (a low, an angry voice) to have a good time a lot of to go for a walk such a... after a while in a day (a month, a week, a year)	Come at a quarter to 8. Don't speak to him in an angry voice. We had a good time in the country. She has got a lot of presents. Let's go for a walk. He is such a clever boy. You'll see them after a while. We are living in a day.

Использование определенного артикля the

если речь идет о конкретном лице или предмете	The pen is on the table.
при повторном упоминании того же самого объекта	I see a cat. The cat is black.
если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света	the sun, the moon, the Earth
со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный)	The only man I love the main road to the left, to the right It was the right answer. the final test
с порядковыми числительными	the first, the tenth
с прилагательными в превосходной степени	the kindest, the most interesting the best
с музыкальными инструментами и танцами	to play the piano, to dance the tango
с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры)	The Britons keep their traditions.
с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов	the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street
с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of	the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard

Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний

in the middle, in the corner in the morning, In the evening, in the afternoon what’s the use? to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market	The table is in the middle of the room. I never drink coffee in the evening. What's the use of going there so late? Do you like going to the theatre? He works at the shop.

at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market the fact is (was) that... where is the…? in the country, to the country	The fact is that I have no money at all. Where is the doctor? We always spend summer in the country.

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

Случаи, когда артикль не употребляется

если, перед существительным стоит притяжательное местоимение	a pen - my pen a dog - his dog the teacher - our teacher the apple - her apple
если перед существительным стоит указательное местоимение	the cats - those cats the books - these books a mouse - this mouse
если стоит другое существительное в притяжательном падеже	a car - father's car the horse - farmer's horse a bike - brother's bike the doll - sister's doll
если перед существительным стоит, количественное числительное	5 balls, 7 bananas, 2 cats
если перед существительным стоит отрицание “no”	She has no children. I see no birds.
перед именами	Mike, Kate, Jim, etc
с названиями дней недели	Sunday, Monday, etc.
с названиями месяцев	May, December, etc.
с названиями времен года	in spring, in winter
с названиями цветов	white, etc. I like green
с названиями спортивных игр	football, chess, etc.
с названиями блюд, напитков	tea, coffee, soup, etc,
с названиями праздников	Easter, Christmas, etc.
с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the	English, etc. I learn English, the English language
с названиями стран	Russia, France, etc НО: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo
с названиями городов	Moscow, Paris, etc.
с названиями улиц, площадей	Trafalgar Square
с названиями парков	St James’ Park, Hyde Park
с названиями мостов	Tower Bridge
с названиями одиночных гор	Kilimanjaro
с названиями озер	Loch Ness
с названиями континентов	Asia, Australia, etc.
с названиями одиночных островов	Cyprus
если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное	what animals can swim? I know what thing you have lost!

местоимение	

ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

По своей структуре глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

По значению глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

Все формы глагола в английском языке делятся на личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

Глаголы в изъявительном наклонении выражают реальное действие, передают факты: His son goes to school. Его сын учится в школе.
She has written an interesting article. Она написала интересную статью.
A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

Глаголы в повелительном наклонении выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:
"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.
Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

Глаголы в сослагательном наклонении выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

Глаголы в действительном залоге выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

Глаголы в страдательном залоге выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида**. **Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:
Он прочитал эту статью с интересом.

Глаголы несовершенного вида обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Am I?

I am	I'm	I am not	I'm not	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Is he?
He is	He's	He is not	He isn't	Is she?
She is	She's	She is not	She isn't	Is it?
It is	It's	It is not	It isn't	Are we?
We are	We're	We are not	We aren't	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Are they?
They are	They're	They are not	They aren't	

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I was	I was not	I wasn’t	Was I?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
He was	He was not	He wasn’t	Was he?
She was	She was not	She wasn’t	Was she?
It was	It was not	It wasn’t	Was it?
We were	We were not	We weren’t	Were we?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
They were	They were not	They weren’t	Were they?

ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there’s. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn’t …/There aren’t … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.
Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.
It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)
There are three books on the desk.
They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

Конструкция There was/There were

This is a modern town today.
There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.
This is the same town fifty years ago.
There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
There was	There was not	There wasn't	Was there?
There were	There were not	There weren't	Were there?

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.

б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.

в) в следующих высказываниях: I've got a headache. I've got a temperature. I've got a cough, I've got a toothache, I've got a cold, I've got a problem.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Have I (got)?
I have (got)	I've (got)	I have not (got)	I haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Has he (got)?
He has (got)	He's (got)	He has not (got)	He hasn't (got)	Has she (got)?
She has (got)	She's (got)	She has not (got)	She hasn't (got)	Has it (got)?
It has (got)	It's (got)	It has not (got)	It hasn't (got)	Have we (got)?
We have (got)	We've (got)	We have not (got)	We haven't (got)	Have you (got)?

You have (got) They have (got)	You've (got) They've (got)	You have not (got) They have not (got)	You haven't (got) They haven't (got)	Have they (got)?

Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I had	I did not have	I didn't have	Did I have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
He had	He did not have	He didn't have	Did he have?
She had	She did not have	She didn't have	Did she have?
It had	It did not have	It didn't have	Did it have?
We had	We did not have	We didn't have	Did we have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
They had	They did not have	They didn't have	Did they have?

Имя прилагательное. The Adjective

Категории	**Прилагательное в русском языке**	**Прилагательное в английском языке**
Число	изменяется	не изменяется
Род	изменяется	не изменяется
Падеж	изменяется	не изменяется

Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе **ни приставок, ни суффиксов: small -** *маленький*, **long -** *длинный*, **white -** *белый*.

К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

Суффиксальное образование имен прилагательных

Суффикс	**Пример**	**Перевод**
- ful	use**ful** doubt**ful**	**полезный** **сомневающийся**
- less	help**less** use**less**	**беспомощный** **бесполезный**
- ous	fam**ous** danger**ous**	**известный** **опасный**
- al	form**al** centr**al**	**формальный** **центральный**
- able	eat**able** cap**able**	**съедобный** **способный**

Приставочный способ образования имен прилагательных

Приставка	Пример	Перевод
un -	**un**cooked **un**imaginable	**невареный** **невообразимый**
in -	**in**capable **in**human	**неспособный** **негуманный**
il -	**il**legal **il**liberal	**нелегальный** **необразованный**
im -	**im**possible **im**practical	**невозможный** **непрактичный**
dis -	**dis**honest **dis**agreeble	**бесчестный** **неприятный**
ir -	**ir**regular **ir**responsible	**неправильный** **безответственный**
Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый, **snow-white –** белоснежный.		

Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing

- ed	**- ing**
Описывают чувства и состояния	**Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства**
interested – интересующийся, заинтересованный	**interesting -** интересный
bored - скучающий	**boring -** скучный
surprised - удивленный	**surprising -** удивительный

Степени сравнения прилагательных

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**

Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:

- положительная степень сравнения **(Positive Degree);**

- сравнительная степень сравнения **(Comparative Degree);**

- превосходная степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

1. -er. -est

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке **-** добавляем “е” (большой - больше, холодный - холоднее).

Превосходная степень образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
cold - холодный	cold**er -** холоднее	the cold**est -** самый холодный
big - большой	bigg**er -** больше	the bigg**est -** самый большой
kind - добрый	kind**er -** добрее	the kind**est -** самый добрый

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень

clever — умный **easy -** простой **able -** способный **busy -** занятой	clever**er - умнее** eas**ier - проще** abl**er - способнее** bus**ier - более занятой**	**the** clever**est - самый умный** **the** easi**est - самый простой** **the** abl**est - самый способный** **the** busi**est - самый занятой**

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **“e” ,** то при прибавлении **– er и – est немое “e” опускается:**

larg**e – larg**er **- the** larg**est /** большой – больше – самый большой

brav**e – brav**er **– the** brav**est /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

big – bigg**er –** bigg**est /** большой – больше – самый большой

hot – hott**er –** hott**est /** горячий – горячее – самый горячий

thin – thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на “y” с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **“y” переходит в “i”:**

busy – bus**ier – bus**iest **/ занятой – более занятой – самый занятой**

easy – eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

2. more, the most

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful - красивый **interesting – интересный** **important - важный**	**more beautiful -** красивее **more interesting -** интереснее **more important -** важнее	**the most beautiful** - самый красивый **the most interesting** - самый интересный **the most important** - самый важный

Особые формы

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
good - хороший **bad -** плохой **little -** маленький **much/many -** много **far -** далекий/далеко **old -** старый	**better -** лучше **worse -** хуже **less -** меньше **more -** больше **farther/further -** дальше **older/elder -** старше	**the best -** самый лучший **the worst -** самый плохой **the least -** самый маленький, меньше всего **the most -** больше всего **the farthest/furthest -** самый дальний **the oldest/eldest -** самый старый

3. less. the least

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful – красивый **interesting -** интересный	**less beautiful -** менее красивый	**the least beautiful –** самый некрасивый

important - важный	**less interesting –** менее интересный **less important -** менее важный	**the least interesting –** самый неинтересный **the least important –** самый неважный

Другие средства сравнения двух предметов или лиц

Конструкция	Комментарий	Примеры
As…as (такой же, так же)	**Для сравнения двух объектов одинакового качества**	He is **as** a strong **as** a lion Он такой же сильный, как лев. She is **as** clever **as** an owl**.** Она такая же умная, как сова.
Not so…as (не такой, как)	**в отрицательных предложениях**	He is **not so** strong **as** a lion. Он не такой сильный, как лев**.** She is **not so** clever **as** an owl. Она не такая умная, как сова.
The…the (с двумя сравнительными степенями)	**показывает зависимость одного действия от другого**	**The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся. **The more** I learn this rule **the less** I understand it. Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю.

Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

Числительное. The numeral

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

126 – one hundred twenty six

1139 – one thousand one hundred and thirty nine

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

НО: окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **“of”:**

hundreds <u>of</u> children – сотни детей

thousands <u>of</u> birds- тысячи птиц

millions <u>of</u> insects – миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

20+1=21 (twenty + one = **twenty one**)

60+7=67 (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

Как читать даты

1043	ten forty-three
1956	nineteen fifty-six
1601	sixteen o one
2003	two thousand three
В 2003 году	in two thousand three
1 сентября	the first of September
23 февраля	the twenty-third of February

ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:

224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)

Тематика общения:

1. Высшее образование в России и за рубежом.
2. Мой вуз.
3. Студенческая жизнь.

Проблематика общения:

1. Уровни высшего образования.
2. Уральский государственный горный университет.
3. Учебная и научная работа студентов.
4. Культурная и спортивная жизнь студентов.

2.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

The Ural State Mining University

Mining University – Горный университет; **higher educational institution** - высшее учебное заведение; **to provide** - зд. Предоставлять; **full-time education** - очное образование; **extramural education** - заочное образование; **to award** – награждать; **post-graduate courses** – аспирантура;	**scientific research centre** - центр научных исследований; **master of science** - кандидат наук; **capable** – способный; **to take part in** - принимать участие; **graduate** – выпускник; **to dedicate** – посвящать; **to carry out scientific work** - выполнять научную работу;

Faculty of Mining Technology - горно – технологический; **Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический; **Institute of World Economics** – Институт мировой экономики; **Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический; **Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты; **Faculty of City Economy** – городского хозяйства;	**Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики; **Faculty of extramural education** – заочный; **department** – кафедра; **dean** – декан; **to train specialists in** - готовить специалистов; **to consist of** - состоять из; **preparatory** – подготовительный; **additional** – дополнительный; **to offer** – предлагать;

to house - размещать /ся/; **building** – здание; **Rector's office** – ректорат; **Dean's office** – деканат; **department** – кафедра; **library** – библиотека; **reading hall** - читальный зал; **assembly hall** - актовый зал; **layout** - расположение, план; **administrative offices** - административные отделы;	**computation centre** - вычислительный центр; **canteen** – столовая; **to have meals** – питаться; **hostel** – общежитие; **to go in for sports** - заниматься спортом; **wrestling** – борьба; **weight lifting** - тяжелая атлетика; **skiing** - катание на лыжах; **skating** - катание на коньках; **chess** – шахматы;

academic work - учебный процесс; **academic year** - учебный год; **to consist of** - состоять из; **bachelor's degree** - степень бакалавра;	**general geology** - общая геология; **foreign language** - иностранный язык; **to operate a computer** - работать на компьютере;

course of studies - курс обучения; **to last** - длиться; **term** - семестр; **to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия; **period** - пара, 2 – х часовое занятие; **break** - перерыв; **subject** - предмет; **descriptive geometry** - начертательная геометрия;	**to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен; **to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен; **to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен; **to fail in chemistry** - не сдать химию; **holidays, vacations** - каникулы; **to present graduation paper** - представлять дипломные работы; **for approval** - к защите;

The Faculty of Mining Technology trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

The Institute of World Economics trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

The Faculty of Mining Mechanics trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

The Faculty of Geology & Geophysics trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

2.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

This text is dedicated to the history of the Ural State Mining University formerly called the Sverdlovsk Mining Institute. It was founded in 1917. It is the oldest higher technical educational institution in the Urals. In 1920 the Mining Institute became a faculty of the Ural State University and in 1925 of the Ural Polytechnical Institute. In 1930 this faculty was reorganized into the Mining Institute. The Institute was named after V.V. Vakhrushev the USSR Coal Industry Minister in 1947. It was awarded the Order of the Red Banner of Labour in 1967.

In 1993 the Sverdlovsk Mining Institute was reorganized into The Ural State Academy of Wining and Geology. In 2004 The Ural State Academy of Mining and Geology was reorganized into The Ural State Mining University. The University provides full-time and extramural education in many specialities. There are post graduate courses at the University as well.

The University is an important scientific research center. Many doctors and masters of Science teach and carry out scientific work at the University. Capable students take part in research projects. The graduates of the University work all over the country.

There are six faculties at the Ural State Mining University: Faculty of Mining Technology; Faculty of Mining Mechanics; Faculty of Geology & Geophysics; Faculty of Civil Protection; Faculty of City Economy; Faculty of Extramural Education; and The Institute of World Economics.

Besides there is a Preparatory faculty where young people get special training before taking entrance exams. The Faculty of Additional Education offers an opportunity to get the second higher education.

Each faculty trains mining engineers in different specialities.

There are many specialities at the Faculty of Extramural Education where students have to combine work with studies. Very often the Ural State Mining University organizes training specialists in new modern specialities.

Faculties consist of Departments. Each faculty is headed by the Dean. The head of the Academy is the Rector.

The University is housed in four buildings. Building, One houses - the Rector's office, the Deans' offices, number of administrative offices, Faculty of City Economy, the Faculty or Mining Mechanics with its numerous departments and laboratories (labs).

Building Two houses the Faculty of Mining Technology, Faculty of Civil Protection, the Deans' offices, many departments, labs and the computation centre.

Building Three houses the Faculty of Geology & of Geophysics, the Faculty of Extramural Education, the Dean's offices, many departments and labs. The Ural Geological Museum, the Museum of the History of the Ural State Mining University and some administrative offices are also housed in this building.

Building Four houses The Institute of World Economics, the Dean's office, departments and labs, the library, reading halls, the Assembly hail, the students cultural centre and a large canteen where students can have their meals.

The library and the reading halls provide students with all kinds of reading: textbooks, reference books / справочники/ dictionaries, magazines and fiction/ художественная литература/.

Besides not far from the University there are four five-storied buildings of the student hostel, where most students live. Near the hostels there is a House of Sports. There students can go in for- different kinds of sports: chess, badminton, table tennis, boxing, wrestling, weight lifting, basketball, volleyball, handball.

The Ural State Mining University offers students three different programs of higher education such as: Bachelors, Diplomate Engineers and Magisters.

The course of studies for a bachelor's degree lasts four years. The academic year begins in September and ends in June. It consists of two terms - September to January and February to June. Students attend lectures and practical classes. As a rule, there are three or four periods of lectures and Classes a day with 20 minutes break between them.

During their first two years students take the following subjects: higher mathematics, physics, chemistry, theoretical air-mechanics, descriptive geometry, general geology, mineralogy, geodesy, history, a foreign language (English, French or German). Besides all the students learn to operate a computer.

Students take their tests and exams at the end of each term. After exams students have their holidays or vacations. At the end of the academic year the students of the academy have practical work at mines, mineral dressing plants, geological & geophysical parties. At the end of the final year students present their graduation papers for approval. After getting the Bachelor's degree the graduates have a possibility to continue their education. They can enter a Diplomate Engineer's course or studies

which lasts one academic year or the graduates can take a two-year program of Magister's degree. After defending final papers these graduates can enter the post-graduate courses.

2.3 Систематизация грамматического материала:

1. Образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Образование видовременных форм глагола в активном залоге

Present Simple употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

Present Continuous употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],

Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

Present perfect употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

Present perfect continuous употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.
Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the present simple or the present continuous.

1 A: *Do you know* (you/know) that man over there?
B: Actually, I do. He's Muriel's husband.

2 A: Are you doing anything tomorrow evening?
B: Yes. I … (see) Jack at nine o'clock.

3 A: I … (see) you're feeling better.
B: Yes, I am, thank you.

4 A: What's that noise?
B: The people next door … (have) a party.

5 A: Graham … (have) a new computer.
B: I know. I've already seen it.

6 A: This dress …. (not/fit) me any more.
B: Why don't you buy a new one?

7 A: Your perfume … (smell) nice. What is it?
B: It's a new perfume called Sunshine.

8 A: What is Jane doing?
B: She … (smell) the flowers in the garden.

9 A: What … (you/look) at?
B: Some photos I took during my holidays. They aren't very good, though.

10 A: You … (look) very pretty today.
B: Thank you. I've just had my hair cut.

11 A: I … (think) we're being followed.
B: Don't be silly! It's just your imagination.

12 A: Is anything wrong?
B: No. I … (just/think) about the party tonight.

13 A: This fabric … (feel) like silk.
B: It is silk, and it was very expensive.

14 A: What are you doing?

B: I … (feel) the radiator to see if it's getting warm.
15 A: She … (be) generous, isn't she?
B: Yes, she has never been a mean person.
16 A: He … (be) very quiet today, isn't he?
B: Yes, I think he has some problems.
17 A: Would you like some cherries?
B: Yes, please. I … (love) cherries. They're my favourite fruit.
18 A: I'm sorry, but I … (not understand) what you mean.
B: Shall I explain it again?
19 A: The children are making lots of noise today.
B: I know, but they … (have) fun.
20 A: This cake … (taste) awful.
B: I think I forgot to put the sugar in it!

2. Fill in the gaps with recently, how long, yet, for, always, ever, already, since, so far or just. Sometimes more than one answer is possible.

1 A: Has Tom finished his exams ...yet...?
B: No. He finishes them next Thursday.
2 A: … has Janet been working at the hospital?
B: She has been working there … she left school.
3 A: How are you finding your new job?
B: Great. I haven't had any problems … .
4 A: Is John at home, please?
B: No, I'm afraid he's … gone out.
5 A: Have you been waiting long?
B: Yes, I've been here … two hours.
6 A: Has Martin … been to Spain?
B: No. I don't think so.
7 A: Have you spoken to Matthew … ?
B: Yes. I phoned him last night.
8 A: Can you do the washing-up for me, please?
B: Don't worry. Mike has … done it.
9 A: Lucy has … been musical, hasn't she?
B: Yes, she started playing the piano when she was five years old.
10 A: Shall we go to that new restaurant tonight?
B: Yes. I have … been there. It's really nice.
11 A: Your dog's been barking … three hours!
B: I'm sorry. I'll take him inside.
12 A: Have you finished reading that bodk yet?
B: No. I've … started it.

3. Put the verbs in brackets into the present perfect or continuous, using short forms where appropriate.

1 A: How long ...*have you known*... (you/know) Alison?
B: We ... (be) friends since we were children.
2 A: Who … (use) the car?
B: I was. Is there a problem?
3 A: What are Andrew and David doing?
B: They … (work) in the garden for three hours.
4 A: Why is Sally upset?
B: She … (lose) her bag.
5 A: I … (always/believe) that exercise is good for you.

B: Of course, it's good to keep fit.

6 A: Emily … (teach) maths since she left university.
B: Yes, and she's a very good teacher, too.

7 A: Fred … (open) a new shop.
B: Really? Where is it?

8 A: This pie is delicious.
B: Is it? I … (not/taste) it yet.

9 A: Have you found your umbrella yet?
B: No, I … (look) for it for an hour now.

10 A: You look exhausted.
B: Well, I … (clean) the windows since 8 o'clock this morning.

11 A: Can I have some more lemonade, please?
B: Sorry, your brother … (just/drink) it all.

12 A: Have you got new neighbours?
B: Yes, they … (just/move) to the area.

4. Put the verbs in brackets into the present perfect or the present perfect continuous.

Dear Connie,

I hope you are enjoying yourself at university. I'm sure you 1)...*'ve been studying*... (study) hard. Everything is fine here at home. Billly 2) … (just/receive) his school report. It was bad, as usual. He 3) … (decide) to leave school next year and find a job. Fiona 4) … (go) to the gym every day for the past two weeks. She 5) … (try) to get in shape for the summer. She 6) … (already/plan) her holiday in the sun. Your father 7) … (sell) the old car and he 8) … (buy) a new one. It's lovely — much nicer than the old one.

Anyway, write soon.

Love, Mum

5. Fill in the gaps with have/has been (to) or have/has gone (to).

Jack: Hi, Jill. Where's Paul?

Jill: Oh, he 1) ...*has gone to*... London for a few days.

Jack: Really! I 2) … London recently. I came back yesterday. 3) … you … there?

Jill: No, I haven't. Paul 4) … twice before, though. Where's Sarah?

Jack: She 5) … Spain for two weeks with her parents. They 6) … there to visit some friends.

Jill: When is she coming back?

Jack: They'll all be back next weekend.

6. Choose the correct answer.

1 'What time does the train leave?'
'I think it ..*A*... at 2 o'clock.'
A leaves
B has been leaving
C has left

2 'Where are Tom and Pauline?'
They … e supermarket.'
A have just gone
B have been going
C go

3 What is Jill doing these days?'
She … for a job for six months.'
A is looking
B has been looking
C looks

4 Is Mandy watching TV?'
No. She … her homework right now.'
A is always doing
B is doing
C does

5 'Have you been for a walk?'
'Yes. I often … for walks in the evenings.'
A have gone
B am going
C go

6 'Have you seen any films lately?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have seen
B am seeing
C see

7 'What … ?'
'It's a piece of cherry pie. Mum made it yesterday.'
A are you eating
B do you eat
C have you eaten

8 'Are you going on holiday this summer?'
'Yes. I … enough money.'
A am saving
B have already saved
C save

9 'Is Todd reading the newspaper?'
'No. He … dinner at the moment.'
A has been making
B makes
C is making

10 'Have you bought any new CDs recently?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have bought
B have been buying
C am buying

11 'What time does the play start?'
'I think it … at 8 o'clock.'
A has been starting
B starts
C has started

12 'Where is Mark?'
'He … to the library to return some books.'
A has gone
B has been
C is going

13 'What … ?'
'It's a letter to my pen-friend. I'm telling her my news.'
A have'you written
B do you write
C are you writing

7. Underline the correct tense.

1. Liz and I are good friends. We **know/<u>have known</u>** each other for four years.
2. Sarah is very tired. She **has been working / is working** hard all day.
3. Where is John?' 'He's upstairs. He **does/is doing** his homework.'
4. I can't go to the party on Saturday. I **am leaving/ have been leaving** for Spain on Friday night.
5. Jane **has finished/is finishing** cleaning her room, and now she is going out with her friends.
6. I didn't recognise Tom. He **looks/is looking** so different in a suit.
7. I don't need to wash my car. Jim **washes/has washed** it for me already.
8. Ian **has been talking/is talking** to his boss for an hour now.
9. Claire's train **arrives/has arrived** at 3 o'clock. I must go and meet her at the station.
10. 'Would you like to borrow this book?' 'No, thanks. I **have read/have been reading** it before.'
11. 'Where **are you going/do you go**?' To the cinema. Would you like to come with me?'
12. Have you seen my bag? I **am searching/have been searching** for it all morning.
13. 'Is Colin here?' 'I don't know. I **haven't seen/ haven't been seeing** him all day.'
14. Sophie is very clever. She **is speaking/speaks** seven different languages.
15. We **are moving/have moved** house tomorrow. Everything is packed.

8. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 Who …*has been using* … (use) my toothbrush?
2 'What … (you/do)?' 'I … (write) a letter.'
3 Samantha … (play) tennis with friends every weekend.
4 Tim and Matilda … (be) married since 1991.
5 Uncle Bill … (just/decorate) the bathroom.
6 Pauline and Tom … (sing) in the school choir twice a week.
7 Who … (you/speak) to?
8 Sarah is very happy. She … (win) a poetry competition.
9 He … (drink) two cups of coffee this morning.
10 My friend … (live) in America at the moment.
11 They … (usually/change) jobs every five years.
12 I … (normally/cut) my hair myself.
13 Linda … (study) in the library for three hours.
14 We … (play) in a concert next weekend.
15 Who … (read) my diary?
16 Tim … (leave) the house at 7 o'clock every morning.
17 … (your mother/work) in a bank?
18 … (you/drink) coffee with your breakfast every day?
19 We … (make) plans for our summer holidays right now.
20 They… (move) house in September.

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What ...*are you doing*... (you/do)?
B: Nothing. I … (just/finish) my lunch.
2 A: Where … (you/be) all morning?
B: I … (clean) my house since 8 o'clock.
3 A: … (you/do) anything next weekend?
B: No, I … (not/make) any plans yet.
4 A: Jane looks great. … (she/lose) weight?
B: Yes, she … (exercise) a lot recently.
5 A: … (be/you) busy right now?
B: Yes, I … (just/start) typing this report.
6 A: Where is Peter?
B: He … (wash) the car at the moment.
7 A: Who … (be) your favourite actor?

B: I … (like) Sean Connery since I was a child.

8 A: … (you/do) your homework yet?

B: Almost; I … (do) it now.

10. Put the verbs in brackets into the correct tense.

Dear Nick,

This is just a short note to tell you I 1) *...'m arriving/arrive...* (arrive) at the airport at 5 pm on Saturday, 10th December. I 2) … (be) very busy recently, and that's why I 3) … (not/write) to you for a while. I 4) … (plan) this trip for months, so now I 5) … (look forward) to spending some time with you and your family. I 6) … (hope) you will be able to meet me at the airport. Please give my love to your wife and the children.

See you soon,
James

Past simple употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn’t use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

Past continuous употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

Past perfect употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,

They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,

She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous. Which was the longer action in each sentence?

1. They ...*were cleaning*... (clean) the windows when it …*started*... (start) to rain.
Cleaning the windows was the longer action.
2. As he … (drive) to work, he … (remember) that his briefcase was still at home.
3. Melanie … (cook) dinner when her husband … (come) home.
4. I … (hear) a loud crash as I … (sit) in the garden.
5. She … (type) a letter when her boss … (arrive).
6. While the dog … (dig) in the garden, it … (find) a bone.
7. Mary … (ride) her bicycle when she … (notice) the tiny kitten.
8. While I … (do) my homework, the phone … (ring).

2. A policeman is asking Mrs Hutchinson about a car accident she happened to see yesterday. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

P: What 1) ...*were you doing*... (you/do) when you 2) … (see) the accident, madam?
H: I … (walk) down the street.
P: What exactly 4) … (you/see)?
H: Well, the driver of the car 5)… (drive) down the road when suddenly the old man just 5) … (step) in front of him! It 6) … (be) terrible!
P: 8) … (the driver/speed)?
H: No, not really, but the old man 9) … (not/look) both ways before he ... (try) to cross the road.
P: 11) ... (anyone else/see) the accident?
H: Yes, the lady in the post office.
P: Thank you very much.

3. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

A As soon as Margaret 1) ...*got*... (get) off the train, she 2) … (pull) her coat around her. Rain 3) … (fall) heavily and a cold wind 4) … (blow) across the platform. She 5) … (look) around, but no one 6)

… (wait) to meet her. She 7) … (turn) to leave when she 8) … (hear) footsteps. A man 9) … (walk) towards her. He 10) … (smile) at her, then he 11) … (say), 'You're finally here.'

B George 1) … (pick) up his bag then, 2) … (throw) it over his shoulder. It 3) … (get) dark and he 4) … (have) a long way to go. He wished that he had let someone know that he was coming. It 5) … (start) to rain, and he was feeling cold and tired from the long journey. Suddenly, he 6) … (hear) a noise, then he 7) … (see) two bright lights on the road ahead. A car 8) … (head) towards him. It slowed down and finally 9) … (stop) beside him. A man 10) … (sit) at the wheel. He 11) … (open) the door quickly and 12) … (say) 'Get in, George.'

C Andy 1) … (step) into the house and 2) … (close) the door behind him. Everything 3) … (be) quiet. His heart 4) … (beat) fast and his hands 5) … (shake) as he crept silently into the empty house, but he was trying not to panic. He soon 6) … (find) what he 7) … (look) for. He smiled with relief as he put on the clothes. The men who 8) … (follow) him would never recognise him now.

4. Imagine that you were present when these things happened, then, in pairs, ask and answer questions, as in the example.

SA: What were you doing when the burglar broke in?
SB: I was watching TV.
SA: What did you do?
SB: I called for help.

1 The burglar broke in.
2 The storm broke.
3 The lights went out.
4 The boat overturned.
5 The earthquake hit.
6 The building caught fire.

5. Rewrite each person's comment using used to or didn't use to.

1 Sally - 'I don't walk to work any more.'
I used to walk to work.
2 Gordon - 'I've got a dog now.'
3 Lisa - 'I don't eat junk food any more.'
4 Jane - 'I go to the gym every night now.'
5 Paul - 'I'm not shy any more.'
6 Edward - 'I live in a big house now.'
7 Helen - 'I haven't got long hair any more.'
8 Frank - 'I eat lots of vegetables now.'

6. Choose the correct answer.

1 'I find it hard to get up early.'
'You ...*3*... to getting up early once you start working.'
A are used
B will get used
C were used

2 'Do you often exercise now?'
'No, but I … to exercise a lot when I was at school.'
A used
B will get used
C am used

3 'Aren't you bothered by all that noise?'
'No, we … to noise. We live in the city centre.'
A were used
B will get used

C are used

4 'Does your sister travel a lot?'
'No, but she … to before she got married.'
A didn't use
B used
C wasn't used

5 'I don't like wearing a suit every day.'
'Don't worry, you … to it very soon.'
A are used
B will get used
C were used

6 'Sandra … to using a computer, but now she enjoys it.'
'It's a lot easier for her now.'
A isn't used
B will get used
C wasn't used

7 'Do you remember the things we … to do when we were kids?'
'Of course I do. How could I forget what fun we had!'
A used
B were used
C got used

8 'Do you like living in the city?'
'Well, I … to it yet, but it's okay.'
A am not used
B wasn't used
C am used

7. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the correct form. Use each verb twice.

wash, walk, play, work

1 I used to ...*work*... in a shop, but now I work in an office.
2 I can't concentrate. I'm not used to … in such a noisy office.
3 Tom lived in the country for years. He used to … miles every day.
4 I'm exhausted. I'm not used to … such long distances.
5 Mary used to … her clothes by hand, but now she uses a washing machine.
6 We haven't got a washing machine, so we're used to … our clothes by hand.
7 The children are bored with the bad weather. They're used to … outside.
8 When we were younger, we used to … cowboys and Indians.

8. Put the verbs in brackets into the past simple or the present perfect.

1. A: Do you know that man?
B: Oh yes. He's a very good friend of mine. I 1) ...*'ve known*... (know) him for about ten years.
A: I think I 2) … (meet) him at a business meeting last month.

2. A: Mum 1) … (lose) her purse.
B: Where 2) … (she/lose) it?
A: At the supermarket while she was shopping.

3. A: Who was on the telephone?
B: It 1) … (be) Jane.
A: Who is Jane?
B: Someone who 2) … (work) in my office for a few years. She's got a new job now, though.

4. A: Who is your favourite singer?
B: Freddie Mercury. He 1) … (have) a wonderful voice.
A: Yes, I agree. He 2) … (enjoy) performing live, too.

9. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the past perfect continuous.

read, scream, argue, try, eat, watch

1. Emily was angry. She ...*had been arguing*… with her parents for an hour.
2. Hannah felt sick. She … chocolates all afternoon.
3. Allan had a headache. His baby sister … for half an hour.
4. Emily was frightened. She … a horror film for half an hour.
5. Simon was confused. He … to win the game for hours.
6. John was very tired. He … all night.

10. Put the verbs in brackets into the correct past tense.

A: On Monday morning, Jo 1) ... *missed*... (miss) the bus and had to walk to school. When she 2) … (arrive), the bell 3) … (already/ring)', and lessons 4) … (start). The children 5) … (work) quietly when Jo 6) … (walk) into the'classroom.

B: When Jamie 1) … (get) to the party, a lot of people 2) … (dance) to pop music. Everyone 3) … (wear) jeans and T-shirts. Jamie 4) … (buy) a new suit for the party and he 5) … (wear) that. He 6) … (feel) quite silly because everyone 7) … (look) at him.

Future simple употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

Be going to употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,

Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
No. Why?
I need to make some photocopies.

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Tanya Smirnoff is a famous astrologer. She's been invited on a TV show to give her astrological predictions for next year. Using the prompts below, make sentences, as in the example.
e.g. An eartyhquake will strike Asia.

1 earthquake/strike/Asia
2 Tom Murray/win/elections
3 economy/not improve/significantly
4 number of road accidents/increase
5 America/establish/colony/on Mars
6 scientists/not discover/cure for common cold

2. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the examples.

SA: Are you going to pay the bill?
SB: Yes, that's what I'm going to do.
SA: Are you going to complain to the manager?
SB: No, that's not what I'm going to do.

1. pay the bill (√)
2. complain to the manager (X)
3. take the skirt back to the shop (√)
4. buy the jumper (√)
5. ask the bank manager for a loan (X)
6. order the food (√)
7. book the airline tickets (X)

3. Fill in the gaps with the correct form of will or be going to and the verb in brackets.

1 A: Why are you buying flour and eggs?
B: Because I ...*'m going to make*... (make) a cake.
2 A: I have decided what to buy Mum for her birthday.
B: Really. What … (you/buy) for her?
3 A: Did you ask Jackie to the party?
B: Oh no! I forgot! I … (ask) her tonight.
4 A: Could I speak to Jim, please?
B: Wait a minute. I … (get) him for you.
5 A: What are your plans for the weekend?

B: I … (spend) some time with my friends.

6 A: What are you doing on Friday night?
B: Oh, I … (probably/stay) at home with my family.

7 A: Have you tidied your room yet?
B: No, but I promise I … (do) it this afternoon.

8 A: Look at that boy!
B: Oh yes! He … (climb) the tree.

9 A: Jason is very clever for his age.
B: Yes. He says he … (become) a doctor when he grows up.

10 A: I'm too tired to cut the grass.
B: Don't worry! I (cut) it for you.

4. Fill in the gaps with shall, will or the correct form of be going to.

1 A: It's too hot in here.
B: You're right. I ...*will...* open a window.

2 A: … I put the baby to bed, now?
B: Yes, he looks a little tired.

3 A: Have you seen Lucy recently?
B: No, but I … meet her for lunch later today.

4 A: Have you done the shopping yet?
B: No, but I … probably do it tomorrow, after work.

5 A: … we ask Mr Perkins for help with the project?
B: That's a good idea. Let's ask him now.

5. Replace the words in bold with will/won't or shall I/we, as in the example.

1 I've asked Paul to talk to the landlord, but he **refuses to** do it.
I've asked Paul to talk to the landlord, but he won't do it.

2 **Do you want me** to make a reservation for you?

3 **Can** you call Barry for me, please?

4 **Why don't we** try this new dish?

5 Where **do you want me** to put these flowers?

6. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.

SA: *When will you do the gardening?*
SB: *I'll do it after I've done the shopping.*

1 do the gardening / do the shopping
2 post the letters / buy the stamps
3 iron the clothes / tidy the bedroom
4 water the plants / make the bed
5 do your homework / have my dinner
6 pay the bills / take the car to the garage

7. Put the verbs in brackets into the present simple or the future simple.

1 A: I'm going to the gym tonight.
B: Well, while you ...*are*... (be) there, I … (do) the shopping.

2 A: … (you/call) me when you … (get) home?
B: Yes, of course.

3 A: As soon as John … (come) in, tell him to come to my office.
B: Certainly, sir.

4 A: I'm exhausted.
B: Me too. I wonder if David … (come) to help tonight.

5 A: Are you going to visit Aunt Mabel this afternoon?

B: Yes, I ... (visit) her before I … (do) the shopping.

6 A: Is George going to eat dinner with us?
B: No, by the time he … (get) home it … (be) very late.

7 A: When … (you/pay) the rent?
B: When I … (get) my pay cheque.

8 A: What are your plans for the future?
B: I want to go to university after I … (finish) school.

9 A: If you … (pay) for dinner, I … (pay) for the theatre.
B: Okay, that's a good idea.

10 A: Can you give this message to Mike, please?
B: Well, I'll try, but I doubt if I … (see) him today.

8. Put the verbs in brackets into the future simple, the present simple or the present continuous.

1 A: I ...*am seeing*... (see) Roger at seven o'clock tonight.
B: Really? I thought he was out of town.

2 A: … (you/do) anything on Friday morning?
B: No, I'm free.

3 A: I … (go) to the cinema. There's a new film on. Do you want to come with me?
B: What time … (the film/start)?

4 A: Helen … (have) a party the day after tomorrow. … (you/go)?
B: As a matter of fact, I haven't been invited.

5 A: The new exhibition … (open) on April 3rd and … (finish) on May 31st.
B: I know. I … (go) on the first day.

6 A: Aunt Maggie … (come) to visit us tomorrow.
B: I know. What time … (she/arrive)?

7 A: Excuse me, what time … (the train/leave)?
B: At half past three, madam.

8 A: Michael Jackson … (give) a concert at the Olympic Stadium next week.
B: I know. I … (want) to get a ticket.

9 A: I'm really thirsty.
B: I … (get) you a glass of water.

10 A: Are you looking forward to your party?
B: Yes. I hope everyone … (enjoy) it.

11 A: How old is your sister?
B: She .. (be) twelve next month.

12 A: What are you doing tonight?
B: I … (probably/watch) TV after dinner.

9. A) Cliff Turner has his own business and it is doing well. He has already decided to expand. Look at the prompts and say what he is going to do, as in the example.

1. employ more staff

He's going to employ more staff.

2. advertise in newspapers and magazines
3. equip the office with computers
4. increase production
5. move to bigger premises
6. open an office abroad

B) Cliff is always busy. Look at his schedule and say what his arrangements are for the next few days. Make sentences, as in the example.

Wednesday 12th: fly to Montreal

He is flying to Montreal on Wednesday.
Thursday 13th: give an interview to The Financial Times
Friday 14th: have lunch with sales representatives
Saturday 15th: have a meeting with Japanese ambassador
Sunday 16th: play tennis with Carol

10. ln Pairs, ask and answer the following questions using I (don't) think/expect I will or I hope /'m sure/'m afraid I will/won't, as in the example.
SA: *Do you think you will pass your exams?*
SB: *I hope I will/I'm afraid I won't.*
1 pass/exams
2 move house
3 take up / new hobby
4 make / new friends
5 start having music lessons
6 have / party on / birthday
7 learn/drive

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир)

Тематика общения:

1. Екатеринбург – столица Урала.
2. Общее и различное в национальных культурах.

Проблематика общения:

1. Мой родной город.
2. Традиции и обычаи стран изучаемого языка.
3. Достопримечательности стран изучаемого языка.

3.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My town

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist's/a pharmacy/a drugstore - аптека
a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки

a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна
a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

3.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

Ekaterinburg – an Industrial Centre

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant

produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

The History of Ekaterinburg

The famous Soviet poet V. Mayakovsky called out city "A Worker and a Fighter" and these words most fully reflect the features of Ekaterinburg.

Ekaterinburg is nowadays one of the leading industrial cities of Russia, an administrative & cultural centre of the Sverdlovsk region. It is the capital of the Urals.

Ekaterinburg has sprung up in the upper reaches of the Iset River in the middle part of the Urals Mountains near the border of Europe and Asia. It stretches from North to South for 25 km. and 15 km. from East to West.

The history of our city is very interesting. It was founded at the beginning of the XVIII century as a fortress-factory in connection with the construction of the Urals iron works. The works was constructed under the supervision of Tatishchev, a mining engineer, who was sent to the Urals by Peter the first. It was put into operation in November 1723. This date is considered to be the date of the birthday of city. It was named Ekaterinburg. On the place of the first works there is the Historical Square now.

The town grew and developed as the centre of an important mining area where the mining administration office was located. Ekaterinburg was an ordinary provincial town like many others in Russia before the October Revolution. It had only one theatre, four hospitals, one mining school and not a single higher school.

At the end of the XIX century Ekaterinburg became one of the centres of the revolutionary struggle. Many squares, streets and houses of the city keep the memory of the revolutionary events and the Civil War in the Urals. They are: the 1905 Square, a traditional place of the revolutionary demonstrations of the working people, the rocks "Kamenniye Palatki", a memorial park now, which was the place of illegal meetings of Ekaterinburg workers, the Opera House where the Soviet power was proclaimed in November 8, 1917 and many others.

Ekaterinburg is closely connected with the life and activities of many famous people. Here Y.M. Sverdlov, the leader of the Urals Party organization before the Revolution and the first President of the Soviet state, carried out his revolutionary work. In 1924 Ekaterinburg was renamed in his memory.

The name of such a famous scientist and inventor of the radio as Popov, and the names of such writers as Mamin-Sibiriyak and Bazhov are also connected with Ekaterinburg.

After the October Socialist Revolution the town has changed beyond recognition. It grew quickly in the years of the first five-year plan periods. Nowadays our city is constantly growing and

developing. Modern Ekaterinburg is a city of wide straight streets, multistoried blocks of flats, big shops, beautiful palaces of culture, cinemas, fine parks and squares.

The centre of the city is 1905 Square with the monument to V.I. Lenin and the building of the City Soviet. The main street is Lenin Avenue. The total area of the city is over 400 sq. km. The population is about two million.

In connection with its 250th anniversary and for its outstanding achievements in the development of the national economy of our country Ekaterinburg was awarded the Order of Lenin.

Ekaterinburg – a Center of Science & Education

Ekaterinburg is one of the largest & most important centers of science & education in our country. The city has 15 higher schools. The oldest of them are the Mining & the Polytechnical Institutes, the Urals State University founded in 1920, the Medical & Pedagogical & many others. Ekaterinburg higher schools train specialists for practically all branches of industry, economy, education & science. The city has a student population of about 80 thousand. Besides, there are many secondary and vocational schools and over 50 technical schools (colleges). The oldest of them is the Mining Metallurgical College named after Polzunov, founded in 1847.

Much important scientific research work is carried on in Ekaterinburg. The Urals Branch of Sciences, now called the Urals Scientific Centre (UNZ), was founded in 1932. Its first chairman was the famous Soviet scientist, mineralogist and geochemist A.E. Fersman. UNZ is the main centre of scientific work now. It contains nine institutes which solve the most important theoretical and practical problems in the field of geology, mining, metallurgy, biology, economy and others.

The city has more than 120 research and designing institutions, among them Uralmechanobr, Unipromed, Nipigormash and others. It is worth mentioning that important scientific and research work is also carried on in educational establishments and at the industrial enterprises of the city, such as the Uralmash, Uralelectrotyazmash and others.

Thousands of research workers, among them 5 academicians, 10 Corresponding members of the Russian Academy of Sciences, many Doctors and Masters of Science are engaged in scientific and research work. Ekaterinburg has contributed greatly to the development of Russian science.

Ekaterinburg - a Cultural Centre

Ekaterinburg is not only an industrial and educational, but also a large cultural centre. There is a lot to be seen in the city. There are many theatres, cinemas, museums, clubs, libraries, palaces of culture, the Art Gallery and the Circus in it.

The Art Gallery houses a splendid collection of paintings of Russian and Soviet artists such as Repin, Polenov, Levitan, Perov, Slusarev, Burak, Pimenov and many others. Here you will see one of the world famous collections of metal castings made in Kasli and especially a cast Iron pavilion. It was shown in Paris at the World Exhibition and awarded the Highest Prize.

Ekaterinburg is famous for its theaters. They are the Opera & Ballet House, the Drama Theatre, the Musical Comedy, the Children's and Puppet Theatres, the Cinema and Concert Hall "Cosmos". The Opera House was built in 1912. Many famous singers such as S. Lemeshev, I. Koslovsky, I. Arkhipova, B. Shtokolov and many others sang in that theatre. Ekaterinburg has a Philharmonic Society, film and television studios, the Urals Russian Folk Choir which is well known both at home and abroad.

There are many museums in the city: the Museum of Local Studies, the Sverdlov Museum, the Museum of Mamin-Sibiriyak, the Bazhov Museum, the Museum of Architecture. But the Urals Geological Museum is the most famous one. It is a real treasure-house of the Urals riches. The museum was opened in 1937.

Ekaterinburg is a green city with its squares, gardens and parks. The largest and the best of the parks is the Central Park of Culture and Rest. The Central Square of the City is the 1905 Square. Besides, there are some others: the Labor Square, one of the oldest of the city, located in front of the House of Trade Unions, the Komsomolskaya Square with the monument to the Urals Komsomol, the Paris Commune Square with the monument to Y.M. Sverdlov.

There are lots of monuments in the city. They are: the monument dedicated to the students and teachers of the Urals Polytechnical Institute who perished in the Great Patriotic War, the monument to the Urals Tank Corps, the monuments to Bazhov, Popov, Ordjonikidze, Malishev and many others.

There are a lot of places of interest in our city. Any visitor who comes to our city is invited to take sightseeing around it. We will be shown the historical places such as the rocks "Kamenniye Palatki", the Pupils' Creation Palace, the Historical Square, the 1905 Square.

There are several memorials to those who gave their lives in the struggle against fascism, the obelisk in the Square of Communards with the eternal flame. Such famous places of interest at the city pond with granite-lined embankment, the Palace of Youth, the lake Shartash, the Uktus Mountains and some others are most popular with the citizens of Ekaterinburg as well as with its visitors.

Ekaterinburg is a city of sports. There are a lot of sports grounds, stadiums, sports halls and a beautiful Palace of Sport in it. Ekaterinburg is often called the Winter Sports Capital. All sorts of important skiing & skating events are held in the Uktus Mountains.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern

monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

3.3 Систематизация грамматического материала:

1. Модальные глаголы и их эквиваленты.
2. Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге.
3. Основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь.

Модальные глаголы

Глаголы	**Значение**	**Примеры**
CAN	физическая или умственная возможность/умение	I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать.
	возможность	You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play football in the street. – На улице нельзя играть в футбол.
	вероятность	They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент.
	удивление	Can he have said that? – Неужели он это сказал?
	сомнение, недоверчивость	She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала.
	разрешение	Can we go home? — Нам можно пойти домой?
	вежливая просьба	Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час?
MAY	разрешение	May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу?
	предположение	She may not come. – Она, возможно, не придет.
	возможность	In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей.
	упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)**	You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать.
MUST	обязательство, необходимость	He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги.
	вероятность (сильная степень)	He must be sick. — Он, должно быть, заболел.
	запрет	Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке.
SHOULD OUGHT TO	моральное долженствование	You ought to be polite. – Вы должны быть любезными.
	совет	You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу.
	упрек, запрет	You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт.
SHALL	указ, обязанность	These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых

		обстоятельствах.
	угроза	You shall suffer. — Ты будешь страдать.
	просьба об указании	Shall I open the window? – Мне открыть окно?
WILL	готовность, нежелание/отказ	The door won't open. — Дверь не открывается.
	вежливая просьба	Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной?
WOULD	готовность, нежелание/отказ	He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос.
	вежливая просьба	Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной.
	повторяющееся/привычное действие	We would talk for hours. – Мы беседовали часами.
NEED	необходимость	Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать?
NEEDN'T	отсутствие необходимости	She needn't go there. — Ей не нужно туда идти.
DARE	Посметь	How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить?

Модальные единицы эквивалентного типа		
to be able (to) = can	Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент	She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию).
to be allowed (to) = may	Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения	My sister **is allowed to** play outdoors. (Moei сестре разрешается играть на улице).
to have (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах	They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело).
to be (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д.	We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Rephrase the following sentences using must, mustn't, needn't, has to or doesn't have to.

1 **You aren't allowed** to park your car in the college car park.

...You mustn't park your car in the college car park...

2 **I strongly advise** you to speak to your parents about your decision.

3 **It isn't necessary** for Emma to attend tomorrow's staff meeting.

4 **Jack is obliged** to wear a suit and a tie at work because the manager says so.

5 **I'm sure** Antonio is from Milan.

6 **It's necessary** for Roger to find a job soon.

7 **It's forbidden** to use mobile phones inside the hospital.

8 Susan **is obliged to** work overtime because her boss says so.

2. Rephrase the following sentences using didn't need to or needn't have done.

1 It wasn't necessary for him to wash the car. It wasn't dirty.

…He didn't need to wash the car…

2 It wasn't necessary for her to buy so many oranges, but she did.

3 It wasn't necessary for us to take an umbrella. It wasn't raining.

4 It wasn't necessary for us to turn on the light. It wasn't dark.

5 It wasn't necessary for him to call me today, but he did.
6 It wasn't necessary for you to make sandwiches for me, but you did.
7 It wasn't necessary for them to make reservations at the restaurant, but they did.

3. Rewrite the sentences using the word in bold.

1 It isn't necessary for Mark to buy new clothes for the reception.
need *...Mark doesn't need to/needn't buy new clothes for the reception…*
2 You aren't allowed to pick these flowers. **must**
3 Sarah is obliged to type her compositions at university. **has**
4 It wasn't necessary for Paula to make the beds. **need**
5 It is your duty to obey the law. **must**
6 It wasn't necessary for Bob to wait for me, but he did. **need**
7 It is forbidden to throw litter on the beach. **must**
8 I'm sure Ronald is at home. **must**
9 It wasn't necessary for Alice to bake a cake for the party. **need**
10 It wasn't necessary for George to stay at work late last night, but he did. **have**

4. Fill in the gaps with an appropriate modal verb.

1 A: ... *May/Can/Could*... I borrow your pen, please?
B: No, you … .I'm using it.
2 A: I'm bored. What shall we do?
B: We … go for a walk.
A: No, we … because it's raining.
B: Let's watch a video, then.
3 A: My parents told me I … go to the party tonight.
B: Never mind, I … go either. We … stay at home together, though.
4 A: Sir, … .I speak to you for a moment, please?
B: Certainly, but later today; I'm busy now.
5 A: Excuse me?
B: Yes?
A: … you tell me where the post office is, please?
B: Certainly. It's on the main road, next to the school.
6 A: Is anyone sitting on that chair?
B: No, you … take it if you want to.

5. Choose the correct answer.

1 " Todd was a very talented child.'
I know. He ..*B*... play the piano well when he was seven.'
A couldn't B could C can
2 I've just taken a loaf out of the oven.
Oh, that's why I … smell fresh bread when I came home.
A was able to B can't C could
3 'How was the test?'
Easy. All the children … pass it.'
A were able to B could C can't
4 What are you doing this summer?'
'I hope I'll … go on holiday with my friends.'
A could B be able to C can

6 Rewrite the sentences using the words in bold.

1 Do you mind if I leave the door open for a while?
can *...Can I leave the door open for a while?...*

2 You're obliged to take notes during the lecture. **have**
3 I'm sorry, but you aren't allowed to enter this room. **must**
4 Jack managed to unlock the door. **able**
5 It wasn't necessary for Ann to cook dinner, but she did. **need**
6 Let's play a game of chess. **could**
7 I'm certain Sarah is bored with her work. **must**
8 I strongly advise you to take up sport. **must**
9 I'm certain Liz isn't interested in your ideas. **can**
10 You may take the car tonight if you want. **can**

7. Study the situations and respond to each one using an appropriate modal verb.

1 You want to go on holiday with your friends this year. Ask your parents for **permission.**
...Can I go on holiday with my friends this year?...
2 You are at a job interview. You type fast, you use computers and you speak two foreign languages. Tell the interviewer about your **abilities**.
3 Your brother is trying to decide what to buy your mother for her birthday. You **suggest** a box of chocolates.
4 Your jacket is dirty and you want to wear it next week. It is **necessary** to take it to the dry cleaner's.
5 You want to have a day off work next week. Ask for your boss' **permission.**
6 You are in the car with your uncle. It's hot and you want him to open the window. Make a **request.**
7 Your mother is going to the shops. She asks you if you want anything. You tell her it **isn't necessary** to get anything for you.

8. Complete the sentences using must or can't.

1 I'm certain they go to bed early on Sunday nights. They *…must go to bed early on Sunday nights…*
2 I'm sure John didn't stay late at the office. John *...can't have stayed late at the office…*
3 I'm certain he hasn't arrived yet. He …
4 I'm certain they are working together. They …
5 I'm sure Amy hasn't finished her homework. Amy …
6 I'm certain she was having a bath when I rang. She …
7 I'm sure he hasn't won the prize. He …
8 I'm sure she is looking for a new house. She …
9 I'm certain Paul didn't invite Linda to the party. Paul …
10 I'm certain you have been planning the project. You …
11 I'm sure she was writing a letter. She …
12 I'm certain they hadn't paid the bill. They …
13 I'm sure he had been fixing the pipe. He …

9. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps Laura has left the phone off the hook. *...Laura may/might/could have left the phone off the hook…*
2 Surgeons are obliged to scrub their hands before operating on patients.
3 Do you mind if I open the window?
4 It wasn't necessary for Peter to wash the dog, so he didn't.
5 Emily managed to reach the top shelf, even though she didn't have a ladder.
6 It's forbidden to copy files without the manager's permission.
7 Why don't we spend this evening at home?
8 I'm certain Patrick misunderstood my instructions.
9 I'm sure Helen didn't know about her surprise party.

10. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps they are at work.

They ...*may/might/could be at work*…

2 Perhaps he is waiting outside. He …

3 It's possible she will work late tonight. She …

4 It's likely he was driving too fast. He …

5 It's possible they made a mistake. They …

6 Perhaps he has missed the bus. He …

7 It's possible she has been playing in the snow. She …

8 It's likely we will be leaving tomorrow. We …

9 It's likely he will stay there. He …

10 Perhaps she had been trying to call you. She …

11 It's likely they had seen the film already. They …

12 It's possible he is studying in the library. He …

Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)

This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)

Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)

Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.

My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.

to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.

to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:

Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

Косвенный пассив (The Indirect Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.

б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить

to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять

to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить

to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать

to teach учить to tell сказать и др.

Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.

Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)

A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:

John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.

The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):

He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать

to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать

to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

Употребление Страдательного залога

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия (70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:

He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:

The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:

The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:

The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)

The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:

The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:

The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:

He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

Перевод глаголов в форме Passive

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:

I am invited to a party.

Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):

Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.

Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.

I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):

They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:

The experiments were made last year.

1) Опыты были проведены в прошлом году.

2) Опыты проводились в прошлом году.

3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:

It is said… Говорят… It was said… Говорили…

It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…

It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. What happens to a car when it is taken for a service? Look at the prompts and make sentences using the present simple passive, as in the example.

1. the oil / change

The oil is changed.

2. the brakes / test
3. the filters / replace
4. air / put / in the tyres
5. the battery / check

6. the lights / test
7. broken parts / repair
8. it / take / for a test drive
9. the radiator / fill / with water

2. Mr Sullivan, who is a director, is preparing a scene for his new film. Read the orders and respond using the present continuous passive, as in the example.

1. Move that scenery, please.
It's being moved now, Mr Sullivan.
2. Put those props in place, please.
3. Call the actors, please.
4. Check their costumes, please.
5. Turn on the lights, please.

3. Detective Maguire is talking to a police officer about a burglary which happened early yesterday morning. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example

1. Have you dusted the house for fingerprints yet?
the house / dust / for fingerprints yesterday
Yes, the house was dusted for fingerprints yesterday.
2. Have you found any evidence yet?
a piece of material / find / this morning
3. Have you interviewed the house owners yet?
they / interview / last night
4. Have you questioned the neighbours yet?
they / question / this morning
5. Have you arrested any suspects yet?
two men / arrest / yesterday evening
6. Have you interrogated the suspects yet?
they / interrogate / last night
7. Have you recovered the stolen goods yet?
they / recover / this morning
8. Have you written your report yet?
it / complete / an hour ago

4. Helen and Chris moved house two years ago. Yesterday, they drove past their old house and saw that it looked very different. Describe the changes using the present perfect simple passive, as in the example.

1. the outside walls / paint
The outside walls have been painted.
2. new windows / put in
3. a garden pond / make
4. the trees / cut down
5. a lot of flowers / plant
6. the old gate / replace

5. A young actress is hoping to star in a new film. Her friend is asking her what is going to happen. Respond to her questions using the passive infinitive, as in the example.

1. Will they audition you for the new film?
Well, I hope to be auditioned.
2. Will they give you a leading role?
3. Will they pay you a lot of money?
4. Will they send you to Hollywood?

5. Will they introduce you to all the stars?
6. Will they ask you to give a TV interview?
7. Will they give you an award?

6. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

1. A: Who looks after your garden for you?
B: It ...*is looked after*... (look after) by my brother.
2. A: That's a beautiful dress. Where did you buy it?
B: Actually, it … (make) for me by my aunt.
3. A: Have you typed that letter yet, Miss Brown?
B: It … (type) right now, sir.
4. A: Did you make the coffee when you got to work this morning?
B: No, it …. (already/make) by the time I got there.
5. A: Are you going to pick up the children today?
B: No, they … (pick up) by Roger. I've already arranged it.
6. A: Where is your watch?
B: I broke it. It … (repair) at the moment.
7. A: Has the new furniture for my bedroom arrived?
B: No, it … (not/deliver) yet.
8. A: They are building a new sports centre in town.
B: I know. It … (open) by the mayor next month.

7. Rewrite the sentences in the passive, where possible.

1. John opened the door.
...The door was opened by John.
2. They didn't come home late last night.
...It cannot be changed.
3. Their nanny takes them to the park every day.
4. I left very early yesterday afternoon.
5. Meg asked the policeman for directions.
6. Charles is moving house next month.
7. The letter arrived two days ago.
8. Sam took these photographs.

8. Fill in by or with.

1. The lock was broken ...*with*... a hammer.
2. This book was written … my favourite author.
3. The cake was decorated… icing.
4. The tiger was shot … a gun.
5. Claire was shouted at … her teacher.
6. He was hit on the head … an umbrella.

9. Rewrite the sentences in the passive.

1. Someone is repairing the garden fence.
...The garden fence is being repaired....
2. Do they teach Latin at this school?
3. I don't like people pointing at me.
4. She hit him on the head with a tennis racquet.
5. Michael has made the preparations.
6. Is Tim cleaning the house?
7. Who built the Pyramids?
8. The boss is going to give us a pay rise.

9. I expect they will deliver my new car soon.
10. The police are questioning the suspects.
11. Did your next door neighbours see the thieves?
12. Paul remembers his teacher asking him to star in the school play.
13. A lot of children use computers nowadays.
14. Who smashed the kitchen window?
15. They won't have completed the work by the end of the month.
16. The children will post the letters.
17. People make wine from grapes.
18. Had Helen closed the windows before she left the house?
19. Jill hasn't done the housework yet.
20. They may not deliver the parcel today.

10. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

A: Do you still work at Browns and Co?
B: Yes, I do. I 1) ...*have been employed*... (employ) by Mr Brown for five years now, you know.
A: Oh. Do you still enjoy it?
B: Oh yes! I 2) … (give) a promotion last year and I'm very happy.
A: A promotion? So, what is your job now?
B: I 3) … (make) Head of European Sales.
A: So, what do you do?
B: Well, sometimes I 4) … (send) to other countries on business.
A: I see. Do they pay you well?
B: Well, I 5) … (pay) quite well and I expect I 6) … (give) a pay rise soon.
A: Good for you!

Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

Правило 1: Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

Правило 2: Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

Переход из одного времени в другое	Примеры	
Present Simple » Past Simple	He **can speak** French – Он говорит по-французски.	Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски.
Present Continuous » Past Continuous	They **are listening** to him – Они слушают его	I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его.
Present Perfect » Past Perfect	Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему.	Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему.

Past Simple » Past Perfect	I **invited** her – Я пригласил ее.	Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я пригласил ее.
Past Continuous » Past Perfect Continuous	She **was crying** – Она плакала	John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала.
Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous	It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час.	He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь.
Future Simple » Future in the Past	She **will show** us the map – Она покажет нам карту.	I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту.

Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

Перевод прямой речи в косвенную в английском языке

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

3. Согласовываем время

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

4. Меняем некоторые слова

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.

Давайте рассмотрим еще один пример:

She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»

She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.

Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

She said when I would come. Она сказала, когда я приду.

He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»

He asked where she worked. Он спросил, где она работает.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with the correct pronoun or possessive adjective.

1. James said, 'My boss wants me to go to London tomorrow.'
James said ...*his*... boss wanted to go to London the following day.
2. Mary said, 'I'm waiting for my son to come out of school.'
Mary said that … was waiting for … son to come out of school.
3. George said, 'I've bought a new car for my mum.'
George said … had bought a new car for … mum.
4. Julie said to me, 'I need you to help me with the shopping.'
Julie told me that … needed … to help … with the shopping.
5. John said, 'I'd like to take you out to dinner.'
John said … 'd like to take … out to dinner.
6. Helen said to Jane, 'I think your new haircut is lovely.'
Helen told Jane that … thought … new haircut was lovely.

2. Turn the following sentences into reported speech.

1. Robin said, These biscuits taste delicious.' ...
Robin said (that) the biscuits tasted delicious....

2. “I can't see you this afternoon because I've got a lot to do,' Ann told me.
3. She came into the room holding some letters in her hand and said, 'I found these while I was tidying the desk drawers.'
4. Fiona said, That picture was painted by my great-grandfather.'
5. “Those were good times for my family,' Jack said.
6. 'I received a parcel this morning, but I haven't opened it yet,' Tom said.
7. "You mustn't do that again,' Mum said to Bob.
8. “These shoes are worn out. You'd better throw them away,' Mum said to me.

3. Turn the following sentences into reported speech.

1 He said, 'I'm going to the station.'

...He said (that) he was going to the station....

2 Tina said, 'You should exercise regularly.'
3 They said, 'We had booked the room before we left.'
4 Tom said, This meal is delicious.'
5 'I've written you a letter,' she said to her friend.
6 'We've decided to spend our holidays in Jordan,' they told us.
7 Jill said, “I’ll go to the bank tomorrow.'
8 She said to him, 'We've been invited to a wedding.'
9 She told me, 'You must leave early tomorrow.'
10 They've gone out for the evening,' Jessie said to me.
11 They said, 'We may visit Joe tonight.'
12 She said, 'I can meet you on Tuesday.'
13 Keith said, There is a letter for you on the table.'
14 'We won't be visiting Tom this evening,' Sam told us.
15 Eric said, They had been talking on the phone for an hour before I interrupted them.'
16 'I haven't spoken to Mary since last week,' Gloria said.
17 They delivered the letters this morning,' she said.
18 He said, 'I'd like to buy this jumper.'
19 They aren't going on holiday this year,' he said.
20 Jane said, 'I haven't finished my homework yet.'
21 'I'm going to bed early tonight,' Caroline said.
22 'My mother is coming to visit us,' I said.
23 'We don't want to watch a film tonight,' the children said.
24 'He's playing in the garden now,' his mother said.
25 She said, 'You must do your homework now.'

4. Turn the sentences into reported speech. In which of the following sentences do the tenses not change? In which do they not have to be changed? Why?

1 The article says, “The artist only uses oil paints.'

...The article says (that) the artist only uses oil paints....

... The tenses do not change because the introductory verb is in the present simple....

2 'They are working hard today,' he said.
3 'I've done the things you asked me to do,' Mary said.
4 The sun rises in the east,' she said.
5 'He broke the window,' they said.
6 'We've never been on holiday abroad,' they said.
7 Mum says, 'Dinner is ready.'
8 “I’ll start cooking at six o'clock,' she said.
9 'We went to the supermarket yesterday,' he said.
10 Mrs Jones says, 'My daughter is going to have a baby.'
11 'You're never going to get a job,' Dad always says.

12 'Fish live in water,' he said.
13 'We went to the beach last weekend,' they said.
14 'He showed me his photographs,' she said.
15 'I'm working on my project now,' Billy said.

5. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Seaweed grows in the sea,' the teacher said to the students.

...The teacher said to the students/told the students (that) seaweed grows/grew in the sea....

2 'I saw Amanda at the cinema,' she said, (up-to-date reporting)
3 They don't live here any more,' he said to me. (out-of-date reporting)
4 "Canada is a large country,' he said.
5 The Statue of Liberty is in America,' she said to us
6 “I’ll help you with your homework,' he said, (out-of-date reporting)
7 'I would go on holiday if I had enough money,' Bill said, (up-to-date reporting)
8 'If I'm free, I'll call you,' Tom said, (up-to-date reporting)
9 'You should make a decision,' he said to us.
10 'You can ask John for advice,' she said, (up-to-date reporting)

6. Turn the following into reported questions.

1 'Where do you live?' I asked her.

...I asked her where she lived....

2 'How old will you be on your next birthday?" he asked me.
3 'Where is your umbrella?' she asked her daughter.
4 'Do you like playing football?' John asked us.
5 The boss asked, 'What time are you going home today?'
6 'Will you take the children to school today?' he asked.
7 'Who called you today?' she asked.
8 'When will you decorate the kitchen?' Martha asked.
9 'Who broke my vase?' I asked.
10 Father asked, 'Will you help me lift these boxes, please?'
11 'Can you speak a foreign language?' she asked her.
12 'Where is the tourist information centre?' we asked.

7. Yesterday, Marion met a couple who were on holiday in London. They were looking at a map. She asked them some questions. Turn them into reported questions.

1 'Are you lost?'

...Marion asked them if/whether they were lost....

2 'Can you speak English?'
3 'Where are you from?'
4 'Is your hotel near here?'
5 'Where do you want to go?'
6 'Were you looking for Big Ben?'
7 'Have you been to the British Museum?'
8 'Have you visited Buckingham Palace?'
9 'Do you like London?'

8. Fill in the gaps with the introductory verbs in the list in the correct form.

order, tell, ask, beg, suggest

1 'Please visit me in hospital,' Joan said to Colin.

Joan ...*asked*... Colin to visit her in hospital.

2 'Let's eat out this evening,' Paul said to her.

Paul … eating out that evening.

3 'Please, please be careful,' she said to him.
She … him to be careful.
4 'Don't go near the fire,' Dad said to us.
Dad … us not to go near the fire.
5 'Be quiet!' the commander said to the troops.
The commander … the troops to be quiet

9. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Let's try the exercise again.'
The ballet teacher suggested trying the exercise again.
2 'Lift your leg higher please, Rachel.'
3 'Turn your head a little more.'
4 'Don't lean back.'

10. Turn the following sentences into reported speech.

1 The doctor said to the patient, 'Come back to see me again next week.'
... The doctor told the patient to go back and see him again the following week/the week after.
2 The guard said to the driver, 'Stop!'
3 He said, 'Shall we go for a walk?'
4 She said to him, 'Please, please don't leave me!'
5 Jenny said to Dave, 'Please help me with this
6 She said to him, 'Open the window, please.'
7 Mother said, 'How about going for a drive?'
8 She said, 'Let's eat now.'

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)

Тематика общения:

1. Избранное направление профессиональной деятельности.

4.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My speciality

The Earth's Crust and Useful Minerals

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

clay - *n* глина; глинозем

consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

crust - *n* кора; *геол.* земная кора

decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

dissolve v растворять

expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение

external - *a* внешний

extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

glacier - *n* ледник, глетчер

grain - *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый

gravel - *n* гравий, крупный песок

internal - *a* внутренний

intrusive - *a* интрузивный, плутонический

iron - *n* железо

layer - *n* пласт

like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

lime - *n* известь; **limestone -** *n* известняк

loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый

make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*

particle - *n* частица; включение

peat - *n* торф; торфяник

represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный

rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

sand - *n* песок

sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый

shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …**, **oil …** - горючий сланец

siltstone - *n* алеврит

stratification - *n* напластование, залегание

stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

substance - *n* вещество, материал; сущность

thickness - *n* толщина, мощность

value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*

vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

contain - v содержать *(в себе),* вмещать

crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

contract - v сжиматься; сокращаться

dust - *n* пыль

expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать

gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

lateral - *a* боковой

occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания

penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**

pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

size - *n* размер; величина; класс *(угля)*

solution – *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий

succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

uniform – *a* однородный; одинаковый

weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

to be subjected to подвергаться

Rocks of Earth's Crust

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

adjacent - *a* смежный, примыкающий

ash - *n* зола

belt - *n* пояс; лента; ремень

body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

dust - *n* пыль

dyke – *n* дайка

extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь

flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
fragmentary - *a* обломочный, пластический
glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток
band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
in such a way таким образом

Fossil Fuels

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость

heat - v нагревать; *n* теплота

liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

mudstone - *n* аргиллит

purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

shale - *n* глинистый сланец

the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*

blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

continuity - *n* непрерывность, неразрывность

domestic - *a* внутренний; отечественный

estimate - v оценивать; *n* оценка; смета

fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный

liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий

matter - *n* вещество; материя

moisture - *n* влажность, сырость; влага

parting - *n* прослоек

plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

store - v запасать, хранить на складе; вмещать

strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*

uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Prospecting and Exploration

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

General Information on Mining

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

goaf — завал; обрушенное пространство

double-ended drum bearer — комбайн с двойным барабаном

to identify — опознавать

appraisal — оценка

susceptibility — чувствительность

concealed — скрытый, не выходящий на поверхность

crusher — дробилка

concentration — обогащение

blending — смешивание; составление шихты

screen — сортировать (обыден. уголь); просеивать

froth floatation — пенная флотация

core drilling — колонковое бурение

to delineate — обрисовывать, описывать

lender — заимодавец

feasibility — возможность

in situ mining — повторная разработка месторождения в массиве

screening — просеивание; грохочение

processing — обработка, разделение минералов

Mining and Environment

break v **(broke**, **broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

(руды .или породы); расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

drill - *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение

dump -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

dumper опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

environment - *n* окружение; окружающая обстановка/среда

explode - v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive -** *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

friable - *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

handle - v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

heap - v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

hydraulicklng - *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

load - v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader -** *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader -** комбайн, комбинированная горная машина

lorry - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

mention - v упоминать

overcasting - *n* перелопачивание *(породы)*

pump - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

reclamation - *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

sidecastiag - *n* внешнее отвалообразование

site - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

slice - *n* слой; **slicing -** *n* выемка слоями, разработка слоями

strip - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper -** *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping -** *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

unit - *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

washery - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

to attract smb's attention привлекать чье-л. внимание

backhoe - *n* обратная лопата

blast - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

block out - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

clearing - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

crash - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

earth-mover - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

excavator - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket** ~ многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

grab - *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

grabbing - погрузка грейфером; захватывание

hoist - *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

plough - *n* струг

power shovel - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

range - *n* колебание в определенных пределах

rate - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

remote - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

result - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

safety - *n* безопасность; техника безопасности

slope - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(рудЫ)*

support - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

4.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My speciality is Geology

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth’s surface and on its surface.
2. Petrology which studies the rocks of the Earth.
3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.
4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.
5. Historic Geology which treats of the Earth's history.
6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.
7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

4.3 Систематизация грамматического материала:

1. Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий.
2. Основные сведения о сослагательном наклонении.

Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

Формы инфинитива

	Active Voice	Passive Voice
Simple	to write	to be written
Continuous	to be writing	
Perfect	to have written	to have been written
Perfect Continuous	to have been writing	

Глаголы, после которых используется инфинитив:

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать
to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть

Например:
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

Значение разных форм инфинитива в таблице

Формы инфинитива	**Чему я рад?**	
Simple	I am glad **to speak** to you.	Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами).
Continuous	I am glad **to be speaking** to you.	Рад, что сейчас разговариваю с вами.
Perfect	I am glad **to have spoken** to you.	Рад, что поговорил с вами.
Perfect Continuous	I am glad **to have been speaking** to you.	Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами.
Simple Passive	I am (always) glad **to be told** the news.	Всегда рад, когда мне рассказывают новости.

Perfect Passive	I am glad **to have been told** the news.	Рад, что мне рассказали новости.

Причастие. Participle

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

Формы причастия

		Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Participle I (Present Participle)	Simple	**writing**	**being written**
	Perfect	**having written**	**having been written**
Participle II (Past Participle)			**written**

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

Как переводить разные формы причастия на русский язык

Формы причастия	причастием	деепричастием
reading	читающий	читая
having read		прочитав
being read	читаемый	будучи читаемым
having been read		будучи прочитанным
read	прочитанный	
building	строящий	строя
having built		построив
being built	строящийся	будучи строящимся
having been built		будучи построенным
built	построенный	

Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

Формы герундия

	Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Simple	**writing**	**being written**
Perfect	**having written**	**having been written**

Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

Герундий после глаголов с предлогами

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),

keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

to be + прилагательное / причастие + герундий

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I'm tired of waiting. — *Я устал ждать.*

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Complete the sentences with the correct infinitive tense.

1 She has grown taller. She seems ...*to have grown taller*.
2 He is getting used to his new job. He appears
3 Kate makes friends easily. She tends
4 He has finished the report. He claims
5 It is raining over there. It seems
6 He is on a diet. He appears
7 They have sailed round the world. They claim
8 She is feeling better. She seems

2. Fill in the correct infinitive tense.

1 A: What would you like ...*to do*... (do) tonight?
B: Let's … (go) to an Italian restaurant.
2 A: What's Liz doing?
B: She seems … (look) for something in her bag.
3 A: Alan has been offered a new job!
B: No, he hasn't. He just pretended … (offer) a new job.
4 A: Colin claims … (meet) lots of famous people.
B: I know, but I don't believe him.
5 A: Look at those two men outside. What are they doing?
B: They appear … (empty) the rubbish bins.
6 A: Would you like to go to the cinema tonight?
B: Not really. I would prefer … (go) to the theatre.
7 A: Tara seems … (work) hard all morning.
B: Yes, she hasn't even stopped for a cup of coffee.
8 A: Why is Tom at work so early this morning?
B: He wants … (finish) early so that he can go to the concert tonight.

3. Rephrase the following sentences, as in the example.

1 He must wash the car. I want ...*him to wash the car*...
2 You mustn't be late for work. I don't want …
3 Claire must tidy her bedroom. I want …

4 She mustn't go to the disco. I don't want …
5 They must go to school tomorrow. I want …
6 Gary mustn't make so much noise. I don't want …
7 You mustn't make a mess. I don't want …
8 He must mend his bike. I want …

4. Complete the sentences with too or enough and the adjective in brackets.

1 A: Would you like to come to the disco?
B: Oh no. I'm ...*too tired*... to go to a disco, (tired)
2 A: Can you reach that top shelf?
B: No, I'm not … to reach it. (tall)
3 A: Did they go on a picnic yesterday?
B: No. It was … to go on a picnic, (cold)
4 A: Did Jane enjoy the horror film?
B: No. She was … to enjoy it. (scared)
5 A: Does Tom go to school?
B: No. He isn't … to go to school yet. (old)
6 A: Will you go to London by bus?
B: No. The bus is … . I'll take the train, (slow)
7 A: Did she like the dress you bought?
B: Yes, but it was … .(big)
8 A: Take a photograph of me!
B: I can't. It isn't … in here, (bright)

5. Rewrite the sentences using too.

1 This music is so slow that I can't dance to it.
...This music, is too slow for me to dance to…
2 The bird is so weak that it can't fly.
3 She's so busy that she can't come out with us.
4 The car was so expensive that he couldn't buy it.
5 These shoes are so small that they don't fit me.
6 The book is so boring that she can't read it.
7 I was so tired that I couldn't keep my eyes open.
8 The coffee was so strong that he couldn't drink it.

6. Underline the correct preposition and fill in the gaps with the -ing form of the verb in brackets.

1 He is ill. He is complaining **with/<u>about</u>** ...*having*... (have) a headache.
2 Marcus went out instead **for/of** … (do) his homework.
3 Tracy was very excited **with/about** … (go) to the party.
4 I hope you have a good excuse **of/for** … (be) so late.
5 Sam is interested **in/for** … (take up)French lessons.
6 You can't stop him **to/from** … (take)the job if he wants to.
7 Susie ran because she was worried **about/of** … (miss) the bus.
8 Thank you **to/for** … (help) me with my homework.
9 She felt tired because she wasn't used **to/with** … (work) so hard.
10 His boss blamed him **for/of** … (lose) the deal.
11 I am in charge **in/of** … (make) the Christmas deliveries.
12 We are thinking **of/from** … (buy) a new car next month.
13 Sandra apologised **for/about** … (ruin) the performance.
14 Ian was talking **with/about** … (open) a shop in York.

7. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 It's no use ...*talking*… (talk) to Bob; he won't change his mind.
2 She will … (return) the books next weekend.
3 It was good of you … (help) me fix my bicycle.
4 The man suggested … (call) the police in, to investigate.
5 I can't get used to … (live) in such a hot country.
6 He admitted … (rob) the bank.
7 You had better … (hurry), or you'll be late for work.
8 They refused … (give) me my money back.
9 She is too short … (become) a fashion model.
10 My parents let me … (stay) up late at weekends.
11 Our teacher makes us … (do) homework every evening.
12 The kitchen windows need … (clean).
13 They have begun … (make) preparations for the party.
14 He advised her … (speak) to her boss.
15 I dislike … (go) to the theatre alone.
16 Mr. Roberts was seen … (leave) his house at 12:15 last night.
17 My sister can't stand … (watch) horror films. She gets terribly scared.
18 Can you imagine … (spend) your holidays on the moon?
19 There's no point in … (call) again. There's no one at home.
20 I don't allow people … (smoke) in my house.
21 It was silly of you … (forget) to lock the door.
22 He risks … (lose) his wallet when he leaves it on his desk.

8. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 A: Is Anne in the room?
B: Yes. I can see her ...dancing... (dance) with her husband over there.
2 A: Did you see the robber?
B: Yes. I saw him … (get) into the car and drive away.
3 A: Is John here today?
B: Yes. I heard him … (talk) on the phone as I walked past his office.
4 A: Colin is good at speaking in public, isn't he?
B: Yes. I heard him … (make) a speech last month. It was excellent.
5 A: I walked past the sports centre today.
B: So did I, and I stopped for a moment to watch some boys … (play) football.
6 A: Your hair looks great today.
B: Thanks. I watched the hairdresser … (dry) it so I could learn how to do it myself.
7 A: That's a music school, isn't it?
B: That's right. I often hear the students … (sing) as I walk past.
8 A: Did you stay until the end of the contest?
B: Yes. I listened to the chairman … (announce) the results before I went home.
9 A: How do you know Tim is at home?
B: I saw him … (cut) the grass as I was driving home.
10 A: How do you know that man stole the watch?
B: I saw him … (put) it in his pocket and leave the shop without paying.

9. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 I'll never forget ...*sailing*... (sail) down the Danube on that warm spring night last year.
2 Please don't forget … (pay) the bill.
3 John said he remembers … (buy) the newspaper, but now he can't find it.
4 Did you remember … (post) my letters today?
5 Gloria regrets … (shout) at her sister.
6 I regret … (inform) you that we cannot give you your money back.

7 The students went on … (write) for another hour.
8 After cleaning the windows, he went on … (wash) the car.
9 We are sorry … (announce) that the 7:15 train to Liverpool has been cancelled.
10 I'm sorry for … (miss) your birth day party; I'll make it up to you.
11 She stopped … (go) to the gym after she had got back into shape.
12 They stopped … (have) a rest before they continued their journey.
13 They tried … (open) the door, but it was stuck.
14 You should try … (make) your own clothes. It's much cheaper.
15 I'm sorry. I didn't mean … (break) your vase.
16 Being a teacher means … (correct) a lot of homework.
17 I like … (tidy) my room at week ends because I don't have time during the week.
18 They like … (play) in the sea on hot days.

10. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

My neighbour, Mr. Mason, loves 1) …*spending*… (spend) time in his garden. He would rather 2) … (work) outside than stay indoors, even when it is snowing! Early in the morning, you can 3) … (see) Mr. Mason 4) … (eat) breakfast in his garden, and late at night he is there again, with a cup of cocoa in his hand. I'd like 5) … (help) sometimes when there is lots of work to do, but Mr. Mason prefers 6) … (do) everything himself. He doesn't mind 7) … (get) cold and wet in the winter, and his wife says it's no use 8) … (try) to make him wear a waterproof jacket because he hates 9) … (wear) them! Mr. Mason says he will go on 10) … (garden) until he is too old 11) … (do) it!

Основные сведения о сослагательном наклонении

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

Type 0 Conditionals: They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

Type 1 Conditionals: They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

Type 2 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

Type 3 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

	If-clause (hypothesis)	Main clause (result)	Use
Type 0 general truth	if + present simple	present simple	something which is always true
	If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice.		
Type 1 real present	if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous	future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive	real - likely to happen in the present or future
	If he doesn't pay the fine, he will go to prison. If you need help, come and see me. If you have finished your work, we can have a break. If you're ever in the area, you should come and visit us.		
Type 2 unreal present	if + past simple or past continuous	would/could/might + bare infinitive	imaginary situation contrary

			to facts in the present; also used to give advice
	If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice)		
Type 3 unreal past	if + past perfect or past perfect continuous	would/could/might + have + past participle	imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism
	If she had studied harder, she would have passed the test. If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished.		

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.

b) I'll give Tim his book if I see him.

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)

b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)

c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)

d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)

e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus. (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

e.g. If Rick was/were here, we could have a party.

We use If I were you ... when we want to give advice.

e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)

b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)

c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Look at the prompts and make Type 1 conditional sentences, as in the example.
e.g. If we cut down all the forests, the world's climate will change.
1 cut down/ all forests / world's climate / change
2 not stop/use / aerosols /destroy / ozone layer
3 find / alternative sources of energy / solve / some of our environmental problems
4 temperatures / go up / by a few degrees /sea levels / rise
5 recycle / waste / save / natural resources
6 population / continue to increase / not be enough food for everyone

2. Lisa is trying to decide where to go on holiday. She would like to go to one of these places. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.
A) SPAIN FOR A WEEK
£180 Inclusive!!
2-star hotel beach
Free water sports

B) A TWO WEEK CAMPING HOLIDAY IN THE SOUTH OF FRANCE
ONLY £280 per person
Self-catering

1. How long / be away / choose / Spain?
SA: How long will she be away if she chooses Spain?
SB: If she chooses Spain, she'll be away for a week.
2. Where / go / like / camping?
3. How much / pay / go to / France?
4. What / do / go to / Spain?
5. Where / go / want / cheap holiday?

3. Study the situations, then make Type 2 conditional sentences, as in the example.
I don't have a car, so I have to wait for the bus every day.
1. If I ...had... (have) a car, I ...wouldn't have to... (not/have to) wait for the bus every day.
I never do my homework, so my teacher always gets angry with me.
2. If I … (do) my homework, my teacher … (not/get) angry with me.
I live in a small house, so I can't invite friends over.
3. If I … (live) in a bigger house, I … (be able to) invite friends over.
I never get up early, so I y am always late for school.
4. If I … (get up) earlier, I … (not/be) late for school.

4. Complete the sentences to make Type 3 conditional sentences, as in the example.
1. If he ...hadn't noticed... (not/notice) the mould in one of his glass dishes, Alexander Fleming ...would never have discovered... (never/discover) penicillin.
2. If he … (sell) some of his paintings, Van Gogh … (get) some recognition during his lifetime.
3. If Barbara Streisand … (change) the shape of her nose, her career … (never/be) the same.
4. If Anne Sullivan … (not/teach) her, Helen Keller … (not/be able to) communicate.
5. If Naomi Campbell … (not/be) so beautiful, she … (never/become) a supermodel.

5. Read the story below and make Type 3 conditional sentences, as in the example.
e.g. 1) ...if Sally hadn't been in a hurry, she would nave left some important notes at home....
Sally had a terrible day yesterday. She was in a hurry, so she left some important notes at home. She wasn't prepared for her meeting with a new client, so the meeting was a disaster. The client was

disappointed, and as a result he refused to do business with the company. The boss shouted at Sally, so she got upset.

6. Match the items in column A with those in column B in order to make correct Type 0 conditional sentences, as in the example.

e.g. 1 - c ...if you add sugar to a cup of coffee, the coffee tastes sweeter...

A

1. Add sugar to a cup of coffee.
2. Throw salt onto snow.
3. Put an apple in a bowl of water.
4. Water plants regularly.
5. Lie in the sun too long.
6. Take regular exercise.

B

a The apple floats.
b Your skin turns red.
c The coffee tastes sweeter.
d You feel healthy.
e The plants grow.
f The snow melts.

7. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What time will you be home tonight?
B: I'm not sure. If I ...have to... (have to) work late. I ...'ll call... (call) you.
2 A: I felt very tired at work today.
B: Well, if you … (not/watch) the late film, you … (not/feel) so tired
3 A: Should I buy that car?
B: Why not? If I … (have) the money, I … (buy) it myself.
4 A: If you … (pass) a chemist's, … (you/get) me some cough medicine?
B: Yes, certainly.
5 A: My sister seems very upset at the moment.
B: Were I you, I … (talk) to her about it.
6 A: Unless you … (hurry), you … (be) late again.
B: No, I won't. There's plenty of time.
7 A: Oh! I forgot to ask Sarah over for dinner.
B: If I … (speak) to her today, I … (ask) her for you.
8 A: May I join the club, please?
B: Provided you … (be) over eighteen, you can join the club.
9 A: What a lovely restaurant! I'm glad we came here.
B: If you … (not/burn) the dinner, we … (not/come) here!
10 A: Just think. If I … (not/move) to York, I … (never/meet) you.
B: I know, wasn't it lucky?
11 A: Jo doesn't spend enough time with me.
B: Well, if she … (have) the time, I'm sure she … (try), but she's very busy.
12 A: Did you give Bill the message?
B: No, but when I … (see) him, I … (tell) him the news.

8. Choose the correct answer.

1 'If you ...C... that plate, you'll burn your fingers.'

'Why? Has it been in the oven?'
A would touch
B will touch
C touch
2 ‘ … you're busy, we'll talk now.'
‘That's fine. I'm not busy at the moment.'
A If
B Provided
C Unless
3 'If you watch the news, you … a lot.'
'I know. I watch it every day.'
A learn
B were learning
C would learn
4 '… you wear warm clothes, you won't get cold.'
'I'll wear an extra jumper.'
A Unless
B Providing
C Supposing
5 'Shall I invite John to the party?'
'Well, were I you, I … him.'
A would invite
B will invite
C am inviting
6 '… the teacher comes back now, what will you do?'
'I don't know.'
A When
B Providing
C Supposing
7 'Could I see the menu, please?'
'Yes, sir. If you … a seat, I will fetch it for you.'
A take
B had taken
C have taken
8 'Don't cry. Everything will be alright.'
'Yes, but if I … the bus, I wouldn't have been late for school.'
A didn't miss
B hadn't missed
C don't miss
9 'When water boils, it … steam.'
'Yes, I know; and the steam is hot, too.'
A would produce
B produce
C produces
10 'Can you help me, please?'
'Well, if I wasn't studying, I … you.'
A would help
B help
C will help
11 'John crashed his car yesterday.'
'I know, but if he hadn't been changing the cassette, he …'
A won't crash

B wouldn't crash
C wouldn't have crashed
12 'Can I have some chocolate, please?'
'If you behave yourself, I you some later.'
A would buy
B might buy
C buy
13 'Should you see Colin … and tell me.'
'I will.'
A come
B to come
C will come
14 'If we were rich, we … expensive clothes.'
'Well, unfortunately we aren't rich!'
A could afford
B can afford
C afford

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 If I ...were... (be) you, I wouldn't drive in the snow.
2 Peter … (be able to) help you if he was here.
3 If I had closed the window, the cat … (not/jump) out.
4 I … (call) for help if I got stuck in a lift.
5 Had I known him, I … (talk) to him.
6 John … (may/lose) his job if he is rude to the boss.
7 If you … (save) some money, you would have been able to go on holiday last year.
8 You may win if you … (take) part in the contest.
9 If I had toothache, I … (go) to the dentist.
10 They would have helped us move house if we … (ask) them.
11 If Jane … (be) older, she could live by herself.
12 We would have changed our plans if we … (hear) the weather forecast.
13 Emma … (send) a card if she had remembered it was their anniversary.
14 Robert … (feel) better if you talked to him.
15 If Sam was still living nearby, you … (can/invite) him for dinner.
16 If you … (put) your money in your wallet, you will not lose it.
17 If you … (like) chocolate, you will love this cake.
18 If Bill … (come) home early, he will eat dinner with us.
19 Sandra will join us later unless she … (have) a lot of work to do.

10. Fill in the gaps using when or if.

1 A: Have you phoned Paul yet?
B: No, I'll phone him ...when... I get home.
2 A: … I get a new job soon, I may have a party.
B: That's a good idea.
3 A: I really liked that dress we saw.
B: Well, you can buy it … you get paid.
4 A: Shall we go somewhere this weekend?
B: Yes … it's sunny, we could go to the beach.
5 A: Did you make this cake yourself?
B: Yes … you like it, I'll give you the recipe.
6 A: Is Jane still asleep?
B: Yes … she wakes up, I'll tell her you're here.

7 A: Have you done your homework?
B: No. I'll do it … we've finished dinner.
8 A: We've run out of milk.
B: Well, … I go to the shops, I'll buy some more.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Б1.О.03 ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Направление подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль
Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности

год набора: 2024

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрено на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Иностранных языков и деловой коммуникации	горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Юсупова Л. Г.	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 19.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям……... 3
1.1 Повторение материала практических занятий……..... 3
1.2 Чтение и перевод учебных текстов……. 42
1.3 Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций) ..……..... 60
1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения) ……. 73
1.5 Подготовка к контрольной работе 73

II. Другие виды самостоятельной работы……. 73
2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания:
2.1.1 Подготовка к ролевой игре…… 73
2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию …… 74
2.1.3 Подготовка к опросу …… 75
2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного……. 75
2.3 Подготовка доклада…….. 94
2.4 Подготовка к тесту……..... 95
2.5 Подготовка к экзамену…….. 99

I. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям

1. Повторение материала практических занятий

Практические занятия направлены на развитие умений иноязычного говорения в рамках заданных РПД тем: бытовая сфера общения (Я и моя семья); учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование); социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир); профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность).

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My family

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My student's life

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

Ekaterinburg – an Industrial Centre

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern

Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My speciality is Geology

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth's surface and on its surface.

2. Petrology which studies the rocks of the Earth.

3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.

4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.

5. Historic Geology which treats of the Earth's history.

6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.

7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because .it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

Практические занятия направлены также на формирование грамматического навыка по темам: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have, о*борот *there+be,* имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №1:

Таблица №1

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435

Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*	102-104	6-8
Оборот *there+be*	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

Повторите материал практических занятий!

Порядок слов в английском предложении

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

I	**II**	**III Дополнение**			**IV Обстоятельство**
Подлежащее	**Сказуемое**	**Косвенное без предлога**	**Прямое**	**Косвенное с предлогом**	
We Мы	study изучаем		math математику		
He Он	gives дает	us нам	lessons уроки		in this room. в этой комнате
She Она	reads читает		her notes свои заметки	to Peter Петру	every day. каждый день

Вопросительное предложение

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

Общие вопросы

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.
Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?
Примеры с модальными глаголами:
She can drive a car. – Она умеет водить машину.
Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot)

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.
Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?
Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

Ответы на общие вопросы

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not
Например: Are you a student? - Ты студент?
Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.
Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

Специальные вопросы

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.
Специальные вопросы могут начинаться словами:
who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?
when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?
how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?
how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

Вопрос к прямому дополнению:
What are you reading? Что ты читаешь?
What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

Вопрос к обстоятельству

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.
When will he come back? – Когда он вернется?
What did he do it for? Зачем он это сделал?
Where are you from?

Вопрос к определению

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?
Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

Вопрос к сказуемому

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: ”Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?”, например:
What does he do? Что он делает?

Специальные вопросы к подлежащему

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)
what - что (для неодушевленных существительных)
The teacher read an interesting story to the students yesterday.
Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):

Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

Альтернативные вопросы

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

Разделительные вопросы

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:

You speak French, don't you? You are looking for something, aren't you? Pete works at a plant, doesn't he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:

It is not very warm today, is it? John doesn't live in London, does he?

Безличные предложения

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

Местоимение. The Pronoun.
Классификации местоимений.

1	**personal**	личные
2	**possessive**	притяжательные
3	**demonstrative**	указательные
4	**indefinite and negative**	неопределенные и отрицательные
5	**quantifiers**	количественные
6	**reflexive**	возвратные
7	**reciprocal**	взаимные
8	**relative**	относительные
9	**defining**	определительные
10	**interrogative**	вопросительные

I. Личные (personal) местоимения

Общий падеж		**Объектный падеж**	
I	я	**me**	мне, меня
he	он	**him**	его, ему
she	она	**her**	ей, о ней
it	оно, это	**it**	ей, ему, этому
we	мы	**us**	нам, нас

they	они	**them**	им, их
you	ты, вы	**you**	тебе, вам

Внимание! He (он) и **she (она)** в английском языке можно говорить только про людей. Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это).

he	**she**	**it**
a boy – мальчик **a man –** мужчина **brother –** брат **father –** отец **Nick –** Николай **Mr Grey –** мистер Грей	**a girl –** девочка **a woman –** женщина **sister – с**естра **motherч–** мама **Kate –** Катя **Mrs Grey –** миссис Грей	**a cat –** кот **a wall –** стена **rain –** дождь **love –** любовь **a hand –** рука **an apple -** яблоко

Англичане говорят <u>It's me</u>, а не It's I (это я).

II. Притяжательные (possessive) местоимения

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы** - **основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
Whose pen is it? - *Чья это ручка?* - **It's my pen**. - *Это моя ручка*.
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) - **It's mine.** - *Это моя.*

Личное местоимение	**Основная форма**	**Абсолютная форма**
I – я **he –** он **she –** она **it – оно,** это **we –** мы **you –** ты, вы **they -** они	**my (toy) -** моя (игрушка) **his (toy) -** его (игрушка) **her (toy) -** ее (игрушка) **its (toy) -** его (не о человеке) **our (toy) -** наша (игрушка) **your (toy) -** ваша, твоя (игрушка) **their (toy) -** их (игрушка)	**his -** его **hers -** ее **its -** его (этого) **ours -** наша **yours -** ваша, твоя **theirs -** их

III. Указательные (demonstrative) местоимения

this (это, эта, этот) **– these** (эти) **that** (то, та, тот) **- those** (те)

IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения

Местоимения some, any, every, и их производные

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите:
I have/l have got three apples. *У меня есть 3 яблока,*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте неопределенное местоимение **some: I have/1 have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

Производные от неопределенных местоимений

Слово **"think"** обозначает **"вещь"** (не обязательно материальная).
Слово **"body"** обозначает **"тело".** Эти слова являются основой для целого ряда словообразований.

Thing используется для неодушевленных (что-то):

some	**thing**	**something –** *что-то, что-нибудь*
any		**anything -** *что-то, что-нибудь*
no		**nothing -** *ничего, ничто*

every	**everything -** *все*
Body/one - для одушевленных (кто-то):	
some	**somebody/someone –** *кто-то, кто-нибудь*
any	**anybody/anyone -** *кто-то, кто-нибудь*
body/one	
no	**nobody / no one -** *никого, никто*
every	**everybody /everyone –** *все, каждый*
Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*, **Something/somebody/someone** - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных. **Anything/anybody/anyone** - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*	

somewhere - *где-нибудь, куда-нибудь*	**anywhere -** *где угодно*
nowhere - *нигде*	**everywhere -** *везде*

V. Количественные (quantifiers) местоимения

Many и much - оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.	
many girls - *много девочек* **many boys -** *много мальчиков* **many books -** *много книжек*	**much snow -** *много снега* **much money -** *много денег* **much time -** *много времени*
How many? } **сколько?** **How much?** } **сколько?**	**How many girls? -** *Сколько девочек?* **How much sugar? -** *Сколько сахара?* **How much sugar? -** *Сколько сахара?*
a lot of... - много - используется и с исчисляемыми, и с неисчисляемыми существительными a lot без (of) используется и без существительного.	girls – много девочек **a lot of** sugar - много сахара
Сравните: He writes **a lot** of funny stories**.** *Он пишет много забавных рассказов.* He writes **a lot.** *Он много пишет.*	
<u>В утвердительных</u> предложениях используйте **a lot of.** <u>В отрицательных</u> и в вопросительных **many/much,** **Сравните:** (+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного*. (-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много*. (?) Do you eat much? *Вы много едите?* Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":** Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.	

Few, little, a few, a little
С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало),
а с исчисляемыми - few (мало).

few books - мало книг **few girls -** мало девочек **few boys -** мало мальчиков	**little time -** мало времени **little money -** мало денег **little snow -** мало снега
little } **мало (т.е. надо еще)** **few** } **мало (т.е. надо еще)**	**a little** } **немного (т.е. пока хватает)** **a few** } **немного (т.е. пока хватает)**

VI. Возвратные (reflexive) местоимения

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие.

Личное местоимение	**Возвратное местоимение**	**Пример**	**Перевод**
I	myself	I did it myself.	Я сделал это сам
he	himself	He did it himself.	Он сделал это сам.
she	herself	She did it herself.	Она сделала это сама
you	yourself	You did it yourself.	Вы сделали это сами.
they	themselves	They did it themselves.	Они сделали это сами.
we	ourselves	We did it ourselves.	Мы сделали это сами.

VII. Взаимные (reciprocal) местоимения

Each other - друг друга (относится к двум лицам или предметам).
One another - друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
They spoke to <u>each other</u> rather friendly. *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
They always help <u>one another</u>. *Они всегда помогают друг другу.*

VIII. Относительные (relative) местоимения

Who (whom), whose, which, that

who	**Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)** **The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.*
	Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение) **The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, - твой брат.*
which	**Для неодушевленных предметов и животных** **The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.*
whose	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.*
	Для неодушевленных существительных **We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.*
that	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.*
	Для неодушевленных существительных **This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.*

IX. Определительные (defining) местоимения

all

Употребление	**Примеры**	**Перевод**
определяет неисчисляемые	He spent **all his** time fishing on the	Он провел все свое время,

существительные	lake**.**	ловя рыбу на озере.
определяет исчисляемые существительные	**All the** boys like football. **(the после all!)**	Все мальчишки любят футбол.
all = everything	I know **all/everything.**	Я знаю всё.
all = everybody	**All** were hungry. **Everybody** was hungry.	Все были голодны. Все были голодны.
we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them	We **all** love you very much = **All** of us love you very much.	Мы все тебя очень любим

both

Употребление	Примеры	Перевод
определяет существительные	**Both (the/my) friends like football.**	Оба моих друга любят футбол
допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both	**Both these/the men are Russian.**	Оба (эти) мужчины - русские.
употребляется вместо существительного	**He gave me two apples. Both were sweet.**	Он дал мне два яблока. Оба были сладкими.
they both = both of them you both = both of you we both = both of us	**They both (both of them) came to visit us.**	Они оба пришли навестить нас.
в устойчивой конструкции **both...and.**	**Both mother father were at home**	И мама, и папа были дома.
в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither**	**Both of them know English. Neither of them know English.**	Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского.

either/neither

	Употребление	Примеры	Перевод
either	любой из двух (артикль не ставится)	**I've got 2 cakes. Take either cake.**	У меня 2 пирожных. Возьми любое.
	каждый, оба, и тот, и другой	**There are windows on either side of the house.**	С обеих сторон дома есть окна.
	заменяет существительное (глагол в ед. числе)	**Either of dogs is always hungry.**	Любая из собак вечно голодная.
neither	отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой)	**Neither of examples is correct.**	Ни один из примеров не верен.
	в констр. neither.. .nor (ни.. .ни)	**I like neither tea, nor coffee.**	Я не люблю ни чай, ни кофе.

other, another, the other, the others (другой, другие)

	Употребление	Примеры	Перевод
the other	другой (второй), другой из двух	**You've got 2 balls: one and the other.**	У тебя 2 мяча: один и другой.
another	другой из многих, еще один	**Take another ball.**	Возьми другой мяч. (Любой, но не этот.)
other	другие (любые), не последние	**Take other 2 balls.**	Возьми другие 2 мяча. (Из многих.)

the others	другие (определенные)	**There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.**	Есть 4 мяча: 2 красных, а другие 2 - синие.

X. Вопросительные (interrogative) местоимения

what	что	**What's this?**	Что это?
which	который	**Which of them?**	Который из них?
who	кто, кого	**Who was that?**	Кто это был?
whom	кого	**Whom did you meet?**	Кого ты встретил?
whose	чей	**Whose book is it?**	Чья это книга?

Имя существительное. The Noun

Категории	Существительное в русском языке	Существительное в английском языке
Число	**Изменяется**	**Изменяется**
Падеж	**Изменяется**	**Не изменяется**

The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

Способ образования	Примеры	Перевод
после глухих согласных	**a book - books** **a cup - cups**	**книга - книги** **чашка - чашки**
после звонких согласных и гласных -	a name - names a girl - girls	**имя - имена** **девочка - девочки**
после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh, -x, -s, -z: -es	a palace - palaces a bush - bushes a box - boxes a church - churches	дворец - дворцы куст - кусты коробка - коробки церковь - церкви
слово заканчивается на -y: 1) гласная +y	**a toy - toys** **a boy - boys**	игрушка - игрушки мальчик - мальчики
2) согласная + y	**a family - families** **a story - stories**	**семья - семьи** **история - истории**
слово заканчивается на *-file*	**a leaf - leaves** **a shelf - shelves**	лист - листья полка - полки

Особые случаи образования множественного числа

Ед. число	**Мн. число**	**Перевод**
man	men	мужчина - мужчины
woman	women	женщина - женщины
foot	feet	нога (стопа) - ноги (стопы)
child	children	ребенок - дети
goose	geese	гусь - гуси
mouse	mice	мышь - мыши
ox	oxen	**бык - быки**
tooth	teeth	**зуб - зубы**

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):

This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол).
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

Со словами one/ones **может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.**	
What apple do you want? **Какое ты хочешь яблоко?** **The red one. Красное.**	**What apples do you want?** **Какие яблоки ты хочешь?** **The red ones. Красные.**

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски.	This girl speaks English well.
Р. п. Это собака той девочки.	It's a dog of that girl.
Д. п. Я дал яблоко той девочке. .	I gave an apple to that girl.
В. п. Я вижу маленькую девочку. .	1 can see a little girl.
Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой.	1 like to play with this girl.
П. п. Я часто думаю об этой девочке.	1 often think about this girl.

Притяжательный падеж. The Possessive Case
Образование притяжательного падежа

	Образование	**Примеры**	**Перевод**
существительные в единственном числе	**'s**	**bird's house** **child's ball**	домик птички мячик ребенка
существительные во множественном числе (группа исключений}	**'s**	**children's bail** **women's rights**	мячик детей права женщин
существительное во множественном числе	**'**	**girls' toy** **birds' house**	игрушка девочек домик птичек

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother's book - мамина книга,

this girl's bail - мячик девочки,

the bird's house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

Артикль. The Article

1. Неопределенный a/an (используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

2. Определенный the (может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т, д. Слово "an hour" (час) начинается с согласной буквы "h", но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю "a" также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

Использование неопределенного артикля a

один из множества (любой)	This is a cat.
первое упоминание в тексте	I see a bird.
при упоминании профессии	My brother is a pilot.
в восклицательных предложениях	What a good girl! What a surprise! Such a fine room!
вместо слова один	She is coming for a weak.
в определенных конструкциях there is a... I have a… he has a... I see a... this is a... that is a… It is a... Iama… he/she is a…	There is a book here. I have got a nice coat. He has a kind smile. I see a wolf. This is a dog. That is a doctor. It is a red pen. I am a good swimmer. He/she is a tourist
в ряде устойчивых словосочетаний at a quarter.., in a loud, (a low, an angry voice) to have a good time a lot of to go for a walk such a... after a while in a day (a month, a week, a year)	Come at a quarter to 8. Don't speak to him in an angry voice. We had a good time in the country. She has got a lot of presents. Let's go for a walk. He is such a clever boy. You'll see them after a while. We are living in a day.

Использование определенного артикля the

если речь идет о конкретном лице или предмете	The pen is on the table.
при повторном упоминании того же самого объекта	I see a cat. The cat is black.
если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света	the sun, the moon, the Earth
со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный)	The only man I love the main road to the left, to the right It was the right answer. the final test
с порядковыми числительными	the first, the tenth

с прилагательными в превосходной степени	the kindest, the most interesting the best
с музыкальными инструментами и танцами	to play the piano, to dance the tango
с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры)	The Britons keep their traditions.
с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов	the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street
с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of	the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard

Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний

in the middle, in the corner	The table is in the middle of the room.
in the morning, In the evening, in the afternoon	I never drink coffee in the evening.
what's the use?	What's the use of going there so late?
to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market	Do you like going to the theatre? He works at the shop.
at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market	The fact is that I have no money at all.
the fact is (was) that...	Where is the doctor?
where is the…?	We always spend summer in the country.
in the country, to the country	

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

Случаи, когда артикль не употребляется

если, перед существительным стоит притяжательное местоимение	a pen - my pen a dog - his dog the teacher - our teacher the apple - her apple
если перед существительным стоит указательное местоимение	the cats - those cats the books - these books a mouse - this mouse
если стоит другое существительное в притяжательном падеже	a car - father's car the horse - farmer's horse a bike - brother's bike the doll - sister's doll
если перед существительным стоит, количественное числительное	5 balls, 7 bananas, 2 cats
если перед существительным стоит отрицание "no"	She has no children. I see no birds.
перед именами	Mike, Kate, Jim, etc
с названиями дней недели	Sunday, Monday, etc.
с названиями месяцев	May, December, etc.
с названиями времен года	in spring, in winter
с названиями цветов	white, etc. I like green
с названиями спортивных игр	football, chess, etc.
с названиями блюд, напитков	tea, coffee, soup, etc,
с названиями праздников	Easter, Christmas, etc.

с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the	English, etc. I learn English, the English language
с названиями стран	Russia, France, etc НО: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo
с названиями городов	Moscow, Paris, etc.
с названиями улиц, площадей	Trafalgar Square
с названиями парков	St James' Park, Hyde Park
с названиями мостов	Tower Bridge
с названиями одиночных гор	Kilimanjaro
с названиями озер	Loch Ness
с названиями континентов	Asia, Australia, etc.
с названиями одиночных островов	Cyprus
если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное местоимение	what animals can swim? I know what thing you have lost!

ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

По своей структуре глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

По значению глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

Все формы глагола в английском языке делятся на личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

Глаголы в изъявительном наклонении выражают реальное действие, передают факты:

His son goes to school. Его сын учится в школе.

She has written an interesting article. Она написала интересную статью.

A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

Глаголы в повелительном наклонении выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:

"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.

Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

Глаголы в сослагательном наклонении выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

Глаголы в действительном залоге выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

Глаголы в страдательном залоге выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида**. **Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:

Он прочитал эту статью с интересом.

Глаголы несовершенного вида обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Am I?
I am	I'm	I am not	I'm not	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Is he?
He is	He's	He is not	He isn't	Is she?
She is	She's	She is not	She isn't	Is it?
It is	It's	It is not	It isn't	Are we?
We are	We're	We are not	We aren't	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Are they?
They are	They're	They are not	They aren't	

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I was	I was not	I wasn’t	Was I?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
He was	He was not	He wasn’t	Was he?

She was	She was not	She wasn’t	Was she?
It was	It was not	It wasn’t	Was it?
We were	We were not	We weren’t	Were we?
You were	You were not	You weren’t	Were you?
They were	They were not	They weren’t	Were they?

ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there’s. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn’t …/There aren’t … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.

Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.

It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)

There are three books on the desk.

They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

Конструкция There was/There were

This is a modern town today.

There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.

This is the same town fifty years ago.

There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
There was	There was not	There wasn't	Was there?
There were	There were not	There weren't	Were there?

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.

Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.
б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.
в) в следующих высказываниях: I've got a headache. I've got a temperature. I've got a cough, I've got a toothache, I've got a cold, I've got a problem.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Have I (got)?
I have (got)	I've (got)	I have not (got)	I haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Has he (got)?
He has (got)	He's (got)	He has not (got)	He hasn't (got)	Has she (got)?
She has (got)	She's (got)	She has not (got)	She hasn't (got)	Has it (got)?
It has (got)	It's (got)	It has not (got)	It hasn't (got)	Have we (got)?
We have (got)	We've (got)	We have not (got)	We haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Have they (got)?
They have (got)	They've (got)	They have not (got)	They haven't (got)	

Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I had	I did not have	I didn't have	Did I have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
He had	He did not have	He didn't have	Did he have?
She had	She did not have	She didn't have	Did she have?
It had	It did not have	It didn't have	Did it have?
We had	We did not have	We didn't have	Did we have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
They had	They did not have	They didn't have	Did they have?

Имя прилагательное. The Adjective

Категории	**Прилагательное в русском языке**	**Прилагательное в английском языке**
Число	изменяется	не изменяется
Род	изменяется	не изменяется
Падеж	изменяется	не изменяется

Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**
К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе

ни приставок, ни суффиксов: small - *маленький***, long -** *длинный***, white -** *белый***.**
К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

Суффиксальное образование имен прилагательных

Суффикс	Пример	Перевод
- ful	use**ful** doubt**ful**	**полезный** **сомневающийся**
- less	help**less** use**less**	**беспомощный** **бесполезный**
- ous	fam**ous** danger**ous**	**известный** **опасный**
- al	form**al** centr**al**	**формальный** **центральный**
- able	eat**able** cap**able**	**съедобный** **способный**

Приставочный способ образования имен прилагательных

Приставка	Пример	Перевод
un -	**un**cooked **un**imaginable	**невареный** **невообразимый**
in -	**in**capable **in**human	**неспособный** **негуманный**
il -	**il**legal **il**liberal	**нелегальный** **необразованный**
im -	**im**possible **im**practical	**невозможный** **непрактичный**
dis -	**dis**honest **dis**agreeble	**бесчестный** **неприятный**
ir -	**ir**regular **ir**responsible	**неправильный** **безответственный**
Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired –** светловолосый, **snow-white –** белоснежный.		

Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing

- ed	**- ing**
Описывают чувства и состояния	**Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства**
interested – интересующийся, заинтересованный	**interesting -** интересный
bored - скучающий	**boring -** скучный
surprised - удивленный	**surprising -** удивительный

Степени сравнения прилагательных

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**
Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:
- положительная степень сравнения **(Positive Degree);**
- сравнительная степень сравнения **(Comparative Degree);**
- превосходная степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и

превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

1. -er. -est

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке **-** добавляем "е" (большой - больше, холодный - холоднее).

Превосходная степень образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
cold - холодный	cold**er -** холоднее	the cold**est -** самый холодный
big - большой	bigg**er -** больше	the bigg**est -** самый большой
kind - добрый	kind**er -** добрее	the kind**est -** самый добрый

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся на **-y, -er, -ow, -ble:**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
clever — умный	clever**er - умнее**	**the** clever**est - самый умный**
easy - простой	eas**ier - проще**	**the** easi**est - самый простой**
able - способный	abl**er - способнее**	**the** abl**est - самый способный**
busy - занятой	bus**ier - более занятой**	**the** busi**est - самый занятой**

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов **– er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **"e" ,** то при прибавлении **– er и – est немое "e" опускается:**

large **–** larg**er - the** larg**est /** большой – больше – самый большой

brav**e –** brav**er – the** brav**est /** смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**

big – bigg**er –** bigg**est /** большой – больше – самый большой

hot – hott**er –** hott**est /** горячий – горячее – самый горячий

thin – thinn**er –** thinn**est /** тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на "y" с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **"y" переходит в "i":**

busy – bus**ier – bus**iest / **занятой – более занятой – самый занятой**

easy – eas**ier –** eas**iest / простой – проще – самый простой**

2. more, the most

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.

Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
beautiful - красивый	**more beautiful -** красивее	**the most beautiful** - самый красивый
interesting – интересный	**more interesting -** интереснее	**the most interesting** - самый интересный
important - важный	**more important -** важнее	**the most important** - самый важный

Особые формы

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень

good - хороший **bad -** плохой **little -** маленький **much/many -** много **far -** далекий/далеко **old -** старый	**better -** лучше **worse -** хуже **less -** меньше **more -** больше **farther/further -** дальше **older/elder -** старше	**the best -** самый лучший **the worst -** самый плохой **the least -** самый маленький, меньше всего **the most -** больше всего **the farthest/furthest -** самый дальний **the oldest/eldest -** самый старый

3. less. the least

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
beautiful – красивый **interesting -** интересный **important -** важный	**less beautiful -** менее красивый **less interesting –** менее интересный **less important -** менее важный	**the least beautiful –** самый некрасивый **the least interesting –** самый неинтересный **the least important –** самый неважный

Другие средства сравнения двух предметов или лиц

Конструкция	Комментарий	Примеры
As…as (такой же, так же)	**Для сравнения двух объектов одинакового качества**	He is **as** a strong **as** a lion Он такой же сильный, как лев. She is **as** clever **as** an owl**.** Она такая же умная, как сова.
Not so…as (не такой, как)	**в отрицательных предложениях**	He is **not so** strong **as** a lion. Он не такой сильный, как лев**.** She is **not so** clever **as** an owl. Она не такая умная, как сова.
The…the (с двумя сравнительными степенями)	**показывает зависимость одного действия от другого**	**The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся. **The more** I learn this rule **the less** I understand it. Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю.

Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

Числительное. The numeral

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

126 – one hundred twenty six

1139 – one thousand one hundred and thirty nine

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

НО: окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **"of":**

hundreds of children – сотни детей

thousands of birds- тысячи птиц

millions of insects – миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

20+1=21 (twenty + one = **twenty one**)

60+7=67 (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

Как читать даты

1043	ten forty-three
1956	nineteen fifty-six
1601	sixteen o one
2003	two thousand three
В 2003 году	in two thousand three
1 сентября	the first of September
23 февраля	the twenty-third of February

ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа -s:

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter - одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [no:t] (в США - zero ['zierou]).

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог -of:

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14.65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:
224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

Образование видовременных форм глагола в активном залоге

Present Simple употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

Present Continuous употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],
Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

Present perfect употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

Present perfect continuous употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.

Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

Past simple употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn't use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

Past continuous употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday

afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

Past perfect употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,
They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,
She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

Future simple употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

Be going to употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,
Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
No. Why?
I need to make some photocopies.

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the **future perfect continuous**:

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with: by... for.

Практическая работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: модальные глаголы и их эквиваленты, образование видовременных форм глагола в пассивном залоге, основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь, неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий, основные сведения о сослагательном наклонении.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице:

Название темы	***Страницы учебников***	
	Агабекян И. П.	*Журавлева Р.И.*
Модальные глаголы и их эквиваленты	295	47
Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге	236	71, 115
Основные сведения о согласовании времён	323-328	269
Прямая и косвенная речь	324	268
Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий	311-322	132, 162, 173, 192, 193
Основные сведения о сослагательном наклонении	329	224

Модальные глаголы

Глаголы	**Значение**	**Примеры**
CAN	физическая или умственная возможность/умение	I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать.
	возможность	You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play

		football in the street. – На улице нельзя играть в футбол.
	вероятность	They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент.
	удивление	Can he have said that? – Неужели он это сказал?
	сомнение, недоверчивость	She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала.
	разрешение	Can we go home? — Нам можно пойти домой?
	вежливая просьба	Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час?
MAY	разрешение	May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу?
	предположение	She may not come. – Она, возможно, не придет.
	возможность	In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей.
	упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)**	You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать.
MUST	обязательство, необходимость	He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги.
	вероятность (сильная степень)	He must be sick. — Он, должно быть, заболел.
	запрет	Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке.
SHOULD OUGHT TO	моральное долженствование	You ought to be polite. – Вы должны быть любезными.
	совет	You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу.
	упрек, запрет	You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт.
SHALL	указ, обязанность	These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых обстоятельствах.
	угроза	You shall suffer. — Ты будешь страдать.
	просьба об указании	Shall I open the window? – Мне открыть окно?
WILL	готовность, нежелание/отказ	The door won't open. — Дверь не открывается.
	вежливая просьба	Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной?
WOULD	готовность, нежелание/отказ	He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос.
	вежливая просьба	Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной.
	повторяющееся/привычное действие	We would talk for hours. – Мы беседовали часами.
NEED	необходимость	Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать?
NEEDN'T	отсутствие необходимости	She needn't go there. — Ей не нужно туда идти.
DARE	Посметь	How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить?

Модальные единицы эквивалентного типа		
to be able (to) = can	Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент	She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию).
to be allowed (to) = may	Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения	My sister **is allowed to** play outdoors. (Моей сестре разрешается играть на улице).
to have (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах	They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело).
to be (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д.	We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника)

Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться
to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)
This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)
Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)
Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.
My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.
to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.
to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:
Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

Косвенный пассив (The Indirect Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.
б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить
to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять
to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить
to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать
to teach учить to tell сказать и др.
Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.
Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)
A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:
John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.
The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):
He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать
to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать
to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

Употребление Страдательного залога

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия (70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:
He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:
The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:
The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:
The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)
The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:
The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:
The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:
He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

Перевод глаголов в форме Passive

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:
I am invited to a party.
Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):
Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.
Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.
I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):
They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:
The experiments were made last year.
1) Опыты были проведены в прошлом году.
2) Опыты проводились в прошлом году.
3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:
It is said… Говорят… It was said… Говорили…
It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…
It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

Правило 1: Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

Правило 2: Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

Переход из одного времени в другое	Примеры	
Present Simple » Past Simple	He **can speak** French – Он говорит по-французски.	Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски.
Present Continuous » Past Continuous	They **are listening** to him – Они слушают его	I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его.
Present Perfect » Past Perfect	Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему.	Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему.
Past Simple » Past Perfect	I **invited** her – Я пригласил ее.	Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я

		пригласил ее.
Past Continuous » Past Perfect Continuous	She **was crying** – Она плакала	John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала.
Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous	It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час.	He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь.
Future Simple » Future in the Past	She **will show** us the map – Она покажет нам карту.	I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту.

Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

Перевод прямой речи в косвенную в английском языке

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

3. Согласовываем время

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, “I will buy a dress”. Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

4. Меняем некоторые слова

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, “I am driving now”. Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

He asked, “Do you like this cafe?” Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.

Давайте рассмотрим еще один пример:

She said, “Will he call back?” Она сказала: «Он перезвонит?»

She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.

Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

She said, “When will you come?”. Она сказала: «Когда ты придешь?»

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

She said when I would come. Она сказала, когда я приду.

He asked, “Where does she work?” Он спросил: «Где она работает?»

He asked where she worked. Он спросил, где она работает.

Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица **to**, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним: It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

Формы инфинитива

	Active Voice	Passive Voice
Simple	to write	to be written
Continuous	to be writing	
Perfect	to have written	to have been written
Perfect Continuous	to have been writing	

Глаголы, после которых используется инфинитив:

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue – продолжать

to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want – хотеть
Например:
He asked to change the ticket. *Он попросил поменять билет.*
She began to talk. *Она начала говорить.*

Значение разных форм инфинитива в таблице

Формы инфинитива	**Чему я рад?**	
Simple	I am glad **to speak** to you.	Рад поговорить с вами. (Всегда радуюсь, когда говорю с вами).
Continuous	I am glad **to be speaking** to you.	Рад, что сейчас разговариваю с вами.
Perfect	I am glad **to have spoken** to you.	Рад, что поговорил с вами.
Perfect Continuous	I am glad **to have been speaking** to you.	Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами.
Simple Passive	I am (always) glad **to be told** the news.	Всегда рад, когда мне рассказывают новости.
Perfect Passive	I am glad **to have been told** the news.	Рад, что мне рассказали новости.

Причастие. Participle

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

Формы причастия

		Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Participle I (Present Participle)	Simple	**writing**	**being written**
	Perfect	**having written**	**having been written**
Participle II (Past Participle)			**written**

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

Как переводить разные формы причастия на русский язык

Формы причастия	причастием	деепричастием
reading	читающий	читая

having read		прочитав
being read	читаемый	будучи читаемым
having been read		будучи прочитанным
read	прочитанный	
building	строящий	строя
having built		построив
being built	строящийся	будучи строящимся
having been built		будучи построенным
built	построенный	

Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

Формы герундия

	Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Simple	**writing**	**being written**
Perfect	**having written**	**having been written**

Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

Герундий после глаголов с предлогами

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),
keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

to be + прилагательное / причастие + герундий

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I’m tired of waiting. — *Я устал ждать.*

Основные сведения о сослагательном наклонении

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

Type 0 Conditionals: They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

Type 1 Conditionals: They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

Type 2 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

Type 3 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

	If-clause (hypothesis)	Main clause (result)	Use
Type 0 general truth	if + present simple	present simple	something which is always true
	If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice.		
Type 1 real present	if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous	future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive	real - likely to happen in the present or future
	If he doesn't pay the fine, he will go to prison. If you need help, come and see me. If you have finished your work, we can have a break. If you're ever in the area, you should come and visit us.		
Type 2 unreal present	if + past simple or past continuous	would/could/might + bare infinitive	imaginary situation contrary to facts in the present; also used to give advice
	If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice)		
Type 3 unreal past	if + past perfect or past perfect continuous	would/could/might + have + past participle	imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism
	If she had studied harder, she would have passed the test. If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished.		

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.

b) I'll give Tim his book if I see him.

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)

b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)

c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)

d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)

e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus. (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

e.g. If Rick was/were here, we could have a party.

We use If I were you ... when we want to give advice.

e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, …

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)

b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)

c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)

2. Чтение и перевод учебных текстов (по 2 текста на тему)

№1

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

appear - v появляться; казаться; *ant* **disappear -** исчезать

bed - *n* пласт, слой, подстилающие породы; *syn* **layer, seam; bedded -** *a* пластовый

call for - v требовать; *syn* **demand, require**

carry out - v проводить *(исследование, эксперимент);* выполнять *(план);* завершать; *syn* **conduct, make**

colliery - каменноугольная шахта

concentration (dressing) plant - обогатительная фабрика, обогатительная установка

department - *n* отделение, факультет, кафедра; *syn* **faculty**

direct - v руководить; направлять; управлять; *a* прямой, точный; **directly -** *adv* прямо, непосредственно

education - *n* образование; просвещение; **get an education** получать образование

establish - v основывать, создавать, учреждать; *syn* **found, set up**

ferrous metals - чёрные металлы **(non-ferrous metals** цветные металлы)

iron - *n* железо; **pig iron** чугун; **cast iron** чугун, чугунная отливка

open-cast mines - открытые разработки

ore - *n* руда; **iron ore -** железная руда; **ore mining –** разработка рудных месторождений

process - v обрабатывать; *syn* **work, treat; processing -** n обработка; разделение минералов

rapid - *a* быстрый

research - *n* научное исследование

technique - *n* техника, способ, метод, технический прием; **mining technique -** горная техника, методы ведения горных работ

train - v обучать, готовить *(к чему-л.);***training** - обучение; подготовка

to be in need of - нуждаться в

to take part in - участвовать в

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 1: The First Mining School in Russia

The Moscow Mining Academy was established in 1918. The main task of the Academy was to train mining engineers and technicians, to popularize technological achievements among miners, to work on important problems of mining and metallurgical engineering arid to direct scientific research.

There were three departments in the Academy: mining, geological prospecting and metallurgy. The Moscow Mining Academy introduced a new course in coal mining mechanization which provided the basis for the development of mining engineering. The two scientists A.M. Terpigorev and M.M. Protodyakonov wrote the first textbook on machinery for mining bedded deposits.

Much credit for the establishment of the Moscow Mining Academy and the development of co-operation among outstanding scientists and educators is due to Academician I.M. Gubkin, a prominent geologist and oil expert.

In 1925 the Moscow Mining Academy was one of the best-known educational institutions in Russia. It had well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of Russian and foreign scientific books and journals.

The Academy established close contacts with the coal and ore mining industries. The scientists carried out scientific research and worked on important mining problems.

The rapid growth of the mining industry called for the training of more highly-qualified specialists and the establishment of new educational institutions.

New collieries and open-cast mines, concentration plants, metallurgical works and metal-working factories for processing non-ferrous and ferrous metals appeared in the country. The people took an active part in the construction of new industrial enterprises.

The Academy alone could not cope with the problem of training specialists. In 1930 the Moscow Mining Academy was transformed into six independent institutes. Among the new colleges which grew out of the Academy's departments were the Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting. Later, the scientific research Institute of Mining appeared near Moscow.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. There were four departments in the Academy.
2. The Academy introduced a new course in coal mining mechanization.
3. In 1925 the Academy had only several well-equipped laboratories, demonstration rooms and a library which had many volumes of books.
4. The Academy established close contacts with the coal industry.
5. In 1930 the Academy was transformed into six independent institutes.
6. The Moscow Mining Institute and the Moscow Institute of Geological Prospecting were among the new colleges which grew out of the Academy's departments.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What was the main task of the Academy?
2. What new course did the Academy introduce?
3. Were there three or four departments at the Academy?
4. What industries did the Academy establish contacts with?
5. Who wrote the first textbook on machinery' for mining bedded deposits?
6. Why was the Academy transformed into six independent institutes?
7. Why was the Academy transformed?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) обогатительная фабрика
б) подготовка горных инженеров
в) разведка нефти
г) обработка цветных металлов

д) техническое образование
е) новый (учебный) курс по
ж) принимать активное участие
з) проводить исследования
и) направлять научную деятельность
к) горное оборудование
л) пластовые месторождения

№2

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

change - v изменяться, менять(ся); *syn.* **transform, alter;** *n* изменение, перемена; превращение

determine - v определить, устанавливать

engineering - *n* техника; технология; машиностроение**;** *syn.* **technics, technology, technique; machinery**

composition - *n* структура, состав

connect - v соединяться; *syn* **combine, link**

enterprise - *n* предприятие; предприимчивость

deal (dealt) v **(with) -** иметь дело с; рассматривать

environment - *n* окружающая обстановка**,** среда

demand - *n* спрос

field - *n* область, сфера деятельности; поле, участок, месторождение; бассейн; *syn* **basin, branch**

design - *n* проект; план, чертеж; конструкция; v проектировать, планировать; конструировать

graduate - v окончить (высшее учебное заведение), *амер.* окончить любое учебное заведение; *n* лицо, окончившее высшее учебное заведение; **undergraduate (student) -** студент последнего курса; **postgraduate (student) -** аспирант; **graduation paper -** дипломная работа

hardware - *n* аппаратура, (аппаратное) оборудование, аппаратные средства; техническое обеспечение

hydraulic - *a* гидравлический, гидротехнический

introduction - *n* введение, вступление

management - *n* управление, заведование; *syn.* **administration; direction**

offer - *v* предлагать *(помощь, работу);* предоставлять; *n* предложение

property - *n* свойство

protection - *n* защита, охрана

range - *n* область, сфера; предел; диапазон; радиус действия; ряд; серия

recreation - *n* отдых, восстановление сил; развлечение

reveal - v показывать, обнаруживать

rock - *n* горная порода

shape - *n* форма

software - *n* программное обеспечение; программные средства

skill - *n* мастерство; умение; **skilled -** *a* квалифицированный; опытный; умелый

survey - *n* съемка, маркшейдерская съемка; v производить маркшейдерскую или топографическую съемку, производить изыскания; *n* **surveying** съемка, маркшейдерские работы

value - *n* ценность, стоимость; величина; v ценить, оценивать; **valuable** *a* ценный

workshop - *n* мастерская, цех; семинар

to be of importance - иметь значение

to give an opportunity of - дать возможность

to meet the requirements - удовлетворять требованиям (потребности)

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 2: Mining and Geological Higher Education in Russia

In Russia young people get mining education at special institutes which train geologists and mining engineers for coal and ore mining. The total number of students of an institute includes full-time students, part-time students and postgraduate students.

Russian higher educational establishments offer different specializations for the students. Thus, at the geological institutes, the students specialize in geology, the science which deals with different problems connected with the Earth, its history, the study of rocks, their physical and chemical properties. One of the main tasks of geology is to prospect, discover and study the deposits of useful minerals.

Geology is both a theoretical and an applied science. Mining geology is of great importance to the mining engineer. As a rule, mining geology includes economic geology.

The outstanding Russian geologist V.A. Obruchev says that geology is the science of the Earth which reveals to us how the Earth took shape, its composition and its changes. Geology helps prospect for ores, coal, oil, salt and other useful minerals.

Higher mining schools (universities, academies, institutes and colleges) develop a wide range of courses and programmes that meet the requirements of the society .They offer courses in mining technology, machinery and transport, hydraulic engineering, electrical engineering, industrial electronics, automation, surveying, geodesy, information technology, etc.

The main trend in the development of higher mining education is the introduction of courses in environmental protection, management (environmental human resources), economics and management of mining enterprises, marketing studies, computer-aided design (CAD) and others.

Computer science is also of great importance. The course aims at providing students with understanding how software and hardware technology helps solving problems.

Laboratory work is an important part in training specialists. Experiments in laboratories and workshops will help students to develop their practical skills. They have a short period of field work to gain working experience.

The students go through practical training at mines, plants and other industrial enterprises.. They become familiar with all stages of production and every job from worker to engineer. Here they get practical knowledge and experience necessary for their diploma (graduation) papers.

A lot of students belong to students' scientific groups. They take part in the research projects which their departments usually conduct. Postgraduates carry out research in different fields of science and engineering.

Sport centres give the students opportunities to play different sports such as tennis, football, basketball, volleyball, swimming, ' skiing, water polo, boxing, wrestling and others.

Students graduate from mining and geological higher schools as mining engineers, mining mechanical engineers, ecologists, mining electrical engineers, geologists, economists and managers for mining industry.

1. Переведите следующие сочетания слов.

а) широкий круг проблем
б) денные месторождения полезных ископаемых
в) горный инженер-механик
г) вести научно-исследовательскую работу
д) принимать форму
е) техническое и программное обеспечение
ж) студенты (последнего курса)
з) дипломная работа
и) физические и химические свойства
к) месторождение полезных ископаемых

1. оканчивать институт
2. поступать в университет
3. получать образование

4. готовить геологов и горних инженеров
5. высшие горные учебные заведения
6. приобретать опыт
7. студенческие научные общества
8. заниматься различными видами спорта

№3

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

accurate - *a* точный, правильный; **accuracy -** *n* точность

archive - *n* архив

attend - v посещать *(лекции, практические занятия, собрания)*

comprehensive - *a* всесторонний, исчерпывающий

concern - v касаться, относиться; иметь отношение к чему-л.; *n* дело, отношение; важность; **concerning** *prep* относительно, касательно

consider - v рассматривать; считать; **considerable -** значительный, важный; **consideration -** *n* рассмотрение; обсуждение

draw (drew, **drawn**) - v *зд,* чертить, рисовать; **draw the conclusion** делать вывод; *syn* **come to the conclusion**

employ - v применять, использовать; предоставлять *(работу); syn* **use, utilize, apply; employment -** *n* служба; занятие; применение, использование

familiarize - v знакомить; осваивать

fundamental - *n pl* основы *(наук)*

levelling - *n* нивелирование, сглаживание *(различий);* выравнивание

number - *n* число, количество, большое количество; *(порядковый)* номер, ряд

observe - v наблюдать, следить *(за чём-л.),* соблюдать *(правило, обычаи)*

obtain - v получать; достигать; добывать; *syn* **get, receive**

present - v преподносить, дарить; подавать, представлять; **presentation -** *n* изложение; предъявление

proximity - *n* близость, соседство; **in proximity to** поблизости, вблизи от *(чего-л.)*

require - v требовать; *syn* **call for; demand; meet the requirements** удовлетворять требованиям

traversing - *n* горизонтальная съемка

to keep in close touch with - поддерживать связь с

to touch upon (on) затрагивать, касаться вкратце *(вопроса)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 3: Mining Education in Great Britain

In Great Britain the students get mining education at special colleges and at mining departments of universities.

For example, the Mining Department at the University of Nottingham ranks as one of the foremost teaching and research mining schools in Great Britain. The students come to the University from all parts of the country and from abroad. The close proximity of Nottingham to mines extracting coal and different metals makes it possible for the University to keep in close touch with new achievements in mining.

The aim of training at the University is to give the student an understanding of applied science based on lectures, tutorial system, laboratory work and design classes. The laboratory work trains the student in accurate recording of observations, drawing of logical conclusions and presentation of scientific reports. Besides, it gives the student an understanding of experimental methods and familiarizes him (or her) with the characteristics of engineering materials, equipment and machines.

At Nottingham there are two types of laboratories, general and Specialized. General laboratories deal with the fundamentals of engineering science and specialized ones1 study the more specialized problems in different branches of engineering.

During the final two years of his course the student gets a comprehensive training in surveying. Practical work both in the field and in drawing classes forms an important part of this course. Besides, the students have practical work in survey camps during two weeks. The equipment available for carrying out traversing, levelling, tacheometric and astronomical surveying is of the latest design.

The practical and laboratory work throughout the three or four years of study forms a very important part of the course, so the students obtain the required standard in their laboratory course work before they graduate.

British educational system is fee-paying. The annual fee includes registration, tuition, examination, graduation and, in the case of full-time students, membership of the Union of Students.

Students from all over the world (nearly 100 countries) study at the University of Nottingham. For many years the University has had a thriving community of international students.

The University pays much attention to learning foreign languages. For individual study there is a 16-place self-access tape library with a tape archive of 3,000 tapes in 30 languages. There are also 16 video work stations where the students play back video tapes or watch TV broadcasts in a variety of languages.

1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. In Great Britain the students can get mining education only at special colleges.
2. The training at universities is based on tutorial system.
3. The laboratory work familiarizes the student with modern equipment.
4. There are three types of laboratories at the University of Nottingham.
5. When the students study surveying, they have practical work both in the field and in drawing classes.
6. The students from abroad don't study at Nottingham.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. Where can one get mining education in Great Britain?
2. Is the Mining Department at the University of Nottingham one of the foremost research mining schools in Great Britain?
3. What makes it possible for the University to keep in close touch with the, achievements in mining?
4. What are the students supposed to do in the laboratories?
5. Will the students have practical work in survey camps or in the laboratories?
6. What do the students use surveying equipment for?
7. What can you say about studying foreign languages at the University?

№4

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

advance - *n* прогресс, успех; продвижение вперед; v делать успехи, развиваться, продвигаться вперед; **advanced courses** курсы по расширенной программе

authority - *n* администрация; начальство

differ - v (from) отличаться (от); **difference** *n* различие; разница; **different** *a* различный; *syn* **various**

excavate - v добывать *(уголь);* вырабатывать полезное ископаемое открытым способом; вынимать *(грунт);* **excavation** - *n* открытая разработка карьером; разрез, карьер; **surface excavation** открытая разработка; *syn* **open-cast (opencast)**

experience - *n* жизненный опыт; опыт работы; стаж

found - v основывать**; *syn* establish, set up; foundation -** *n* основание; учреждение; основа; **lay the foundation** положить начало чему-л , заложить основу чего-л.

manage - v управлять, заведовать, справляться, уметь обращаться; **management -** *n* управление, заведование; правление, дирекция; **management studies -** наука об управлении

mean (meant) - *v* значить, иметь значение, подразумевать; намереваться, иметь в виду; **means -** *n, pl* средства, **meaning -** *n* значение, **by means of** посредством (чего-л)

metalliferous – *a* содержащий металл, рудоносный

preliminary - *a* предварительный**; preliminary course** подготовительные курсы

realize - v представлять, себе; понимать *(во всех деталях); **syn** **understand***

recognize - *v* признавать; узнавать

work out -v разрабатывать *(план);* решать задачу

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 4: Mining Education in Great Britain (continued)

At present in Great Britain there are a number of universities and colleges which give instruction in mechanical engineering, mining, metallurgy, etc. These institutions provide full-time and part-time education. It should be noted that technical colleges confer diplomas' on college graduates.

A university graduate leaves with the degree of Bachelor of Arts or Bachelor of Science, which is an academic qualification awarded by universities.

For example, the University in Cardiff has become one of the largest in Wales. It is one of the four colleges which together with the Welsh National School of Medicine form the University of Wales. There is the Mining Engineering Department in the University of Wales. The Department deals with the whole range of extractive industries such as coal and metalliferous mining, quarrying and oil technology.

After graduating from the college a student can be recommended for entry to the university by a college authority and he can apply for admission to the university.

At the Mining Department students may take several courses such as geology, mining engineering, mine surveying, quarrying, management studies and others. It has become a tradition that the courses are based on an intensive tutorial system. It means that students are allotted to members of the teaching staff for individual tuition separately in mining, in quarrying and in mine surveying. The system is founded on that of the older universities of Great Britain.

At the Department of Mining Engineering of the Newcastle University mining has now become a technically advanced profession. The Department of Mining Engineering trains industrially experienced engineers through various advanced courses in rock mechanics and surface excavation. For many years the Mining Engineering Department at Newcastle has recognized the need for highly-qualified engineers and realized that the courses in rock mechanics and surface excavation are of great importance for mining engineers.

At the University a student studies for three or four years. The organization of the academic year is based on a three-term system which usually runs from about the beginning of October to the middle of December, from the middle of January to the end of March and from the middle of April to the end of June or the beginning of July.

Students course is designed on a modular basis. Modules are self-contained 'units' of study, which are taught and assessed independently of each other. When a student passes a module, he (she) gains a credit. All modules carry a number of credits. At the end of the term, the number of credits a student gets, determines the award he (she) receives. Each module is continuously assessed by coursework and/or end-of-term examinations.

Admission to the British universities is by examination and selection. The minimum age for admission to the four-year course is normally 18 years. Departments usually interview all the candidates. The aim of the interview is to select better candidates.

Just over half of all university students live in colleges, halls of residence, or other accommodation provided by their university, another third lives in lodgings or privately rented accommodation; and the rest live at home.

1. Определите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. At present there are about a hundred technical institutions in Great Britain.
2. It should be noted that British colleges confer degrees.
3. As a rule a college authority recommends the graduates for entry to the university.
4. At the Mining Engineering Department of the University of Wales the students study only metalliferous mining.
5. At the Mining Engineering Department the courses are based on an intensive tutorial system.
6. The Mining Engineering Department at the Newcastle University has recognized the importance of teaching rock mechanics and surface excavation (open-cast mining).

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. Are there many technical institutions in Great Britain?
2. What is the difference between colleges and universities?
3. Is the Mining Engineering Department the only one in the University of Wales?
4. Does the Mining Engineering Department deal only with metalliferous mining?
5. Can a student enter the university after he has graduated from the college?
6. What courses are of special importance for mining engineers?
7. What do you know about the organization of the academic year at British universities?
8. When do the students take their examinations?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) курсы по расширенной программе
б) рудоносные отложения
в) средства производства
г) горный факультет
д) открытые горные работы
е) опытный инженер
ж) администрация колледжа
з) поощрять студентов
и) отвечать требованиям университета
к) наука об управлении

1. зависеть от условий
2. значить, означать
3. признать необходимость (чего-л.)
4. ежегодная производительность (шахты)
5. начальник шахты
6. добывающая промышленность
7. представлять особую важность
8. механика горных пород
9. единственный карьер
10. основывать факультет (школу, систему и т.д.)

№5

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный
adjacent - *a* смежный, примыкающий
ash - *n* зола
belt - *n* пояс; лента; ремень
body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты
common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**
cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**
dust - *n* пыль
dyke – *n* дайка
extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*
fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь
flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
fragmentary - *a* обломочный, пластический
glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 5: Igneous Rocks

Igneous rocks have crystallized from solidified magma.

Igneous rocks can be classified in a number of ways and one of (hem is based on mode of occurrence. They occur either as intrusive (below the surface) bodies or as extrusive masses solidified at the Earth's surface. The terms "intrusive" and "extrusive" refer to the place where rocks solidified.

The grain size of igneous rocks depends on their occurrence. The intrusive rocks generally cool more slowly than the extrusive rocks and crystallize to a larger grain size. The coarser-grained intrusive rocks with grain size of more than 0.5 mm called plutonic or abyssal are referred to as intrusive igneous rocks because they are intruded into older pre-existing rocks. Extrusive or volcanic rocks have even finer grains, less than 0.05 mm and are glassy.

Exposed igneous rocks are most numerous in mountain zones for two reasons. First, the mountain belts have been zones of major deformation. Second, uplifts in mountain belts have permitted plutonic masses to be formed.

The largest bodies of igneous rocks are called batholiths. Batholiths cooled very slowly. This slow cooling permitted large mineral grains to form. It is not surprising that batholiths are composed mainly of granitic rocks with large crystals called plutons. As is known, granites and diorites belong to the group of intrusive or plutonic rocks formed by solidification of igneous mass under the Earth's crust. Granites sometimes form smaller masses called stocks, when the occurrence has an irregular shape but smaller dimensions than the batholiths.

Laccoliths and sills, which are very similar, are intruded between sedimentary rocks. Sills are thin and they may be horizontal, inclined or vertical. Laccoliths are thicker bodies and in some cases they form mountains.

Dykes are also intrusive bodies. They range in thickness from a few inches to several thousand feet. Dykes are generally much longer than they are wide. Most dykes occupy cracks and have straight parallel walls. These bodies cool much more rapidly and are commonly fine-grained. For example, granite may occur in dykes that cut older rocks.

Pegmatites (quartz, orthoclase and mica) also belong to the group of plutonic or intrusive rocks. They occur in numerous veins which usually cut through other plutonites, most often granite, or adjacent rocks.

Extrusive igneous rocks have been formed from lava flows which come from fissures to the surface and form fields of volcanic rocks such as rhyolite, andesite, basalt, as well as volcanic ashes and dust, tuff, etc. As a rule, these rocks of volcanic origin cool rapidly and are fine-grained. It is interesting to note that basalt is the most abundant of all lavatypes. It is the principal rock type of the ocean floor.

Igneous rocks are rich in minerals that are important economically or have great scientific value. Igneous rocks and their veins are rich in iron, gold, zinc, nickel and other ferrous metals.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Igneous rocks have been formed by sedimentation.
2. Intrusive rocks have been formed by the cooling of rocks of the Earth's crust.
3. Extrusive rocks have been formed the same way.
4. The grain size of igneous rocks depends on mode of occurrence.
5. Exposed igneous rocks are numerous in mountain zones.
6. Granites and diorites belong to the group of extrusive rocks.
7. As a rule, granite may occur in dykes.
8. Pegmatites do not belong to the group of plutonic or intrusive rocks.

2). Ответьте на вопросы:

1. Have igneous rocks crystallized from magma or have they been formed by sedimentation?
2. Which types of igneous rocks do you know?
3. What does the grain size of igneous rocks depend on?
4. Can you give an example of intrusive or plutonic rocks?
5. Are diorites intrusive or extrusive formations?
6. What do you know about batholiths?
7. Do pegmatites belong to the group of plutonic or volcanic rocks?
8. How do pegmatites occur?
9. What minerals are igneous rocks rich in?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:

1.	adjacent layers	а) способ залегания
2.	abyssal rocks	б) крупнозернистый
3.	dimensions of crystals	в) зоны крупных нарушений
4.	valuable minerals	г) абиссальные (глубинные) породы
5.	shape and size of grains	д) смежные пласты (слои)
6.	mode of occurrence	е) размеры кристаллов
7.	coarse-grained	ж) взбросы
8.	uplifts	з) форма и размер зерен
9.	zones of major deformation	и) ценные минералы

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1.	затвердевшие массы	а) irregular shape
2.	обломочные породы	б) at a certain depth
3.	медленно остывать	в) economically important
4.	мелкозернистый	г) solidified masses
5.	многочисленные трещины	д) scientific value
6.	неправильная форма	е) to cool slowly
7.	на определенной глубине	ж) existing types of rocks
8.	экономически важный	з) fine-grained
9.	научная ценность	и) fragmentary rocks

10. существующие типы пород к) numerous cracks or fissures

№6

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 6: Metamorphic Rocks

The problem discussed concerns metamorphic rocks which compose the third large family of rocks. "Metamorphic" means "changed from". It shows that the original rock has been changed from its primary form to a new one. Being subjected to pressure, heat and chemically active fluids beneath the Earth's surface, various rocks in the Earth's crust undergo changes in texture, in mineral composition and structure and are transformed into metamorphic rocks. The process described is called metamorphism.

As is known, metamorphic rocks have been developed from earlier igneous and sedimentary rocks by the action of heat and pressure.

Gneisses, mica schists, phyllites, marbles, slate, quartz, etc. belong to the same group of rocks. Having the same mineral composition as granite, gneisses consist chiefly of quartz, orthoclase and mica. However unlike granite, they have a schistose structure. It means that their constituents are distributed in bands or layers and run parallel to each other in one direction. If disturbed the rock cleaves easily into separate plates.

The role of water in metamorphism is determined by at least four variable geologically related parameters: rock pressure, temperature, water pressure, and the amount of water present.

During a normal progressive metamorphism rock pressure and temperature are interdependent, and the amount of water and the pressure of water are related to the sediments and to the degree of metamorphism in such a way that, generally speaking, the low-grade metamorphic rocks are

characterized by the excess of water. The medium-grade rocks defined by some deficiency of water and the high-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.

Many of the metamorphic rocks mentioned above consist of flaky materials such as mica and chlorite. These minerals cause the rock to split into thin sheets, and rocks become foliated.

Slate, phyllite, schist and gneiss belong to the group of foliated metamorphic rocks. Marble and quartzite are non-foliated metamorphic rocks.

The structure of metamorphic rocks is of importance because it shows the nature of pre-existing rocks and the mechanism of metamorphic deformation. Every trace of original structure is of great importance to geologists. It gives an opportunity of analysing the causes of its metamorphism.

Being often called crystalline schists, metamorphic rocks such as gneisses and mica have a schistose structure. Metamorphic rocks represent the oldest portion of the Earth's crust. They are mostly found in the regions of mountain belts where great dislocations on the Earth once took place.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Generally speaking, metamorphic rocks have been developed from ores.
2. Marble, slate and phyllite belong to the group of metamorphic rocks.
3. As is known, unlike granite metamorphic rocks have a schistose structure.
4. It is quite obvious that the role of water in metamorphism is great.
5. As a rule, low-grade metamorphic rocks are characterized by the absence of water.
6. Flaky materials cause the rock to split into thin sheets.
7. It should be noted that marble and quartzite are foliated metamorphic rocks.
8. The structure of metamorphic rocks shows the nature of older preexisting rocks and the mechanism of metamorphic deformation as well.
9. All metamorphic rocks are non-foliated.

2). Ответьте на вопросы:

1. Do you know how metamorphic rocks have been formed?
2. Which rocks belong to the group of metamorphic?
3. Does gneiss have the same structure as granite?
4. Is the role of water great in metamorphism?
5. What rocks do we call foliated? What can you say about non-foliated metamorphic rocks?
6. How can geologists trace the original structure of metamorphic rocks?
7. Why are metamorphic rocks often called crystalline schists?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. as a result of the chemical and physical changes
2. constituents of rocks
3. to be subjected to constant development
4. to undergo changes
5. excess of water
6. low-grade ores
7. coal band
8. to cleave into separate layers
9. traces of original structure
10. generally speaking

а) полоса (или прослоек) угля
б) составляющие пород
в) расщепляться на отдельные слои
г) вообще говоря

д) в результате химических и физических изменений
е) избыток воды
ж) изменяться
з) находиться в постоянном развитии
и) низкосортные руды
к) следы первоначальной структуры

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. иметь значение
2. упомянутые выше
3. сланцеватая структура
4. в отличие от гранита
5. недостаток воды
6. существовавшие ранее породы
7. слоистые породы
8. мрамор и сланец
9. гнейс
10. давать возможность
11. определять структуру

а) unlike granite
б) to be of importance
в) pre-existing rocks
г) mentioned above
д) schistose structure
е) to give an opportunity (of doing smth)
ж) to define (determine) rock texture
з) deficiency of water
и) flaky rocks
к) marble and slate
л) gneiss

№7

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

country rock коренная (основная) порода

distinctive properties отличительные свойства

malleable metal ковкий металл

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 7: Prospecting

Mining activities include prospecting and exploration for a mineral deposit through finding, proving, developing, extracting and processing the ore. That is why it is possible to divide the mining activity into three major phases: 1) before mining which involves prospecting and exploration required to locate, characterize and prove a potential ore body; 2) mining which refers to actual coal or ore extraction. Extraction processes include underground or surface mining and dredging; 3) after mining which involves processing and preparing the raw ore for the end product.

As has already been said, before a mineral deposit can be worked, that is, before it can be extracted from the Earth for use by man, it must first be found. The search for economically useful mineral deposits is called prospecting. To establish the quality and quantity of a mineral deposit, the type of country rock, etc. means to prove it and this process is called proving. Prospecting and proving are only two different stages of mining geological exploration, the latter includes drilling and driving of openings.

Last century prospectors looked for visible evidence of mineralization on the surface of the Earth. To recognize valuable minerals it was necessary to know their various distinctive physical properties. For example, gold occurs in nature as a heavy malleable yellow metal. -Galena, the most important mineral containing lead, is dark grey, heavy and lustrous. The first ores of iron to be mined were deposits of magnetite, a black heavy mineral capable of attracting a piece of iron.

As the deposits of mineral that cropped out at the surface were mined, the search for additional supplies of minerals took place. The science of geology was used to explain the occurrence of ore deposits.

The aim of geological prospecting is to provide information on a preliminary estimation of the deposit and the costs of the geological investigations to be made. It also indicates whether it is available to continue the exploration or not.

Prospecting work includes three stages: 1) finding signs of the mineral; 2) finding the deposit; 3) exploring the deposit.

General indications of the possibility of exposing this or that mineral in a locality can be obtained by studying its general topographical relief, the type of ground and its general natural conditions. Thus, in mountainous regions where fissures were formed during the process of mountain formation, ore minerals could be expected in the fissure fillings. In hilly regions, sedimentary deposits would be expected.

Certain deposits are found only in a particular type of ground. Coal seams, for example, are found in sedimentary formations mainly consisting of sandstones and shales. Veins, on the other hand,

are found in crystalline (igneous) rocks, and the type of country rock usually determines the type of minerals.

At present, prospecting methods to be used are as follows:

1. Surface geological and mineralogical prospecting such as panning.
2. Geophysical, geochemical, geobotanical prospecting.
3. Aerial photography with geological interpretation of the data to be obtained is highly effective from aircraft or helicopter. Besides, successful development of space research has made it possible to explore the Earth's resources from space by satellites.

In modern prospecting the methods mentioned above are used together with the study of geological maps.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The search for economically useful mineral deposits is called proving.
2. Last century prospectors looked for visible evidence of mineral deposits.
3. The first ores of iron to be mined were deposits of galena.
4. The science of geology can explain the mode of occurrence of ore deposits.
5. As a rule prospecting includes four stages.
6. The study of general topographical relief and the type of ground makes it possible to expose this or that deposit.
7. Geologists know that certain deposits are only found in a particular type of ground.
8. As is known, veins are found in metamorphic rocks.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is prospecting?
2. What is proving?
3. How did prospectors find mineral deposits in the 19th century?
4. Does gold occur in nature as a heavy malleable yellow metal or as a heavy dark-grey one?
5. What metal is capable of attracting a piece of iron?
6. What does prospecting work provide?
7. What are the three main stages of prospecting?
8. Is it enough to know only the topographical relief of a locality for exposing this or that mineral?
9. What methods of prospecting do you know?
10. What are the most effective aerial methods of prospecting now?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. country rock	а) залегание рудных месторождений
2. panning	б) блестящий металл
3. the search for commercially useful deposits	в) коренная (основная) порода
4. geological exploration	г) дополнительные запасы минералов
5. to look for evidence of mineralization	д) промывка (золотоносного песка в лотке)
6. distinctive properties	е) геологическая разведка (с попутной добычей)
7. lustrous metal	ж) искать доказательства наличия месторождения
8. capable of attracting a piece of iron	з) отличительные свойства
9. additional supplies of minerals	и) поиски экономически полезных месторождений
10. the occurrence of ore deposits	к) способный притягивать кусок металла

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1.	стоимость геологических исследований	а) the data obtained
2.	выходить на поверхность (обнажаться)	б) galena, sandstones and shales
3.	произвести предварительную оценку (месторождения)	в) the cost of geological investigations
4.	визуальные наблюдения с воздуха	г) to crop out
5.	полученные данные	д) certain ore deposits
6.	галенит, песчаники и сланцы	е) to make a preliminary estimation (of a deposit)
7.	общие показания	ж) visual aerial observations
8.	находить признаки месторождения	з) to find the signs of a deposit
9.	определенные рудные месторождения	и) general indications

№8

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять*;* погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

TEXT 8: Exploration of Mineral Deposits

Exploration is known to include a whole complex of investigations carried out for determining the industrial importance of a deposit. The main task is to determine the quality and quantity of mineral and the natural and economic conditions in which it occurs. The exploration of the deposit is divided into three stages, namely preliminary exploration, detailed exploration and exploitation exploration.

The aim of preliminary exploration is to establish the general size of a deposit and to obtain an approximate idea of its shape, dimensions and quality. At this stage the geological map of the deposit is corrected and a detailed survey of its surface is completed.

The information on the preliminary exploration is expected to give an all-round description of the deposit which will enable the cost of its detailed exploration to be estimated.

The following points should be taken into consideration: 1) the shape and area of the deposit; 2) its depth and angles of dip and strike; 3) its thickness; 4) the properties of the surrounding rock and overburden; 5) the degree of uniformity of distribution of the mineral within the deposit and the country rock, etc.

Preliminary explorations can make use of exploratory openings such as trenches, prospecting pits, adits, crosscuts and boreholes. They are planned according to a definite system, and some are driven to a great depth.

All the exploratory workings are plotted on the plan. These data allow the geologist to establish the vertical section of the deposit.

The quality of the mineral deposit is determined on the basis of analyses and tests of samples taken from exploratory workings.

The method of exploration to be chosen in any particular case depends on the thickness of overburden, the angle of dip, the surface relief, the ground water conditions and the shape of the mineral deposit.

The task of the detailed exploration is to obtain reliable information on the mineral reserves, their grades and distribution in the different sectors of the deposit. Detailed exploration data provide a much more exact estimate of the mineral reserves.

Mine or exploitation exploration is known to begin as soon as mining operations start. It provides data for detailed estimates of the ore reserves of individual sections. It facilitates the planning of current production and calculating the balance of reserves and ore mined.

The searching and discovering of new mineralized areas are based on geological survey and regional geophysical prospecting. The results of these investigations provide data on iron-bearing formations and new deposits for commercial extraction.

In detailed exploration both underground workings and borehole survey are used. Core drilling with diamond and carbide bits is widely used. Non-core drilling is also used in loose rocks in combination with borehole geophysical survey.

One of the main methods to explore coal deposits is also core-drilling. Modern drilling equipment makes it possible to accurately measure bed thickness and determine structure of beds, faults and folds. Recording control instruments are attached to drilling rigs which allow the geologists to get reliable samples good for nearly all parameters of coal quality to be determined.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The purpose of preliminary exploration is to determine the mineral reserves and their distribution in the different sectors of the deposit.
2. The properties of the surrounding rock and overburden should be taken into consideration during the preliminary exploration.
3. The purpose of the detailed exploration is to find out the quantity (reserves) of the deposit.
4. Exploitation exploration facilitates the planning of current production.
5. Both core drilling and non-core drilling are widely used.

6. Recording control instruments allow geologists to get reliable ore samples.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What stages does exploration include?
2. What is the main purpose of preliminary exploration?
3. What should be taken into consideration by geologists during preliminary exploration?
4. What exploratory openings do you know?
5. Do you know how the quality of the mineral deposit is determined?
6. What is the aim of a detailed exploration?
7. Is core drilling used in prospecting for loose rocks?
8. What is drilling equipment used for?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1. bedded deposits
2. core drilling
3. the angle of dip of the seam
4. the thickness of overburden
5. exploratory workings
6. composition of minerals
7. pits and crosscuts
8. to exploit new oil deposits
9. sampling
10. geological section

а) мощность наносов
б) разрабатывать новые месторождения нефти
в) шурфы и квершлаги
г) пластовые месторождения
д) опробование (отбор) образцов
е) угол падения пласта
ж) колонковое бурение
з) геологический разрез (пород)
и) состав минералов
к) разведочные выработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих сочетаний слов:

1. буровые скважины
2. по простиранию пласта
3. равномерность распределения минерала в залежи
4. водоносность пород
5. карбидные и алмазные коронки
6. детальная разведка
7. использовать новые поисковые методы
8. проникать в залежь
9. коренная порода
10. свойства окружающих пород

а) ground water conditions
б) detailed exploration
в) boreholes
г) along the strike of the bed (seam)
д) carbide and diamond bits
е) the uniformity of mineral distribution in the deposit
ж) the properties of surrounding rocks
з) to make use of new prospecting methods
и) country rock
к) to penetrate into the deposit

3. Подготовка к практическим занятиям (запоминание иноязычных лексических единиц и грамматических конструкций)

Грамматические конструкции представлены на стр. 6 – 40.

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

Семья. Family

родственник relative, relation
родители parents
мать (мама) mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
отец (папа) father (dad, daddy, papa, pa)
жена wife
муж husband
супруг(а) spouse
ребенок, дети child, children
дочь daughter
сын son
сестра sister
брат brother
единственный ребенок only child
близнец twin
близнецы, двойняшки twins
брат-близнец twin brother
сестра-близнец twin sister
однояйцевые близнецы identical twins
тройняшки triplets
бабушка и дедушка grandparents
бабушка grandmother (grandma, granny, grandmamma)
дедушка grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
внуки grandchildren
внучка granddaughter
внук grandson
прабабушка great-grandmother
прадедушка great-grandfather
прабабушка и прадедушка great-grandparents
правнуки great-grandchildren
тётя aunt
дядя uncle
крестный (отец) godfather
крестная (мать) godmother
отчим, приемный отец stepfather
мачеха, приемная мать stepmother
сводный брат stepbrother
сводная сестра stepsister
брат по одному из родителей half-brother
сестра по одному из родителей half-sister
приемный, усыновленный сын adopted son
приемная, удочеренная дочь adopted daughter
приемный ребенок adopted child
патронатная семья, приемная семья foster family
приемный отец foster father
приемная мать foster mother
приемные родители foster parents

приемный сын foster son
приемная дочь foster daughter
приемный ребенок foster child
неполная семья (с одним родителем) single-parent family
родня the kin, the folks
племянница niece
племянник nephew
двоюродный брат cousin (male)
двоюродная сестра cousin (female)
двоюродный брат (сестра), кузен (кузина) first cousin
троюродный брат (сестра) second cousin
четвероюродный брат (сестра) third cousin
родня со стороны мужа или жены in-laws
свекровь mother-in-law (husband's mother)
свёкор father-in-law (husband's father)
тёща mother-in-law (wife's mother)
тесть father-in-law (wife's father)
невестка, сноха daughter-in-law
зять son-in-law
шурин, свояк, зять, деверь brother-in-law
свояченица, золовка, невестка sister-in-law
семейное положение marital status
холостой, неженатый, незамужняя single
женатый, замужняя married
брак marriage
помолвка engagement
помолвленный, обрученный engaged
развод divorce
разведенный divorced
бывший муж ex-husband
бывшая жена ex-wife
расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей separated
вдова widow
вдовец widower
подружка, невеста girlfriend
друг, парень, ухажер boyfriend
любовник, любовница lover
ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный fiance
свадьба wedding
невеста на свадьбе bride
жених на свадьбе (bride)groom
медовый месяц honeymoon

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

The Ural State Mining University

Mining University – Горный университет; **higher educational institution** - высшее учебное заведение; **to provide** - зд. Предоставлять; **full-time education** - очное образование; **extramural education** - заочное	**scientific research centre** - центр научных исследований; **master of science** - кандидат наук; **capable** – способный; **to take part in** - принимать участие; **graduate** – выпускник; **to dedicate** – посвящать;

образование; **to award** – награждать; **post-graduate courses** – аспирантура;	**to carry out scientific work** - выполнять научную работу;

Faculty of Mining Technology - горно – технологический; **Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический; **Institute of World Economics** – Институт мировой экономики; **Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический; **Faculty of Civil Protection** – гражданской защиты; **Faculty of City Economy** – городского хозяйства;	**Faculty of Geology & Geophysics** – геологии и геофизики; **Faculty of extramural education** – заочный; **department** – кафедра; **dean** – декан; **to train specialists in** - готовить специалистов; **to consist of** - состоять из; **preparatory** – подготовительный; **additional** – дополнительный; **to offer** – предлагать;

to house - размещать /ся/; **building** – здание; **Rector's office** – ректорат; **Dean's office** – деканат; **department** – кафедра; **library** – библиотека; **reading hall** - читальный зал; **assembly hall** - актовый зал; **layout** - расположение, план; **administrative offices** - административные отделы;	**computation centre** - вычислительный центр; **canteen** – столовая; **to have meals** – питаться; **hostel** – общежитие; **to go in for sports** - заниматься спортом; **wrestling** – борьба; **weight lifting** - тяжелая атлетика; **skiing** - катание на лыжах; **skating** - катание на коньках; **chess** – шахматы;

academic work - учебный процесс; **academic year** - учебный год; **to consist of** - состоять из; **bachelor's degree** - степень бакалавра; **course of studies** - курс обучения; **to last** - длиться; **term** - семестр; **to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия; **period** - пара, 2 – х часовое занятие; **break** - перерыв; **subject** - предмет; **descriptive geometry** - начертательная геометрия;	**general geology** - общая геология; **foreign language** - иностранный язык; **to operate a computer** - работать на компьютере; **to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен; **to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен; **to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен; **to fail in chemistry** - не сдать химию; **holidays, vacations** - каникулы; **to present graduation paper** - представлять дипломные работы; **for approval** - к защите;

The Faculty of Mining Technology trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

The Institute of World Economics trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

The Faculty of Mining Mechanics trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

The Faculty of Geology & Geophysics trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My town

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist’s/a pharmacy/a drugstore - аптека

a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser's - парикмахерская
a dental clinic/a dentist's – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner's – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки
a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна

a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My speciality

The Earth's Crust and Useful Minerals

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

clay - *n* глина; глинозем

consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

crust - *n* кора; *геол.* земная кора

decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

dissolve v растворять

expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение

external - *a* внешний

extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

glacier - *n* ледник, глетчер

grain - *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый

gravel - *n* гравий, крупный песок

internal - *a* внутренний

intrusive - *a* интрузивный, плутонический

iron - *n* железо

layer - *n* пласт

like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

lime - *n* известь; **limestone -** *n* известняк

loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый

make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*

particle - *n* частица; включение

peat - *n* торф; торфяник

represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный

rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

sand - *n* песок

sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый

shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …**, **oil …** - горючий сланец

siltstone - *n* алеврит

stratification - *n* напластование, залегание

stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

substance - *n* вещество, материал; сущность

thickness - *n* толщина, мощность

value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*

vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

contain - v содержать *(в себе),* вмещать

crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

contract - v сжиматься; сокращаться

dust - *n* пыль

expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать

gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

lateral - *a* боковой

occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания

penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**

pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

size - *n* размер; величина; класс *(угля)*

solution – *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий

succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

uniform – *a* однородный; одинаковый

weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

to be subjected to подвергаться

Rocks of Earth's Crust

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

adjacent - *a* смежный, примыкающий

ash - *n* зола

belt - *n* пояс; лента; ремень

body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

dust - *n* пыль

dyke – *n* дайка

extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines -** *n pl* мелочь; мелкий уголь

flow - v течь; литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы

fragmentary - *a* обломочный, пластический

glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток
band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated -** *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation -** *n* отношение; **relationship -** *n* родство; свойство; **relative -** *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing –** *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
in such a way таким образом

Fossil Fuels

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
heat - v нагревать; *n* теплота
liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

mudstone - *n* аргиллит

purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**

shale - *n* глинистый сланец

the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*

blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

continuity - *n* непрерывность, неразрывность

domestic - *a* внутренний; отечественный

estimate - v оценивать; *n* оценка; смета

fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный

liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий

matter - *n* вещество; материя

moisture - *n* влажность, сырость; влага

parting - *n* прослоек

plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

store - v запасать, хранить на складе; вмещать

strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*

uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Prospecting and Exploration

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, **driven**) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory -** *a* разведочный; **exploration -** *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening -** *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved -** *a* разведанный, достоверный; **proving -** *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable -** *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working -** *n* разработка, горная выработка

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit -** алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking -** проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping -** *a* наклонный; **gently sloping -** с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike -** вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

General Information on Mining

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

goaf — завал; обрушенное пространство

double-ended drum bearer — комбайн с двойным барабаном

to identify — опознавать

appraisal — оценка

susceptibility — чувствительность

concealed — скрытый, не выходящий на поверхность

crusher — дробилка

concentration — обогащение

blending — смешивание; составление шихты

screen — сортировать (обыден. уголь); просеивать

froth floatation — пенная флотация

core drilling — колонковое бурение

to delineate — обрисовывать, описывать

lender — заимодавец

feasibility — возможность

in situ mining — повторная разработка месторождения в массиве

screening — просеивание; грохочение

processing — обработка, разделение минералов

Mining and Environment

break v **(broke**, **broken**) отбивать *(уголь или породу),* обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

(руды .или породы); расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

drill - *n* бур; .перфоратор; бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling -** *n* бурение

dump -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

dumper опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

environment - *n* окружение; окружающая обстановка/среда

explode - v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive -** *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

friable - *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

handle - v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

heap - v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

hydraulicklng - *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

load - v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader -** *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader -** комбайн, комбинированная горная машина

lorry - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

mention - v упоминать

overcasting - *n* перелопачивание *(породы)*

pump - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

reclamation - *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

sidecastiag - *n* внешнее отвалообразование

site - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

slice - *n* слой; **slicing -** *n* выемка слоями, разработка слоями

strip - v производить вскрышные работы; разрабатывать; очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper -** *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping -** *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

unit - *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

washery - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

to attract smb's attention привлекать чье-л. внимание

backhoe - *n* обратная лопата

blast - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

block out - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

clearing - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

crash - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

earth-mover - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

excavator - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket** ~ многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

grab - *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

grabbing - погрузка грейфером; захватывание

hoist - *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

plough - *n* струг

power shovel - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

range - *n* колебание в определенных пределах

rate - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

remote - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

result - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

safety - *n* безопасность; техника безопасности

slope - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(руды)*

support - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

1.4 Самостоятельное изучение тем курса (для заочной формы обучения)

Самостоятельное изучение тем курса предполагает изучение тем практических занятий, представленных в разделе 1, 2, 3 данных методических указаний студентами заочной формы обучения в межсессионный период.

1.5 Подготовка к контрольной работе и 1.6 Написание контрольной работы

Для выполнения контрольной работы студентами кафедрой подготовлены *Методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов данной специальности.*

II. Другие виды самостоятельной работы

2.1 Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (Подготовка к ролевой игре, к практико-ориентированным заданиям, опросу)

2.1.1 Подготовка к ролевой игре

Студенты получают ролевые карточки. Им необходимо обдумать свою роль, стратегию своей роли, вопросы и ответы.

Role card 1

Sasha

The worst thing about your house is lack of privacy. You share your room with a younger sister. You think she goes through all your stuff. She asks you ambarrassing questions about boys, makes little nasty comments about you.

Your parents treat you like a baby. Your father is too much interested in your studying and homework. Your mother makes you do the work about the house alone. You are going to leave home as soon as you are old enough.

- Collect all the arguments to explain your attitude to your family.
- Listen to what the members of your family are saying.
- Don't interrupt them.
- Don't forget that both parents and children are to blame in conflict situations.
- Be polite and friendly

Role card 2

Mother

Your daughter has written a letter of complaint to the youth magazine. She is not satisfied with your attitude to her. You have read this letter. You are worried about the situation in the family and have decided to discuss the problems with a family therapist.

- Say why you have invited the therapist
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha

- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 3

Father

Your daughter is complaining that you treat her like a baby. You don't let her out at night during the week. You always ask her about the boys. You don't believe her when she says she doesn't have any homework to do. Your wife has invited a family therapist to discuss the problems of your family.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 4

Sister

Sasha is complaining that you don't help her with the work about the house. She also says that she can't keep anything secret in her room, you go through all her stuff. She is irritated by your behaviour. She is going to leave your home as soon as she is old enough.

- Say what your attitude to the problem is
- Try to explain Sasha's attitude to you and the whole family.
- Think of your questions to Sasha
- Be objective to her problems – you might have never taken them seriously!
- Try to analyse the situation, don't criticize Sasha
- Follow the therapist's advice
- Be polite and friendly

Role card 5

Family therapist

- Encourage all the members of the family to speak
- Take notes
- Ask questions
- Summarize what you have heard from all the members of the family
- Try to analyse the situation in a short report

2.1.2 Подготовка к практико-ориентированному заданию

Подготовьте устные высказывания по темам:

1. From the history of the Ural State Mining University.
2. Faculties and specialities of the University.
3. The layout of the Ural State Mining University.
4. Student's academic work.

Подготовьте письменные ответы на вопросы:

1. Where do you study?
2. What faculty do you study at?
3. How many faculties are there at the Ural State Mining University?
4. What year are you in?
5. What is your future speciality?
6. What specialities are there at your faculty?
7. When did you enter the University?

8. When was the Sverdlovsk Mining Institute founded?
9. When was it reorganized into the University?
10. In how many buildings is the Ural State Mining University housed?
11. In what building is your faculty housed?
12. Who is the dean of your faculty?
13. What books do you take from the library?
14. Where do you live?
15. Where do you usually have your meals?
16. How long does the course of studies for a bachelor's degree last?
17. How long do the students study for a Diplomate Engineer's course and a Magister's degree?
18. What subjects do you study this term?
19. What lectures and practical classes do you like to attend?
20. Where do the students have their practical work?
21. When do the students present their graduation papers for approval?
22. What graduates can enter the post-graduate courses?
23. What kind of sport do yon like?
24. Where do you go in for sports?

2.1.3 Подготовка к опросу

Ответьте на вопросы на иностранном языке:

1. What specialities does the geological faculty train geologic engineers in?
2. What problems does Geology study?
3. What branches is Geology divided into?
4. What does Economic Geology deal with?
5. What does mineralogy investigate?
6. What does paleontology deal with?
7. What is the practical importance of Geology?
8. Where do graduates of the geological faculty of the Mining University work?
9. What is your future speciality?
10. What kind of work do geologists-prospectors conduct?
11. What do geologists explore during the early stages of geological exploration?
12. What work do geologists conduct while working in. the field?
13. When do geologists start exploratory work?
14. What is the purpose of the exploratory work?
15. How is exploratory work conducted?
16. What contribution do geologists make to the development of the National Economy of our country?
17. What does hydrogeology deal with?
18. Where are ground waters used?
19. Where is thermal (hot) water used?
20. What must hydrogeologists do with ground waters which complicate construction work or mineral extraction?

2.2 Дополнительное чтение профессионально ориентированных текстов и выполнение заданий на проверку понимания прочитанного (по 2 текста на тему)

Text 1: A.M. Terpigorev (1873-1959)

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

to defend graduation paper (thesis) - защищать дипломную работу (диссертацию)

to pass an entrance examination - сдать вступительный экзамен

to get a higher education - получить высшее образование

to do one's best (one's utmost, all one can, everything in one's power) - сделать все возможное, не жалеть сил

to make contribution (to) - вносить вклад в *(науку, технику* и т.д.)

choose (chose, **chosen**) - v выбирать; **choice -** *n* выбор

collect - v собирать, коллекционировать

dangerous - *a* опасный

deposit - *n* месторождение, залежь; **bedded deposits -** пластовые месторождения

describe - v описывать, изображать; **description -** *n* описание; **descriptive -** *a* описательный

facility - *n (pl* **facilities)** средства; возможности; оборудование; устройства

fire damp - *n* рудничный газ, метан

harm - *n* вред; *v* вредить; **harmful -** *a* вредный

relate - v относиться, иметь отношение

safety - *n* безопасность; **mine safety** безопасность труда при горных работах; техника безопасности; **safety measures** меры безопасности; **safe -** *a* безопасный; надежный

seam - *n* пласт *(угля); syn* **bed, layer; flat seam** горизонтальный, пологопадающий пласт; **inclined seam** наклонный пласт; **steep seam** крутопадающий пласт; **thick seam** мощный пласт; **thin seam** тонкий пласт

state - *n* состояние; государство; штат; *a* государственный; v заявлять; констатировать; излагать

success - *v* успех; удача; **be a success** иметь успех; **successful** *a* успешный

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

Academician A.M. Terpigorev is a well-known mining engineer who successfully combined his practical experience with scientific research. He was bom in 1873 in Tambov. In 1892 he finished school with honours1 and decided to get a higher education. He chose the Mining Institute in St. Petersburg, passed all the entrance examinations successfully and became a student of the Mining Institute.

At the Institute he studied the full range of subjects2 relating to metallurgy, mining and mining mechanics.

At that time students' specialization was based on descriptive courses and elementary practical training. One of the best lecturers was A. P. Karpinsky. His lectures on historical geology were very popular.

During his practical training Terpigorev visited mines and saw that the miners' work was very difficult. While he was working in the Donbas he collected material for his graduation paper which he soon defended. The Mining of flat seams in the Donbas was carefully studied and described in it.

In 1897 Terpigorev graduated from the Institute with a first-class diploma of a mining engineer.

His first job as a mining engineer was at the Sulin mines where he worked for more than three years first as Assistant Manager and later as Manager.

From 1900 till 1922 Terpigorev worked at the Yekaterinoslav Mining Institute (now the Mining Institute in Dnepropetrovsk).

In 1922 he accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Academy and moved to Moscow. From 1930 he headed the chairs5 of Mining Transport and Mining of Bedded Deposits at the Moscow Mining Institute.

Academician Terpigorev took a particular interest in mine safety. As a result of his investigations a series of safety measures in gassy collieries was worked out. For some time he was working on the problem of fire damp, the most harmful and dangerous of all the gases in mines.

His two-volume work Coal Mining and Mine Transport Facilities is a full description of the state of mechanization and the economy of the Donbas. His other works are about mining transport facilities, mechanization of coal mining and mining machinery. He is one of the pioneers in scientific methods of coal gasification.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. After school Terpigorev decided to work in a mine.
2. Terpigorev collected material for his graduation paper which dealt with mining thick seams in the Donbas.
3. For more than three years Terpigorev worked at the Sulin mines.
4. In 1922 Terpigorev accepted an offer to take charge of the mining chair at the Moscow Mining Institute.
5. He investigated the problems of mine safety.
6. He was one of the first to work on the problem of gasification of coal.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. When and where was Terpigorev born?
2. What institute did he graduate from?
3. What material did he collect while he was working in the Donbas?
4. Where did Terpigorev work from 1900 till 1922?
5. At what institute did Terpigorev head the chair of Mining Bedded Deposits?
6. What did Terpigorev take a particular interest in?
7. What works by Terpigorev do you know?
8. What problems do Terpigorev's works deal with?
9. What was the result of his investigations on mine safety?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) охрана труда в шахтах
б) подтверждать
в) добыча угля
г) эксплуатация месторождений
д) метан
е) принять предложение
ж) выполнить задачу, задание
з) горизонтальный пласт
и) собирать материал

1. поступить в институт
2. решать важные проблемы
3. выдающиеся исследователи
4. успешно провести эксперименты
5. выбрать профессию
6. описательный курс
7. происхождение железной руды
8. начальник шахты
9. мероприятия по охране труда

Text 2: A.P. Karpinsky (1847-1936)

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

abroad - *adv* за рубежом
confirm - v подтверждать; утверждать
consider - v считать, полагать, рассматривать
contribute - v вносить вклад; **contribution** вклад
crust - *n* земная кора
detailed - a подробный, детальный
elect - v избирать, выбирать *(голосованием);* назначать *(на должность)*
embrace - v охватывать; обнимать
entire - *a* весь, целый; полный; *syn* **whole**
exist – *v* существовать, быть, жить
foreign - *a* иностранный
former - *a* прежний

investigate - v исследовать; изучать

prominent - *a* знаменитый, выдающийся, известный; *syn* **remarkable, outstanding**

regularity - *n* закономерность

significant - *a* значительный; **significance -** *n* значение, важность; **exhaust the significance** исчерпывать значение

society – *n* общество

staff - *n* персонал; личный состав; штат

various - *a* различный, разный, разнообразный

to advance the view - высказывать мнение *(точку зрения)*

to be interested in - быть заинтересованным *(чём-л.),* интересоваться

to take (an) interest in - заинтересоваться *(чём-л.)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

V.A. Obruchev, I.M. Gubkin, A.Y. Fersman, V.I. Vernadsky and A. P. Karpinsky were the prominent Russian scientists who laid the foundation1 of the Russian school of geology and mining.

An entire epoch in the history of Russian geology is connected with Karpinsky's name. One of the greatest Russian geologists, he was a member and for some time President of the Academy of Sciences of the former USSR and a member of several Academies abroad. The Geological Society of London elected him a foreign member in 1901. His greatest contribution to geology was a new detailed geological map of the European part of Russia and the Urals.

For many years he headed the Russian Geological Committee the staff of which was made up of his pupils. He was one of those geologists who embraced the whole of geological science. He created the new stratigraphy of Russia. He studied the geological systems in various regions of the country and was the first to establish3 the regularity of the Earth's crust movement. His paleontological studies are of no less importance, especially those on palaeozoic ammonoids. He also took an interest in deposits of useful minerals and gave a classification of volcanic rocks. He advanced the view that petroleum deposits existed in Russian, which was confirmed later. He studied some ore and platinum deposits and may be justly considered5 the founder of practical geology of the Urals. He was the first Russian scientist who introduced microscope in the study of petrographic slides.

Karpinsky was a prominent scientist, an excellent man and citizen. He was one of the best lecturers at the Mining Institute in his time. He was also one of the greatest Russian scientists who later became the first elected President of the Academy of Sciences of the USSR. Students were attracted to him not only because he was a great scientist but also because of his charming personality and gentle manner.

Every geologist and every geology student knows very well Karpinsky's most significant work An Outline of the Physical and Geographical Conditions in European Russia in Past Geological Periods.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Karpinsky was the first President of the Academy of Sciences.
2. He worked at the Mining Institute in St.Petersburg.
3. Karpinsky was a member of many Academies abroad.
4. Karpinsky made up a detailed map of the Asian part of our country.
5. He headed the Russian Geological Committee.
6. Karpinsky created a new branch of geology, namely stratigraphy.
7. He only tried to establish the regularity of the Earth's crust movement.
8. Karpinsky may be justly considered the founder of the practical geology of the Urals.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What society elected Karpinsky a foreign member and when?
2. Did he head the Russian Geological Committee or was he a member of that Committee?

3. Did Karpinsky investigate various regions of the Russian territory?
4. Which of his works are the most remarkable?
5. What can you say about Karpinsky's investigations in petrology?

3. Переведите следующие сочетания слов.

а) земная кора
б) составить подробную карту
в) замечательные работы
г) выдающийся ученый
д) залежи полезных ископаемых
е) научное общество
ж) избирать председателя (президента)
з) заложить основы школы
и) интересоваться геологией
к) высказать точку зрения
л) возглавлять комитет

Text 3: Sedimentary Rocks

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**
clay - *n* глина; глинозем
consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**
crust - *n* кора; *геол.* земная кора
decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение
derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать
destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный
dissolve v растворять
expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure -** *n* обнажение
external - *a* внешний
extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*
force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие
glacier - *n* ледник, глетчер
grain - *n* зерно; **angular grains -** угловатые зерна *(минералов);* **grained -** *a* зернистый
gravel - *n* гравий, крупный песок
internal - *a* внутренний
intrusive - *a* интрузивный, плутонический
iron - *n* железо
layer - *n* пласт
like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно
lime - *n* известь; **limestone -** *n* известняк
loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый
make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*
particle - *n* частица; включение
peat - *n* торф; торфяник
represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative -** *a* характерный, типичный
rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода
sand - *n* песок
sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник
sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary -** *a* осадочный; **sedimentation -** *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose -** *a* сланцеватый, слоистый
shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay -** глинистый сланец; **combustible …, oil …** - горючий сланец
siltstone - *n* алеврит
stratification - *n* напластование, залегание
stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**
substance - *n* вещество, материал; сущность
thickness - *n* толщина, мощность
value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable -** *a* ценный *(о руде)*
vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable -** *a* переменный; непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The rocks of the Earth's crust are divided into three main groups: sedimentary rocks, which consist of fragments or particles of pre-existing rocks; igneous rocks which have solidified from magma and metamorphic rocks. Metamorphic rocks have been derived from either igneous or sedimentary rocks.

Sedimentary rocks represent one of the three major groups of rocks that make up the crust of the Earth. Most sedimentary rocks have originated by sedimentation. They are layered or stratified. Thus, stratification is the most important characteristic of sediments and sedimentary rocks. It is necessary to note that the processes which lead to the formation of sedimentary rocks are going on around us.

Sediments are formed at or very near the surface of the Earth by the action of heat, water (rivers, glaciers, seas and lakes) and organisms.

It should be noted that 95 per cent of the Earth's crust is made up of igneous rocks and that only 5 per cent is sedimentary. In contrast, the amount of sedimentary rocks on the Earth's surface is three times that of igneous rocks.

Strictly speaking, sedimentary rocks form a very small proportion by volume of the rocks of the Earth's crust. On the contrary, about three quarters of the Earth's surface is occupied by sedimentary rocks. It means that most of sedimentary rocks are formed by sediments, accumulations of solid material on the Earth's surface.

The thickness of the layers of sedimentary rocks can vary greatly from place to place. They can be formed by the mechanical action of water, wind, frost and organic decay. Such sediments as gravel, sand and clay can be transformed into conglomerates, sandstones and clay schists as a result of the accumulation of materials achieved by the destructive mechanical action of water and wind.

Mechanical sediments can be unconsolidated and consolidated. For example, gravel, sand and clay form the group of unconsolidated mechanical sediments, because they consist of loose uncemented particles (grains).

On the Earth's surface we also find consolidated rocks, which are very similar to the loose sediments whose particles are firmly cemented to one another by some substance. The usual cementing substances are sand, clay, calcium carbonate and others. Thus sandstones are consolidated rocks composed of round or angular sand grains, more or less firmly consolidated. Like sand, sandstones can be divided into fine-grained, medium-grained and coarse-grained.

On the other hand, chemical sediments are the result of deposits or accumulations of substances achieved by the destructive chemical action of water. The minerals such as rock salt, gypsum and others are formed through sedimentation of mineral substances that are dissolved in water.

Sediments can also be formed by the decay of the remains of organisms, by the accumulation of plant relics.1 They are called organic sediments. Limestones, peat, coal, mineral oil and other sediments may serve as an example of organic sediments.

The most principal kinds of sedimentary rocks are conglomerate, sandstone, siltstone, shale, limestone and dolomite. Many other kinds with large practical value include common salt, gypsum, phosphate, iron oxide and coal.

As is known, water, wind and organisms are called external forces, because their action depends on the energy which our planet receives from the Sun.

1). Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The rocks of the Earth's crust are divided into two main groups.
2. Igneous rocks are composed of particles of pre-existing rocks.
3. Sedimentary rocks are stratified.
4. Sediments are formed by the action of glaciers.
5. Igneous rocks make up 75 per cent of exposed rocks.
6. Conglomerates are formed as a result of the accumulation of materials caused by the destructive mechanical action of water.
7. Sandstones are consolidated rocks.
8. Clays are unconsolidated mechanical sediments.
9. Chemical sediments are formed by the destructive chemical action of water.
10. Peat and coal are the organic sediments which are of great practical value.
11. Clay schist was formed at the beginning of the sedimentation period and clay was formed later.

2). Ответьте на вопросы:

1. What main groups of rocks do you know?
2. Do sedimentary rocks consist of particles of pre-existing rocks?
3. How were igneous rocks formed?
4. Do you know how sedimentary rocks have originated?
5. What is the most important characteristic feature of sediments?
6. Do sedimentary rocks account for 10 per cent of the Earth's crust?
7. Is gravel consolidated mechanical sediment? And what about sand and clay?
8. What are cementing substances? Can calcium carbonate be used as a cementing substance?
9. Are there only fine-grained sandstones?
10. What can you say about chemical sediments?
11. Can you give an example of organic sediments? How are they formed?

3) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.

1.	земная кора	а) sandstone
2.	растворяться в воде	б) fine-grained sand
3.	песчаник	в) the Earth's crust
4.	уплотненные осадки	г) exposed rocks
5.	изверженные породы	д) to dissolve in water
6.	мелкозернистый песок	е) like gypsum
7.	затвердевать	ж) consolidated sediments
8.	подобно гипсу	з) igneous rocks
9.	обнаженные породы	и) to solidify, to consolidate

б) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих сочетаний слов.

1.	coarse-grained sand	а) разрушительная сила воды
2.	siltstone and shale	б) пластовые месторождения
3.	the destructive action of water	в) доледниковый период

4.	existing rocks	г) крупнозернистый (грубо- зернистый) песок
5.	chemical decay	д) частицы вещества
6.	sedimentary rocks	е) алеврит и сланец
7.	stratified deposits	ж) существующие породы
8.	pre-glacial period	з) осадочные породы
9.	particles of a substance	и) химический распад

Text 4: Weathering of Rocks

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

contain - v содержать *(в себе),* вмещать
crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться
contract - v сжиматься; сокращаться
dust - *n* пыль
expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**
fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель
fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*
freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать
gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно
hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом
hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф
influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*
lateral - *a* боковой
occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence -** *n* залегание; **mode of occurrence -** условия залегания
penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*
phenomenon - *n* явление; *pi* **phenomena**
pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы
rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**
refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*
resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant -** *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся
size - *n* размер; величина; класс *(угля)*
solution – *n* раствор; **soluble -** *a* растворимый; **solvent -** растворитель; *a* растворяющий
succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно
undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*
uniform – *a* однородный; одинаковый
weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*
to be subjected to подвергаться

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

All rocks which are exposed on the Earth's surface (high mountain peaks, deserts) are decomposed to a certain degree. The process of rock disintegration by the direct influence of local atmospheric conditions on the Earth's surface is called weathering. This phenomenon is often referred to in geology because weathering is an active process. It takes place in the upper layers of the Earth's crust.

The main cause of physical weathering is the change in temperature that takes place with the succession of day and night. This phenomenon can best be observed in the deserts and high mountains where the changes in temperature are common.

During the day under the influence of heat, rocks expand whereas at night they begin to contract. As rocks are generally composed of different minerals, their expansion and contraction do not occur uniformly. As a result of this rocks crack. At the beginning these cracks or fissures are hardly noticeable but gradually they become wider and deeper until the whole surface of rock is finally transformed into gravel, sand or dust.

In the regions of a moderate or cold climate, where the temperature in winter goes down to below 0 (zero), the decomposition of rocks is greatly facilitated by the action of water. When water freezes it increases in volume and develops enormous lateral pressure. Under the action of water, rocks decompose to pieces of varied forms and sizes.

The decomposition of rocks under the direct influence of heat and cold is called physical weathering.

Rocks are subjected not only to physical decomposition but also to chemical weathering, i.e. to the action of chemical agents, such as water, carbon dioxide and oxygen. In a general way, chemical weathering is an acid attack on the rocks of the Earth's crust, in particular an attack on the most abundant minerals — quartz (sand) and aluminosilicates (clays). Only few minerals and rocks are resistant to the action of natural waters. The solvent action of water is stronger when it contains carbon dioxide. Water causes more complex and varied changes. With the participation of oxygen and carbon dioxide up to 90 per cent of rocks is transformed into soluble minerals, which are carried away by the waters.

Organisms and plants also take part in the disintegration of rocks. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks by making holes in them to live in. The action of plants can often be even more destructive. Their roots penetrate into the fissures of rocks and develop the lateral pressure which fractures and destroys rocks.

1. Укажите, какие предложены соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. The process of sedimentation is called weathering.
2. The change in temperature causes physical weathering.
3. As a rule during the night rocks expand.
4. When freezing water decreases in volume and develops enormous lateral pressure.
5. The decomposition of rocks is due to the influence of heat and cold.
6. As a rule water contains dissolved mineral substances.
7. The solvent action of water is stronger when it does not contain carbon dioxide.
8. It should be noticed that the action of organisms and plants is destructive.
9. Certain marine organisms accelerate the destruction of rocks.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What process is called weathering?
2. What process is called physical weathering?
3. Where can the phenomenon of physical weathering be best observed?
4. What process is called chemical weathering?
5. What substances can act as solvents?
6. Are all minerals and rocks resistant to the action of natural waters or only few minerals and rocks can resist the action of water?
7. How do organisms act on the destruction of rocks?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. the Earth's surface
2. to be composed of different minerals
3. the expansion of rocks
4. changes in temperature

5. under the influence of heat
6. weathering
7. destructive forces
8. a great number of fractures
9. to penetrate into fissures

а) под влиянием тепла
б) разрушительные силы
в) выветривание
г) большое количество трещин
д) состоять из различных минералов
е) расширение пород
ж) проникать в трещины
з) изменения температуры
и) поверхность земли

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. увеличиваться в объеме
2. развивать боковое давление
3. способствовать разрушению пород
4. подвергаться гниению
5. растворять вещества
6. сопротивляться (чему-л.)
7. некоторые органические вещества
8. ускорять процесс выветривания
9. куски породы различных размеров

а) to facilitate the decomposition of rocks
б) to increase in volume
в) to resist (smth)
г) rock pieces of varied (different) sizes
д) to accelerate the process of weathering
е) to be subjected to decay
ж) to dissolve substances
з) to develop lateral pressure
и) certain organic substances

Text 5: Fossil Fuels

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger -** n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость
heat - v нагревать; *n* теплота
liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**
mudstone - *n* аргиллит
purpose - *n* цель; намерение; *syn* **aim, goal**
shale - *n* глинистый сланец
the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The chief sources of energy available to man today are oil, natural gas, coal, water power and atomic energy. Coal, gas and oil represent energy that has been concentrated by the decay of organic materials (plants and animals) accumulated in the geologic past. These fuels-are often referred to as fossil fuels.

The word fossil (derived from the Latin fodere "to dig up") originally referred to anything that was dug from the ground, particularly a mineral. Today the term fossil generally means any direct evidence of past life, for example, the footprints of ancient animals. Fossils are usually found in sedimentary rocks, although sometimes they may be found in igneous and metamorphic rocks as well. They are most abundant in mudstone, shale and limestone, but fossils are also found in sandstone, dolomite and conglomerate.

Most fuels are carbon-containing substances that are burned in air. In burning fuels give off heat which is used for different purposes.

Fuels may be solid, liquid and gaseous. Solid fuels may be divided into two main groups, natural and manufactured. The former category includes coal, wood, peat and other plant products. The latter category includes coke and charcoal obtained by heating coal in the absence of air.

Liquid fuels are derived almost from petroleum. In general, natural petroleum, or crude oil, as it is widely known, is the basis of practically all industrial fuels. Petroleum is a mixture of hundreds of different hydrocarbons — compounds composed of hydrogen and carbon — together with the small amount of other elements such as sulphur, oxygen and nitrogen. Petroleum is usually associated with water and natural gas. It is found in porous sedimentary rocks where the geological formation allowed the oil to collect from a wide area. Petroleum is one of the most efficient fuels and raw materials.

Of gaseous fuels the most important are those derived from natural gas, chiefly methane or petroleum. Using gaseous fuels makes it possible to obtain high thermal efficiency, ease of distribution and control. Gas is the most economical and convenient type of fuels. Today gas is widely utilized in the home and as a raw material for producing synthetics.

Scientists consider that a most promising source of natural resources may be the floor of the sea, a subject which now has become an important field of research.

Generally speaking, all types of fossil fuels described in the text are of great economic importance as they represent the sources of energy the man uses today.

1. Укажете, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Coal, water power and atomic energy are the only sources of energy available to man today.
2. Coal, wood and peat represent natural group of solid fuels.
3. As a rule fossil fuels are found in sedimentary rocks.
4. Crude oil is widely used for producing solid fuels.
5. Petroleum can be found in porous sedimentary rocks.
6. Gas is used to produce synthetic materials.
7. Not all types of fossil fuels burn.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What fuels are often referred to as fossil fuels?
2. What does the word fossil mean?
3. What rocks are most abundant hi fossil fuels?

4. What types of fossil fuels do you know?
5. Is coke a natural or manufactured solid fuel? And what can you say about coal and peat?
6. How are coke and charcoal produced?
7. What rocks is petroleum usually associated with?
8. What are the advantages of gaseous fuels?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов сочетаний слов.

1.	fossil fuel	а) дерево и торф
2.	raw material	б) небольшое количество аргиллита
3.	crude oil	в) органическое топливо
4.	the chief sources of energy	г) сланец и известняк
5.	to refer to	д) сырье
6.	any direct or indirect evidence of the deposit	е) материалы, содержащие углерод
7.	shale and limestone	ж) главные источники энергии
8.	carbon-containing materials	з) любые прямые или косвенные признаки месторождения
9.	wood and peat	и) сырая (неочищенная) нефть
10.	the small amount of mudstone	к) относиться к (чему-л.); ссылаться на (что-л.)

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов.

1.	древесный уголь и кокс	а) to collect data
2.	жидкое топливо	б) charcoal and coke
3.	накапливать	в) to be composed of limestones
4.	собирать данные	г) liquid fuel
5.	происходить от	д) to accumulate
6.	получать хорошие результаты	е) to derive from
7.	богатый горючими сланцами	ж) to obtain good results
8.	состоять из известняков	з) abundant in oil shales

Text 6: Coal and Its Classification

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*
blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)
combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание
continuity - *n* непрерывность, неразрывность
domestic - *a* внутренний; отечественный
estimate - v оценивать; *n* оценка; смета
fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов
fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding -** *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва
inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя
intermediate - *a* промежуточный; вспомогательный
liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*
luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous -** *a* блестящий
matter - *n* вещество; материя
moisture - *n* влажность, сырость; влага
parting - *n* прослоек
plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования
rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля
regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**
smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*
store - v запасать, хранить на складе; вмещать
strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**
thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*
uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие
utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**
volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

Coal is the product of vegetable matter that has been formed by the action of decay, weathering, the effects of pressure, temperature and time millions of years ago.

Although coal is not a true mineral, its formation processes are similar to those of sedimentary rocks.

Structurally coal beds are geological strata characterized by the same irregularities in thickness, uniformity and continuity as other strata of sedimentary origin. Coal beds may consist of essentially uniform continuous strata or like other sedimentary deposits may be made up of different bands or benches of varying thickness.

You can see a seam limited by two more or less parallel planes, a shape which is typical of sedimentary rocks. The benches may be separated by thin layers, of clay, shale, pyrite or other mineral matter, commonly called partings. Like other sedimentary rocks coal beds may be structurally disturbed by folding and faulting.

According to the amount of carbon coals are classified into: brown coals, bituminous coals and anthracite. Brown coals are in their turn subdivided into lignite and common brown coal. Although carbon is the most important element in coal, as many as 72 elements have been found in some coal deposits, including lithium, chromium, cobalt, copper, nickel, tungsten and others.

Lignite is intermediate in properties between peat and bituminous coal, containing when dry about 60 to 75 per cent of carbon and a variable proportion of ash. Lignite is a low-rank brown-to-black coal containing 30 to 40 per cent of moisture. Developing heat it gives from 2,500 to 4,500 calories. It is easily inflammable but burns with a smoky flame. Lignite is liable to spontaneous combustion. It has been estimated that about 50 per cent of the world's total coal reserves are lignitic.

Brown coal is harder than lignite, containing from 60 to 65 per cent of carbon and developing greater heat than lignite (4,000-7,000 calories). It is very combustible and gives a brown powder. Bituminous coal is the most abundant variety, varying from medium to high rank. It is a soft, black, usually banded coal. It gives a black powder and contains 75 to 90 per cent of carbon. It weathers only slightly and may be kept in open piles with little danger of spontaneous combustion if properly stored. Medium-to-low volatile bituminous coals may be of coking quality. Coal is used intensively in blast furnaces for smelting iron ore. There are non-coking varieties of coal.

As for the thickness, the beds of this kind of coal are not very thick (1-1.5 meters). The great quantities of bituminous coal are found in the Russian Federation.

Anthracite or "hard" coal has a brilliant lustre containing more than 90 per cent of carbon and low percentage of volatile matter. It is used primarily as a domestic fuel, although it can sometimes be blended with bituminous grades of coal to produce a mixture with improved coking qualities. The largest beds of anthracite are found in Russia, the USA and Great Britain.

Coal is still of great importance for the development of modern industry. It may be used for domestic and industrial purposes. Being the main source of coke, coal is widely used in the iron and steel industry. Lignite, for example either in the raw state or in briquetted form, is a source of industrial carbon and industrial gases.

There is a strong tendency now for increased research into new technologies to utilize coal. No doubt, coal will be used as a raw material for the chemical industry and petrochemical processes. All

these processes involve coal conversion which include gasification designed to produce synthetic gas from coal as the basis for hydrogen manufacture, liquefaction (разжижение) for making liquid fuel from coal and other processes.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. Anthracite coals may be divided into lignite and common brown coal.
2. Coals are ranked according to the percentage of carbon they contain.
3. Peat, with the least amount of carbon is the lowest rank, then comes lignite or brown coal.
4. Brown coal is hard and it is not liable to spontaneous combustion.
5. Bituminous coal weathers rapidly and one cannot keep it in open piles.
6. Being intensively used in the iron and steel industry bituminous coal varies from medium to high rank.
7. Anthracite or hard coal, the highest in percentage of carbon, can be blended with bituminous grades of coal.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is the classification of coal based on?
2. Is carbon the only element in coal? (Prove it.)
3. Is lignite intermediate in properties between peat and bituminous coal?
4. What heat value does lignite develop when burnt?
5. What coals are liable to spontaneous combustion?
6. What is the difference between lignite and brown coal?
7. Is bituminous coal high- or low-volatile?
8. Does anthracite contain 90 per cent of carbon?
9. Where are the largest deposits of anthracite found? And what can you say about bituminous coal?
10. What do you know about the utilization of coal?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1.	spontaneous combustion	а) легковоспламеняющийся газ
2.	moisture and ash content	б) высокосортный уголь
3.	the most abundant variety	в) плавить железную руду
4.	in its turn	г) самовозгорание
5.	the amount of volatile matter	д) содержание влаги и золы
6.	easily inflammable gas	е) дымное пламя
7.	brilliant lustre	ж) наиболее широко распространенные угли
8.	to smelt iron ore	з) яркий блеск
9.	high-rank coal	и) в свою очередь
10.	a smoky flame	к) количество летучих веществ

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов н сочетаний слов:

1.	тип угля	а) heat value
2.	некоксующийся уголь	б) amount of carbon
3.	доменная печь	в) coal rank
4.	содержание углерода	г) to store coal
5.	смешиваться с другими углями	д) to weather rapidly
6.	улучшенного качества	е) non-coking coal
7.	складировать уголь	ж) blast furnace
8.	теплотворная способность	з) of improved quality
9.	быстро выветриваться	и) to blend with other coals

Text 7: General Information on Mining

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development -** *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal -** *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support -** крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

As has been said, mining refers to actual ore extraction. Broadly speaking, mining is the industrial process of removing a mineral-bearing substance from the place of its natural occurrence in the Earth's crust. The term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells; metal, non-metallic minerals, coal, peat, oil shale and other hydrocarbons from the earth. In other words, the work done to extract mineral, or to prepare for its extraction is called mining.

The tendency in mining has been towards the increased use of mining machinery so that modern mines are characterized by tremendous capacities. This has contributed to: 1) improving working conditions and raising labour productivity; 2) the exploitation of lower-grade metal-bearing substances and 3) the building of mines of great dimensions.

Mining can be done either as a surface operation (quarries, opencasts or open pits) or by an underground method. The mode of occurrence of the sought-for metallic substance governs to a large degree the type of mining that is practised. The problem of depth also affects the mining method. If the rock containing the metallic substance is at a shallow site and is massive, it may be economically excavated by a pit or quarry-like opening on the surface. If the metal-bearing mass is tabular, as a bed or vein, and goes to a great distance beneath the surface, then it will be worked by some method of underground mining.

Working or exploiting the deposit means the extraction of mineral. With this point in view a number of underground workings is driven in barren (waste) rock and in mineral. Mine workings vary in shape, dimensions, location and function.

Depending on their function mine workings are described as exploratory, if they are driven with a view to finding or proving mineral, and as productive if they are used for the immediate extraction of useful mineral. Productive mining can be divided into capital investment work, development work, and face or production work. Investment work aims at ensuring access to the deposit from the surface. Development work prepares for the face work, and mineral is extracted (or produced) in bulk.

The rock surfaces at the sides of workings are called the sides, or hi coal, the ribs. The surface above the workings is the roof in coal mining while in metal mining it is called the back. The surface below is called the floor.

The factors such as function, direct access to the surface, driving in mineral or in barren rock can be used for classifying mine workings:

I. Underground workings:

a) Long or deep by comparison with their cross-section may be: 1) vertical (shaft, blind pit); 2) sloping (slopes, sloping drifts, inclines); 3) horizontal (drifts, levels, drives, gate roads, adits, crosscuts).

b) Large openings having cross dimensions comparable with their length.

c) Production faces, whose dimensions depend on the thick ness of the deposit being worked, and on the method of mining it.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. As a rule, the term "mining" includes the recovery of oil and gas from wells as well as coal, iron ores and other useful minerals from the earth.
2. The increased use of mining machinery has greatly contributed to raising labour productivity and improving working conditions.
3. It is quite obvious that the problem of depth is not always taken into consideration in choosing the mining method.
4. Productive workings are usually used for the immediate extraction of useful mineral.
5. Underground workings are driven in barren rock or in mineral.
6. A shaft is a vertical underground working which is long and deep in comparison with its cross-section.
7. The surface above the mine working is usually called the floor.
8. The rock surfaces at the sides of mine workings arc called the ribs.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What is mining?
2. What has contributed to the better working conditions of the miners?
3. What factors influence the choice of the mining method?
4. In what case is useful mineral worked by open pits?
5. Are exploratory workings driven with a view to finding and proving mineral or are they driven for immediate extraction of mineral?
6. What is the difference between development and production work?
7. What main factors are used for classifying mine workings?
8. What do the dimensions of production faces depend on?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. direct access to the surface
2. open-cast mining
3. tabular (or bedded) deposits
4. oil well
5. underground workings
6. cross-section of a working
7. production face
8. the roof of the mine working
9. to drive mine workings in barren rock
10. to affect the mining method

а) нефтяная скважина
б) проходить горные выработки по пустой породе
в) влиять на метод разработки
г) прямой доступ к поверхности
д) пластовые месторождения
е) открытая разработка
ж) поперечное сечение выработки
з) подземные выработки
и) очистной забой
к) кровля горной выработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов сочетаний слов:

1. способствовать чему-л.
2. размер ствола
3. извлекать, добывать (уголь)
4. штреки и квершлаги
5. пустая порода
6. вообще говоря
7. удалять, перемещать (крепь, вскрышу и др.)
8. с целью ...
9. подготовительные работы
10. мощность пласта

а) thickness of a seam
б) shaft dimension
в) with a view to
г) to contribute to smth.
д) development work
е) to remove (timber, overburden, etc.)
ж) drifts (gate roads) and crosscuts
з) generally speaking

и) to recover (coal)
к) waste (barren) rock

Text 8: Methods of Working Bedded Deposits Underground

Запомните слова и выражения, необходимые для понимания текста:

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by ~** самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss -** *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

Прочитайте и переведите текст, выполните упражнения на проверку понимания прочитанного:

The method of working (or method of mining) includes a definite sequence and organization of development work of a deposit, its openings and its face work in certain geological conditions. It depends on the mining plan and machines and develops with their improvements. A rational method of working should satisfy the following requirements in any particular conditions: 1) safety of the man; 2) maximum output of mineral; 3) minimum development work (per 1,000 tons output); 4) minimum production cost and 5) minimum losses of mineral.

Notwithstanding the considerable number of mining methods in existence, they can be reduced to the following main types: 1. Methods of working with long faces (continuous mining); 2. Methods of working with short faces (room-and-pillar). The characteristic feature of the continuous mining is the absence of any development openings made in advance of production faces. The main advantage of long continuous faces is that they yield more mineral. Besides, they allow the maximum use of combines (shearers), cutting machines, powered supports and conveyers. The longwall method permits an almost 100 per cent recovery of mineral instead of 50 to 80 per cent obtainable in room-and-pillar methods.

The basic principle of room-and-pillar method is that rooms from 4 to 12 meters wide (usually 6-7) are driven from the entries, each room is separated from each other by a rib pillar. Rib pillars are recovered or robbed after the rooms are excavated. The main disadvantage of shortwall work is a considerable loss of mineral and the difficulty of ventilation. In working bedded deposits methods of mining mentioned above may be used either with stowing or with caving.

In Russia, Germany (the Ruhr coal-field), France and Belgium nearly all the faces are now long ones. In Britain longwall faces predominate.

The USA, Canada, Australia and to some extent India are developing shortwall faces and creating the machines for them. In these countries shortwall faces are widely used.

In Russia the thick seams are taken out to full thickness up to 4.5 m thick if they are steep, and up to 3.5 m thick if they are gently sloping or inclined. In the Kuznetsk coal-field long faces are worked to the dip with ashield protection, using a method proposed by N.Chinakal. In shield mining coal is delivered to the lower working by gravity so that additional haulage is not required.

It should also be noted that in Russia hydraulic mining is widely used as it is one of the most economic and advantageous methods of coal getting. New hydraulic mines are coming into use in a number of coal-fields. Hydraulic mining is developing in other countries as well.

The aim of hydraulic mining is to remove coal by the monitors (or giants) which win coal and transport it hydraulically from the place of work right to the surface. It is quite obvious that the choice of the method of mining will primarily depend on the depth and the shape and the general type of the deposit.

1. Укажите, какие предложения соответствуют содержанию текста. Подтвердите свои ответы фактами из текста.

1. A definite sequence and organization of development work is called mining.
2. Mining methods in existence can be reduced to the two main types.
3. The depth and the shape of the deposit influence the choice of the method of working.
4. As is known, in Belgium all the faces are short now, in Great Britain they amount to 84 per cent.
5. In Australian collieries shortwall faces are widely used.
6. The room-and-pillar method is characterized by the absence of any development openings.
7. High-capacity monitors win coal and transport it hydraulically right to the surface.

2. Ответьте на следующие вопросы:

1. What factors does mining depend on?
2. What is mining?
3. What are the most important factors which affect the choice of the method of working?
4. Do short faces or long faces predominate in Russia? What can you say about the Ruhr coal-field?
5. Is Canada developing shortwall faces or longwall faces?
6. What are the main disadvantages of shortwall faces?
7. What are the two main methods of working?
8. What is the main advantage of long continuous faces?
9. What methods of mining long faces do you know?
10. What method of mining is characterized by the absence of development openings?

3. а) Найдите в правой колонке русские эквиваленты следующих слов в сочетаний слов:

1.	development face	а) сплошная система разработки
2.	great losses	б) выемка целиков
3.	shield method of mining	в) подготовительный забой
4.	continuous mining	г) большие потери
5.	longwall advancing to the dip	д) удовлетворять требованиям
6.	the room-and-pillar method of mining	е) зависеть от геологических условий
7.	to open up a deposit	ж) выемка лавами прямым ходом по падению

8. pillar mining з) щитовая система разработки
9. to satisfy the requirements и) вскрывать месторождение
10. to depend upon the geological conditions к) камерно-столбовая система разработки

б) Найдите в правой колонке английские эквиваленты следующих слов и сочетаний слов:

1. включать (в себя) а) safety
2. выемка лавами обратным ходом б) annual output
3. достигать 50% в) to involve
4. превышать 60% г) to propose a new method of mining
5. безопасность д) long wall retreating
6. годовая добыча е) in connection with difficulties
7. основной недостаток системы разработки ж) to exceed 60 per cent
8. под-этаж з) notwithstanding (in spite of)
9. крутопадающий пласт и) to reach 50 per cent
10. щитовая система разработки к) the main disadvantage of the method of mining
11. предложить новый способ разработки л) sublevel
12. в связи с трудностями м) the shield method of mining
13. несмотря на н) open up a deposit
14. вскрывать месторождение о) steep seam

2.3 Подготовка доклада

Подготовьте доклад по одной из предложенных тем.

1. Inigo Jones (1573-1652)
2. Christopher Wren (1632-1723)
3. Geoffrey Chaucer (1340-1400)
4. Samuel Johnson (1709-1784)
5. Alfred Tennyson (1809-1892)
6. Thomas Hardy (1840-1928)
7. John Milton (1608-1674)
8. William Makepeace Thackeray (1811-1863)
9. Henry Wadsworth Longfellow (1807 – 1882)
10. Joshua Reynolds (1723-1792)
11. Thomas More (1478 – 1535)
12. J.M.W. Turner (1775-1851)
13. Thomas Gainsborough (1727 – 1788)
14. Henry Moor (1898-1986)
15. Henry Irving (1838-1905)
16. William Gilbert (1836-1911)
17. Arthur Sullivan (1842-1900)
18. James Watt (1736 - 1819)
19. Thomas Telford (1757 - 1834)
20. Isambard Kingdom Brunel (1806 – 1859)
21. George Stephenson (1781 – 1848)
22. David Livingstone (1813 – 1873)
23. Tony Blair (1953)
24. Winston Churchill (1874 - 1965)
25. Margaret Hilda Thatcher (1925)
26. Sir Isaac Newton (1642 – 1727
27. Alexander Graham Bell (1847 - 1922)

28. Robert Burns (1759 – 1796)

Правила предоставления информации в докладе

Размер	**А4**
Шрифт	Текстовый редактор Microsoft Word, шрифт Times New Roman 12
Поля	слева – 2 см., сверху и справа – 1 см., снизу – 1
Абзацный отступ	1 см устанавливается автоматически
Стиль	Примеры выделяются курсивом
Интервал	межстрочный интервал – 1
Объем	1 -2 страницы (до 7 минут устного выступления)
Шапка доклада	***Иванова Мария Ивановна*** Екатеринбург, Россия ФГБОУ ВПО УГГУ, МД-13 НАЗВАНИЕ ДОКЛАДА
	Список использованной литературы

Краткое содержание статьи должно быть представлено на 7-10 слайдах, выполненных в PowerPoint.

2.4 Подготовка к тесту

Тест направлен на проверку страноведческих знаний и знаний межкультурной коммуникации. Для этого студентам необходимо повторить материал, представленный в *Социально-культурной сфере общения* по теме «Страны изучаемого языка» (Я и мир). Для успешного написания теста изучите следующий материал:

THE GEOGRAPHICAL POSITION OF GREAT BRITAIN

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland covers an area of some 244 thousand square miles. It is situated on the British Isles. The British Isles are separated from Europe by the Strait of Dover and the English Channel. The British Isles are washed by the North Sea in the east and the Atlantic Ocean in the west.

England is in the southern and central part of Great Britain. Scotland is in the north of the island. Wales is in the west. Northern Ireland is situated in the north-eastern part of Ireland.

England is the richest, the most fertile and most populated part in the country. There are mountains in the north and in the west of England, but all the rest of the territory is a vast plain. In the northwestern part of England there are many beautiful lakes. This part of the country is called Lake District.

Scotland is a land of mountains. The Highlands of Scotland are among the oldest mountains in the world. The highest mountain of Great Britain is in Scotland too. The chain of mountains in Scotland is called the Grampians. Its highest peak is Ben Nevis. It is the highest peak not only in Scotland but in the whole Great Britain as well. In England there is the Pennine Chain. In Wales there are the Cumbrian Mountains.

There are no great forests on the British Isles today. Historically, the most famous forest is Sherwood Forest in the east of England, to the north of London. It was the home of Robin Hood, the famous hero of a number of legends.

The British Isles have many rivers but they are not very long. The longest of the English rivers is the Severn. It flows into the Irish Sea. The most important river of Scotland is the Clyde. Glasgow stands on it. Many of the English and Scottish rivers are joined by canals, so that it is possible to travel by water from one end of Great Britain to the other.

The Thames is over 200 miles long. It flows through the rich agricultural and industrial districts of the country. London, the capital of Great Britain, stands on it. The Thames has a wide mouth, that's

why the big ocean liners can go up to the London port. Geographical position of Great Britain is rather good as the country lies on the crossways of the see routes from Europe to other parts of the world. The sea connects Britain with most European countries such as Belgium, Holland, Denmark, Norway and some other countries. The main sea route from Europe to America also passes through the English Channel.

United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland occupies the territory of the British Isles. They lie to the north-west of Europe.

Once upon a time the British Isles were an integral part of the mainland. As a result of sinking of the land surface they became segregated. Great Britain is separated from the continent by the English Channel. The country is washed by the waters of the Atlantic Ocean. Great Britain is separated from Belgium and Holland by the North Sea, and from Ireland — by the Irish Sea.

There are several islands along the coasts. The total area of the British Isles is 325 000 km2. The main islands are Great Britain and Ireland.

The surface of the country is much varied. Great Britain is the country of valleys and plains.

The insular geographical position of Great Britain promoted the development of shipbuilding, different trading contacts with other countries. It has also allowed the country to stay independent for quite a long period of time.

THE BRITISH PARLIAMENT

The British Parliament is the oldest in the world. It originated in the 12th century as Witenagemot, the body of wise councillors whom the King needed to consult pursuing his policy. The British Parliament consists of the House of Lords and the House of Commons and the Queen as its head.

The House of Commons plays the major role in law-making. It consists of Members of Parliament (called MPs for short). Each of them represents an area in England, Scotland, Wales and Ireland.

MPs are elected either at a general election or at a by-election following the death or retirement. Parliamentary elections are held every 5 years and it is the Prime Minister who decides on the exact day of the election. The minimum voting age is 18. And the voting is taken by secret ballot.

The election campaign lasts about 3 weeks, The British parliamentary system depends on political parties.

The party which wins the majority of seats forms the government and its leader usually becomes Prime Minister. The Prime Minister chooses about 20 MPs from his party to become the cabinet of ministers. Each minister is responsible for a particular area in the government. The second largest party becomes the official opposition with its own leader and «shadow cabinet». The leader of the opposition is a recognized post in the House of Commons.

The parliament and the monarch have different roles in the government and they only meet together on symbolic occasions, such as coronation of a new monarch or the opening of the parliament. In reality, the House of Commons is the one of three which has true power.

The House of Commons is made up of six hundred and fifty elected members, it is presided over by the speaker, a member acceptable to the whole house. MPs sit on two sides of the hall, one side for the governing party and the other for the opposition. The first 2 rows of seats are occupied by the leading members of both parties (called «front benches»). The back benches belong to the rank-and-life MPs.

Each session of the House of Commons lasts for 160-175 days. Parliament has intervals during his work. MPs are paid for their parliamentary work and have to attend the sittings.

As mention above, the House of Commons plays the major role in law making. The procedure is the following: a proposed law («a bill») has to go through three stages in order to become an act of Parliament; these are called «readings».

The first reading is a formality and is simply the publication of the proposal. The second reading involves debate on the principles of the bill; it is examination by parliamentary committee.

And the third reading is a report stage, when the work of the committee is reported on to the house. This is usually the most important stage in the process.

When the bill passes through the House of Commons, it is sent to the House of Lords for discussion, when the Lords agree it, the bill is taken to the Queen for royal assent, when the Queen sings the bill, it becomes act of the Parliament and the Law of the Land.

The House of Lords has more than 1000 members, although only about 250 take an active part in the work in the house. Members of this Upper House are not elected; they sit there because of their rank. The chairman of the House of Lords is the Lord Chancellor. And he sits on a special seat, called «Woolsack».

The members of the House of Lords debate the bill after it has been passed by the House of Commons. Some changes may be recommended and the agreement between the two houses is reached by negotiations.

BRITISH TRADITIONS AND CUSTOMS

British nation is considered to be the most conservative in Europe. It is not a secret that every nation and every country has its own customs and traditions. In Great Britain people attach greater importance to traditions and customs than in other European countries. Englishmen are proud of their traditions and carefully keep them up. The best examples are their queen, money system, their weights and measures.

There are many customs and some of them are very old. There is, for example, the Marble Championship, where the British Champion is crowned; he wins a silver cup known among folk dancers as Morris Dancing. Morris Dancing is an event where people, worn in beautiful clothes with ribbons and bells, dance with handkerchiefs or big sticks in their hands, while traditional music-sounds.

Another example is the Boat Race, which takes place on the river Thames, often on Easter Sunday. A boat with a team from Oxford University and one with a team from Cambridge University hold a race.

British people think that the Grand National horse race is the most exciting horse race in the world. It takes place near Liverpool every year. Sometimes it happens the same day as the Boat Race takes place, sometimes a week later. Amateur riders as well as professional jockeys can participate. It is a very famous event.

There are many celebrations in May, especially in the countryside.

Halloween is a day on which many children dress up in unusual costumes. In fact, this holiday has a Celtic origin. The day was originally called All Halloween's Eve, because it happens on October 31, the eve of all Saint's Day. The name was later shortened to Halloween. The Celts celebrated the coming of New Year on that day.

Another tradition is the holiday called Bonfire Night. On November 5, 1605, a man called Guy Fawkes planned to blow up the Houses of Parliament where the king James 1st was to open Parliament on that day. But Guy Fawkes was unable to realize his plan and was caught and later, hanged. The British still remember that Guy Fawkes' Night. It is another name for this holiday. This day one can see children with figures, made of sacks and straw and dressed in old clothes. On November 5th, children put their figures on the bonfire, burn them, and light their fireworks.

In the end of the year, there is the most famous New Year celebration. In London, many people go to Trafalgar Square on New Year's Eve. There is singing and dancing at 12 o'clock on December 31st.

A popular Scottish event is the Edinburgh Festival of music and drama, which takes place every year. A truly Welsh event is the Eisteddfod, a national festival of traditional poetry and music, with a competition for the best new poem in Welsh. If we look at English weights and measures, we can be convinced that the British are very conservative people. They do not use the internationally accepted measurements. They have conserved their old measures. There are nine essential measures. For general use, the smallest weight is one ounce, then 16 ounce is equal to a pound. Fourteen pounds is one stone.

The English always give people's weight in pounds and stones. Liquids they measure in pints, quarts and gallons. There are two pints in a quart and four quarts or eight pints are in one gallon. For length, they have inches: foot, yards and miles.

LONDON

As well as being the capital of England, London is the capital of the United Kingdom. London was founded by the Romans in 43 A.D. and was called Londinium. In 61 A.D. the town was burnt down and when it was rebuilt by the Romans it was surrounded by a wall. That area within the wall is now called the City of London. It is London's commercial and business centre. It contains the Bank of England, the Stock Exchange and the head offices of numerous companies and corporations. Here is situated the Tower of London.

The Tower was built by William the Conqueror who conquered England in 1066. He was crowned at Westminster Abbey. Now most of the Government buildings are located there.

During the Tudor period (16th century) London became an important economic and financial centre. The Londoners of the Elizabethan period built the first theatres. Nowadays the theatre land is stretched around Piccadilly Circus. Not far from it one can see the British Museum and the «Covent Garden» Opera House.

During the Victorian period (19th century) London was one of the most important centers of the Industrial Revolution and the centre of the British Empire. Today London is a great political centre, a great commercial centre, a paradise for theatre-goers and tourists, but it is also a very quiet place with its parks and its ancient buildings, museums and libraries.

LONDON

London is the capital of Great Britain, its political, economic and commercial center. It`s one of the largest cities in the world and the largest city in Europe. Its population is about 9 million. London is one of the oldest and most interesting cities in the world. Traditionally it`s divided into several parts: the City, Westminster, the West End and the East End.

They are very different from each other and seem to belong to different towns and epochs. The heart of London is the City, its financial and business center. Numerous banks, offices and firms are situated there, including the Bank of England, the Stock Exchange and the Old Bailey. Few people live here, but over a million people come to the City to work. There are some famous ancient buildings within the City. Perhaps the most striking of them in St. Paul`s Cathedral, the greatest of British churches. St. Paul`s Cathedral has always dominated the center of London. It stands on the site of former Saxon and Norman churches. They latter were destroyed in the Great Fire and the present building, completed in 1710, is the work of the eminent architect Sir Christopher Wren. It is an architectural masterpiece.

Londoners have a particular affection for St. Paul`s, which is the largest Protestant Church in England. Its high dome, containing the remarkable Whispering Gallery, is a prominent landmark towering above the multistoried buildings which line the river-bank.

The Tower of London was one of the first and most impressive castles built after the Norman invasion of England in 1066. Since the times of William I various kings have built and extended the Tower of London and used it for many purposes. The Tower has been used as a royal palace, an observatory, an arsenal, a state prison, and many famous and infamous people have been executed within its walls. It is now a museum. For many visitors the principal attraction is the Crown Jewels, the finest precious stones of the nation. A fine collection of armour is exhibited in the keep. The security of the Tower is ensured by a military garnison and by the Yeoman Warders or Beefeaters, who still wear their picturesque Tudor uniform.

Westminster is the historic, the governmental part of London. Westminster Abbey is a national shrine where the kings and queens are crowned and famous people are buried. Founded by Edward the Confessor in 1050, the Abbey was a monastery for along time. The present building dates largely from the times of Henry 3, who began to rebuild the church, a task which lasted nearly 300 years. The West towers were added in the eighteenth century. Since William I almost every English monarch has been

crowned in this great church, which contains the tombs and memorials of many of Britain`s most eminent citizens: Newton, Darwin, Chaucer, Dickens, Tennyson, Kipling and etc. One of the greatest treasures of the Abbey is the oaken Coronation Chair made in 1300. The Abbey is also known for its Poet`s Corner. Graves and memorials to many English poets and writers are clustered round about.

Across the road from Westminster Abbey is Westminster Palace, or the Houses of Parliament, the seat of the British Parliament. The Parliament of Great Britain and Northern Ireland consists of the House of Lords and the House of Commons. The House of Lords consists of just over 1,000 members of the different grades of nobility — dukes, marquises, earls, viscounts and barons.

The House of Commons consists of 650 members. They are elected by secret ballot by men and women aged 18 and over. Every Parliament is divided into Sessions. Each of these may last a year and usually begins early in November. The Clock Tower, which contains the hour-bell called Big Ben, is known over the world. The bell is named after Sir Benjamin Hall.

Buckingham Palace is the official residence of the Queen. The West End is the richest and most beautiful part of London. It is the symbol of wealth and luxury. The best hotels, shops, restaurants, clubs, and theatres are situated there. There are splendid houses and lovely gardens belonging to wealthy people.

Trafalgar Square is the geographical center of London. It was named in memory of Admiral Nelson`s victory in the battle of Trafalgar in 1805. The tall Nelson`s Column stands in the middle of the square. On the north side of Trafalgar Square is the National Gallery and the National Portrait Gallery.

Not far away is the British Museum — the biggest museum in London. It contains a priceless collection of ancient manuscripts, coins, sculptures, est., and is famous for its library.

The East End is the poorest district of London. There are a lot of factories, workshops and docks here. The streets are narrow, the buildings are unimpressive. The East End is densely populated by working class families.

PLACES OF INTERESTS IN GREAT BRITAIN

Britain is rich in its historic places which link the present with the past. The oldest part of London is Lud Hill, where the city is originated. About a mile west of it there is Westminster Palace, where the king lived and the Parliament met, and there is also Westminster Abby, the coronation church. Liverpool, the «city of ships», is England’s second greatest port, ranking after London. The most interesting sight in the Liverpool is the docks. They occupy a river frontage of seven miles.

The University of Liverpool, established in 1903, is noted for its School of Tropical Medicine. And in the music world Liverpool is a well-known name, for it’s the home town of «The Beatles».

Stratford-on-Avon lies 93 miles north-west of London. Shakespeare was born here in 1564, and here he died in 1616.

Cambridge and Oxford Universities are famous centers of learning. Stonehenge is a prehistoric monument, presumably built by Druids, members of an order of priests in ancient Britain. Tintagel Castle is King Arthur’s reputed birthplace. Canterbury Cathedral is the seat of the Archbishop of Canterbury, head of the Church of England.

The British Museum is the largest and richest museum in the world. It was founded in 1753 and contains one of the world’s richest collections of antiquities. The Egyptian Galleries contain human and animal mummies. Some parts of Athens’ Parthenon are in the Greek section.

Madam Tussaud’s Museum is an exhibition of hundreds of life-size wax models of famous people of yesterday and today. The collection was started by Madam Tussaud, a French modeller in wax, in the 18th century. Here you can meet Marilyn Monroe, Elton John, Picasso, the Royal Family, the Beatles and many others: writers, movie stars, singers, politicians, sportsmen, etc.

5. Подготовка к экзамену

Подготовка к экзамену включает в себя повторение всех изученных тем курса.

Билет на экзамен включает в себя тест и практико-ориентированное задание.

Наименование оценочного средства	*Характеристика оценочного средства*	*Методика применения оценочного средства*	*Наполнение оценочного средства в КОС*	*Составляющая компетенции, подлежащая оцениванию*
Экзамен:				
Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Тест состоит из 20 вопросов.	КОС - тестовые задания	Оценивание уровня знаний, умений, владений
Практико-ориентированное задание	Задание, в котором обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию	Количество заданий в билете – 1. Предлагаются задания по изученным темам в виде практических ситуаций.	КОС- Комплект заданий	Оценивание уровня знаний, умений и навыков

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу _____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по дисциплине

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Направление подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

Направленность (профиль)
«Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности»

форма обучения: **очная, заочная**

Авторы: Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Безопасности горного производства	Горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой	Председатель
(подпись)	*(подпись)*
Елохин В.А.	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 20.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА.....4
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ 5
ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ 5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ.....5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ.....5
ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ 5
УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ 5
СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ……,..... 5
НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА.....5
ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА.....6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ…….……,,,,,..... 7
ЗАКЛЮЧЕНИЕ…….,,..... 11
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……,, 12

ВВЕДЕНИЕ

Современный человек живет в мире различного рода опасностей, т.е. явлений, процессов, объектов, постоянно угрожающих его здоровью и самой жизни. Не проходит и дня, чтобы газеты, радио и телевидение не принесли тревожные сообщения об очередной аварии, катастрофе, стихийном бедствии, социальном конфликте или криминальном происшествии, повлекших за собой гибель людей и громадный материальный ущерб.

По мнению специалистов, одной из причин создавшейся ситуации является недостаточный уровень образования – обучения и воспитания – человека в области обеспечения безопасной деятельности. Только постоянное формирование в людях разумного отношения к опасностям, пропаганда обязательности выполнения требований безопасности может гарантировать им нормальные условия жизни и деятельности.

В курсе БЖД излагаются теория и практика защиты человека от опасных и вредных факторов природного и антропогенного происхождения в сфере деятельности.

Данный курс предназначен для формирования у будущих специалистов сознательного и ответственного отношения к вопросам безопасности, для привития им теоретических знаний и практических навыков, необходимых для создания безопасных и безвредных условий деятельности в системе «человек – среда», проектирования новой безопасной техники и безопасных технологий, прогнозирования и принятия грамотных решений в условиях нормальных и чрезвычайных ситуаций.

В процессе изучения курса БЖД студенту предстоит решить следующие задачи: усвоить теоретические основы БЖД; ознакомиться с естественной системой защиты человека от опасностей; изучить систему искусственной защиты в условиях нормальных (штатных) и чрезвычайных (экстремальных) ситуаций; ознакомиться с проблемами заболеваемости и травматизма на производстве; изучить вопросы управления безопасностью деятельности.

Успешное изучение курса студентами возможно при наличии соответствующей учебной литературы. Предлагаемое вниманию студентов и преподавателей учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой курса БЖД для студентов всех направлений и специальностей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В последующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Безопасность жизнедеятельности». Она содержит названия разделов с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов на зачет. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Для углубленного освоения темы рекомендуется дополнительная литература. При освоении указанных ниже тем рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента.

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебникам освойте каждый структурный элемент темы.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы и упражнения.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Основные понятия и определения. Характеристика форм трудовой деятельности. Опасности среды обитания. Основные положения теории риска. Системный анализ безопасности. Принципы, методы и средства обеспечения безопасности.

ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ

Анатомо-физиологическая характеристика человека. Анализаторы человека. Защитные механизмы организма.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ

Гелиофизические и метеорологические факторы. Производственная пыль. Механические опасности. Опасности при эксплуатации сосудов, работающих под давлением. Механические колебания и волны. Электробезопасность. Электромагнитные излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Химические опасности. Биологические опасности. Психологические опасности. Экологические опасности. Социальные опасности. Санитарно-гигиенические требования к устройству и содержанию предприятий.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

Общая характеристика чрезвычайных ситуаций. Стихийные бедствия. Аварии на особо опасных объектах экономики. Аварии на объектах горной промышленности и подземных геологоразведочных работ. Чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения. Прогнозирование и оценка обстановки при чрезвычайных ситуациях. Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций. Устойчивость функционирования объектов экономики в чрезвычайных ситуациях. Ликвидация последствий чрезвычайных ситуаций. Единая государственная система предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций.

ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Заболеваемость. Травматизм. Методы анализа травматизма.

УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Правовые основы обеспечения безопасности деятельности. Обязанности работодателя по обеспечению безопасных условий труда. Время отдыха. Подготовка работников к безопасному труду. Система управления охраной труда на предприятии. Экономические аспекты охраны труда.

СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ

НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА

• КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные термины теории безопасности деятельности, дайте их определения.
2. Охарактеризуйте основные формы трудовой деятельности.
3. Что понимают под опасностью среды обитания? Как классифицируют опасности?
4. Сформулируйте аксиому о потенциальной опасности деятельности.
5. В чем состоит идентификация (распознавание) опасности?
6. Что такое квантификация опасностей?
7. Назовите методы анализа безопасности деятельности.
8. Приведите примеры расчета производственного риска.
9. В чем заключается концепция приемлемого риска?
10. Что такое управление риском?
11. Охарактеризуйте системный анализ безопасности деятельности.
12. Перечислите принципы, методы и средства обеспечения безопасности.
13. Изложите сущность естественной системы защиты человека от опасностей.
14. Дайте анатомо-физиологическую характеристику человека.
15. Какова роль анализаторов человека в обеспечении безопасности его деятельности?
16. Опишите зрительный, слуховой и обонятельный анализаторы.
17. Опишите вестибулярный, кинестетический и кожный анализаторы.
18. Что понимают под защитными механизмами человеческого организма?
19. Охарактеризуйте действие гелиофизических и метеорологических факторов на человека.
20. Какое действие оказывают высокие и низкие температуры, повышенная и пониженная влажность на организм человека?
21. Как действуют на организм человека вредные газы и пары?
22. В чем заключается вредное действие производственной пыли на организм? Как ведется борьба с пылью?
23. Назовите средства индивидуальной защиты работающих от пыли.
24. Как классифицируют механические опасности?
25. Перечислите методы и средства защиты от механических опасностей.
26. Укажите, как обеспечивается безопасность при эксплуатации сосудов, работающих под давлением.
27. Охарактеризуйте действие инфразвука и ультразвука на организм и меры защиты от них.
28. Объясните действие шума на организм. Перечислите методы и средства коллективной и индивидуальной защиты от шума.

29. Как борются с вибрацией на горных предприятиях?
30. Объясните действие электрического тока на организм человека.
31. Укажите опасности, связанные с применением электрического тока на горных предприятиях.
32. Назовите основные меры безопасности при эксплуатации электроустановок.
33. Перечислите средства индивидуальной защиты от поражения электрическим током.
34. В чем состоит молниезащита зданий и сооружений?
35. Назовите способы защиты работающих от воздействия электрических и электромагнитных полей.
36. Укажите меры защиты от инфракрасного, ультрафиолетового и лазерного излучений.
37. Как влияет освещение на условия труда? Перечислите виды освещения.
38. Укажите средства нормализации освещения производственных помещений, рабочих мест и горных выработок.
39. Охарактеризуйте виды ионизирующих излучений.
40. Назовите общие принципы защиты от ионизирующих излучений.
41. Охарактеризуйте методы и средства защиты от ионизирующих излучений.
42. Перечислите химические опасности (вредные вещества) и укажите меры защиты от них.
43. Назовите биологические опасности и меры защиты от них.
44. Что понимают под психологическими опасностями?
45. Какие естественные факторы воздействуют на биосферу Земли?
46. В чем заключается антропогенное воздействие на природу?
47. Назовите методы и средства обеспечения экологической безопасности на горных предприятиях.
48. Какие санитарно-гигиенические требования предъявляются к устройству и содержанию предприятий?
49. Что такое чрезвычайная ситуация?
50. Перечислите признаки, характеризующие чрезвычайные ситуации.
51. Как классифицируют чрезвычайные ситуации по причинам возникновения?
52. Охарактеризуйте стихийные бедствия. Укажите мероприятия по предупреждению и ликвидации последствий стихийных бедствий.
53. Перечислите виды аварий на особо опасных объектах экономики (народного хозяйства). В чем заключается профилактика возникновения аварий на таких объектах?
54. Какие аварии происходят на объектах горной промышленности? Укажите методы профилактики и ликвидации таких аварий.
55. Охарактеризуйте чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения.

56. Перечислите основные принципы и способы защиты населения от чрезвычайных ситуаций.
57. Какие действия надлежит выполнить населению при стихийных бедствиях и авариях?
58. Укажите действия населения при возникновении угрозы нападения противника.
59. Какие действия должно выполнять население в очагах поражения и после выхода из них?
60. Какие факторы влияют на устойчивость функционирования объектов экономики?
61. Перечислите основные мероприятия по повышению устойчивости функционирования объектов экономики.
62. Назовите принципы организации и проведения аварийно-спасательных и других неотложных работ (АСиДНР) в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени.
63. Какие приемы и способы проведения АСиДНР используются в очагах поражения?
64. Перечислите меры безопасности при проведении АСиДНР.
65. По каким признакам классифицируют травмы и несчастные случаи на производстве?
66. Перечислите причины травматизма.
67. Укажите причины несчастных случаев на шахтах.
68. Опишите порядок расследования и учета несчастных случаев на производстве.
69. В чем заключается профилактика травматизма?
70. Какие методы используются при анализе травматизма?
71. Как расследуются профессиональные заболевания?
72. Кто назначает комиссию по расследованию профессионального заболевания?
73. Каким образом определяется окончательный диагноз острого профессионального заболевания?
74. Назовите меры профилактики профессиональных заболеваний.
75. Назовите меры профилактики производственного травматизма.
76. Изложите правовые основы обеспечения безопасности деятельности.
77. Какие обязанности возложены на администрацию предприятия по обеспечению охраны труда?
78. Перечислите виды подготовки работников к безопасному труду.
79. Что понимают под системой управления охраной труда на предприятиях?
80. Назовите основные нормативные документы, обеспечивающие безопасность деятельности.
81. Какова продолжительность ежедневной работы?
82. Какова профессиональная подготовка работников к безопасному труду?

83. Опишите систему управления охраной труда.
84. Назовите фонды охраны труда.
85. Чем обусловливается эффективность мероприятий по охране труда?
86. Опишите медицинское обслуживание работников.
87. Какие существуют льготы и компенсации за вредные и опасные условия труда?
88. Поясните суть обязательного социального страхования от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний.
89. Назовите обязательные принципы обязательного страхования от несчастных случаев на производстве и профзаболеваний.
90. Кто имеет право на получение страховых выплат в случае смерти застрахованного?
91. Как осуществляются страховые выплаты по социальному страхованию?
92. Как начисляется пособие по временной нетрудоспособности?
93. Каков порядок привлечения к дисциплинарной ответственности?
94. Кто может привлекать к дисциплинарной ответственности.
95. Кто может привлекать к административной ответственности?
96. В каких случаях привлекают к уголовной ответственности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В среде обитания человека постоянно присутствуют естественные, техногенные и антропогенные опасности.

Полностью устранить негативное влияние естественных опасностей человечеству до настоящего времени не удается. Реальные успехи в защите человека от стихийных явлений сводятся к определению наиболее вероятных зон их действия и ликвидации возникающих последствий.

Мир техногенных опасностей вполне познаваем, и у человека есть достаточно способов и средств для защиты.

Антропогенные опасности во многом обусловлены недостаточным вниманием человека к проблеме безопасности, склонностью к риску и пренебрежению опасностью. Часто это связано с ограниченными знаниями человека о мире опасностей и негативных последствиях их проявления. Воздействие антропогенных опасностей может быть сведено к минимуму за счет обучения населения и работающих основам безопасности жизнедеятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Безопасность жизнедеятельности [Текст]: учебное пособие / В.В. Токмаков, Ю.Ф. Килин, А.М. Кузнецов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский государственный горный университет. - 4-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 272 с.

Безопасность жизнедеятельности: учебное пособие / В.А. Подюков, В.В. Токмаков, В.М. Куликов ; под ред. В.В. Токмакова ; Уральский государственный горный уни-верситет. - 3-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург : УГГУ, 2007. - 314 с.

Белов С. В. Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды (техносферная безопасность): учебник. 5-е изд., исправл. и доп. – М.: Изд-во «Юрай», 2015. – 702с.

Безопасность жизнедеятельности: энциклопедический словарь / под ред. проф. Русака О. Н. – СПб.: Инф-изд. агент «Лик», 2003.

Безопасность жизнедеятельности: Учебник для вузов / К. З. Ушаков, Н. О. Каледина, Б. Ф. Кирин, М. А. Сребный / под ред. К. З. Ушакова. – М.: Изд-во МГГУ, 2000. – 430 с.

Воронов Е. Т., Резник Ю. Н., Бондарь И. А. Безопасность жизнедеятельности. Теоретические основы БЖД. Охрана труда: учебное пособие. – Чита: Изд-во ЧитГУ, 2010. – 390 с.

Занько Н. К., Малаян К. Р., Русак О. Н. Безопасность жизнедеятельности: учебник. – М.: Лань, 2012. – 672 с.

Субботин А. И. Управление безопасностью труда: учебное пособие. – М.: Изд-во МГГУ, 2014. – 266 с.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Шулиманов Д.Ф.

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Конспект лекций

Екатеринбур
г 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. ОСНОВЫ ЗДОРОВОГО ОБРАЗА ЖИЗНИ СТУДЕНТОВ 3

Лекция 2. ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА В ОБЩЕКУЛЬТУРНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ..... 18

Лекция 3. САМОКОНТРОЛЬ ЗАНИМАЮЩИХСЯ ФИЗИЧЕСКИМИ УПРАЖНЕНИЯМИ И СПОРТОМ..... 36

Лекция 4. СОЦИАЛЬНО-БИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ 55

Лекция 5. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ ФИЗИЧЕСКИМИ УПРАЖНЕНИЯМИ 85

Лекция 6. ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАКАЛАВРА И СПЕЦИАЛИСТА..... 94

Лекция 7. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА..... 106

Лекция 8. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ. СПОРТИВНАЯ ПОДГОТОВКА 116

Лекция 9. ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УЧЕБНОГО ТРУДА И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ. СРЕДСТВА ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ В РЕГУЛИРОВАНИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ..... 127

Лекция 10. ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ 134

Лекция 11. СПОРТ. ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ВЫБОР ВИДОВ СПОРТА ИЛИ СИСТЕМ ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ 147

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ..... 156

Лекция 1

ОСНОВЫ ЗДОРОВОГО ОБРАЗА ЖИЗНИ СТУДЕНТОВ

1.1. Здоровье человека как ценность, компоненты здоровья

Сегодня существует более 300 вариантов определения понятия «здоровье»: одни характеризуют здоровье как отсутствие болезней, другие — как способность сохранять равновесие между организмом и постоянно меняющейся внешней и внутренней средой, третьи — как гармоничное физическое развитие. В настоящее время широкое распространение получило определение здоровья, данное в уставе Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ).

Здоровье *— динамическое состояние физического, духовного и социального благополучия, обеспечивающее полноценное выполнение человеком трудовых, психических и биологических функций при максимальной продолжительности жизни.*

Принято выделять несколько компонентов здоровья:

соматический — текущее состояние органов и систем органов человеческого организма. Основой соматического здоровья является биологическая программа индивидуального развития человека.

физический — уровень развития и функциональных возможностей органов и систем организма. Основа физического здоровья — это морфологические и функциональные резервы клеток, тканей, органов и систем органов, обеспечивающие приспособление организма к воздействию различных факторов.

психический — состояние психической сферы человека. Основу психического здоровья составляет состояние общего душевного комфорта, обеспечивающее адекватную регуляцию поведения.

сексуальный — комплекс соматических, эмоциональных, интеллектуальных и социальных аспектов сексуального существования человека, позитивно обогащающих личность, повышающих коммуникабельность человека и его способность к любви.

нравственный — комплекс характеристик мотивационной и потребностно-информационной основы жизнедеятельности человека. Основу нравственного компонента здоровья человека определяет система ценностей, установок и мотивов поведения индивида в социальной среде. Этот компонент связан с общечеловеческими истинами добра, любви, красоты и в значительной мере определяется духовностью человека, его знаниями и воспитанием.

Совершенно очевидно, что понятие «здоровье» имеет комплексный характер. Каждый образованный человек должен, если не досконально знать, то хотя бы иметь представление о своем организме, об особенностях строения и функциях различных органов и систем, своих индивидуально-

психологических особенностях, способах и методах коррекции своего состояния, своей физической и умственной работоспособности.

1.2. Факторы, определяющие здоровье

Основными факторами, определяющими здоровье человека, являются: образ жизни, биология и наследственность, внешняя среда и природно-климатические условия, здравоохранение. Исследования, проведенные в 1980 г. в США, показали, что удельный вес факторов, влияющих на здоровье, различен. Так, влияние образа жизни составило 51,2 %, биологии человека и его наследственности — 20,5 %, внешней среды и природно-климатических условий — 19,9 %, здравоохранения — 8,5 % (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Факторы, определяющие здоровье человека

Факторы окружающей среды (климат, погода, экологическая обстановка) влияют на здоровье человека.

Наука, занимающаяся изучением зависимости самочувствия от погоды, разработала своеобразный «календарь» болезней. Так, зимой грипп и простудные заболевания встречаются чаще, чем летом. Воспалением легких чаще болеют в январе; пик язвенных кровотечений приходится на февраль; ревматизм обостряется в апреле. Для зимы и лета характерны кожные заболевания. В магнитоактивные дни обостряются сердечно-сосудистые заболевания, усиливаются нервные расстройства, повышается раздражительность, наблюдается быстрая утомляемость, ухудшается сон.

Экологическая обстановка также влияет на здоровье человека. Организм отвечает различными расстройствами на вредные воздействия физических излучений; нервно-психической неустойчивостью на информационные перегрузки и перенаселенность, чрезмерный шум в городах; аллергическими реакциями на изменение химического состава окружающей среды.

Исследования показали, что у людей с более высоким уровнем физической подготовленности устойчивость организма к влиянию внешней среды значительно выше, чем у лиц с низкой общей физической подготовленностью.

Наследственность и возрастные изменения, происходящие в организме человека по мере его развития во многом определяют качество здоровья. Способности, потребности, интересы, желания, проблемы табакокурения, алкоголизма и наркомании, предрасположенность или непредрасположенность к болезням имеют наследственную компоненту.

Способность организма сопротивляться воздействиям вредных факторов определяется наследственными особенностями адаптивных механизмов и характером их изменений. Здоровье наследственно и социально обусловлено, но оно изменяется в зависимости от меры ответственности за него самого человека. Улучшить здоровье можно, прежде всего, посредством активного поведения, связанного с научно обоснованными рекомендациями здорового образа жизни (ЗОЖ).

Здравоохранение — система государственных и общественных мероприятий по предупреждению заболеваний и лечению заболевших. Существующая система здравоохранения не может снизить рост заболеваемости населения, связанных с неблагоприятными изменениями условий жизни, трудовой деятельности, окружающей среды, так как не имеет реальных социальных и экономических возможностей влиять на причины возникновения болезней. Решение проблемы находится в области совершенствования механизмов саморегуляции, расширения физиологических резервов человека, достижения утерянной гармонии в структуре организма и личности.

Образ жизни характеризуется особенностями повседневной жизни человека, охватывающими его трудовую деятельность, быт, формы использования свободного времени, удовлетворения материальных и духовных потребностей, участие в общественной жизни, нормы и правила поведения. В настоящее время, как уже было отмечено, из суммы всех факторов, влияющих на здоровье человека, 51,2 % приходится на образ жизни человека.

Каждая из социальных групп имеет свои отличия в образе жизни, свои ценности, установки, эталоны поведения и т. д. Этим объясняется реальное многообразие вариантов образа жизни различных людей.

Образ жизни человека включает три категории: уровень жизни, качество жизни и стиль жизни.

Уровень жизни — степень удовлетворения основных материальных и духовных потребностей: возможности потребления тех или иных продовольственных и промышленных товаров, обеспеченность здравоохранением,

жилищными и культурными условиями, т. е. количественный аспект удовлетворения потребностей.

Качество жизни отражает степень удовлетворения содержательных потребностей (мотивации жизни, комфортность труда и быта, качество питания и условия приема пищи, качество одежды, жилья и т. п.), которые проявляются в возможностях самоутверждения, самовыражения, саморазвития и самоуважения.

Стиль жизни — это определенный тип поведения личности или группы людей, фиксирующий устойчиво воспроизводимые черты, манеры, привычки, вкусы, склонности, характеризующие ее относительную самостоятельность и способность построить себя как личность в соответствии с собственными представлениями о полноценной, содержательной в духовном, нравственном и физическом отношении жизни.

Концентрированным выражением взаимосвязи образа жизни и здоровья человека является понятие «здоровый образ жизни».

1.3. Здоровый образ жизни и его составляющие

Студенческий возраст характеризуется интенсивной работой над формированием своей личности. Это время поисков молодыми людьми ответов на разнообразные нравственно-этические, научные, общекультурные, экономические и политические вопросы, которые отражаются в их образе жизни.

Анализ фактических материалов о жизнедеятельности студентов свидетельствует о его неупорядоченности и хаотичной организации. Это отражается в таких важнейших компонентах, как несвоевременный прием пищи, систематическое недосыпание, малое пребывание на свежем воздухе, недостаточная двигательная активность, отсутствие закаливающих процедур, выполнение самостоятельной учебной работы во время, предназначенное для сна, курение и др. Накапливаясь в течение учебного года, негативные последствия такой организации жизнедеятельности увеличивают число заболеваний. А так как эти процессы наблюдаются в течение 5–6 лет обучения, то они оказывают существенное влияние на состояние здоровья студентов.

Здоровье рассматривается в качестве одного из необходимых и важнейших условий активной, творческой и полноценной жизни человека. Природная способность организма к самообновлению и совершенствованию открывает путь к сохранению здоровья на долгие годы при рациональной его эксплуатации, но для этого каждому человеку необходимо постоянно прилагать определенные усилия по организации здорового образа жизни.

Основными составляющими элементами ЗОЖ являются:

разумное чередование труда и отдыха;
рациональное питание;
преодоление вредных привычек;
оптимальная двигательная активность;

соблюдение правил личной гигиены;
закаливание;
психогигиена.

В реализации задачи осуществления ЗОЖ в обществе большие надежды возлагаются на выпускников высшей школы, будущих руководителей различного уровня в сфере бизнеса, на производстве, в научных учреждениях и в учебных заведениях.

Разумное чередование труда и отдыха — важный компонент здорового образа жизни. Ритмичное протекание физиологических процессов — это главное свойство живого организма. Биоритмы отдельных органов и систем взаимодействуют друг с другом и образуют упорядоченную систему ритмических процессов, организовывающих деятельность организма во времени.

Правильно составленный распорядок дня, распределение работы таким образом, чтобы наибольшая нагрузка соответствовала возможностям организма, — одна из важнейших задач сохранения здоровья и трудоспособности.

Синхронность ритмов в организме позволяет человеку легко адаптироваться к изменениям, происходящим в окружающем его мире. Рассогласованность биоритмов приводит к болезненным изменениям в организме. Постоянное нарушение режима «свет-темнота», изменение нормального чередования сна и бодрствования, режима труда и отдыха, питания приводят к снижению трудоспособности, быстрой утомляемости, разбитости, сонливости днем и бессоннице ночью; учащению сердцебиения, потливости — состоянию, близкому к заболеванию.

Для сохранения высокого уровня работоспособности организма необходимо строго выполнять режим каждого дня, установленный по закономерностям биологических ритмов, с учетом биологических часов. При этом рекомендуется учитывать наиболее изученные суточные и недельные биологические ритмы. Так, исследованиями установлено, что высокий подъем работоспособности у человека в течение суток наблюдается с 6 до 12 и с 17 до 20 часов. В эти часы активизируются почти все функции организма. Значительно снижаются психофизиологические функции ночью от 2 до 4 часов и днем от 13 до 16 часов.

Рациональное питание означает соблюдение трех основных принципов: 1) равновесие между поступающей с пищей энергией и энергией, расходуемой человеком во время жизнедеятельности, т. е. *баланс энергии;* 2) удовлетворение потребности организма в определенном *количестве* и *соотношении пищевых веществ* (белков, жиров, углеводов, витаминов, минеральных солей); 3) соблюдение *режима питания* (определенное время приема пищи, определенное ее количество при каждом приеме и др.).

Все продукты состоят из одних и тех же *пищевых веществ (белков, жиров, углеводов, витаминов, минеральных солей, воды),* но различаются их содержанием и особенностями химического состава. Чтобы правильно построить свой пищевой рацион, необходимо иметь представление о значении для

организма тех или иных пищевых веществ.

Основными пищевыми веществами, необходимыми для жизнедеятельности организма, являются белки, жиры, углеводы, минеральные вещества, витамины и вода. Отсутствие или недостаток любого из них приводит к нарушению функций организма.

Белки служат материалом для построения клеток, тканей и органов, образования ферментов и большинства гормонов, входящих в состав соединений, обеспечивающих иммунитет организма к инфекциям. В суточном рационе белки животного происхождения (мясо, рыба, яйца, молочные продукты и др.) должны составлять 60 %, растительного происхождения (хлеб, крупяные изделия, овощи и др.) — 40 %. Белки выполняют и энергетическую функцию: при окислении 1 г белка выделяется 4 ккал. По калорийности они должны составлять 13 % суточной энергоемкости пищевого рациона.

Жиры выполняют пластическую функцию, являясь структурной частью клеток. Они участвуют в обмене витаминов, способствуют их усвоению и одновременно служат источниками некоторых витаминов (А, Д, Е). В суточном рационе жиры животного происхождения должны составлять 60–80 %, растительного — 20–40 %. Жиры обладают большой энергоемкостью — 1 г жира при окислении дает 9 ккал. Они должны обеспечивать 33 % суточной энергоемкости пищевого рациона.

Углеводы входят в состав почти всех клеток и тканей организма, выполняя строительную функцию. Они принимают участие в белковом обмене, способствуя синтезу аминокислот, и еще большее значение углеводы имеют при жировом обмене, ибо «жиры горят в пламени углеводов». В суточном рационе углеводы простые в виде сладостей должны составлять 20–40 %, сложные в виде крахмалов (имеются в составе почти всех продуктов, наибольшее количество содержится в картофеле, крупах и хлебе) — 60–80 %.

Углеводы являются основным источником энергии для организма, и, хотя при окислении 1 г углеводов выделяется только 4 ккал, они должны составлять 54 % энергоемкости суточного пищевого рациона.

Витамины не имеют ни пластического, ни энергетического значения. Это биологически активные вещества, регулирующие обмен веществ и разносторонне влияющие на жизнедеятельность организма. Они синтезируются в организме и проявляют свое биологическое действие в малых дозах — в миллиграммах или тысячных долях миллиграммов при поступлении с пищей самостоятельно или в составе ферментов. Недостаток витаминов приводит к гиповитаминозу, а их полное отсутствие — к авитаминозу, что сопровождается резким нарушением функций организма (рахит, нарушение роста и т. д.)

Минеральные вещества и микроэлементы (кальций, фосфор, калий, натрий, железо, йод) обладают пластическими свойствами, участвуя в построении тканей, особенно костной, регулируют кислотно-щелочное состояние организма, входят в состав ферментных систем, гормонов и витаминов и влияют на их функцию, нормализуют водно-солевой обмен. Физиологическое влия-

ние минеральных веществ распространяется на все системы организма и биохимические процессы, происходящие в них. Среди минеральных веществ выделяют макро- и микроэлементы. Первые содержатся в тканях в больших количествах — десятках и сотнях миллиграммов, вторые — в миллиграммах или тысячных долях.

Вода — это наиболее важная составляющая часть пищевого рациона, ибо все биохимические процессы в клетках организма протекают в водной среде. Вода составляет 66 % человеческого тела. Больше всего воды содержит головной мозг, особенно его серое вещество (кора головного мозга) — 80 %, мышцы — 76 %, костная ткань — 25 %. Суточная потребность человека в воде — 2,5 л, у людей, занимающихся тяжелым физическим трудом и у спортсменов — 3,0 л.

Соблюдение гигиенических правил питания способствует более эффективному перевариванию пищи и снабжению внутренней среды организма питательными веществами, необходимыми для нормального протекания процессов жизнедеятельности.

Рекомендуется выполнять следующие гигиенические правила питания:

прием пищи должен производиться в одно и то же время. Это способствует выработке условного рефлекса, когда к моменту приема пищи начинают обильно выделяться пищеварительные соки, что обеспечивает хорошее пищеварение. При занятиях физическими упражнениями и спортом принимать пищу следует за 2–2,5 ч до тренировки и спустя 30–40 мин после ее окончания;

ужин не должен быть обильным и должен состоять из легко перевариваемых продуктов (молочные и овощные блюда, салаты, запеканки, рыба, яичница, а из напитков — молоко, чай или фруктовые соки). Ужинать нужно не позднее, чем за 2 часа до сна.

Вредные привычки — курение табака, употребление алкогольных напитков и наркотиков — оказывают пагубное влияние на здоровье, значительно снижают умственную и физическую работоспособность, сокращают продолжительность жизни.

Курение — вредная и опасная привычка, которая развивается по принципу условного рефлекса. При курении даже сигарет с фильтром в организм вместе с табачным дымом поступают многие ядовитые продукты. Потребность в табаке не является естественной физиологической потребностью человека, она возникает под влиянием определенных социальных условий жизни. Эту потребность нельзя признать необходимой, разумной или здоровой ни с точки зрения физиологии, ни с точки зрения человеческого разума. Свойства табака и табачного дыма в настоящее время хорошо изучены. Наука убедительно доказала, что курение ни при каких условиях и ни в каких дозах не приносит человеку пользы, а вред от курения огромен.

При сгорании табака в табачном дыме, который вдыхает курящий человек, находится более 300 сильно действующих вредных веществ, обладающих

вредоносным действием на организм курильщика. Среди них: угарный газ (CO), деготь и различные смолы, этилен, изопрен, бензопирен, сероводород, аммиак, формальдегид, синильная кислота, радиоактивный полоний-210, ионы тяжелых металлов (свинца, висмута, ртути, кадмия, кобальта и др.), сильнодействующий яд и наркотик — никотин и другие вещества. Поэтому курение является серьезным фактором возникновения тяжелых заболеваний ЦНС, сердечно-сосудистой и дыхательной системы, органов пищеварения, онкологических заболеваний. Безобидное на первый взгляд занятие — курение табака влечет за собой весьма тяжелые отдаленные последствия. При курении ядовитые вещества, образующиеся при сгорании табака, через легкие попадают в кровь и вместе с кровью — в ткани всех внутренних органов и систем организма, где выполняют свою разрушительную работу.

Исследованиями установлено, что при курении 20 % никотина остается в организме курящего, 25 % разрушается при сгорании табака, 5 % остается в окурке и 50 % уходит в окружающий воздух. Некурящие люди, организм которых не привык к никотину, болезненно реагируют на длительное пребывание в накуренных помещениях. Особенно большой вред воздух, насыщенный табачным дымом, наносит организму детей. Категорически запрещается курить на спортивных сооружениях (стадионах, площадках, в спортивных залах и т. д.), а также в их подсобных помещениях (раздевалках, туалетах, душевых).

Употребление алкогольных напитков также приводит к резким нарушениям в состоянии здоровья и к значительному снижению умственной и физической работоспособности.

Алкоголь — этиловый спирт, являющийся отравляющим веществом для живых организмов. Проникая в ткани различных органов, он очень быстро расстраивает их работу. Мгновенно сгорая (окисляясь), он отнимает у клеток кислород и воду, необходимые для обеспечения процессов жизнедеятельности, чем разрушает клетки и вызывает заболевания различных органов.

У людей, часто употребляющих спиртные напитки даже в малых количествах или редко, но в больших дозах, наблюдаются заболевания печени, центральной нервной и сердечно-сосудистой систем, пищеварительных органов, органов дыхания и других, снижается сопротивляемость организма к простудным и инфекционным заболеваниям; ухудшается память, имеют место «провалы» памяти, особенно кратковременной; снижается способность к логическому мышлению; угасает интеллект. Систематическое употребление алкоголя отрицательно действует и на половую сферу, вызывает различные нарушения в сексуальной жизни.

Употребление спиртных напитков не только разрушает здоровье, но и отрицательно влияет на волевые качества человека, ослабляет умственную деятельность, нередко приводит его к аморальным поступкам. Полный отказ от алкогольных напитков — залог хорошего здоровья, успешной учебы и будущей профессиональной деятельности.

Наркомания — это резко выраженное болезненное влечение

и привыкание человека к наркотическим веществам. Влечение к наркотику развивается довольно быстро. Для возникновения пристрастия может быть достаточно самого непродолжительного времени приема небольших доз наркотического вещества. В малых дозах наркотики вызывают так называемую эйфорию — ложное ощущение веселья, благодушия, приятного успокоения. В больших количествах — состояние выраженного опьянения, оглушенности, наркотический сон и даже острое отравление со смертельным исходом. Некоторые наркотические вещества способствуют появлению иллюзий и галлюцинаций. Процесс привыкания к наркотикам создает такое равновесие в организме, при котором отсутствие привычного поступления наркотического вещества воспринимается организмом как специфический яд. Для наркомании характерна потребность в увеличении количества принимаемого наркотического вещества, так как к прежним дозам организм привыкает, становится устойчивым, и они постепенно перестают оказывать свое действие. В отсутствие наркотика человек испытывает жесточайшие психические и физические муки.

Наркомания ведет к быстрому истощению психических и физических сил человека, к глубокой инвалидности. Употребление наркотиков, даже эпизодическое, оказывает губительное воздействие на организм и может привести к тяжелому заболеванию.

При употреблении наркотиков происходит хроническое отравление организма с глубокими нарушениями умственной и физической деятельности. Резко снижается умственная и физическая работоспособность, слабеет воля, утрачивается чувство долга. Наркоманы быстро теряют здоровье и трудоспособность, деградируют как личности и доходят порой до тяжких преступлений. Чаще всего роковым шагом на пути к наркомании становится однократный прием наркотика из любопытства, желания испытать его воздействие, либо с целью подражания.

Личная гигиена включает в себя: рациональный устойчивый режим, уход за телом, гигиену одежды и обуви. Знание правил личной гигиены необходимо каждому человеку. Для студентов это важно, так как строгое их соблюдение способствует укреплению здоровья, повышению умственной и физической работоспособности.

Гигиена тела содействует нормальному протеканию процессов жизнедеятельности организма, способствует улучшению обмена веществ, кровообращения, пищеварения, дыхания, развитию физических и умственных способностей человека. От состояния кожного покрова зависит здоровье человека, его работоспособность, сопротивляемость различным заболеваниям.

Кожа представляет собой важный орган человеческого тела, выполняющий многие функции: защиту внутренней среды организма, выделение из организма продуктов обмена веществ, теплорегуляцию и др. В коже находится большое количество нервных окончаний, и поэтому она обеспечивает организму постоянную информацию о всех действующих на него раз-

дражителях.

Наша кожа постоянно загрязняется. В течение недели с ее поверхности выделяется 100–300 граммов жировых веществ, 3–5 литров пота, на коже остается 35–70 граммов различных солей, 40–90 граммов отшелушившегося эпителия. При загрязненной коже создаются условия для попадания в организм вредных микробов, через повреждения кожи (царапины, ссадины, потертости, трещины и др.) они проникают внутрь организма и могут вызвать различные заболевания. Загрязненная кожа снижает свою бактерицидную способность. Если на чистой коже все микробы погибают за 20 минут, то на грязной через 30 минут количество микробов уменьшается только на 15 %. Недаром говорят, что инфекционные желудочные заболевания — это болезни грязных рук. Поэтому важно заботиться о чистоте кожи и не реже одного раза в неделю мыться горячей водой с мылом и мочалкой под душем, в ванне или бане.

Одежда предохраняет организм от неблагоприятных воздействий внешней среды, механических повреждений и загрязнений. С гигиенической точки зрения, она должна помогать приспосабливаться к различным условиям внешней среды, способствовать созданию необходимого микроклимата, быть легкой и удобной. Важное значение имеют теплозащитные свойства одежды, а также ее воздухопроницаемость, гигроскопичность и другие качества.

Спортивная одежда должна отвечать требованиям, предъявляемым спецификой занятий и правилами соревнований по различным видам спорта. Она должна быть, по возможности, легкой и не стеснять движений.

С гигиенической точки зрения, обувь должна быть легкой, эластичной и хорошо вентилируемой. Необходимо, чтобы ее теплозащитные и водоупорные свойства соответствовали погодным условиям.

Спортивная обувь должна быть удобной, прочной, хорошо защищать стопу от повреждений и иметь специальные приспособления для занятий тем или иным видом спорта. На тренировках, соревнованиях и во время туристских походов следует пользоваться только хорошо разношенной и прочной обувью. Необходимо, чтобы спортивная обувь и носки были чистыми и сухими, в противном случае могут возникнуть потертости, а при низкой температуре воздуха — отморожения.

Закаливание — важное средство профилактики негативных последствий охлаждения организма или действия высоких температур. Систематическое применение закаливающих процедур снижает число простудных заболеваний в 2–5 раз, а в отдельных случаях почти полностью исключает их.

Закаливание воздухом. Воздух влияет на организм температурой, влажностью и скоростью движения. Дозировка воздушных ванн осуществляется или постепенным снижением температуры воздуха, или увеличением длительности процедуры при одной и той же температуре. Сигналами неблагоприятного воздействия на организм при теплых ваннах являются резкое покраснение кожи и обильное потоотделение, при прохладных и холодных —

появление «гусиной кожи» и озноб. В этих случаях воздушная ванна прекращается. Холодные ванны могут принимать лишь хорошо закаленные люди и только после врачебного обследования.

Закаливание солнцем — солнечные ванны. Каждый вид солнечных лучей оказывает специфическое действие на организм. Инфракрасные лучи оказывают тепловое воздействие, ультрафиолетовые имеют бактерицидные свойства, под их влиянием образуется пигмент меланин, в результате чего кожа приобретает смуглый цвет — загар, предохраняющий организм от избыточной солнечной радиации и ожогов. Ультрафиолетовые лучи необходимы для синтеза в организме витамина Д, без которого нарушается рост и развитие костей, нормальная деятельность нервной и мышечной систем. Ультрафиолетовые лучи в малых дозах возбуждают, а в больших — угнетают ЦНС, могут привести к ожогу. Если после приема солнечных ванн вы бодры и жизнерадостны, у вас хороший аппетит, крепкий, спокойный сон, значит, они пошли вам на пользу. Если вы становитесь раздражительным, вялым, плохо спите, пропал аппетит, — значит, нагрузка была велика и нужно на несколько дней исключить пребывание на солнце, а в дальнейшем сократить продолжительность солнечных ванн.

Закаливание водой — мощное средство, обладающее ярко выраженным охлаждающим эффектом, так как ее теплоемкость и теплопроводность во много раз больше, чем воздуха. Показателем влияния водных закаливающих процедур служит реакция кожи. Если в начале процедуры она на короткое время бледнеет, а затем краснеет, то это говорит о положительном воздействии, следовательно, физиологические механизмы терморегуляции справляются с охлаждением. Если же реакция кожи выражена слабо, побледнение и покраснение отсутствуют, то это означает недостаточность закаливающего воздействия. Надо несколько понизить температуру воды или увеличить длительность процедуры. Резкое побледнение кожи, чувство сильного холода, озноб и дрожь свидетельствуют о переохлаждении. В этом случае надо уменьшить холодовую нагрузку, повысить температуру воды или сократить время процедуры.

К водным процедурам относят обтирание (начальный этап закаливания водой), обливание, душ. В начале закаливания температура воды должна быть около +30–32° С и продолжительность не более минуты. В дальнейшем можно постепенно снижать температуру и увеличивать продолжительность до 2 мин, включая растирание тела. При хорошей степени закаленности можно принимать контрастный душ, чередуя 2–3 раза воду 35–40° С с водой 13–20° С на протяжении 3 мин. Регулярный прием указанных водных процедур вызывает чувство свежести, бодрости, повышенной работоспособности. При купании осуществляется комплексное влияние на организм воздуха, воды и солнечных лучей. Начинать купания можно при температуре воды 18–20° С и 14–15 °С воздуха.

Психогигиена — это наука, занимающаяся укреплением душевного здоровья, его сохранением или восстановлением в случае, если оно не было

серьезно подорвано. Она постоянно находит применение в повседневной жизни, разрабатывает средства и методы воспитания нравственной и психической культуры, а также снятия нервного напряжения, нежелательных признаков в психоэмоциональной сфере и отрицательного воздействия стресса, который возникает под влиянием сильных эмоциональных переживаний.

К числу отрицательных факторов, вызывающих стресс у студентов, можно отнести проблемы в семье, общежитии, обиду, тоску, неустроенность в жизни, подавленный гнев, незаслуженное оскорбление, сильный страх, дефицит времени, резкие перемены в условиях жизни, к которым нельзя быстро приспособиться.

Отрицательное воздействие стресса усиливается, если человек больше сосредоточен на оценке того «Что случилось?» и «Чем это грозит?», чем на вопросе «Что можно сделать?».

Предотвращение срывов при стрессах обеспечивает регулярная, но не чрезмерная физическая нагрузка, обладающая антистрессовым действием, снижающая тревогу и подавленность.

Один из доступных способов регулирования психического состояния — психическая саморегуляция посредством аутогенной тренировки. В основе аутотренинга лежат упражнения в произвольном, волевом длительном и глубоком расслаблении мышц.

Мышечная деятельность связана с эмоциональной сферой. Внутреннее состояние человека, который чем-то огорчен, расстроен, взволнован, выражается в том, что его мышцы напряжены. Расслабление мышц служит внешним показателем положительных эмоций, состояния общего покоя, уравновешенности, удовлетворенности.

Сексуальное поведение — один из аспектов социального поведения человека. Регламентируя наиболее важные аспекты сексуального поведения, культура оставляет место для индивидуальных или ситуативных вариаций, содержание которых может существенно варьироваться.

Либерализация половой морали, частая смена партнеров, в сочетании с низкой сексуальной культурой порождают ряд серьезных последствий — аборты, распространение венерических заболеваний, СПИД, растет число разводов. Для некоторой части молодых людей секс становится развлечением и рассматривается как сфера индивидуального самоутверждения. Чем меньше внешних запретов, тем важнее индивидуальный самоконтроль и выше ответственность за свои решения, тем выше значение морального выбора.

Студенческий возраст — это возраст максимальной активности половых гормонов. «Бомбардировка» ими мозговых эмоциональных зон вызывает бурное проявление эмоций любви, которые требуют соответствующего волевого и этического поведения, заставляют молодых людей быть более активными и целеустремленными. Однако сексуальные эмоции управляемы, и с помощью волевых усилий их можно, если они чрезмерны, переключить на другой вид активности — интеллектуальный, физический, эстетический. Не-

обходимой предпосылкой гармонизации сексуального стиля является здоровый образ жизни, с его двигательной активностью, регулярными физическими нагрузками, отказом от вредных привычек и т. д.

Сексуальная жизнь всегда была тесно связана с состоянием физического и психического здоровья, им во многом определяется продолжительность и интенсивность сексуального возбуждения и физиологических реакций. Сексуальные возможности у лиц с ослабленным здоровьем понижены.

Так, у лиц, злоупотребляющих алкоголем и курением, сексуальная жизнь постепенно нарушается, ее расстройства встречаются в 41–43 % случаев.

Двигательная активность (ДА) — необходимое условие ЗОЖ. Человек рождается с потребностью двигаться. ДА человеку так же необходима, как потребность в дыхании, воде, пище. Способность осуществлять мышечные движения является важнейшим свойством организма человека. Это свойство лежит в основе жизненно необходимых действий, в том числе трудовой деятельности, а также является конечным результатом психических проявлений. Знаменитый русский физиолог И. М. Сеченов писал, что все бесконечное многообразие внешних проявлений мозговой деятельности окончательно сводится к одному лишь явлению — мышечному движению.

За время эволюционного развития функция мышечного движения подчинила себе устройство, функции и всю жизнедеятельность других органов, систем и всего организма, поэтому он очень чутко реагирует как на снижение ДА, так и на тяжелые, непосильные физические нагрузки.

На стене Форума в Элладе было высечено: "Если хочешь быть сильным, бегай; если хочешь быть красивым, бегай; если хочешь быть умным, бегай". Справедливость этого изречения в настоящее время доказана многими научными исследованиями. Они раскрывают значение движения для развития и формирования человека, а также для различных сторон его психики и физиологических процессов, протекающих в организме.

Давно известно, что мышечная деятельность оказывает влияние на внутренние органы человека, причем оно настолько выражено, что позволяет рассматривать физические упражнения как рычаг, воздействующий через мышцы на деятельность всех систем организма. Это дает возможность понять механизм целого ряда нарушений, развивающихся в организме при гиподинамии — ограничении двигательного режима человека.

Жизнь современного человека характеризуется резким снижением ДА. Современному человеку трудно успевать за требованиями, предъявляемыми научно-техническим прогрессом. В условиях научно-технического прогресса, с одной стороны, снижается ДА человека, происходит его физическая растренированность, а с другой — большое нервно-эмоциональное напряжение на современном производстве требует высокой физической подготовленности. Это противоречие приводит к срыву в деятельности организма, к снижению сопротивляемости внешним воздействиям и различным заболеваниям.

В зависимости от целей в жизни и индивидуальных особенностей каж-

дому человеку самостоятельно или с помощью специалистов физической культуры необходимо подобрать систему физических упражнений или вид спорта с целью обеспечения оптимальной ДА.

1.4. Физическое самовоспитание и самосовершенствование — необходимое условие здорового образа жизни

Физическое *самовоспитание* понимается как процесс целенаправленной, сознательной, планомерной работы над собой и ориентированный на *формирование физической культуры личности*. Он включает совокупность приемов и видов деятельности, определяющих и регулирующих эмоционально окрашенную, действенную позицию личности в отношении своего здоровья, психофизического состояния, физического совершенствования и образования.

Физическое воспитание и образование не дадут долговременных положительных результатов, если они не активизируют стремление студента к самовоспитанию и самосовершенствованию. Самовоспитание интенсифицирует процесс физического воспитания, закрепляет, расширяет и совершенствует практические умения и навыки, приобретаемые в физическом воспитании.

Для самовоспитания нужна воля, хотя она сама формируется и закрепляется в работе, преодолении трудностей, стоящих на пути к цели. Оно может быть сопряжено с другими видами самовоспитания — нравственным, интеллектуальным, трудовым, эстетическим и др.

Основными мотивами физического самовоспитания выступают: требования социальной жизни и культуры; притязание на признание в коллективе; соревнование, осознание несоответствия собственных сил требованиям социально-профессиональной деятельности. В качестве мотивов могут выступать критика и самокритика, помогающие осознать собственные недостатки.

Процесс физического самовоспитания включает три основных этапа.

I этап связан с *самопознанием* собственной личности, выделением ее положительных психических и физических качеств, а также негативных проявлений, которые необходимо преодолеть. Эффект самопознания обусловлен требовательностью студента к себе. К методам самопознания относятся самонаблюдение, самоанализ и самооценка. Самонаблюдение — универсальный метод самопознания, глубина и адекватность которого зависят от его целенаправленности и умения субъекта видеть, систематически наблюдать на основе выделенных критериев за качествами или свойствами личности. Самоанализ требует рассмотрения совершенного действия, поступка, причин, вызвавших это, помогает выяснить истинную причину поступка и определить способ преодоления нежелательного поведения в следующий раз. Самооценка тесно связана с уровнем притязаний, т. е. степенью трудности достижения целей, которые студент ставит перед собой. Расхождение между притязаниями и реальными возможностями ведет к тому, что студент начинает неправильно се-

бя оценивать, вследствие чего его поведение становится неадекватным. Самооценка зависит от ее качества (адекватная, завышенная, заниженная). Если она занижена, то способствует развитию неуверенности в собственных возможностях, ограничивает жизненные перспективы. Ее адекватность в значительной мере определяется наличием четких критериев поведения, действий, развития физических качеств, состояния организма и др. Первый этап завершается решением работать над собой.

На *II этапе*, исходя из самохарактеристики, определяется цель и *программа самовоспитания*, а на их основе составляется *личный план*.

Общая программа должна учитывать условия жизни, особенности самой личности, ее потребности. На основе программы формируется личный план физического самовоспитания, в котором также определены задачи (например, воспитание выносливости), используемые средства и методы (например, бег, пешие походы, прогулки на велосипеде и т. д.), их содержание (например, бег в чередовании с ходьбой 30 минут, езда на велосипеде 1 час) и дни проведения тренировочных занятий (например, 3 раза в неделю).

III этап физического самовоспитания связан непосредственно с его *практическим осуществлением*. Он базируется на использовании способов воздействия на самого себя с целью самоизменения. Методы самовоздействия, направленные на совершенствование личности, именуют методами самоуправления. К ним относятся самоприказ, самовнушение, самоубеждение, самоупражнение, самокритика, самоободрение, самообязательство, самоконтроль, самоотчет.

Примерная форма ведения дневника самоконтроля приводится в гл. 8. Систематическое заполнение дневника самоконтроля является своеобразной формой самоотчета о проделанном за день; позволяет анализировать и своевременно корректировать реализацию программы здорового образа жизни

Лекция 2
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА В ОБЩЕКУЛЬТУРНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ

2.1. Цель и задачи физического воспитания

Физическое воспитание является неотъемлемой составной частью обучения и профессиональной подготовки студентов. Оно направлено на укрепление здоровья, улучшение физической и профессионально-прикладной подготовленности студентов.

Физическое воспитание осуществляется комплексно в тесной взаимосвязи учебных занятий, занятий в спортивных секциях, оздоровительных группах, клубах по видам спорта, а также спортивно-массовых мероприятий во внеучебное время и самостоятельных занятий студентов.

Важнейшее значение имеет теоретический раздел учебной программы, в котором предусмотрено освоение студентами знаний по использованию средств физического воспитания для сохранения и укрепления здоровья, поддержания на высоком уровне умственной работоспособности, профилактики заболеваний, приобретения навыков самоконтроля в процессе занятий физическими упражнениями.

Цель физического воспитания студентов — *формирование физической культуры личности*.

Для достижения поставленной цели предусматривается решение следующих воспитательных, образовательных, развивающих и оздоровительных задач:

формирование осознанного понимания социальной роли физической культуры в развитии личности и подготовке ее к профессиональной деятельности;

овладение целостной системой знаний научно-биологических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;

формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, здоровому образу жизни, физического самосовершенствования и самовоспитания, потребности в регулярных занятиях физическими упражнениями и спортом;

овладение системой практических умений и навыков, обеспечивающих сохранение и укрепление здоровья, психическое благополучие;

развитие и совершенствование психофизических способностей, качеств и свойств личности, самоопределение в физической культуре;

обеспечение общей и профессионально-прикладной физической подготовленности, определяющей физическую готовность студента к будущей профессии;

приобретение опыта творческого использования физкультурно-спортивной деятельности в быту, семье и на производстве для достижения жизненных и профессиональных целей.

2.2. Основные понятия, термины физической культуры

Изучение любой дисциплины, как правило, начинается с освоения ее понятийного аппарата, т. е. со специфических профессиональных терминов и понятий.

Понятия — это основная форма человеческого мышления, устанавливающая однозначное толкование того или иного термина, выражая при этом наиболее существенные стороны, свойства или признаки определенного объекта (явления).

Физическая культура — это часть общей культуры общества, направленная на укрепление и повышение уровня здоровья, всестороннее развитие физических способностей и использование их в общественной практике и повседневной жизни.

Физическое воспитание — это педагогический процесс, вид воспитания, специфическим содержанием которого являются обучение движениям, воспитание физических качеств, овладение специальными знаниями, формирование осознанной потребности в занятиях физическими упражнениями.

Физическое развитие — процесс изменения и совершенствования естественных морфологических и функциональных свойств организма человека (длина, масса тела, окружность грудной клетки, жизненная емкость легких и др.) в течение его жизни. Физическое развитие управляемо. С помощью физических упражнений, различных видов спорта, рационального питания, режима труда и отдыха можно изменять в необходимом направлении различные показатели физического развития. В основе управления физическим развитием лежит биологический закон упражняемости и закон единства форм и функций организма. Кроме того, физическое развитие в некоторой мере обусловлено и законами наследственности, которые необходимо учитывать как факторы, благоприятствующие или, наоборот, препятствующие физическому совершенствованию человека.

Понятие **«физическое совершенство»** обобщает представление об оптимальной мере гармонического физического развития во всесторонней физической подготовленности человека. Причем подразумевается, что эта мера оптимально соответствует требованиям трудовой, спортивной и других сфер жизнедеятельности, выражает достаточно высокую степень развития индивидуальной физической одаренности и отвечает закономерностям долголетнего сохранения крепкого здоровья.

Тренировка (англ. training — упражнение) — в узком понимании — повторное выполнение физического упражнения с целью достижения наиболее высокого результата; в широком — педагогический процесс, включаю-

щий обучение спортсменов спортивной технике и тактике, развитие физических способностей.

Тренированность — степень функционального приспособления организма к предъявляемым тренировочным нагрузкам, формирующаяся в результате систематических занятий физическими упражнениями.

Физические упражнения — это движения или действия, используемые для развития физических способностей (качеств), органов и систем, для формирования и совершенствования двигательных навыков.

Физическая рекреация (от лат. recreatio) — это процесс использования физических упражнений, а также видов спорта в упрощенных формах, для активного отдыха, получения удовольствия от этого процесса, развлечения, переключения с одного вида деятельности на другой, отвлечение от обычных видов трудовой, бытовой, спортивной, военной деятельности.

Двигательная реабилитация — это целенаправленный процесс использования физических упражнений для восстановления или компенсации частично или временно утраченных двигательных способностей, лечения травм и их последствий.

2.3. Виды физической культуры

Любое сложное общественное явление и каждая область человеческой деятельности имеет исторически сложившуюся форму организации (компонентов, видов) и строение (связи, отношения между ними). В структуру культуры общества в качестве одного из важных его видов входит физическая культура, которая, в свою очередь, имеет собственную структуру. С определенной условностью физическую культуру можно подразделить на ряд больших разделов, которые по своим особенностям соответствуют различным направлениям и сферам ее использования в обществе. Каждый раздел включает виды и разновидности, например, базовая физическая культура — школьная, вузовская и т. д.; фоновая физическая культура — рекреативная и реабилитационная.

Базовая (образовательная) физическая культура — фундаментальная часть физической культуры, которая включена в систему образования и воспитания (физическая культура в детском саду, школьная физическая культура). Базовая — потому, что она направлена на приобретение основного фонда жизненно важных двигательных умений и навыков («школы движений») и физических качеств. Базовая физическая культура одного звена системы образования может быть «основой» физической культуры следующего звена (детский сад — школа, школа — вуз и т. п.).

Спорт — это вид физической культуры, соревновательная деятельность и подготовка к ней, основанные на использовании физических упражнений в целях достижения наивысших спортивных результатов.

Туризм — вид физической культуры. Активные виды туризма — пеший, горный, водный, вело- и др. — носят не только оздоровительный, но и профессионально-прикладной характер. В то же время существуют виды туризма (экскурсии, круизы, турне и др.), которые в большей мере решают задачи познавательного характера и в меньшей степени связаны с физическими упражнениями и нагрузками оздоровительного характера.

Профессионально-прикладная физическая культура (ППФК) — планомерно организованный процесс специально направленного использования физической культуры для формирования двигательных умений и навыков, способствующих освоению профессии. В свою очередь, основу ППФК составляет профессионально-прикладная физическая подготовка (например, ППФП геодезиста, ППФП конструктора, ППФП инженера-программиста). В этот же вид физической культуры входит и физическая культура на производстве (вводная гимнастика, физкультурные паузы, физкультминутки, послерабочие реабилитационные упражнения и т. п.).

Оздоровительно-реабилитационная физическая культура — процесс специально направленного использования физических упражнений в качестве средств лечения и восстановления функций организма, нарушенных или утраченных вследствие заболеваний, травм и др. причин. Распространенные её формы — *лечебная* физическая культура (ЛФК), *адаптивная* физическая культура (АФК). ЛФК использует широкий комплекс средств и методов (лечебная гимнастика, дозированная ходьба, бег и др. упражнения), специализированных в зависимости от характера заболеваний. АФК направлена на максимально возможное развитие жизнеспособности человека, имеющего устойчивые отклонения в состоянии здоровья (в том числе, инвалиды).

Спортивно-реабилитационная физическая культура направлена на восстановление функциональных и приспособительных возможностей организма после длительных периодов напряженных тренировочных и соревновательных нагрузок, особенно при перетренировке и ликвидации последствий спортивных травм.

К **«фоновым»** видам физической культуры относятся гигиеническая физическая культура и рекреативная. *Гигиеническая* физическая культура — это различные формы физической культуры, включенные в рамки повседневного быта (утренняя гимнастика, прогулки, другие физические упражнения в режиме дня, не связанные со значительными нагрузками). *Рекреативная* физическая культура — активный туризм, походы выходного дня, физкультурно-спортивные развлечения. Фоновая физическая культура оказывает оперативное влияние на текущее функциональное состояние организма, нормализуя его и способствуя созданию благоприятного функционального «фона» жизнедеятельности.

2.4. Социальная роль, функции физической культуры и спорта

Физическая культура — вид культуры общества и человека. Это деятельность и ее результаты по формированию физической готовности к жизни; с одной стороны, специфический процесс, с другой — результат человеческой деятельности, а также средство и способ физического совершенствования людей. По отношению к культуре человек выступает в трех ипостасях: он ее осваивает (потребляет), является носителем культуры и создает новые культурные ценности. Освоение, «потребление» физической культуры проявляется в результатах этой деятельности — в овладении знаниями, развитии физических качеств и двигательных способностей, «владельцем» которых он и является.

Физическая культура, решая проблему воспроизводства физических способностей человека, является важной частью культуры общества в целом. С одной стороны, от духовной культуры общества она получает и перерабатывает идейно-теоретическую и научно-философскую информацию. С другой — она сама обогащает культуру, науку, искусство, литературу специальными ценностями в виде теории, научных знаний, методик физического развития и спортивной тренировки.

Деятельность в сфере физической культуры имеет как материальные, так и духовные ценности.

Материальными ценностями являются результаты воздействия физической культуры на биологическую сторону человека — физические качества, двигательные возможности. К материальным ценностям физической культуры относятся также спортивные сооружения, спортивные базы учебных заведений, спортивно-медицинские учреждения, учебные заведения, готовящие кадры физической культуры и спорта, научно-исследовательские институты. К материальным ценностям непосредственно относятся здания, лаборатории, аппаратура и пр.

К *духовным* ценностям физической культуры относятся произведения искусства, посвященные физической культуре и спорту — живопись, скульптура, музыка, кино; система управления физкультурной деятельностью в государстве; наука о физическом воспитании. В целом духовные ценности воплощаются в результатах научной, теоретической, методической деятельности.

Поэтому физическая культура — это сложное социальное явление, которое не ограничено решением одних только задач физического развития, а выполняет и другие социальные функции в области политики, морали, этики и эстетики.

Физическая культура стимулирует развитие духовной и материальной деятельности, поскольку создает общественные потребности и побуждает к поискам, открытиям в области науки, новым методикам, новым техническим средствам. Она увеличивает потребности общества в строительстве материально-технических сооружений, созданию приборов, конструированию

и совершенствованию инвентаря и оборудования. Тем самым, она способствует созданию новых материальных и духовных ценностей.

Физическая культура обогащает культуру общества уникальной информацией о влиянии на человека предельных физических и психических нагрузок (в спорте, космосе), об особенностях адаптации к ним, о биологических резервах организма. Эта информация может использоваться и используется в смежных науках — физиологии, биохимии и т. д.

Она способствует возникновению и развитию новых направлений в теории и практике строительства (безопорные перекрытия стадионов), технологий (необходимость изготовления снарядов, инвентаря, оборудования из искусственных материалов, отвечающих требованиям мирового спорта), создании искусственных покрытий (лыжных трасс, трамплинов, ледяных катков).

В социальной жизни, в системе образования, воспитания, в сфере организации труда, повседневного быта, здорового отдыха, физическая культура проявляет свои воспитательные, образовательные, оздоровительные, экономические и общекультурные функции, способствует возникновению такого социального течения, как физкультурное движение, т. е. совместной деятельности людей по использованию, распространению и приумножению ценностей физической культуры.

Физическая культура призвана выполнять ряд специфических функций:

образовательная — получение знаний, необходимых для понимания природных и социальных процессов функционирования физической культуры общества и личности, способность их творческого использования для личного и профессионального развития;

прикладная — повышение специфической физической подготовленности и работоспособности для трудовой деятельности и воинской службы средствами профессионально-прикладной физической культуры;

спортивная — достижение максимальных результатов в избранном виде спорта;

рекреативная — организация содержательного досуга;

оздоровительно-реабилитационная — предупреждение утомления и восстановление временно утраченных функциональных возможностей организма.

Приведенные функции физической культуры могут удовлетворить запросы и потребности в физкультурной деятельности любого человека.

В современных системах физического воспитания все более видное место занимает ***спорт***. Это объясняется особой действенностью спорта как средства и метода физического воспитания, его популярностью, широчайшим развитием в последние десятилетия международных спортивных связей, неуклонно возрастающей общекультурной и престижной значимостью спорта.

Несмотря на то, что спорт без соревновательной деятельности не существует, его функции не исчерпываются достижениями чисто состязательных целей. Спорт представляет собой эффективное средство для совершенствова-

ния человека, преобразования его духовной и физической природы в соответствии с запросами общества, является действенным фактором воспитания и самовоспитания.

Социальная ценность спорта заключается и в том, что он является средством этического, эстетического, нравственного воспитания личности.

Достигаемый в процессе занятий спортом повышенный уровень функциональных возможностей организма и создаваемый одновременно фонд полезных умений и навыков могут в значительной мере предопределить ускоренное усвоение спортсменом профессионально-трудовой, военной и иной социально нужной деятельности.

Велико значение спорта как своего рода эталона оценки человеческих возможностей. «Спортивный эталон» предполагает использование спортивной деятельности в качестве модели для изучения максимальных возможностей человеческого организма при физических и психических напряжениях в экстремальных условиях и обладает широкими возможностями для развития познавательных способностей человека.

Спорт интересен как эмоционально насыщенное зрелище. Зрелищная сущность спорта незаурядна. Она способствует привитию интереса к занятиям физической культурой и спортом, внедрению их в образ жизни. Современные технические средства коммуникаций способствовали тому, что аудитория спортивных зрелищ, как никогда прежде расширилась, а это увеличило неординарное влияние спорта на эмоциональный мир человечества.

При характеристике социальной роли спорта важно иметь в виду его немалое экономическое значение. Материальные вложения общества в развитие спорта многократно окупаются, прежде всего, повышением общего уровня работоспособности, укреплением здоровья, увеличением продолжительности жизни человека. Экономически значимы и финансовые доходы, получаемые от спортивных зрелищ, эксплуатации спортивных сооружений, продажи спортивного инвентаря, оборудования, атрибутики, издательской и научной деятельности.

Спорт считают одним из средств социализации личности. Непосредственно в процессе спортивной деятельности возникают разнообразные специфические отношения соперничества и содружества отдельных спортсменов, между командами, организаторами, спортивными арбитрами и т. д., которые так или иначе включены в систему социальных отношений, выходящих за рамки спорта. Совокупность всех этих отношений составляет основу формирующего влияния спорта на личность, становление социального опыта.

2.5. Физическая культура личности студента

Физическая культура по праву является одной из составляющих культуры человека вообще. Одно из определений понятия «культура» — степень раскрытия потенциальных возможностей личности в различных

областях ее деятельности. Индивидуальный уровень общей культуры человека можно охарактеризовать его поведением, поступками и действиями на текущий момент времени. Насколько раскрыты созидательные возможности человека, мы судим по его духовным ценностям, по его действиям в социальной среде как носителя существующих и создателя новых культурных ценностей для самосовершенствования и развития культуры будущих поколений. Логично, что по ходу жизни уровень культуры личности должен постоянно повышаться, так как человек приобретает новые знания, жизненный опыт, приобщается к общечеловеческим духовным ценностям. Все это происходит в процессе жизнедеятельности человека.

Подобным образом, то есть процессом воздействия на человека, можно повысить и уровень его физической культуры. Такой процесс в сфере физической культуры имеет два направления — физкультурное образование и физическое воспитание. Целью физкультурного образования является усвоение теоретических основ дисциплины, формирование устойчивой мотивации к здоровому и продуктивному стилю жизни, а также потребности в физическом самосовершенствовании. Цель второго направления — сосредоточить все внутренние ресурсы организма на достижении поставленной цели. Значит, в его основе должна быть положена целесообразная двигательная деятельность в форме физических упражнений, позволяющих эффективно формировать необходимые умения и навыки, физические способности, оптимизировать состояние здоровья, повышать работоспособность. Сделать это можно только с помощью физического воспитания — педагогического процесса, направленного на эффективное решение этих задач.

Оба направления очень важны для формирования физической культуры человека, и отсутствие какого-либо из них негативно влияет на гармоничное развитие личности. Как бы хорошо ни был физкультурно образован человек, как бы много он ни знал о пользе физических упражнений для организма, как бы эмоционально он ни переживал, наблюдая спортивные состязания как зритель, если его жизнь никак не связана с целенаправленной двигательной деятельностью для поддержания и укрепления собственного здоровья, мы не можем характеризовать его как человека физической культуры. С другой стороны, достаточно традиционный путь освоения ценностей физической культуры с явным приоритетом телесного совершенствования и выполнения определенных зачетных нормативов — это лишь базис для достижения конечной цели. Эффективное воспитание физических качеств и двигательных способностей не может быть обособленным и независимым процессом. Оно непременно должно быть связано с другими сторонами воспитания человека — познавательной, нравственной, эстетической, трудовой.

Начальным этапом становления физической культуры личности является формирование *ценностно-смыслового* отношения человека к своей физи-

ческой форме. Сюда входит знание студентом своего физического развития и здоровья, умение оценивать свои физические способности, а также положительный настрой на физкультурно-оздоровительную деятельность.

Следующий этап — *преобразовательный*. Это собственно *познавательная и физкультурно-спортивная* деятельность. Цель педагога по физической культуре — поэтапно, в процессе освоения предмета оказать помощь студентам в своем самопознании и самоопределении в физкультурно-оздоровительной деятельности. Студент должен иметь возможность оценить свое физическое развитие, сравнить его со сверстниками и контролировать свою деятельность в сфере физической культуры в соответствии с требованиями учебной программы дисциплины.

Личный образовательный уровень и позитивный опыт преобразования физического потенциала молодых людей создаст фундамент для перехода на последний — *творческий* — этап *самореализации* студентов и выпускников вузов в сфере физической культуры.

За время обучения в высшем учебном заведении студент должен пройти через все этапы становления физической культуры личности. Безусловно, поступая в вуз, абитуриент уже имеет определенный уровень личной физической культуры, характеризующийся общим физическим состоянием личности, физической подготовленностью, физическим совершенством, знаниями из области физической культуры. Однако контингент поступающих в вузы не однороден по возрасту, социальному статусу, опыту физкультурно-спортивной деятельности. Кроме того, учащимся старших классов сельских школ зачастую не преподают вообще уроки физической культуры. Поэтому роль дисциплины «Физическая культура» в вузе значительно выше, так как здесь она и преподается на более высоком уровне, и воспринимается студентом более осознанно, с пониманием значения результатов физического воспитания и физкультурного образования в дальнейшей жизни человека.

Каким должен быть человек, имеющий достаточно высокий уровень физической культуры? Это, прежде всего, человек свободный, способный к самоопределению в сфере физической культуры. Он может самостоятельно выбирать пути реализации социальной программы физической культуры, движение по которым должно воплощаться в специальных физкультурных знаниях и убеждениях, физических качествах и способностях, а также в выработавшихся на их основе навыках, привычках и потребностях. Лишь в этом случае личность воспринимает образование в сфере физической культуры как составляющую собственного стиля жизни, как фактор самообразования и самосовершенствования и подчиняет образование целям личностного роста. Этому способствуют широкие возможности свободного выбора физкультурной деятельности для студентов.

Стремление к самопознанию психофизических возможностей, пониманию красоты человеческого тела и спортивных движений, а также к понима-

нию автономии своего внутреннего мира ведет к формированию творческой индивидуальности человека высокого уровня физической культуры. Обычно такие люди не довольствуются достигнутыми результатами, а постоянно стремятся к созиданию нового. Причем их творческий настрой не ограничивается лишь физическим самосовершенствованием и охватывает другие сферы жизни — труд, быт, общение, организацию отдыха.

Как правило, результатом подобных усилий становится сформированная потребность в саморазвитии, достаточно большой объем усвоенных знаний, двигательных умений и навыков, развитое аналитическое и интуитивное мышление, способность и стремление к жизнетворчеству.

Молодые люди должны знать, что причины многих человеческих ошибок и трагедий состоят в неумении покорять собственную натуру. Сфера физической культуры объединяет биологическое и социальное начала в человеке, помогает личности стать сильнее. Сильная личность — синтез ума, физического здоровья и воли. Безусловно, качества сильной личности нельзя приобрести в бесшабашном веселье, бесполезных развлечениях или поощрениях собственного эгоизма. Только благодаря осознанию природы повседневных забот и невзгод появляется уверенность в собственных силах и шанс их преодолеть.

Вузовская педагогическая практика показывает, что у студентов, включенных в систематические занятия по физическому воспитанию и проявляющих на этих занятиях достаточно высокую активность, вырабатывается определенный стереотип режима дня, наблюдается развитие социально ориентированных установок и более высокий жизненный тонус. Они в большей степени коммуникабельны, выражают готовность к сотрудничеству, ценят общественное признание, адекватно реагируют на критику в свой адрес. Этой категории студентов в большей мере присущи ответственность, чувство долга, добросовестность, собранность. Они более успешно взаимодействуют в работе, требующей систематического напряжения организма, им легче дается эффективный самоконтроль. Все это указывает на основательное положительное влияние регулярных физических нагрузок на характерологические особенности личности студентов.

Конечно, здесь важна мотивация, которая стимулирует и мобилизует личность на проявление двигательной активности. Какими могут быть мотивы? Это потребность в движениях и физических нагрузках, общение, дружеская солидарность, соперничество, подражание, эмоциональная разрядка, самоутверждение, веяния моды, способ развлечения, активный отдых и т. п. Безусловно, для студентов вузов одним из серьезных мотивов является долженствование — обязанность посещать занятия. Молодые люди должны обязательно находить для себя любые побудительные мотивы для занятий физическими упражнениями и выделять для этого время.

Современный ритм жизни требует от молодых людей все большего напряжения сил. Нервные, умственные и физические перегрузки, связанные с овладением сложной современной техники, стрессы профессионального

и бытового характера ведут к нарушению обмена веществ, избыточному весу, к возникновению сердечно-сосудистых заболеваний. К тому же объем двигательной активности человека в течение дня сведен к минимуму: автоматизация, электроника и робототехника на производстве, автомобили, лифты, стиральные машины в быту обусловили недопустимый дефицит двигательной деятельности человека. Неблагоприятное влияние этих факторов на здоровье человека настолько велико, что внутренние защитные функции самого организма не в состоянии справиться с ними. Человеку нужна более высокая физическая активность и подготовленность. Поэтому чем дальше идет человечество в своем развитии, тем в большей степени здоровье человека будет зависеть от уровня его физической культуры. Кардинально решить задачу повышения объема двигательной деятельности, минуя средства физической культуры, в настоящее время практически невозможно.

Для того чтобы оценить значение физической культуры, молодой человек должен осознать важность ее роли в своей жизни. И чем раньше он это поймет, тем большего сможет добиться и в своей личной жизни, и на профессиональном поприще.

2.6. Программно-нормативные основы учебной дисциплины, организация учебной работы

2.6.1. Учебные занятия как обязательная и основная форма физической культуры

Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования второго поколения предусматривает в цикле общегуманитарных и социально-экономических дисциплин выделение 408 учебных часов на дисциплину «Физическая культура» в обязательном базовом курсе на весь период обучения. Учебные занятия являются основной формой физического воспитания в вузе. Они включаются в учебные планы и расписание занятий по всем специальностям.

Свои образовательные и развивающие функции физическая культура наиболее полно осуществляет в целенаправленном педагогическом процессе физического воспитания (рис. 1.1). Включенное в систему образования и воспитания, начиная с дошкольных учреждений, оно характеризует основу физической подготовленности людей — приобретение фонда жизненно важных двигательных умений и навыков, разностороннее развитие физических способностей.

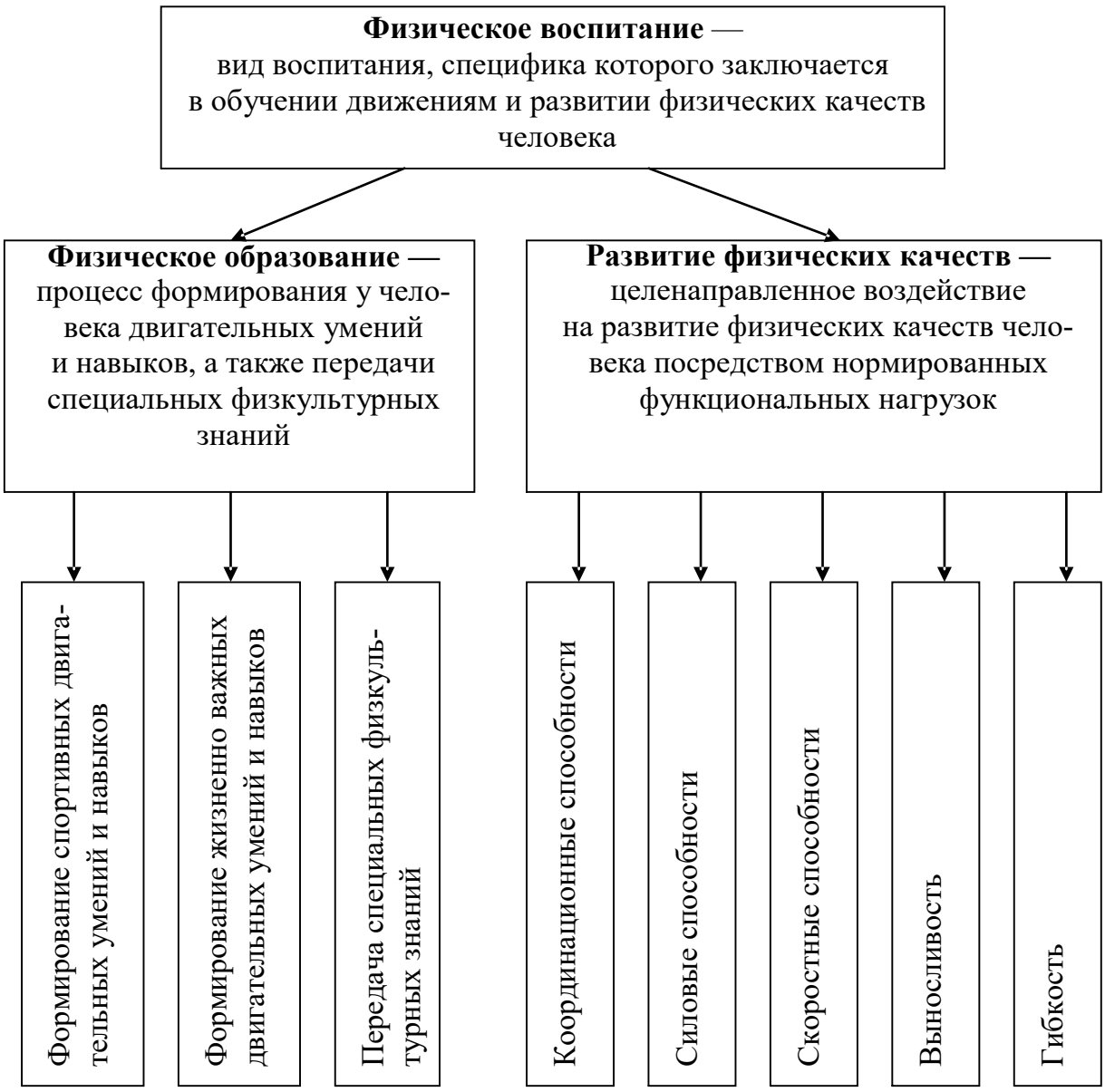


Рис. 1.1. Физическое воспитание как педагогический процесс

Программой по физической культуре предусмотрены следующие разделы: теоретический, практический и контрольный.

Теоретический раздел формирует мировоззренческую систему научно-практических знаний в области физической культуры.

Практический раздел состоит из двух подразделов: *методико-практического*, обеспечивающего овладение методами и способами физкультурно-спортивной деятельности для достижения учебных, профессиональных и жизненных целей личности, и *учебно-тренировочного*, содействующего приобретению опыта творческой практической деятельности, развитию специализации в физической культуре и спорте в целях достижения физического совершенства, повышения уровня функциональных и двигательных способностей, направленного формирования качеств и свойств личности.

Контрольный раздел определяет дифференцированный и объективный учет процесса и результатов учебной деятельности студентов. Контрольные занятия, зачеты обеспечивают оперативную, текущую и итоговую информацию о степени освоения теоретических и методических знаний-умений, состоянии и динамики физического развития, физической и профессионально-прикладной подготовленности каждого студента.

2.6.2. Распределение студентов по учебным отделениям для практических занятий

Для проведения занятий по физическому воспитанию все студенты по результатам медицинского обследования распределяются по учебным отделениям: основное, спортивное и специальное (рис. 1.2). Распределение проводится в начале учебного года с учетом пола, состояния здоровья, физического развития, физической и спортивно-технической подготовленности, интересов студента. На основе этих показателей каждый студент попадает в одно из трех отделений для прохождения обязательного курса физического воспитания. Каждое отделение имеет определенное содержание и целевую направленность занятий.

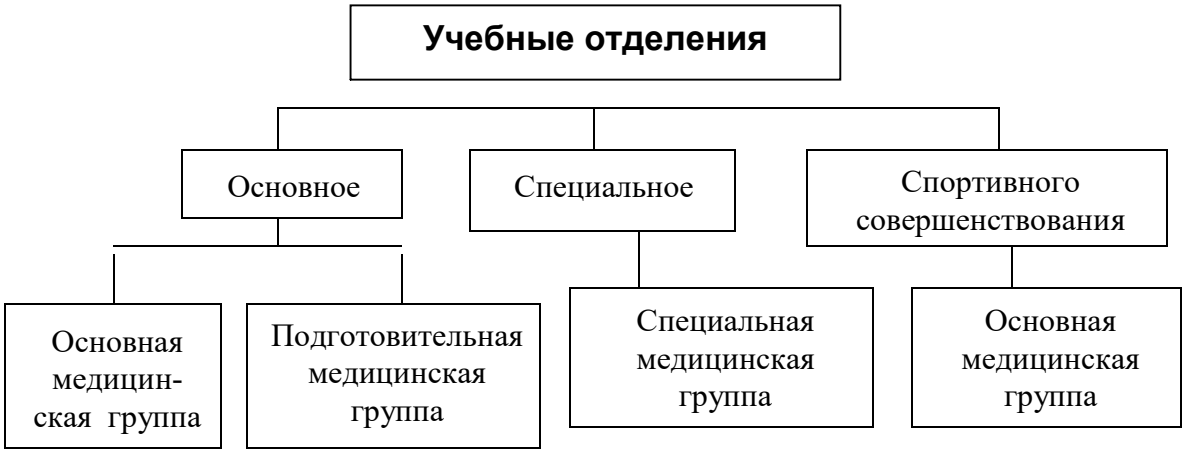


Рис. 1.2. Распределение студентов по учебным отделениям

В *основное учебное отделение* зачисляются студенты, отнесенные по результатам медицинского обследования к основной (не имеющие отклонений в состоянии здоровья) и подготовительной (имеющие незначительные отклонений в состоянии здоровья или слабо физически подготовленные) медицинским группам.

В *специальное учебное отделение* зачисляются студенты, отнесенные по данным медицинского обследования в специальную группу, т. е. имеющие определенные отклонения в состоянии здоровья, и лечебную, куда зачисля-

ются студенты, имеющие тяжелые формы хронических заболеваний и студенты-инвалиды.

В *спортивное отделение* (группы курса спортивного совершенствования по видам спорта) зачисляются студенты основной медицинской группы, показавшие хорошую общую физическую и спортивную подготовленность и желание углубленно заниматься и совершенствовать свое мастерство в одном из видов спорта.

Студентам *основного* учебного отделения предоставлено право выбора специализации по видам спорта на конкурсной основе. Такая форма проведения учебных занятий является наиболее прогрессивной. Студент становится активным участником учебного процесса. Повышается эффективность занятий.

Спортивно ориентированная программа для студентов основного учебного отделения, направленная на углубленное изучение отдельных видов спорта и современных двигательных комплексов (аэробика, атлетизм, футбол, баскетбол, плавание и др.), позволяет получать результаты от вида деятельности в условиях соревнований, контрольных тестов, формировать устойчивую потребность в регулярных занятиях избранным видом физических упражнений. Она оправдана для студентов, которые практически здоровы, но недостаточно подготовлены для занятий в отделении спортивного совершенствования, где ведется подготовка квалифицированных спортсменов. Это совсем не значит, что спортивно ориентированная программа превращает проведение учебных занятий исключительно в спортивную тренировку в избранном виде. Эффект физического воспитания достигается благодаря правильно организованной физической активности, которая включает и общеразвивающие упражнения, и специфические упражнения в избранном виде спорта.

Во многих вузах функционируют спортивные секции по различным видам спорта, в которых занимаются студенты *курса спортивного совершенствования*. Чтобы быть принятым в спортивную секцию недостаточно только личного желания молодых людей. Здесь необходима определенная предварительная подготовленность или одаренность для занятий избранным видом спорта. Ведь, как правило, с этими группами студентов занимаются профессиональные тренеры.

Тренировочные нагрузки для студентов, занимающихся в спортивных секциях, значительно выше и по объему, и по интенсивности. Такие систематические тренировки требуют дополнительных затрат времени. Поэтому общий объем тренировочного времени в неделю у студентов-спортсменов может составлять 10–15 ч в неделю и выше. Студенты курса спортивного совершенствования не освобождаются от теоретических и методико-практических занятий, выполняют обязательные требования и нормативы (тесты), установленные для основного отделения. Отдельные студенты, имеющие высокую спортивную квалификацию, могут быть переведены на индивидуальный график занятий избранным видом спорта со сдачей обязательных зачетных требований и тестов в установленные сроки.

Студенты *специального* отделения в зависимости от характера заболевания делятся на четыре группы: А, Б, В и лечебную.

Группа А комплектуется из студентов с заболеваниями сердечно-сосудистой, дыхательной и центральной нервной системы.

Группа Б формируется из студентов с заболеваниями органов пищеварения, печени, почек, половых органов, эндокринной системы. В эту группу входят и студенты с ослабленным зрением.

Группа В состоит из студентов с нарушением опорно-двигательного аппарата.

Лечебная группа комплектуется из студентов с ярко выраженными, существенными отклонениями в состоянии здоровья, в том числе инвалидов. Занятия с этой группой строятся по программе адаптивной физической культуры, по индивидуальным лечебным комплексам с учетом конкретных заболеваний. Для избирательного лечебно-профилактического воздействия физических упражнений места занятий оснащаются современными спортивными тренажерами. Занятия проводятся при строгом врачебно-педагогическом контроле.

Перевод студентов из одного учебного отделения в другое, осуществляется по их желанию только после успешного окончания семестра или учебного года. Перевод студентов в специальное учебное отделение по медицинскому заключению может проводиться в любое время учебного года.

2.6.3. Форма итогового контроля

Студенты, выполнившие учебную программу, в каждом семестре сдают зачет по физической культуре, который предусматривает выполнение следующих требований:

посещение учебных занятий;

сдача теоретического и методико-практического разделов программы;

сдача обязательных контрольных нормативов (весенний семестр) — бег 100 м, кросс 3 км для юношей и 2 км для девушек, подтягивание для юношей и поднимание-опускание туловища из положения лежа на спине для девушек (табл. 1.1).

Студенты специальной медицинской и лечебной групп сдают специальные контрольные нормативы, разработанные с учетом специфики заболеваний (табл. 1.2). Студенты, освобожденные от практических занятий, сдают теоретический раздел, пишут и защищают рефераты.

Таблица 1.1

Обязательные тесты определения физической подготовленности

Характеристика направленности тестов	Женщины					Мужчины				
	Оценка в очках									
	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
1. Тест на скоростно-силовую подготовленность: бег 100 м, сек.	15,7	16,0	17,0	17,9	18,7	13,2	13,8	14,0	14,3	14,6
2. Тест на силовую подготовленность: – поднимание и опускание туловища (девушки), кол. раз за 1 мин – подтягивание на перекладине (юноши), кол. раз	60	50	40	30	20	15	12	9	7	5
3. Тест на общую выносливость: – бег 2000 м (девушки), мин, сек – бег 3000 м (юноши), мин, сек	10.15	10.50	11.15	11.50	12.15	12.00	12.35	13.10	13.50	14.00

Таблица 1.2

Контрольные упражнения для оценки физической подготовленности студентов специального учебного отделения

Семестр	**Упражнения**	**Требования**
1-6	Подтягивание (юноши) Сгибание и выпрямление рук в упоре (юноши) Отжимание в упоре на коленях (девушки) Прыжки через скакалку Упражнения с гантелями (юноши 3 кг, девушки 2 кг) Пресс: поднимание туловища (сед) из положения лежа на спине, руки за головой, ноги закреплены (девушки) Тест Купера Плавание (100 м без учета времени)	Положительная индивидуальная динамика результатов контрольных упражнений.

Если студент имеет выдающиеся спортивные достижения, он может быть освобожден от практических учебных занятий при официальном ходатайстве тренера и по согласованию со спортивным клубом при условии прохождения медицинского осмотра, сдачи контрольных нормативов и теоретического раздела. Посещение оздоровительных групп не освобождает студента от учебных занятий.

2.7. Организационно-правовые основы физической культуры и спорта

Правовую основу физической культуры и спорта в РФ составляют нормативные акты, законы, указы и постановления, регулирующие ее деятельность. Особое место среди них занимает Конституция РФ (ст. 41), в которой закреплено право российских граждан на занятия физической культурой и спортом.

Основным законодательным документом в сфере физической культуры и спорта является Федеральный закон № 329-ФЗ «О физической культуре и спорте», от 4 декабря 2007 г. Этот документ направлен на то, чтобы обеспечить всестороннее развитие человека, утвердить здоровый образ жизни, сформировать потребность в физическом и нравственном совершенствовании, создать условия для занятий любыми видами физической культуры и спорта, профилактики заболеваний, вредных привычек и правонарушений.

Законом гарантируются права граждан заниматься физической культурой и спортом, объединяться в физкультурно-спортивные организации. Система физической культуры, указывается в законе, должна быть направлена на то, чтобы организовать физическое воспитание населения с учетом интересов каждого человека.

Физическое воспитание в образовательных учебных заведениях должно проходить на основе государственных образовательных программ и внеучебной физкультурно-оздоровительной и спортивной работы. С обучающимися, имеющими отклонения в развитии, занятия должны проводиться в рамках индивидуальной программы реабилитации.

Администрация учреждений, предприятий обязана создавать работникам условия для реализации их права на занятия физической культурой, включая реабилитационные, профессионально-прикладные занятия в режиме рабочего дня, послетрудовое восстановление, профилактические занятия.

Муниципальные органы должны создавать условия для занятий физической культурой по месту жительства и в местах массового отдыха.

Работники физической культуры и спорта обязаны соблюдать нормы и правила безопасности при проведении занятий, не наносить вред здоровью, не проявлять жестокости и насилия.

К профессиональной педагогической деятельности в области физической культуры и спорта допускаются лица, имеющие документы установленного образца о профессиональном образовании.

Лекция 3

САМОКОНТРОЛЬ ЗАНИМАЮЩИХСЯ ФИЗИЧЕСКИМИ УПРАЖНЕНИЯМИ И СПОРТОМ

3.1. Врачебный контроль, понятие, цель, задачи

Эффективность воздействия физических упражнений на организм человека зависит в первую очередь от правильно организованных учебно-тренировочных занятий. Правильно организованные занятия предусматривают выполнение физических упражнений с учетом пола, возраста, состояния здоровья, уровня физического развития и физической подготовленности.

Неправильная организация занятий, пренебрежение методическими принципами, планирование физической нагрузки без учета состояния здоровья и индивидуальных особенностей занимающихся, отсутствие регулярных медицинских наблюдений не дадут желаемых результатов и могут нанести вред здоровью.

Знания основ врачебного, педагогического и самоконтроля помогут сделать объективные выводы о состоянии здоровья, уровне подготовленности и безопасно подобрать тренировочные нагрузки индивидуального двигательного режима.

Врачебный контроль — это комплексное медицинское обследование, проводимое совместно врачом и преподавателем физического воспитания с целью оценки воздействия на организм физических нагрузок, установления уровня функциональной готовности и на основании этого совершенствование учебно-тренировочного процесса.

Врачебное обследование подразделяется на первичное, вторичное и дополнительное.

Первичное обследование проводится, чтобы решить вопрос о допуске к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом.

Медицинское обследование занимающихся. Все занимающиеся физическими упражнениями и спортом по учебному расписанию, в учебных группах или самостоятельно должны проходить медицинские обследования: первичные — перед началом занятий; повторные — один раз в год для занимающихся по государственным учебным программам и в физкультурно-оздоровительных группах.

Программой медицинского обследования предусматривается:

1. Общий и спортивный анамнез (опрос) для получения следующих сведений: анкетные данные, особенности физического развития, перенесенные заболевания и травмы, жилищно-бытовые условия, режим питания, вредные привычки, образ жизни, занятия теми или иными формами физической культуры, спортом, степень двигательной активности, наличие спортивных разрядов, режим тренировки и т. д.

2. Наружный осмотр.

3. Антропометрические измерения.

4. Обследование нервной, сердечно-сосудистой и дыхательной систем, органов брюшной полости и др.

5. Проведение функциональных проб с дозированной физической нагрузкой и исследованием изменения частоты сердечных сокращений, дыхания (частота и объем), давления крови в исходном состоянии, на пике физической нагрузки и в восстановительном периоде после выполнения упражнений и др.

На основе этих показателей обследования каждый студент распределяется в одно из учебных отделений (основное, подготовительное, специальное, лечебное, спортивного совершенствования) для прохождения обязательного курса физического воспитания.

Повторное врачебное обследование назначается, чтобы убедиться, насколько соответствуют объем и интенсивность нагрузки состоянию здоровья, а также для того, чтобы корректировать учебно-тренировочный процесс.

Дополнительные врачебные обследования проводятся для того, чтобы решить вопрос о возможности приступить к учебно-тренировочным занятиям после перенесенных заболеваний и травм.

Контроль со стороны врачей за состоянием студентов, занимающихся избранным видом спорта в группах КСС (курса спортивного совершенствования), значительно строже и чаще (не менее 3–4 раз в год). Студенты, имеющие I спортивный разряд или спортивную квалификацию (КМС, МС, МСМК, ЗМС), обязательно состоят на учете во врачебно-физкультурном диспансере, где спортсмены регулярно подвергаются углубленному медицинскому обследованию с целью контроля за внутренней средой организма, состоянием сердечно-сосудистой системы в покое и ее реакцией на нагрузки разной интенсивности и продолжительности.

Основная цель врачебного контроля в процессе физического воспитания студентов вузов — содействовать максимальному использованию средств физической культуры и спорта для укрепления их здоровья, повышения функциональных возможностей и достижения ими высоких спортивных результатов. Главные задачи врачебного контроля — обеспечение правильности и высокой эффективности всех физкультурных и спортивных мероприятий, широкое использование физической культуры и спорта в интересах всестороннего развития, сохранения и укрепления здоровья студентов, активное влияние на планирование объема и интенсивности тренировочных нагрузок для студентов, занимающихся физическими упражнениями и спортом.

Врачебный контроль за физическим воспитанием студентов высших учебных заведений страны осуществляется врачами, работающими во врачебно-физкультурных кабинетах поликлиник вузов, под организационно-методическим руководством врачебно-физкультурных диспансеров.

3.2. Врачебно-педагогические наблюдения во время занятий

Врачебно-педагогические наблюдения — наблюдения врача совместно с преподавателем за занимающимся в процессе занятий физической культурой.

При проведении врачебно-педагогических наблюдений выясняются условия проведения занятий; их содержание и методика; объем и интенсивность тренировочной нагрузки и соответствие ее подготовленности занимающихся; выполнение студентами гигиенических правил содержания одежды и обуви; ведение студентами дневника самоконтроля; выполнение мер профилактики спортивного травматизма.

Врачебно-педагогические наблюдения проводятся: до занятий, во время их проведения и после окончания. С помощью общепринятых методов определяется реакция организма на выполняемые тренировочные нагрузки. Вместе с этим учитываются внешние признаки утомления занимающихся, проводится опрос об их самочувствии.

Наблюдения, проводимые непосредственно на занятиях, позволяют дать врачебно-физиологическую оценку учебному занятию в целом и реакции организма студентов на нагрузку, что необходимо для совершенствования процесса физического воспитания. Эти наблюдения строятся на данных учета динамики наиболее доступных для исследования индивидуальных признаков и показателей у отдельных занимающихся (подсчет пульса и дыхания, измерение давления крови, динамометрия, характеристика внешних признаков утомления и т. д.), а также на исследовании характера эмоциональной окраски всего занятия, объема и последовательности выполнения физической нагрузки, соблюдении необходимых гигиенических правил и мер по предупреждению спортивного травматизма.

При правильно организованном и проведенном учебно-тренировочном занятии наблюдаются признаки благоприятной реакции организма занимающегося на физическую нагрузку. Частота пульса, дыхания и давление крови постепенно повышаются к основной части занятия, затем, в заключительной части, — снижаются. Частота сердечных сокращений и величина максимального кровяного давления во время выполнения упражнений повышаются, при этом минимальное давление не изменяется или несколько снижается. В состоянии хорошей тренированности показатели пульса и давления крови изменяются параллельно друг другу; наблюдается укороченный восстановительный период, т. е. после окончания мышечной деятельности физиологические показатели быстрее возвращаются к исходному уровню, чем у нетренированных. Жизненная емкость легких и некоторые физиологические показатели остаются неизменными или повышаются в течение всего тренировочного занятия.

Постоянные врачебно-педагогические наблюдения позволяют обнаружить недочеты в организации и методике проведения занятий по физической

культуре, совершенствовать планирование учебно-тренировочного процесса, помогают устранить причины, вызывающие чрезмерно большие нагрузки, переутомление, нарушение правил безопасности и санитарно-гигиенических норм.

3.3. Педагогический контроль

Педагогический контроль – процесс получения педагогической информации о влиянии занятий физическими упражнениями на результативность и работоспособность занимающихся, с целью повышения эффективности учебно-тренировочного процесса. Педагогический контроль учебного процесса по предмету «Физическая культура» осуществляют преподаватели кафедры физического воспитания. Для достижения цели здесь важен и необходим мониторинг – система мероприятий по наблюдению, анализу, оценке и прогнозу состояния здоровья, физического развития и физической подготовленности обучающихся.

У студентов, занимающихся физическими упражнениями, часто возникает вопрос о необходимом и достаточном уровне развития основных физических качеств: силы, ловкости, быстроты, выносливости. Какие показатели следует считать удовлетворительными, хорошими, отличными?

Критерием для такой оценки является основанное на педагогическом подходе тестирование двигательной подготовленности и физического состояния, которое включает измерение и оценку результатов деятельности для характеристики уровня развития двигательных качеств, двигательных навыков и технического совершенства. В сущности, любое упражнение, если заданы четкие условия его выполнения, можно рассматривать как тест. Поэтому разнообразие тестов на первый взгляд кажется неограниченным. Однако, так как упражнение-тест должно отвечать требованиям надежности, валидности, достоверности, объективности и максимальной простоты, перечень двигательных упражнений, способных служить критерием объективной оценки двигательных возможностей, значительно сужен. Кроме того, при тестировании исключено использование сложных и дорогостоящих технических средств и необходимо соблюдение техники безопасности – выполнение тестовых упражнений должно исключать травмы.

Периодическое использование одних и тех же тестов дает возможность педагогу сравнивать динамику физической подготовленности в процессе занятий. Безусловно, результаты тестирования двигательных способностей студентов не должны доминировать при аттестации студентов по предмету, а построение программы учебного процесса не должно сводиться к подготовке к их сдаче.

3.4. Самоконтроль

Самоконтроль является еще одной формой контроля человека за собственным физическим состоянием. Он состоит из простых общедоступных приемов наблюдения. Причем именно самоконтроль может помочь человеку, самостоятельно занимающемуся физическими упражнениями, уберечься от нежелательных отклонений в состоянии здоровья и, в случае наблюдения первых отрицательных симптомов, обратиться к специалистам за консультацией и помощью. Поэтому зачастую для самостоятельно занимающихся физическими упражнениями такая форма контроля физического состояния становится основной.

Наиболее удобная форма фиксации результатов самоконтроля – ведение личного дневника контроля физического состояния. Регулярное ведение дневника позволяет определить эффективность занятий разными тренировочными средствами, оптимально планировать величину и интенсивность нагрузок, режим чередования нагрузок и отдыха. Для этого в дневнике должны быть отражены субъективные и объективные показатели состояния человека, а также объемы и качество выполняемой им физической нагрузки. В дневнике необходимо также отмечать факты нарушения режима и влияние таковых на общую работоспособность.

К субъективным характеристикам можно отнести оценку своего самочувствия, сна, аппетита, настроения. После правильно организованных и методически грамотно выполненных оздоровительных физических нагрузок человек не должен чувствовать головную боль, быть слишком вялым, разбитым, а ощущение усталости должно приносить чувство удовлетворения от выполненной работы. При ощущениях психологического и физического дискомфорта в процессе или после окончания занятия следует обратиться за консультацией к специалистам. Это могут быть и профессиональные тренеры в избранном виде спорта, и спортивные врачи, и участковые терапевты. Как правило, систематические умеренные физические нагрузки дают человеку заряд положительной энергии, сопровождающийся чувством эйфории, настроенности на будущие занятия, а дневной и ночной сон характеризуются быстрым засыпанием и бодрым самочувствием после пробуждения.

Некоторые отклонения в самочувствии и физическом состоянии после тренировок вполне объяснимы и не должны пугать человека, а тем более подвигать его к прекращению занятий. Что касается аппетита, то непосредственно после окончания физической нагрузки чувство голода может быть угнетено благодаря выделению в кровь эндорфинов (гормонов гипофиза) в процессе физической нагрузки, повышенная концентрация которых сохраняется еще некоторое время после ее завершения. Это состояние можно эффективно использовать для уменьшения веса за счет снижения объема употребляемой пищи. Следует отметить, что многие спортсмены, несмотря на большие физические нагрузки, ограничивают свой рацион питания. Не только гимнасты,

фигуристы и представители других сложнокоординационных видов спорта придерживаются строгой диеты – спортсмены циклических видов спорта (лыжные гонки, биатлон, легкая атлетика, лыжное и кроссовое ориентирование и др.) часто ограничивают себя в питании с целью сохранения «гоночного» веса. Безудержное утоление жажды послефизических нагрузок тоже не рекомендуется – куда более рационально употребление жидкости небольшими глотками и постепенно (1–2 стакана).

Незначительные болевые ощущения в мышцах, особенно на первых стадиях занятий, после выполнения новых видов физических упражнений или длительных перерывов вполне естественны и практически неизбежны. Обычно они не являются следствием физических травм и после 7–10 дней регулярных занятий проходят, когда мышцы полностью адаптируются к предлагаемым физическим упражнениям. А вот если появляются боли в суставах, необходимо сразу обратить на это внимание, так как они могут явиться следствием травм или перегрузок опорно-двигательного аппарата.

Объективные показатели – доступные в домашних условиях функциональные показатели сердечно-сосудистой системы (ЧСС, артериальное давление, частота дыхания), возможные антропометрические изменения (вес, объемы разных частей тела), результаты самостоятельного проведения контрольных тестов и испытаний физической подготовленности.

3.5. Методика самоконтроля физического развития

Физическое развитие оценивается с помощью антропометрических измерений. Они дают возможность определять уровень и особенности физического развития, степень его соответствия полу и возрасту, имеющиеся отклонения, а также уровень улучшения физического развития под воздействием занятий физическими упражнениями и различными видами спорта.

Антропометрические измерения следует проводить периодически в одно и то же время суток, по общепринятой методике, с использованием специальных стандартных проверенных инструментов.

При массовых обследованиях и проведении самоконтроля измеряются длина тела (рост) стоя и сидя, вес, окружность грудной клетки, жизненная емкость легких, сила кисти сильнейшей руки, становая сила.

Рост (длина тела). Наибольшая длина тела наблюдается утром. Вечером, а также после интенсивных занятий физическими упражнениями рост может уменьшиться на 2 см и более. После упражнений с отягощениями и штангой длина тела может уменьшиться на 3 см и более из-за уплотнения межпозвоночных дисков. Длина тела уменьшается за счет уплотнений межпозвоночных дисков, утомления мышц туловища, от уплощения сводов стопы.

Вес тела — объективный показатель для контроля за состоянием здоровья. Он изменяется в процессе занятий физическими упражнениями, особенно на начальных этапах, затем стабилизируется.

При определении веса исследуемый должен стоять неподвижно на середине площадки весов. Контроль за весом тела целесообразно проводить утром, натощак. Показатель веса фиксируется с точностью до 50 г.

Есть разные способы определения нормального веса. Чтобы узнать каким должен быть нормальный вес человека, нужно из величины роста, выраженного в сантиметрах, вычесть определенное число:

от 155 до 165 см вычитается 100;

от 166 до 175 см вычитается 105;

от 176 см и выше вычитается 110.

Следует отметить, что этот показатель применим для определения «идеального» веса мужчин нормальной конституции, правильного телосложения. У худощавых, плоскогрудых юношей вес будет меньше расчетного, у широкоплечих, с развитыми поперечными размерами тела, — больше расчетного. Женщинам надо иметь несколько меньший вес, чем расчетный.

Значительные отклонения от «идеального» веса как в сторону уменьшения, так и увеличения свидетельствуют о недостатках в физическом развитии. И в том и в другом случае можно скорректировать свое развитие за счет регулярных занятий физическими упражнениями. При малом весе в основном нужно заниматься упражнениями с отягощениями для увеличения массы мышц, при большом весе — аэробными упражнениями на выносливость (ходьба, бег, велосипед, плавание) для уменьшения содержания жира в теле.

Для более точной оценки веса тела можно пользоваться росто-весовым показателем. Он определяется путем деления веса в граммах на рост в сантиметрах. Для женщин нормальной величиной является 325–375, для мужчин 340–400 г/см.

Окружность грудной клетки измеряется в трех фазах: во время обычного спокойного дыхания (пауза), максимального вдоха и максимального выдоха. Исследуемый разводит руки в стороны. Сантиметровую ленту накладывают так, чтобы сзади она проходила под нижними углами лопаток, спереди у мужчин по нижнему сегменту сосков, а у женщин — над молочной железой, в месте перехода кожи с грудной клетки на железу. После наложения ленты исследуемый опускает руки. При измерении максимального вдоха не следует напрягать мышцы и поднимать плечи, а при максимальном выдохе — сутулиться.

Разница между величинами окружностей при вдохе и выдохе характеризует экскурсию грудной клетки. Она зависит от морфоструктурного развития грудной клетки, ее подвижности, типа дыхания. Средняя величина экскурсии обычно колеблется в пределах 5–7 см.

Кистевая динамометрия — метод определения сгибательной силы кисти. Динамометр берут в руку циферблатом внутрь. Руку вытягивают в сторо-

ну на уровне плеча и максимально сжимают динамометр. Проводятся по два измерения на каждой руке, фиксируется лучший результат. Средние показатели силы правой кисти (если человек правша) у мужчин — 35–50 кг, у женщин — 15–25 кг; средние показатели силы левой кисти обычно на 5–7 кг меньше.

Оценивая результаты динамометрии, следует учитывать как абсолютную величину силы, так и соотнесенную с весом тела. Относительная величина мышечной силы будет более объективным показателем, потому что рост силы в процессе тренировки в значительной мере связан с увеличением веса тела и мышечной массы.

Показатель мышечной силы можно определить на основе силового индекса. Например, сила правой руки (кисти) равна 52 кг, вес тела — 76 кг. Значит, для определения относительной величины силы кисти надо 52 умножить на I00 и разделить на 76. Получается 68,4 %. Для нетренированных молодых мужчин этот показатель составляет 60–70 % от веса тела, для женщин — 45–50 %.

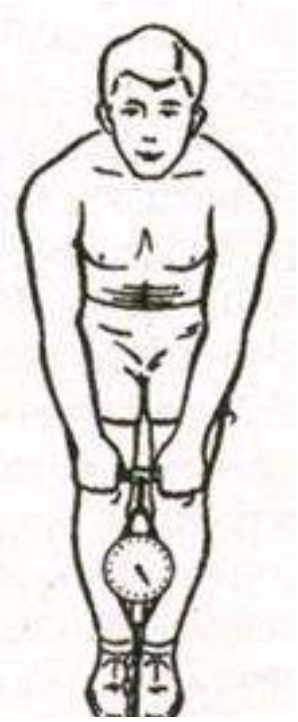


Рис. 2.1. Становая динамометрия

Оценивая мышечную силу при самоконтроле, следует учитывать, что в течение дня показатели силы изменяются. Так, наименьшая величина их бывает утром, наибольшая — к середине дня. К концу дня, в особенности после утомительной тренировки, мышечная сила падает. Поэтому определять силу нужно в одно и то же время, лучше утром перед началом тренировки. Неполное восстановление мышечной силы на другой день после занятия говорит о чрезмерности нагрузки. Снижение ее может наблюдаться также при недомогании, нарушении режима, ухудшении настроения и т. д.

Становая динамометрия — метод определения силы разгибателей туловища (рис. 2.1). Исследуемый становится на площадку со специальной тягой так, чтобы 2/3 каждой подошвы находились на металлической основе. Ноги вместе, выпрямлены, туловище наклонено вперед. Цепь закрепляется за крюк так, чтобы руки находились на уровне колен. Исследуемый, не сгибая ног и рук, должен медленно разогнуться, вытянув тягу. Становая сила взрослых мужчин в среднем равна 120–130 кг, женщин — 55–65 кг.

3.6. Самоконтроль за функциональным состоянием организма

Общепризнанно, что достоверным показателем функционального состояния организма преимущественно является характер регулирования сердечно-сосудистой и дыхательной систем на физические нагрузки. При само-

контроле в процессе занятий физическими упражнениями используются наблюдения за ЧСС, уровнем артериального давления, некоторыми показателями дыхания.

Частота сердечных сокращений — количество сокращений сердца за одну минуту. Это наиболее легко измеряемый показатель работы сердечной мышцы, получить который самостоятельно довольно просто. Самыми распространенными для измерения являются четыре точки на теле человека: на поверхности запястья над лучевой артерией, у виска над височной артерией, на шее над сонной артерией и на груди, непосредственно в области сердца. Для определения ЧСС пальцы руки накладывают на указанные точки так, чтобы степень контакта позволяла пальцам чувствовать пульсацию артерии.

Рис. 2.2. Способы измерения ЧСС

Обычно ЧСС получают, используя правило математического соотношения, подсчитав число пульсаций за несколько секунд. Если необходимо знать ЧСС в покое, можно использовать для подсчета любой временной диапазон (от 10 с до 1 мин). Если же измеряется ЧСС в нагрузке, то чем быстрее зафиксировать пульсации за несколько секунд, тем точнее будет этот показатель. Уже через 30 с после прекращения нагрузки ЧСС начинает быстро восстанавливаться и значительно падает. Поэтому в практике спорта применяют немедленный подсчет количества пульсаций после прекращения нагрузки за 6 с, в крайнем случае, за 10 с, и умножают полученное число соответственно на 10 или на 6. Сравнительно недавно в спортивную практику внедрены пульсомеры — приборы, фиксирующие показатель ЧСС автоматически, без остановки спортсмена.

Частота пульса у людей индивидуальна. В состоянии покоя у здоровых нетренированных людей она находится в пределах 60–80 уд/мин, у спортсменов – 45–55 уд/мин и ниже. ЧСС выше в вертикальном положении тела по сравнению с горизонтальным, к тому же подвержена суточным колебаниям (биоритмам). Во время сна этот показатель снижается на 3–7 ударов, после приема пищи возрастает, в связи с увеличением поступления крови к органам брюшной полости. Повышение температуры окружающего воздуха тоже приводит к повышению ЧСС.

Но при нормальном состоянии организма и хорошем восстановлении после физических нагрузок, утром, в состоянии покоя этот показатель должен быть величиной практически постоянной. Резкое учащение или замедление пульса по сравнению с предыдущими измерениями, как правило, является следствием заболевания или переутомления. Причем важна не только частота сокращений сердца за минуту, но и ритм этих сокращений. Пульс можно считать ритмичным при условии, если число пульсаций за каждые 10 с в течение 1 мин не будет отличаться более чем на единицу. Если же различия составят 2–3 пульсации, то работу сердца следует считать аритмичной. При устойчивых отклонениях в ритме ЧСС следует обратиться к врачу.

Физическая нагрузка, даже небольшая, вызывает учащение пульсаций. Максимальные показатели ЧСС в нагрузке тоже индивидуальны и варьируют в пределах 175–215 уд/мин. Уровень тренированности здесь часто играет определяющую роль. Наивысшие показатели ЧСС в нагрузке имеют высококвалифицированные спортсмены в циклических видах спорта. Регулировать уровень интенсивности физической нагрузки можно по показателю ЧСС, исходя из следующих диапазонов: 100–130 уд/мин – умеренная интенсивность; 130–150 уд/мин – средняя интенсивность; 150–170 уд/мин – интенсивность выше средней; 170–200 уд/мин – высокая или предельная интенсивность.

Для контроля важно, как реагирует пульс на нагрузку и как быстро снижается до нормы после ее прекращения. После прекращения практически любой физической нагрузки частота сердечных сокращений должна быть примерно на уровне исходной (с разницей 2–4 уд/мин) не позднее чем через 10 мин. Если этого не происходит, значит, либо данная нагрузка была чрезмерной, либо работоспособность занимающегося не была восстановлена после предыдущих занятий до начала контрольной нагрузки.

Артериальное давление. Для измерения *артериального давления* пользуются тонометром и фонендоскопом. Тонометр включает: надувную резиновую манжету, ртутный или мембранный манометр. Как правило, артериальное давление измеряется на плече исследуемого, находящегося в сидячем или лежачем положении.

Для того чтобы правильно определить артериальное давление необходимо, чтобы манжета располагалась на уровне сердца (для исключения влияний гидростатического давления). Фонендоскоп накладывают ниже, в области локтевого сгиба. О систолическом и диастолическом артериальном давлении судят по характерным звукам. При нагнетании в манжете давления выше предполагаемого систолического плечевая артерия полностью сдавливается и кровоток в ней прекращается. Затем необходимо постепенно открывать клапан ручной груши, чтобы медленно снижать давление в манжете. Когда систолическое давление преодолевает давление в манжете, кровь проталкивается через сдавленную область артерии с короткими четкими тонами, сопровождающими каждый пульсовый удар. Показание манометра в момент первого тона соответствует систолическому давлению исследуемо-

го. Диастолическое артериальное давление равно давлению в манжете, при котором тоны прекращаются.

Артериальное давление контрольной нагрузки человека зависит от его возраста, генетических факторов, влияния окружающей среды. Согласно статистики, полученной немецкими физиологами, у молодых здоровых людей пик кривой распределения величин систолического давления приходится на 120 мм рт. ст., диастолического — на 80 мм рт. ст. У большинства людей систолическое давление колеблется от 100 до 150 мм рт. ст., диастолическое — от 60 до 90 мм рт. ст.

В процессе физической нагрузки максимальное артериальное давление повышается. У спортсменов оно может достигать 200–250 мм рт. ст. и выше, при этом минимальное артериальное давление снижается до 50 мм рт. ст. и ниже. Восстановление показателей давления после прекращения тренировки в течение нескольких минут указывает на хорошую переносимость организмом данной нагрузки.

Функциональные пробы

Диагностика функционального состояния занимающихся физическими упражнениями осуществляется путем использования различных функциональных проб (тестов). При любой функциональной пробе вначале определяют исходные данные, характеризующие ту или иную систему в состоянии покоя, затем данные этих показателей сразу после воздействия тестируемой нагрузки, и, наконец, — в период восстановления.

Состояние сердечно-сосудистой системы и ее приспособляемость к нагрузке можно оценить с помощью *функциональной пробы с 20 приседаниями* (*проба Мартине*). Подсчитывается частота пульса в покое. Затем выполняется 20 глубоких и равномерных приседаний за 30 секунд (ноги на ширине плеч, приседая вытягивать руки вперед, вставая — опускать), подсчитывается частота пульса за первые 10 секунд. После этого определяется процент учащения пульса от исходного уровня. При учащении пульса менее чем на 50 % состояние сердечно-сосудистой системы оценивается как хорошее, на 50–75 % — удовлетворительное, более чем на 75 % — неудовлетворительное.

Очень важную информацию о степени тренированности сердечно-сосудистой системы дает время восстановления пульса до исходного уровня после приседаний. Для определения этого времени подсчет частоты пульса 10-секундными интервалами после приседаний продолжают до тех пор, пока он не вернется к исходному уровню. Время менее 60 секунд дает оценку «отлично», от 60 до 90 секунд — «хорошо», от 90 до 120 секунд — «удовлетворительно» и более 120 секунд — «плохо».

Ортостатическая проба с использованием показателей ЧСС проводится следующим образом. Перед измерением необходимо спокойно полежать не менее 5–6 мин, затем измерить ЧСС в положении лежа и, встав, через 1 мин – в положении стоя. Нормальным является учащение пульсаций на 10–12 уд/мин, удовлетворительным – до 20 уд/мин, а свыше 20 уд/мин –

неудовлетворительным. В последнем случае организм не справляется с предлагаемой нагрузкой, что сопровождается остаточным утомлением.

Для определения состояния дыхательной и сердечно-сосудистой систем, способности внутренней среды организма насыщаться кислородом используются показатели частоты дыхания, пробы Штанге, Генчи.

Частота дыхания – количество дыханий за 1 мин. Ее можно определить по движению грудной клетки. Средняя частота дыхания у здоровых лиц составляет 16–18 раз/мин, у спортсменов — 8–12 раз/мин. В условиях максимальной нагрузки частота дыхания возрастает до 40–60 раз/мин.

Проба Штанге (задержка дыхания на вдохе). После 5 минут отдыха сидя сделать вдох на 80–90 % от максимального и задержать дыхание. Время отмечается от момента задержки дыхания до ее прекращения. Средним показателем является способность задерживать дыхание на вдохе для нетренированных людей на 40–50 с, для тренированных — на 60–90 с и более. С нарастанием тренированности время задержки дыхания возрастает, при снижении или отсутствии тренированности — снижается. При заболевании или переутомлении это время снижается на значительную величину — до 30–35 с.

Проба Генчи (задержка дыхания на выдохе) выполняется так же, как и проба Штанге, только задержка дыхания производится после полного выдоха. Здесь средним показателем является способность задерживать дыхание на выдохе для нетренированных людей на 25–30 с, для тренированных — 40–60 с и более.

Таким образом, по объективным показателям сердечно-сосудистой и дыхательной систем организма можно судить об эффективности выполняемых тренировочных программ и соответствии нагрузок возможностям человека. С ростом тренированности частота сердечных сокращений и дыхания в покое снижается, уменьшается также время восстановления после прекращения физической нагрузки. Низкая субъективная оценка своего самочувствия может также служить сигналом об ухудшении состояния организма, указывать на симптомы переутомления.

3.7. Самоконтроль за физической подготовленностью

Для того, чтобы обеспечить контроль за уровнем физической подготовленности, необходимо, прежде всего, периодически контролировать состояние физических качеств: выносливости, мышечной силы, быстроты движений, гибкости и ловкости.

Выносливость — это способность длительно выполнять упражнения без снижения их интенсивности. Для самоконтроля общей выносливости рекомендуем самый доступный, популярный во всем мире 12-минутный беговой тест, разработанный американским врачом Купером. Во время выполнения теста нужно преодолеть (пробежать или пройти) как можно большее расстояние. При этом не разрешается перенапрягаться, и, если чувствуете одыш-

ку, нужно снизить темп бега или перейти на ходьбу, а когда восстановится дыхание, можно снова бежать. Желательно тест проводить на беговой дорожке стадиона, где легко рассчитать пройденную дистанцию. По нижеследующей таблице определяется степень подготовленности мужчин и женщин моложе 30 лет в зависимости от расстояния в километрах, пройденных за 12 минут (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Степень подготовленности мужчин и женщин моложе 30 лет в зависимости от расстояния в километрах, пройденных за 12 минут

Степень подготовленности	Мужчины	Женщины
Очень плохая	Меньше 1,6	Меньше 1,5
Плохая	1,6 —1,9	1,5 — 1,84
Удовлетворительная	2,0 — 2,4	1,85 — 2,15
Хорошая	2,5 _ 2,7	2,16 — 2,64
Отличная	Больше 2,8	Больше 2,64

Студенты, посещающие учебные занятия по физическому воспитанию, ежегодно весной и осенью сдают контрольные нормативы в беге на 3 км (юноши) и 2 км (девушки). Вместо 12-минутного теста Купера можно фиксировать в дневнике время пробегания этих дистанций. Для занимающихся самостоятельно можно измерять время пробегания своей традиционной дистанции или ее отрезка.

Сила. Некоторое представление о силе можно получить, выполняя следующие упражнения:

подтягивание на перекладине, сгибание рук в упоре лежа для оценки силы мышц рук и плечевого пояса;

поднимание туловища из положения лежа на спине в положение сидя (ступни ног закреплены, руки за головой) для оценки силы мышц брюшного пресса;

приседание на одной ноге, при этом другая нога и руки вытянуты вперед («пистолетик») для оценки силы мышц ног (рис. 2.3).

Критериями оценки скоростно-силовых способностей и силовой выносливости служат: число подтягиваний, отжиманий; время удержания висов; дальность бросков, прыжков и т. д.

Выполните, например, максимально возможное количество отжиманий от пола и запишите в дневник, сколько раз подряд вы смогли проделать это упражнение. Полученная величина будет контрольной. В дальнейшем, например 1 раз в 3 месяца, повторяйте эту процедуру, так со временем получится цепочка показателей, характеризующих способность к выполнению данного силового упражнения. По мере нарастания силы мышц рук и плечевого пояса число повторений растет.

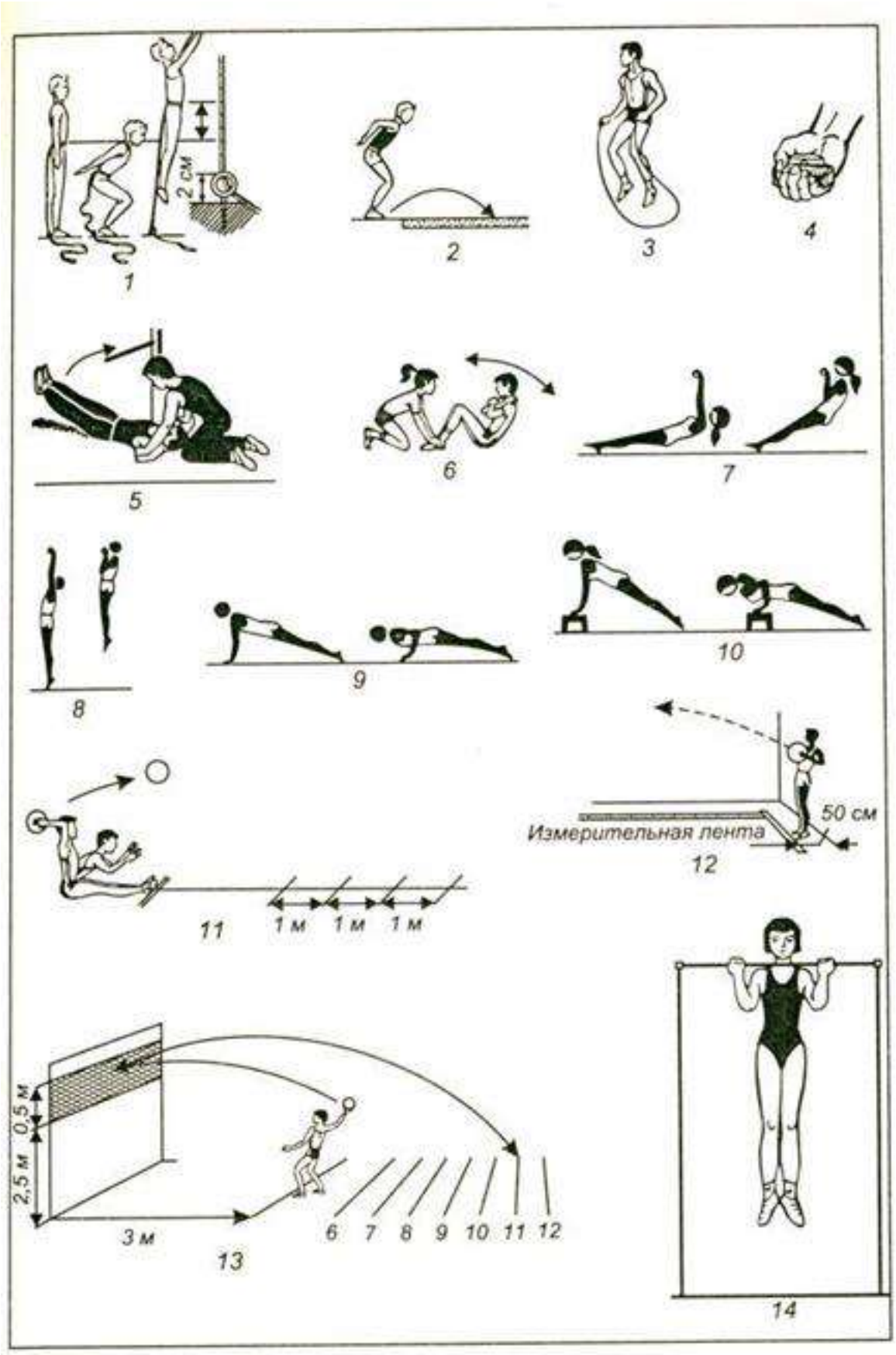


Рис. 2.3. Контрольные упражнения для оценки уровня развития силовых, скоростно-силовых способностей и силовой выносливости

Если вы ограничите время выполнения отжиманий 30 секундами, например, и постараетесь отжаться за этот срок как можно больше раз, то по количеству движений, а также по его динамике можно судить о скоростно-силовой выносливости.

О скоростно-взрывной силе мышц ног дает представление прыжок в длину с места.

Максимальную силу грудных мышц и мышц ног можно определить, выполняя упражнения: жим лежа на спине и приседание со штангой на плечах.

Быстрота. Проявления быстроты довольно изменчивы. Так, лучшие показатели ее отмечаются при хорошем функциональном состоянии организма, высокой работоспособности и при благоприятном эмоциональном фоне. По мере накопления усталости, а также под влиянием отрицательных эмоций, нарушения режима (недосыпание, алкоголь и т. д.) снижаются частота движений и их скорость, замедляется двигательная реакция, увеличивается число ошибочных движений, особенно при выполнении сложных действий.

Для контроля быстроты целостного двигательного действия можно использовать преодоление коротких дистанций с максимальной скоростью (бег 30, 60, 100 м).

Для оценки максимальной частоты движений рук, ног можно использовать простейшие формы теппинг-тестов в домашних условиях.

Для проведения теппинг-теста требуются бумага, карандаш и секундомер. По команде в течение 10 секунд наносите той рукой, которая у вас сильнее, карандашом точки на бумагу с максимальной частотой. Подсчитывая точки, ведите карандашом непрерывную линию, чтобы не сбиться. У студентов с хорошим функциональным состоянием двигательной сферы максимальная частота движений руки составляет 60–70 точек за 10 секунд.

Можно усложнить тест, разделив лист бумаги на четыре части и нанося точки в каждом из квадратов в течение 5 секунд. Смена квадрата происходит по сигналу без паузы. По истечении 20 секунд испытание прекращают. Если частота движений от квадрата к квадрату снижается, это указывает на недостаточную функциональную устойчивость двигательной сферы.

Показатели фиксируются в дневнике самоконтроля как исходные данные и в дальнейшем используются для оценки динамики параметров быстроты.

Гибкость (подвижность в различных суставах) зависит от многих факторов: эластичности мышц и связок, внешней температуры (при повышении температуры гибкость увеличивается), времени суток (утром гибкость существенно снижена). Тестирование должно проводиться после соответствующей разминки. Основными тестами гибкости являются простые контрольные упражнения: наклоны, «мост», шпагат, приседания и т. д. (рис. 2.4).

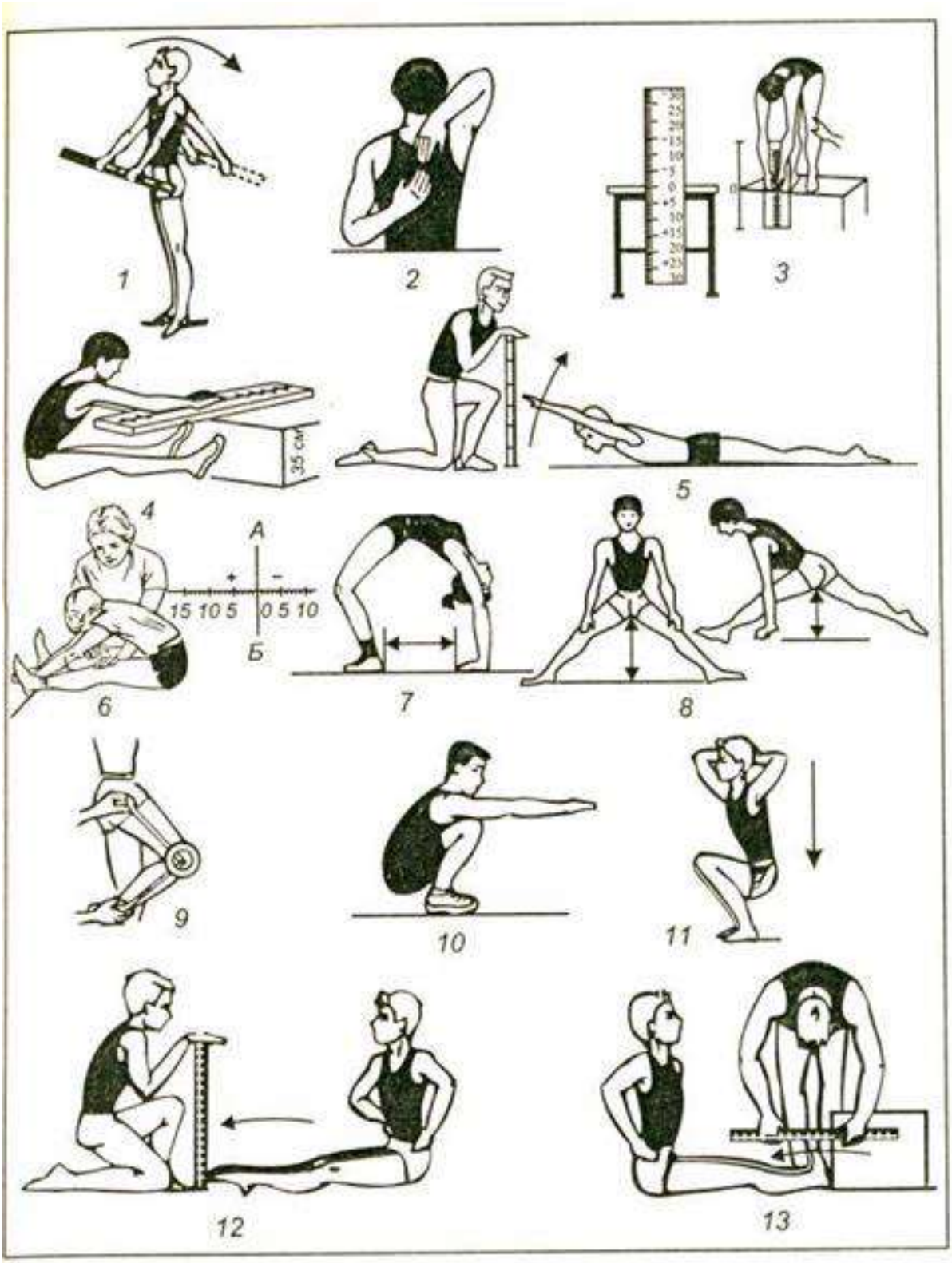


Рис. 2.4. Контрольные упражнения для оценки уровня развития гибкости

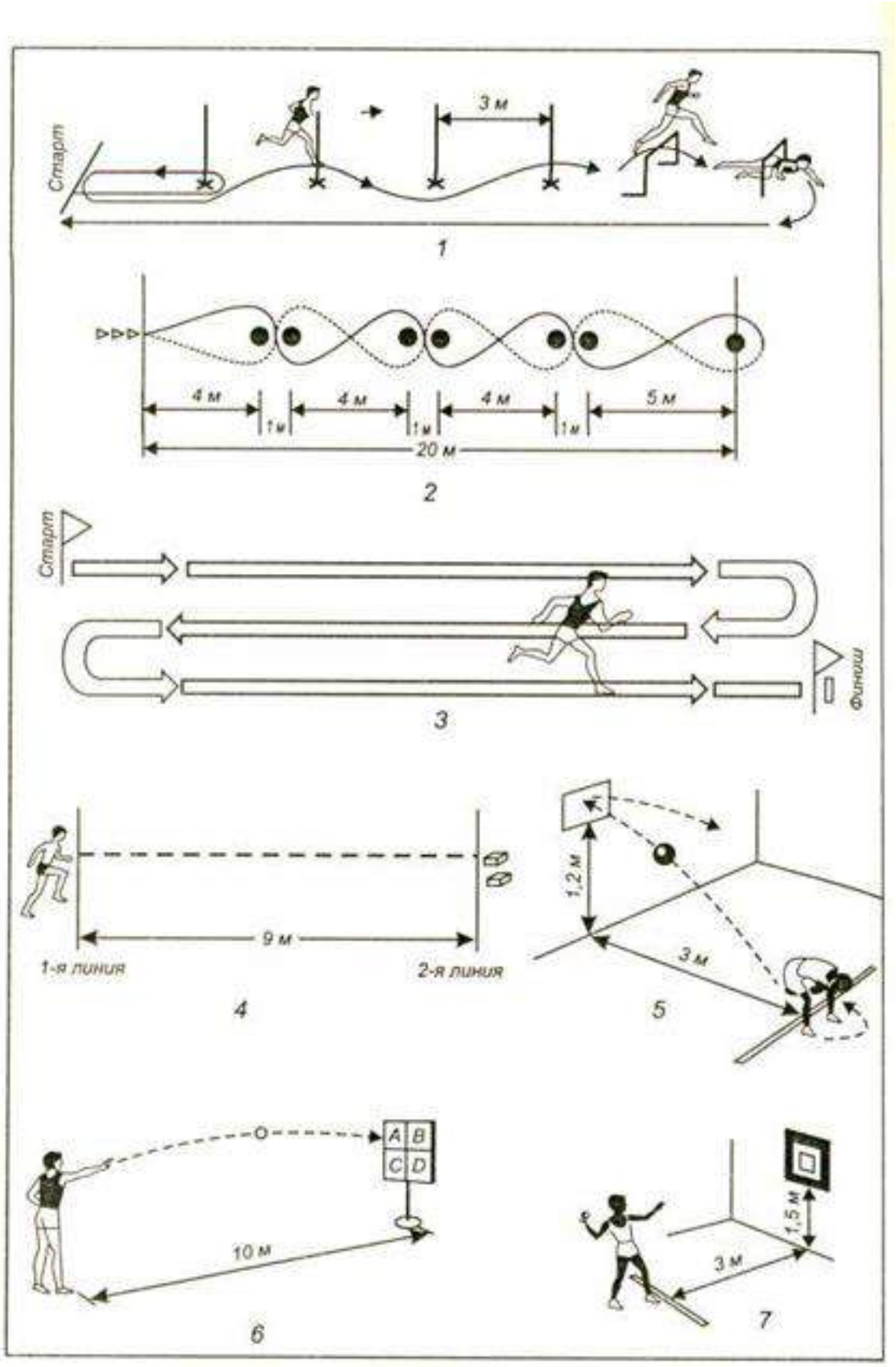


Рис. 2.5. Контрольные упражнения для оценки уровня развития координационных способностей

Одним из важнейших показателей гибкости является подвижность позвоночника. Поэтому рекомендуем определять ее в первую очередь. Для этого нужно встать на табурет и наклониться до предела вперед, не сгибая ног в коленях и опустив руки. Измеряется расстояние от конца среднего пальца кисти до площадки, на которой стоите. Если вы достаете пальцами до площадки (будем считать ее нулевой отметкой), то подвижность позвоночника удовлетворительная. Если при наклоне пальцы будут ниже нулевой отметки, подвижность оценивается как хорошая и ставится знак «плюс» (например, +5 см). Если пальцы не достают до горизонтальной плоскости, то подвижность позвоночника оценивается как недостаточная. В этом случае данные измерения записываются со знаком «минус» (например, –10 см). Аналогично можно оценить подвижность позвоночника при наклонах влево и вправо.

Ловкость (координационные способности). Это качество характеризуется хорошей координацией и высокой точностью движений. Ловкий человек довольно быстро овладевает новыми движениями и способен к их быстрой перестройке. Ловкость зависит от деятельности анализаторов (прежде всего двигательного), а также от пластичности центральной нервной системы. Контрольными упражнениями (тестами) для оценки ловкости могут быть: бег «змейкой», челночный бег 3х10 м, челночный бег 4х9 м с последовательной переноской предмета (мяч, фишка) за линию старта, метание мяча в цель (рис. 2.5).

3.8. Дневник самоконтроля

Результаты самоконтроля рекомендуется фиксировать в *дневнике самоконтроля*, чтобы была возможность их периодически анализировать самостоятельно или совместно с преподавателем, тренером и врачом.

Дневник самоконтроля помогает занимающимся лучше познать самого себя, приучает их следить за собственным здоровьем; позволяет своевременно заметить степень усталости от умственной работы или физической тренировки, опасность переутомления и заболевания; определить, сколько времени требуется для отдыха и восстановления умственных и физических сил; какими средствами и методами при восстановлении достигается наибольшая эффективность. Студентам, занимающимся физическими упражнениями по учебной программе организованно или самостоятельно в оздоровительных целях, можно рекомендовать форму дневника, представленную в таблице 2.2.

Кроме показателей, указанных в примерной форме дневника, необходимо периодически дополнительно отмечать результаты наблюдения за ростом, жизненной емкостью легких и физической подготовленностью не реже одного раза в семестр. За весом, окружностью грудной клетки, развитием силы и состоянием дыхательной системы (пробы Штанге и Генчи) — один раз в месяц. Показатели, которые выражаются в цифрах, полезно представлять в виде графиков.

Таблица 2.2

Примерная форма дневника самоконтроля

Показатели	Дата							
	23.03	24.03	25.03	26.03	27.03	28.03	29.03	30.03
Самочувствие								
Сон								
Аппетит								
Пульс (уд/мин): до тренировки, после тренировки								
АД (мм рт. ст.): до тренировки, после тренировки								
Вес, кг								
Нарушения режима								
Болевые ощущения								
Тренировочные нагрузки								
Спортивные результаты								

Девушкам и женщинам рекомендуется включать в дневник самоконтроля протекание менструального цикла, его начало, продолжительность, периодичность, наличие болевых ощущений и др. Нормальная продолжительность овариально-менструального цикла 21–36 дней. В норме она составляет 27–28 дней, характеризуется устойчивой продолжительностью, отсутствием болевых ощущений и отклонений в самочувствии. Однако в отдельных случаях могут наблюдаться вялость, повышенная утомляемость, отсутствие желания заниматься физическими упражнениями.

Лекция 4
СОЦИАЛЬНО-БИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

4.1. Организм - как единая саморазвивающаяся и саморегулирующаяся система

Социально-биологические основы физической культуры — это принципы взаимодействия социальных и биологических закономерностей в процессе овладения человеком ценностями физической культуры.

Углубленное и всестороннее изучение какого-либо феномена, в том числе физической культуры, невозможно без привлечения знаний из других смежных дисциплин, позволяющих создать целостное представление об этом предмете.

При организации процесса физического воспитания большую роль играют знания комплекса медико-биологических, социально-психологических, педагогических (анатомия, физиология, биология, гигиена, педагогика, психология, социология) и многих других наук. Без знания строения человеческого тела, закономерностей деятельности отдельных органов и функциональных систем организма, особенностей протекания сложных процессов жизнедеятельности, невозможно должным образом организовать процесс формирования здорового образа жизни, физической и спортивной подготовки.

При изучении органов и функциональных систем организма исходят из принципов целостности и единства организма с внешней окружающей и социальной средой. Целостность организма, находящегося во взаимодействии с окружающей средой, обеспечивается нервной системой и её ведущим органом — корой головного мозга. Кора головного мозга весьма тонко улавливает изменения внешней среды, а также внутреннего состояния организма и своей деятельностью обеспечивает приспособление организма к окружающей среде и его активное воздействие на окружающую среду.

Все его органы связаны между собой и взаимодействуют благодаря нервной, кровеносной, лимфатической и эндокринной систем. Нарушение деятельности одного из органов приводит к нарушению деятельности других органов, т. е. организм представляет собой неразрывное целое, существующее в определенных, постоянно изменяющихся условиях окружающей среды.

Организм — единая саморегулирующаяся и саморазвивающаяся биологическая система, функциональная деятельность которой обусловлена взаимодействием психических, двигательных и вегетативных реакций на воздействие окружающей среды.

Саморегуляция организма заключается в том, что любое отклонение от нормального состава внутренней среды организма автоматически включает нервные и гуморальные (посредством жидкой среды) процессы, возвращающие состав внутренней среды к исходному уровню. Внутренняя среда организма, в которой живут все его клетки, — это кровь, лимфа, межтканевая жидкость,

характеризуется относительным постоянством различных показателей (гомеостаз).

Гомеостаз — совокупность реакций, обеспечивающих поддержание или восстановление относительного динамического постоянства внутренней среды и некоторых физиологических функций организма человека (кровообращения, обмена веществ, терморегуляции и др.). Этот процесс обеспечивается сложной системой координированных приспособительных механизмов, направленных на устранение или ограничение факторов, воздействующих на организм, как из внешней, так и из внутренней среды. Приспособительные механизмы позволяют организму сохранять постоянства состава, физико-химических и биологических свойств внутренней среды, несмотря на изменения во внешнем мире. К постоянным показателям гомеостаза относятся: температура внутренних отделов тела, сохраняемая в пределах 36–37° С; кислотно-основное равновесие крови, характеризуемое величиной pH = 7,4–7,35; осмотическое давление крови — 7,6–7,8 атм.; концентрация гемоглобина в крови — 130–160 $г \cdot л^{-1}$ и др.

Человеческий организм — сложная *саморазвивающаяся* биологическая система, в которой непрерывно идет рост и размножение клеток, обмен веществ и энергии, процессы возбуждения и торможения, ассимиляции и диссимиляции. Огромное количество клеток, каждая из которых выполняет только свои, ей присущие функции в общей структурно-функциональной системе организма, снабжается питательными веществами и необходимым количеством кислорода для осуществления жизненно необходимых процессов энергообразования, выведения продуктов распада, обеспечения различных биохимических реакций жизнедеятельности и т. д., в целом осуществляя процессы роста, самообновления и саморазвития целостного организма.

4.2. Основные анатомо-морфологические понятия

Организм — единая, целостная, сложно устроенная саморегулирующаяся живая система, состоящая из органов и тканей. Органы построены из тканей, ткани состоят из клеток и межклеточного пространства.

Клетка — это живая саморегулируемая и самообновляемая система, являющаяся основой строения, развития и жизнедеятельности всех живых и растительных организмов.

Клетки различны по форме, величине, функциональному значению. Несмотря на многообразие форм, клетки имеют общий план строения. Основными частицами клетки являются цитоплазма и ядро.

В ядре клетки расположены нитевидные образования — хромосомы. В состав хромосом входят молекулы сложного органического вещества — дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). В молекулах ДНК как бы записана особым химическим языком — генетическим кодом — наследственная информация.

Цитоплазма клетки неоднородна: в ней различают множество мельчайших структур — цитолемма, органеллы, цитоплазматические включения.

Цитолемма отделяет клетку от окружающей среды, регулирует обмен веществ в клетке и обеспечивает постоянство ее внутренней среды. К органеллам относятся рибосомы, митохондрии, лизосомы и др. структуры.

Рибосомы вырабатывают белок, причем специфический для каждого вида клеток (в мышечной клетке — мышечные белки: актин, миозин).

Митохондрии содержат макроэнергитические соединения и являются универсальным источником энергии. Лизосомы содержат большое количество ферментов и осуществляют внутриклеточное пищеварение.

Клетка построена из химических соединений неорганических и органических веществ.

Из неорганических соединений в клетках находится вода, углекислота, различные кислоты и соли. Для нормальной жизнедеятельности клетки необходимо, чтобы содержание в ней отдельных неорганических веществ, например минеральных солей, было строго определенным. Так, клетки сердечной мышцы могут выполнять работу только в условиях определенного баланса ионов натрия, калия и кальция.

Роль органических веществ (белки, жиры, углеводы) в жизнедеятельности клетки многообразно. Одни из них являются строительным материалом живого организма, другие обеспечивают клетки энергией, третьи незаменимы в химических процессах, в передаче наследственных свойств организма.

Непременным условием жизни клетки являются непрерывный процесс обмена веществ с окружающей средой. В обмене веществ (метаболизме) выделяют два взаимосвязанных, но разно-направленных процесса — ассимиляция и диссимиляция.

Ассимиляция или анаболизм — совокупность процессов биосинтеза, определяющих образование веществ, нужных для замещения старых и построения новых клеток.

Диссимиляция или катаболизм — процесс расщепления сложных веществ на более простые, обеспечивающие энергетические и пластические потребности организма.

Процесс ассимиляции не всегда находится в равновесии с процессами диссимиляции. Так, в растущем организме процессы ассимиляции преобладают над процессами диссимиляции. Благодаря этому обеспечивается накопление веществ и рост организма. Во время мышечной деятельности напротив, усиливаются процессы диссимиляции. Это, в свою очередь, требует более значительного восполнения израсходованных источников энергии, что удается сделать посредством усиления питания. Если в течении длительного времени процессы диссимиляции преобладают над процессами диссимиляции организм истощается.

Ткань — совокупность клеток и межклеточного вещества, сходных по происхождению, строению и выполняемым функциям. различают ткани эпи-

телиальные, ткани внутренней среды или соединительные, мышечные ткани и нервную ткань.

Эпителиальные ткани выполняют защитные, секреторные функции. Защитная функция эпителиальной ткани заключается в том, что они, образуя наружный слой кожи, ее эпидермис, и выстилая изнутри все органы, предохраняют их от повреждений и проникновения в них микробов и других вредных веществ, а в желудочно-кишечном тракте — от разрушения его стенки пищеварительными соками.

Секреторная функция эпителиальной ткани заключается в том, что они, участвуя в образовании желез, вырабатывают секреты, например пищеварительные соки (железы органов пищеварительной системы), жир (сальные железы), пот (потовые железы).

Соединительные ткани, или ткани внутренней среды, подразделяются на ткани с преобладанием трофических, опорных или защитных функций.

Трофическую, то есть питательную, функцию выполняют жидкие виды соединительной ткани — кровь и лимфа, которые участвую в снабжении организма питательными веществами и кислородом, а так же в удалении продуктов обмена веществ и углекислоты.

Опорную функцию выполняют главным образом плотная соединительная ткань (сухожилия, связки), хрящевая и костные ткани.

Мышечные ткани (гладкие, сердечные, поперечно-полосатые) осуществляют двигательные процессы в организме. Основным функциональным свойством мышечной ткани является ее сократимость, которая зависит от способности находящихся в клетках этой ткани сократимых структур изменять свою длину, становясь то короче и толще (сокращение, укорочение), то длиннее и толще (расслабление, удлинение).

Нервная ткань состоит из нервных клеток (нейронов) с их отростками и окончаниями этих отростков. Нервные клетки отростки которых идут к органам и несут к ним импульсы побуждающие их к деятельности (от спинного и головного мозга к мышцам и внутренним органам), называется двигательными, выносящими. Нервные клетки, отростки которых проводя импульсы от периферии к центру (от внутренних органов, мышц в спинной и головной мозг), являются чувствительными, приносящими.

Орган — это часть целостного организма (совокупность тканей), сложившаяся в процессе эволюционного развития и имеющая своеобразные положения, формы, размеры, внутреннее строение, специфические функции (сердце, легкие, печень, и т. д.). В строении каждого органа принимает участи не одна какая-нибудь ткань, а различные виды тканей. Например, в образовании кости (как органа) принимает участие мышечная (в стенке кровеносных сосудов, питающих кость) и нервная (в образованиях, иннервирующих кость) ткани.

Органы, выполняющие общие функции и имеющие общие источники происхождения, образуют *анатомическую систему органов* (например, мышечную, пищеварительную, дыхательную, кровеносную).

Функциональное объединение систем и органов, имеющих различные источники происхождения — *анатомический аппарат* (опорно-двигательный, вестибулярный).

4.3. Опорно-двигательный аппарат

Опорно-двигательный аппарат (ОДА) объединяет костную и мышечную систему, большое число парных и непарных костей, мышц, суставов, связок, мышечных сухожилий.

Твердой опорой тела человека является скелет, состоящий из костей и их соединений. При любых положениях тела (стоя, сидя, лежа) все органы опираются на кости скелета. Скелет защищает от повреждений более глубоко расположенные структуры (например, костный мозг, центральную нервную систему, сердце и др.). Движение костей возможны благодаря действию мышц, прикрепляющихся к ним.

Некоторые части скелета — позвоночник с его функциональными изгибами и суставы нижних конечностей совместно со связочно-мышечным аппаратом осуществляют амортизационные функции.

Помимо опорной, защитной и двигательной функций кости скелета имеют большое значение в минеральном обмене и кроветворении. Именно в костях содержатся основные запасы минеральных веществ организма (кальций, фосфор, и др.), здесь они откладываются в случае их избытка, и отсюда они черпаются при необходимости.

Костный мозг, находящийся в костях, участвует в образовании форменных элементов крови (лейкоциты, эритроциты).

В живом организме кость на 50 % состоит из воды, в состав остальной части входят органические (12,4 %) и неорганические (21,85 %) вещества. Органическим веществом кости является оссеин, неорганическими веществами — известковые соли, а так же хлористый натрий. Неорганические вещества придают костям твердость, органические — гибкость и упругость.

Соотношение органических и неорганических веществ у людей неодинаково и может меняться в зависимости от возраста, условий питания, занятий спортом и пр. В детском возрасте относительное содержание органических веществ в костях больше, вследствие чего, они имеют меньшую твердость и большую гибкость; к старости относительное количество оссеина уменьшается, вместе с тем увеличивается хрупкость костей. Занятие физическими упражнениями способствует улучшению таких механических свойств кости, как сопротивляемость на излом, изгиб, сдавливание, растяжение, скру-

чивание. Следует знать, что как недостаточная, так и избыточная физическая нагрузки тормозят рост костей.

Подвижные соприкосновения костей в области их соприкосновения образуют сустав (локтевой, коленный и др.). На одной из костей, образующий сустав, находится суставная впадина, на другой — соответствующая ей по форме головка. Соединяющиеся в суставе поверхности костей покрыты слоем гиалинового хряща, облегчающего движение одной кости, относительно другой. Эластичность хряща в суставах способствует смягчению ударов и сотрясений при ходьбе, прыжках и других движениях.

Сверху сустав покрыт специальной оболочкой — суставной сумкой. Полость сустава герметически закрыта и имеет небольшой объем, зависящий от формы и размеров сустава. Она заполняется синовиальной (суставной) жидкостью, уменьшающей трение между суставными поверхностями при движении.

Важными структурными образованиями суставов являются внутрисуставные диски, мениски, связки. Внутрисуставные диски (хрящевые образования) обеспечивают большую подвижность в суставе. Мениски улучшают подвижность костей, амортизируют толчки и сотрясения, способствуют разнообразию движений.

Укрепляя суставы, связки одновременно играют роль тормоза, ограничивающего подвижность соединяющихся костей. С помощью физических упражнений можно увеличить эластичность связочного аппарата и степень подвижности в суставе. Степень подвижности суставов зависит от пола, возраста, индивидуальных особенностей, степени тренированности, окружающей температуры и даже время дня.

Отсутствие достаточной двигательной активности приводит к разрыхлению суставного хряща и изменению суставных поверхностей сочленяющихся костей, к появлению болевых ощущений, создаются условия для образования воспалительных процессов.

Кости и соединяющие их элементы составляют пассивную часть опорно-двигательного аппарата. *Мышечная система* является его активной частью.

Различают три вида мышц: гладкие мышцы внутренних органов, поперечно-полосатые скелетные мышцы и особая поперечно-полосатая сердечная мышца.

Гладкая мышечная ткань выстилает стенки кровеносных сосудов и некоторых внутренних органов. Она обеспечивает сужение или расширение сосудов, осуществляет продвижение пищи по желудочно-кишечному тракту, сокращает стенки мочевого пузыря.

Поперечно-полосатыми скелетные и сердечная мышцы называются потому, что в поле микроскопа они имеют поперечную исчерченность.

Поперечно-полосатая сердечная мышца обеспечивает ритмическую работу сердца на протяжении всей жизни человека автоматически.

Скелетные мышцы обеспечивают сохранение положений тела в пространстве, участвуют в его движении, защищают расположенные под ними

внутренние органы, и идущие между ними сосуды и нервы от внешних воздействий; при сокращении мышц выделяется тепловая энергия, поэтому они участвуют в поддержании постоянства температуры тела.

Основой мышц являются белки. Они составляют 80–85 % мышечной ткани. Главным свойством мышечной ткани, как уже говорилось, является сократимость, которая обеспечивается за счет сократительных мышечных белков — актина и миозина.

Строение мышечной ткани достаточно сложно. Мышца имеет волокнистую структуру, каждое волокно — это мышца в миниатюре, совокупность этих волокон и образует мышцу в целом. В свою очередь мышечное волокно состоит из сократительных элементов — миофибрилл. Отдельная часть миофибрилл называется — саркомер.

Каждая миофибрилла по длине делится на чередующиеся светлые и темные участки. Темные участки — протофибриллы, состоящие из длинных цепочек (нитей) молекул белка — миозина, светлые — образованны еще более тонкими белковыми нитями актина. Сокращения мышечного волокна происходит за счет вхождения нитей актина между нитями миозина (теория скольжения). Саркомер укорачивается, как складная подзорная труба; объем его остается неизменным, а поперечник увеличивается.

По своей форме и размерам мышцы очень разнообразны. Есть мышцы длинные и тонкие, короткие и толстые, широкие и плоские. Мышцы, расположенные на туловище, имеют более плоскую форму. Мышцы конечностей характеризуются относительно большей длинной.

Различия в форме мышц связаны с выполняемой ими функцией. Длинные тонкие мышцы (например, длинные сгибатели пальцев руки или ноги), как правило, участвуют в движениях с большой амплитудой. В противоположность им короткие толстые мышцы (например, квадратная мышца поясницы) участвуют в движениях с небольшой амплитудой, но могут преодолевать значительное сопротивление.

Многие мышцы (пары мышц) имеют определенное название, например: широчайшая мышца спины, прямая мышца живота, двуглавая мышца плеч, четырехглавая мышца бедра и др. В сфере физической культуры, говоря о скелетной мускулатуре, чаще всего упоминают мышцы в связи с их двигательными функциями. Так, по функциональному назначению и направлению движений в суставах различают мышцы: сгибатели и разгибатели, приводящие и отводящие, сфинктеры (сжимающие) и расширители. Если мышцы окружают сустав с двух сторон и участвуют в двух направлениях движения, происходит сгибание и разгибание или приведение и отведение. При этом мышцы, действие которых направленно противоположно, называются антагонистами, если же они действуют в одном направлении — синергистами.

В процессе мышечного сокращения химическая энергия превращается в механическую. Источником энергии для мышечного сокращения служат особые органические вещества, богатые потенциальной энергией и способные,

расщепляясь, отдавать ее: это аденозинтрифосфорная кислота (АТФ), креатинфосфорная кислота (КрФ), углеводы и жиры.

При этом химические процессы в мышце могут протекать, как при наличии кислорода (в аэробных условиях), так и при его отсутствии (в анаэробных условиях).

Непосредственным источником энергии сокращения мышц является АТФ (табл. 1.1). Однако запасы АТФ в мышцах не велики. Их хватает лишь на одну–две секунды работы. Для продолжения работы мышц требуется постоянное пополнение АТФ. Восстановление ее происходит в анаэробных (безкислородных) условиях — за счет распада креатинфосфата и глюкозы. В аэробных (кислородных) условиях — за счет реакции окисления жиров и углеводов.

Таблица 1.1

Аденозинтрифосфат (АТФ) —
источник энергии для сокращения мышц

Пути (источники) превращения энергии	
при наличии кислорода (в аэробных условиях)	при отсутствии кислорода (в анаэробных условиях)
Характерен высокой экономичностью. Глубокий распад исходных веществ до конечных продуктов — CO_2 и H_2O. Скорости процессов образования и расщепления АТФ равны и находятся в состоянии динамического равновесия	Характерен высокой скоростью образования АТФ. В клетках и крови накапливается молочная кислота. Быстро развивается метаболический ацидоз, ограничивающий работоспособность
Время развертывания аэробного пути образования АТФ — 3–4 мин (у спортсменов менее 1 мин)	Время развертывания анаэробного пути образования АТФ — несколько секунд
Продолжительная равномерная мышечная активность	Кратковременные экстремальные усилия, а также разминочная часть тренировочных занятий
Продолжительность работы – несколько часов	Предельное время выполнения работы — несколько минут

Быстрое восстановление АТФ происходит в тысячные доли секунды за счет распада КрФ. Наибольшей эффективности этот путь энергообразования достигает к 5–6 секунде работы, но затем запасы КрФ исчерпываются, так как их в организме немного.

Медленное восстановление АТФ в анаэробных условиях обеспечивается энергией расщепления глюкозы (выделяемой из гликогена) — реакцией гликолиза с образованием в конечном итоге молочной кислоты (лактата) и восстановлением АТФ. Эта реакция достигает наибольшей мощности к концу первой минуты работы. Особое значение этот путь энергообеспече-

ния имеет при высокой мощности работы, которая продолжается от 20 секунд до 1–2 минут (например, при беге на средние дистанции), а также при резком увеличении мощности более длительной и менее напряженной работы (старты и финишные ускорения при беге на длинные дистанции). Ограничение использования углеводов связано не с уменьшением запасов гликогена (глюкозы) в мышцах и печени, а с угнетением реакции гликолиза избытком накопившейся в мышцах молочной кислоты.

Во время продолжительной равномерной мышечной активности происходит аэробная регенерация АТФ, главным образом за счет окислительных процессов. Необходимая для этого энергия выделяется в результате окисления углеводов или жиров. Время развертывания аэробного пути образования АТФ составляет 3–4 минуты (у спортсменов менее 1 минуты), а продолжительность работы может исчисляться даже часами. Этот путь отличается также высокой экономичностью: в ходе такого процесса идет глубокий распад исходных веществ до конечных продуктов — CO_2 и H_2O. Скорости процессов образования и расщепления АТФ при этом равны и находятся в состоянии динамического равновесия. Максимальная мощность работы, развиваемая при аэробном ресинтезе АТФ, индивидуальна и зависит от уровня тренированности человека.

4.4. Кровь. Кровеносная система

Кровь — жидкая ткань, циркулирующая в кровеносной системе человека и представляющая собой непрозрачную красную жидкость, состоящую из бледно-желтой плазмы и взвешенных в ней клеток — красных кровяных телец (эритроцитов), белых кровяных телец (лейкоцитов) и красных пластинок (тромбоцитов). На долю взвешенных клеток (форменных элементов) приходится 42–46 % общего объема крови.

Основная функция крови — транспорт различных веществ внутри организма. Она переносит дыхательные газы (кислород и углекислый газ) как в физически растворенном, так и в химически связанном виде. Этой способностью кровь обладает благодаря гемоглобину — белку, содержащемуся в эритроцитах. Кроме того, кровь доставляет питательные вещества от органов, где они всасываются или хранятся, к месту их потребления; образующиеся здесь метаболиты (продукты обмена) транспортируются к выделительным органам или к тем структурам, где может происходить их дальнейшее использование. Целенаправленно, к органам-мишеням, кровью переносятся также гормоны, витамины и ферменты. Благодаря высокой теплоемкости своей главной составной части — воды (в 1 л плазмы содержится 900–910 г воды), кровь обеспечивает распределение тепла, образующегося в процессе метаболизма, и его выделение во внешнюю среду через легкие, дыхательные пути и поверхность кожи.

Доля крови у взрослого человека составляет примерно 6–8 % общей массы тела, что соответствует 4–6 л. Объем крови у человека может претерпевать значительные и длительные отклонения в зависимости от степени тренированности, климатических и гормональных факторов. Так, у некоторых спортсменов объем крови в результате тренировок может превышать 7 л. А после длительного периода постельного режима он может становиться ниже нормы. Кратковременные изменения объема крови наблюдаются при переходе из горизонтального в вертикальное положение тела и при мышечной нагрузке.

Кровь может выполнять свои функции, только находясь в постоянном движении. Это движение производится по системе сосудов (эластичных трубочек) и обеспечивается сердцем. Благодаря сосудистой системе организма, крови доступны все уголки тела человека, каждая клетка. Сердце и кровеносные сосуды (артерии, капилляры, вены) образуют *сердечно-сосудистую* систему (рис. 1.1).

Движение крови по сосудам легких от правого сердца к левому называется легочным кровообращением (малый круг). Начинается он с правого желудочка, выбрасывающего кровь в легочный ствол. Затем кровь поступает в сосудистую систему легких, имеющую в общих чертах то же строение, что и большой круг кровообращения. Далее по четырем крупным легочным венам она поступает к левому предсердию (рис. 1.2).

Следует отметить, что артерии и вены различаются не по составу движущейся в них крови, а по направлению движения. Так, по венам кровь поступает к сердцу, а по артериям оттекает от него. В системном кровообращении оксигенерированная (обогащенная кислородом) кровь течет по артериям, а в легочном — по венам. Поэтому, когда кровь, насыщенную кислородом, называют артериальной, имеют в виду лишь системное кровообращение.

Сердце является полым мышечным органом, разделенным на две части — так называемое «левое» и «правое» сердце, каждое из которых включает предсердие и желудочек. Частично лишенная кислорода кровь от органов и тканей организма поступает к правому сердцу, выталкивающему ее к легким. В легких кровь насыщается кислородом, частично лишаясь углекислого газа, затем возвращается к левому сердцу и вновь поступает к органам.

Нагнетательная функция сердца основана на чередовании сокращения (систолы) и расслабления (диастолы) желудочков, что возможно благодаря физиологическим особенностям миокарда (мышечной ткани сердца, составляющей основную часть его массы) — автоматии, возбудимости, проводимости, сократимости и рефрактерности. Во время *диастолы* желудочки заполняются кровью, а во время *систолы* они выбрасывают ее в крупные артерии (аорту и легочный ствол). У выхода из желудочков расположены клапаны, препятствующие обратному поступлению крови из артерий в сердце. Перед тем как заполнить желудочки, кровь притекает по крупным венам (полым и легочным) в предсердия.

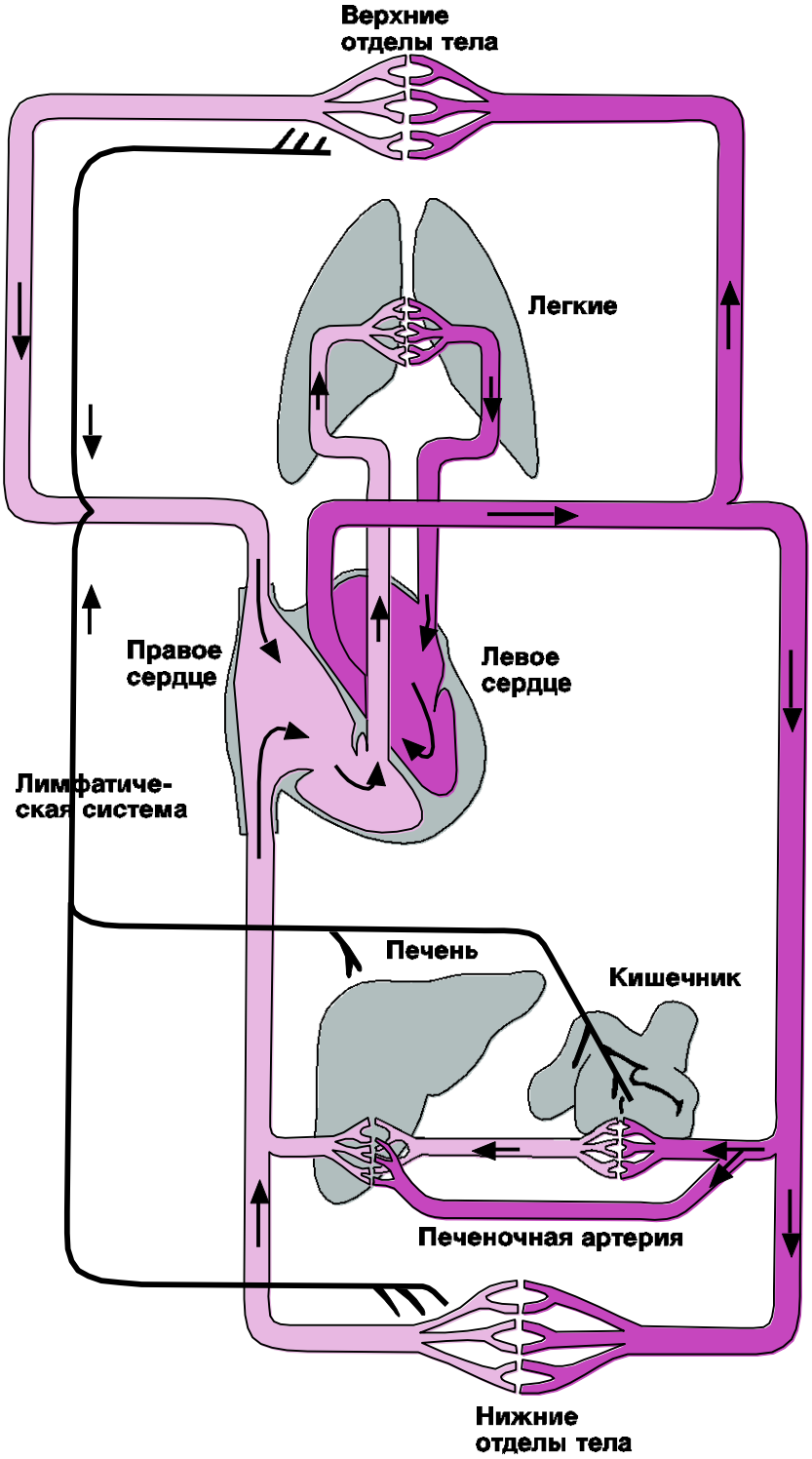


Рис. 1.1. Сердечно-сосудистая система человека

Систола предсердий предшествует систоле желудочков; таким образом, предсердия служат как бы вспомогательными насосами, способствующими заполнению желудочков.

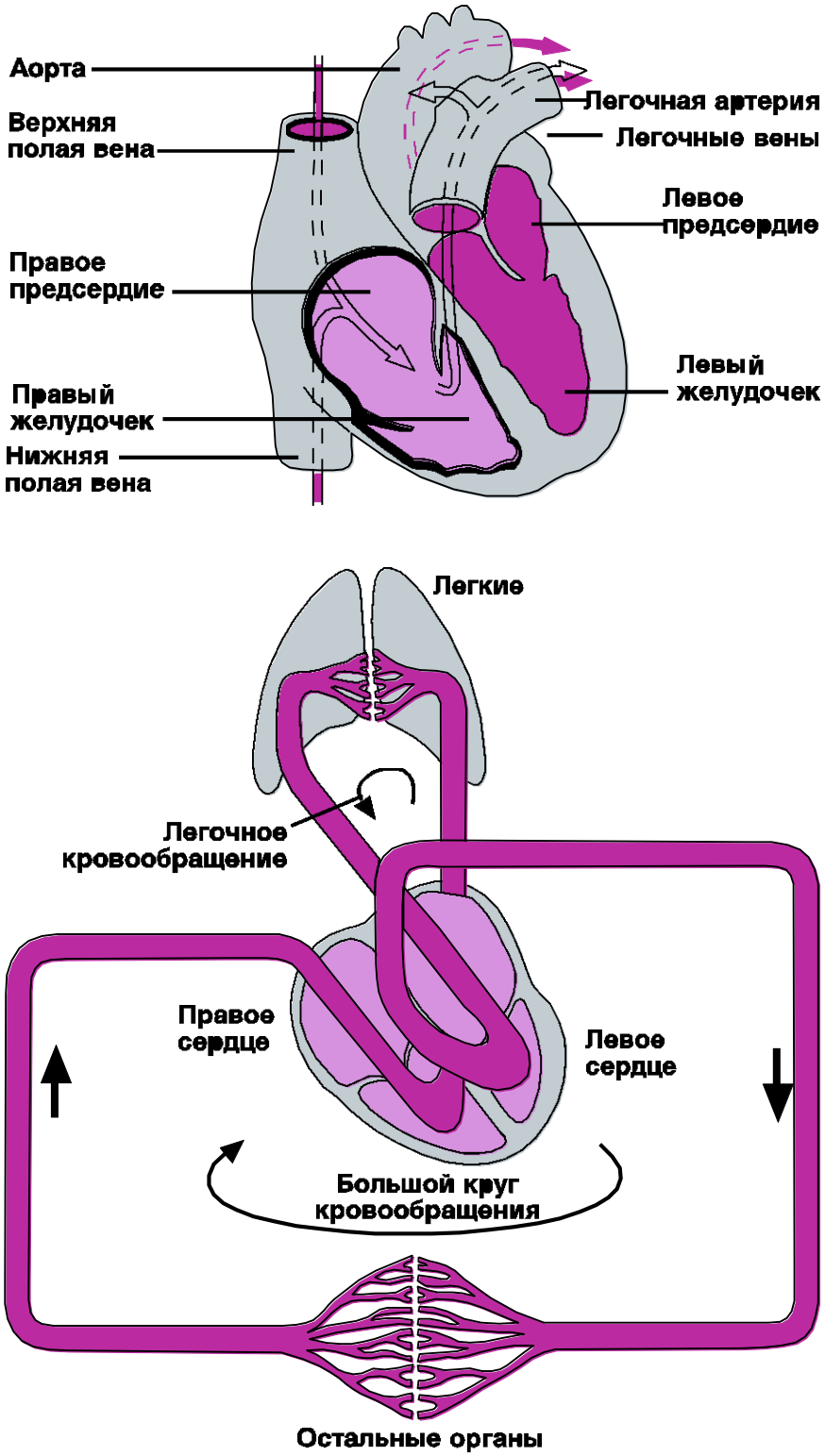


Рис. 1.2. Строение сердца, малый (легочный) и большой круги кровообращения

Кровоснабжение всех органов (кроме легких) и отток крови от них носит название системного кровообращения (большой круг). Начинается он с левого желудочка, выбрасывающего во время систолы кровь в аорту. От аорты отходят многочисленные артерии, по которым кровоток распределяется на несколько параллельных региональных сосудистых сетей, снабжающих

кровью отдельные органы и ткани — сердце, головной мозг, печень, почки, мышцы, кожу и т. д. Артерии делятся, и по мере роста их числа уменьшается диаметр каждой из них. В результате разветвления мельчайших артерий (артериол) образуется капиллярная сеть — густое переплетение мелких сосудов с очень тонкими стенками. Именно здесь происходит основной двусторонний обмен различными веществами между кровью и клетками. При слиянии капилляров образуются венулы, которые далее объединяются в вены. В конечном счете, к правому предсердию подходят только две вены — верхняя полая и нижняя полая.

Разумеется, фактически оба круга кровообращения составляют единое кровеносное русло, в двух участках которого (правом и левом сердце) крови сообщается кинетическая энергия. Хотя между ними существует принципиальное функциональное различие. Объем крови, выбрасываемый в большой круг, должен быть распределен по всем органам и тканям, потребность которых в кровоснабжении различна и зависит от их состояния и деятельности. Любые изменения мгновенно регистрируются центральной нервной системой (ЦНС), и кровоснабжение органов регулируется целым рядом управляющих механизмов. Что касается сосудов легких, через которые проходит постоянное количество крови, то они предъявляют к правому сердцу относительно постоянные требования и выполняют в основном функции газообмена и теплоотдачи. Поэтому система регуляции легочного кровотока менее сложна.

У взрослого человека примерно 84 % всей крови содержится в большом круге кровообращения, 9 % — в малом круге и оставшиеся 7 % — непосредственно в сердце. Наибольший объем крови содержится в венах (примерно 64 % общего объема крови в организме), т. е. вены играют роль резервуаров крови. В состоянии покоя кровь циркулирует лишь примерно в 25–35 % всех капилляров. Основным кроветворным органом является костный мозг.

Требования, предъявляемые организмом к системе кровообращения, существенно варьируют, поэтому ее деятельность изменяется в широких пределах. Так, в покое у взрослого человека в сосудистую систему при каждом сокращении сердца выбрасывается 60–70 мл крови (систолический объем), что соответствует 4–5 л минутного объема сердца (количество крови, выбрасываемое желудочком за 1 мин). А при тяжелой физической нагрузке минутный объем возрастает до 35 л и выше, при этом систолический объем крови может превышать 170 мл, а систолическое артериальное давление достигает 200–250 мм рт. ст.

Кроме кровеносных сосудов в организме есть еще один тип сосудов — лимфатические.

Лимфа — бесцветная жидкость, образующаяся из плазмы крови путем ее фильтрации в межтканевые пространства и оттуда в лимфатическую систему. Лимфа содержит воду, белки, жиры и продукты обмена. Таким образом, лимфатическая система образует дополнительную дренажную систему, по которой тканевая жидкость оттекает в кровеносное русло. Все ткани, за

исключением поверхностных слоев кожи, ЦНС и костной ткани, пронизаны множеством лимфатических капилляров. Эти капилляры в отличие от кровеносных с одного конца замкнуты. Лимфатические капилляры собираются в более крупные лимфатические сосуды, которые в нескольких местах впадают в венозное русло. Поэтому лимфатическая система является частью сердечно-сосудистой.

4.5. Дыхательная система

К дыхательной системе относятся легкие и дыхательные пути, по которым воздух проходит в легкие и обратно. Дыхательные пути представлены носовой полостью, глоткой, гортанью, трахеей и бронхами. Воздух поступает сначала в носовую (ротовую) полость, затем в носоглотку, гортань и дальше в трахею. Трахея делится на два главных бронха — правый и левый, которые, в свою очередь, разделяются на долевые и входят в ткань легкого. В легких каждый из бронхов делится на все более и более мелкие доли, образуя бронхиальное дерево. Конечные мельчайшие разветвления бронхов (бронхиолы) переходят в закрытые альвеолярные ходы, в стенках которых имеется большое количество шаровидных образований — легочных пузырьков (альвеол). Каждая альвеола окружена густой сетью кровеносных капилляров. Строение легочных альвеол довольно сложно и соответствует выполняемой ими функции — газообмена (рис. 1.3).

Механизм дыхания имеет рефлекторный (автоматический) характер. В покое обмен воздуха в легких происходит в результате ритмических дыхательных движений грудной клетки. При вдохе объем легких увеличивается (грудная клетка расширяется), давление в легких становится ниже атмосферного, и воздух поступает в дыхательные пути. В покое расширение грудной клетки осуществляется диафрагмой (специальной дыхательной мышцей) и наружными межреберными мышцами, а при интенсивной физической работе включаются и другие скелетные мышцы. Во время выдоха объем грудной полости уменьшается, воздух в легких сжимается, давление в них становится выше атмосферного, и воздух из легких выталкивается наружу. Выдох в спокойном состоянии осуществляется пассивно за счет тяжести грудной клетки и расслабления диафрагмы. Форсированный выдох происходит вследствие сокращений внутренних межреберных мышц, и, частично, — за счет мышц плечевого пояса и брюшного пресса.

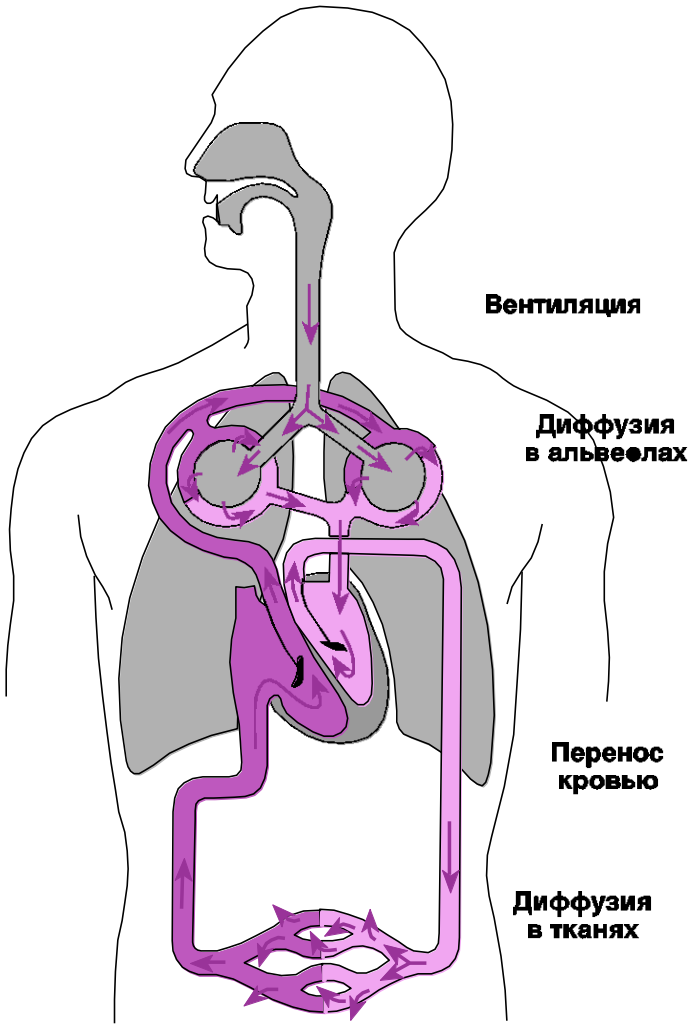


Рис. 1.3. Путь транспорта кислорода у человека

Количество воздуха, проходящего через легкие при спокойном вдохе (выдохе) составляет дыхательный объем (400–500 мл). Объем воздуха, который можно вдохнуть еще (выдохнуть) после обычного вдоха (выдоха), называется резервным объемом вдоха (выдоха). Дыхательный объем (ДО), резервный объем вдоха и выдоха составляют жизненную емкость легких (ЖЕЛ). ЖЕЛ зависит от пола, возраста, размера тела и тренированности. ЖЕЛ составляет в среднем у женщин 2,5–4,0 л, у мужчин — 3,5–5,0 л. Под влиянием тренировки ЖЕЛ возрастает, у хорошо тренированных спортсменов она достигает 8 литров.

То количество воздуха, которое человек вдыхает и выдыхает за одну минуту, называется минутным объемом дыхания (МОД). В покое МОД составляет 6–8 л, при напряженной физической нагрузке может возрастать в 20–25 раз и достигать 120–150 литров в одну минуту. МОД — один из основных показателей аппарата внешнего дыхания.

В процессе газообмена между организмом и атмосферным воздухом большое значение имеет вентиляция легких, обеспечивающая обновление

альвеолярного газа. Интенсивность вентиляции зависит от глубины и частоты дыхания. Количественным показателем вентиляции легких служит минутный объем, определяемый как произведение дыхательного объема на число дыханий (ЧД) в минуту. Например, при ЧД 14 раз/мин МОД будет составлять 7 литров: 500 мл (ДО) х 14 раз/мин (ЧД) = 7000 мл (МОД).

С физиологической точки зрения основным показателем эффективности внешнего дыхания является не МОД, а часть его, достигающая альвеол — альвеолярная вентиляция. Дело в том, что не весь вдыхаемый воздух достигает альвеол, где происходит газообмен. Часть вдыхаемого воздуха (150 мл) остается в «мертвом» пространстве (полость рта, носа, глотка, гортань, трахея и бронхи). Таким образом, при МОД 7 литров, альвеолярная вентиляция (эффективный обмен) составляет около 5 литров (7000 – 150х14 раз/мин = 4900 мл).

Физические упражнения вызывают усиление легочной вентиляции, причем при максимальных нагрузках у тренированных спортсменов она может возрастать в 20–25 раз по сравнению с состоянием покоя, достигает 120 л/мин и более. Такое усиление вентиляции обеспечивается за счет частоты дыхания до 60–70 раз/мин и объема дыхания, который может достигать 50 % жизненной емкости легких, хотя в покое он составляет лишь 15 % этого показателя.

4.6. Нервная система

Человеческий организм представляет собой единое целое, в котором все отдельные системы и органы развиваются и функционируют во взаимной зависимости и обусловленности. Однако во всяком взаимодействии необходимо выделить ведущее звено. Этим звеном в организме человека, как и в организмах других живых существ, является нервная система, которая, с одной стороны осуществляет связь организма с внешней средой, с другой, находясь в анатомической и функциональной связи со всеми системами, со всеми органами, со всеми тканями и клетками организма, обеспечивает его существования как единое целое.

Основными структурными элементами нервной системой являются нервные клетки или нейроны. Через нейроны осуществляется передача информации от одного участка нервной системы к другому, обмен информацией между нервной системой и различными участками тела. В нейронах происходят сложные процессы обработки информации. С их помощью формируются ответные реакции организма (рефлексы) на внешнее и внутреннее раздражение. Основными функциями нейронов являются: восприятие внешних раздражений, их переработка и передача нервных влияний на другие нейроны или рабочие органы. Нейроны подразделяются на три основных типа: афферентные, эфферентные и промежуточные. Афферентные нейроны (чувствительные, или центростремительные) передают информацию от рецепторов в центральную нервную систему (ЦНС). Эфферентные нейроны (центробеж-

ные) связаны с передачей информации из ЦНС к рабочим органам. Промежуточные нейроны — это, как правила, более мелкие клетки, осуществляющие связь между различными нейронами.

Деятельность нервной системы осуществляется по принципу рефлекторного механизма. Рефлекс, напомним, — это ответная реакция организма на внешнее раздражение, осуществляемая нервной системой. Нервный путь рефлекса называется рефлекторной дугой, в состав которой входят: 1) воспринимающее образование — рецептор; 2) чувствительный или афферентный нейрон, связывающий рецептор с нервными центрами; 3) промежуточные нейроны нервных центров; 4) эфферентный нейрон; связывающий нервные центры с периферией; 5) рабочий орган, отвечающий на раздражение — мышца или железа. Вместе с тем, нервная система не только регулирует ответы организма на внешние и внутренние раздражения, но также в значительной мере определяет взаимоотношения между органами, обеспечивая согласованность в выполнении в их функции. Велика роль нервной системы в обеспечении всех движений человека. Она регулирует силу и скорость мышечного сокращения, степень напряжения или расслабления мышц, а так же процессов питания и обмена веществ в ней.

Посредством органов чувств, через чувствительную иннервацию кожи и опорно-двигательного аппарата, нервная система позволяет спортсмену ориентироваться в окружающей его внешней среде и в пространстве, чувствовать своё положение, координировать его.

Нервную систему принято подразделять на центральную и периферическую, а, кроме того, на соматическую и вегетативную (автономную).

К центральной нервной системе относятся головной и спинной мозг, а к периферической — нервные образования, служащие для связи ЦНС с отдельными органами и тканями тела (нервы, узлы, сплетения), и нервные окончания, которые находятся в органах.

Соматической нервной системой считается та её часть, которая иннервирует сому, т. е. собственно тело (двигательный аппарат, внешние покровы тела, органы чувств и др.)

Вегетативная (автономная) нервная система — это та часть нервной системы, которая иннервирует внутренние органы, железы, кровеносные сосуды и пр.

Спинной мозг является низшим и наиболее древним отделом ЦНС. Он построен из нервных клеток и волокон, причем клетки, составляющие его серое вещество, располагаются внутри, а волокна, образующие белое вещество, — снаружи. Серое вещество мозга состоит из скопления тел нервных клеток (нейронов), периферические отростки которых в составе спинномозговых нервов достигают различных рецепторов кожи, мышц, сухожилий, слизистых оболочек. Белое вещество, окружающее серое, состоит из отростков связывающих между собой нервные клетки спинного мозга; восходящих чувствительных, связывающих все органы и ткани (кроме головы) с головным моз-

гом, нисходящих двигательных путей, идущих от головного мозга к двигательным клеткам спинного мозга. В различных отделах спинного мозга находятся мотонейроны (двигательные нервные клетки) иннервирующие все скелетные мышцы (за исключением мышц лица). Спинной мозг осуществляет элементарные двигательные рефлексы — сгибательные и разгибательные, шагательные, ритмические, возникающие при раздражении кожи, мышц, сухожилий (одергивание и т.п.), а также посылают постоянную импульсацию к мышцам, поддерживая мышечный тонус. Всевозможные травмы и заболевания спинного мозга могут приводить к расстройству болевой, температурной чувствительности, нарушению структуры сложных произвольных движений, мышечного тонуса и т.д.

Головной мозг располагается в полости черепа и имеет сфероидную форму. По своей массе он превосходит спинной мозг в 50 раз. Масса головного мозга человека равняется 1375 г. (колеблется от 1000 г. до 2200 г.). Зависимость между массой и степенью одаренности данного человека не установлена. Головной мозг разделяется на пять отделов: продолговатый, задний, средний, промежуточный, конечный. Каждый отдел имеет сложную анатомическую структуру.

Строение головного мозга достаточно сложно, поэтому ограничимся краткой характеристикой функций его отделов. Так, в продолговатом мозге и варолиевом мосту (в целом — задний мозг) находятся центры многих пищеварительных рефлексов (жевания, глотания, движений желудка), некоторых защитных рефлексов (чихания, мигания, кашля, слезоотделения), центры водно-солевого и сахарного обмена.

Средний мозг осуществляет зрачковый рефлекс (расширение зрачков в темноте и сужение их на свету), ориентировочный рефлекс (например, внезапное раздражение — поворот головы и глаз в его сторону), участвует в регуляции тонуса скелетных мышц (особенно при выполнении мелких движений пальцами рук).

В состав *промежуточного* мозга входят таламус и гипоталамус. Таламус участвует в образовании условных рефлексов и выработке двигательных навыков, формировании эмоций человека, его мимики, ощущений боли. Гипотоламус участвует в регуляции состоянии бодрствования и сна, обмене веществ, поддержании постоянство температуры, нормального уровня кровяного давления, водного баланса, регулирует чувство голода и насыщения.

Конечный мозг состоит из правого и левого полушарий большого мозга. В каждом из полушарий различает кору большого мозга и обонятельного мозга. Кора является анатомической основой высшей нервной (психической) деятельности и регулирует все функции организма.

К *периферической* нервной системе, как уже сообщалось, относятся нервные образования соединяющие ЦНС с органами. В анатомии насчитывают 12 пар нервов головного мозга — зрительный, глазодвигательный, тройничный, лицевой и др.

Вегетативная нервная система — специализированный отдел единой нервной системы мозга — регулируется корой больших полушарий. В отличие от соматической нервной системы, иннервирующей произвольную (скелетную) мускулатуру и обеспечивающей общую чувствительность тела и других органов чувств, вегетативная нервная система регулирует деятельность внутренних органов — дыхания, выделения, кровеобращения, размножения, желез внутренней секреции и т. д. Вегетативная нервная система подразделяется на симпатическую и парасимпатическую.

С участием *симпатической* нервной системы протекают многие важные рефлексы в организме, направленные на обеспечение его деятельного состояния, в том числе его двигательной активности. К ним относятся рефлексы расширения бронхов, учащения и усиления сердечных сокращений, расширения сосудов сердца и легких при одновременном сужении сосудов кожи и органов брюшной полости (обеспечение перераспределения крови), выброс депонированной крови из печени и селезенки, расщепление гликогена до глюкозы в печени (мобилизация углеводных источников энергии), усиление деятельности желез внутренней секреции и потовых желез. Симпатическая нервная система снижает деятельность ряда внутренних органов: в результате сужения сосудов в почках уменьшаются процессы мочеобразования, угнетается секреторная и моторная деятельность органов желудочно-кишечного тракта; предотвращается акт мочеиспускания — расслабляется мышца стенки мочевого пузыря и сокращается его сфинктер.

Повышенная активность организма сопровождается симпатическим рефлексом расширения зрачка. Огромное значение для двигательной деятельности организма имеет трофическое влияние симпатических нервов на скелетные мышцы, улучшающие их обмен веществ и функциональное состояние, снижающее утомление. Симпатический отдел нервной системы не только повышает уровень функционирования организма, но и мобилизует его скрытые функциональные резервы, активирует деятельность мозга, повышает защитные реакции (иммунные реакции, барьерные механизмы и др.) запускает гормональные реакции. Особое значение имеет симпатическая нервная система при развитии стрессовых состояний, в наиболее сложных условиях жизнедеятельности.

Парасимпатическая нервная система осуществляет сужение бронхов, замедление и ослабление сердечных сокращений; сужение сосудов сердца; усиление процессов мочеобразования в почках. Парасимпатическая нервная система преимущественно оказывает пусковые влияние: сужение зрачка, бронхов, включение деятельности пищеварительных желез и т. п.

Деятельность парасимпатического отдела вегетативной нервной системы направлена на текущую регуляцию функционального состояния, на поддержание постоянства внутренней среды организма — гомеостаза. Парасимпатический отдел обеспечивает восстановление различных физиологических

показателей, резко измененных после напряженной работы, оказывает антистрессовое состояние.

4.7. Эндокринная и сенсорная системы

Железы внутренней секреции, или эндокринные железы, вырабатывают особые биологические вещества — гормоны. Гормоны обеспечивают гуморальную (через кровь, лимфу) регуляцию физиологических процессов в организме, попадая во все органы и ткани. Часть гормонов продуцируется только в определенный период, большинство же — на протяжении всей жизни. Они могут тормозить или ускорять рост организма, половое созревание, физическое и психическое развитие, регулировать обмен веществ, деятельность внутренних органов и т. д.

К железам внутренней секреции относятся:

щитовидная железа (гормон тироксин — усиливает азотистый обмен в тканях, участвует в повышении температуры тела, воздействует на частоту сердечных сокращений, артериальное давление, потоотделение);

околощитовидные железы (гормон паратерин — гиперфункция гормона вызывает потерю костной тканью кальция и фосфора, деформацию костей, появлению камней в почках, ухудшению процессов внимания и памяти; гипофункция вызывает судороги);

зобная железа (гормон тимозин — обеспечивает иммунитет организма);

надпочечники — железа состоит из коркового и мозгового слоя (гормоны коркового слоя — кортикостероиды — регулируют минеральный и углеводный обмен, влияют на половые функции и пр.; гормоны мозгового слоя — адреналин и норадреналин, которые поступая в кровь, оказывают возбуждающее действие на симпатическую нервную систему — суживают сосуды кожи, повышают кровеносное давление, снижают тонус желудочно-кишечного тракта, усиливают сократимость и возбудимость сердца);

поджелудочная железа (гормон инсулин и глюкагон участвуют в углеводном и липидном обмене; при поражении отростков поджелудочной железы развивается сахарный диабет, при котором сахар усиленно выводится из организм через почки);

гипофиз — вырабатывает гормоны, оказывающие влияние на половые железы, щитовидную железу, на рост человека; недостаток гормона развивает карликовость, избыток — гигантизм;

половые железы (мужские гормоны — андрогены и женские — эстрогены) и ряд других.

Сенсорные системы. Сложные акты поведения человека во внешней среде требуют постоянного анализа окружающего мира, а также осведомленности нервных центров о состоянии внутренних органов. Первостепенная роль в этом принадлежит сенсорным анализаторам, которые, в свою очередь, представлены системой анализаторов и рецепторов. Рецепторами называют

специальные образования, трансформирующие (преобразующие) энергию внешнего раздражения в специфическую энергию нервного импульса. По характеру воспринимаемой среды рецепторы делятся на: экстерорецепторы, принимающие раздражения из внешней среды, (рецепторы органов слуха, зрения, обоняния, вкуса), интерорецепторы, реагирующие на раздражения из внутренних органов, и проприорецепторов, воспринимающих раздражения из двигательного аппарата (мышц, сухожилий, суставных сумок). Все рецепторы приспособлены к восприятию строго определенных раздражителей — света, звука и т. п. При чрезмерном раздражении рецептора может возникнуть ощущение боли. В свою очередь, сенсорные системы обладают способностью адаптироваться к силе раздражителя (человек не замечает тиканья часов, шума за окном и т. д.). К сенсорным системам относится и система анализаторов — зрительная, слуховая, вестибулярная, двигательная, а также сенсорные системы кожи, вкуса и обоняния. Каждая из них выполняет свои специфические функции. Например, зрительная сенсорная система служит для восприятия и анализа световых раздражителей, слуховая — звуковых колебаний внешней среды и т. п.). Надеемся, что функции анализаторов знакомы вам из школьной программы.

4.8. Функциональные изменения в организме при физических нагрузках

Физические нагрузки вызывают перестройки различных функций организма, особенности и степень которых зависят от мощности, характера двигательной деятельности, уровня здоровья и тренированности. О влиянии физических нагрузок на человека можно судить только на основе всестороннего учета совокупности реакций целостного организма, включая реакцию со стороны центральной нервной системы (ЦНС), сердечно-сосудистой системы (ССС), дыхательной системы, обмена веществ и др. Следует подчеркнуть, что выраженность изменений функций организма в ответ на физическую нагрузку зависит, прежде всего, от индивидуальных особенностей человека и уровня его тренированности. В основе развития тренированности, в свою очередь, лежит процесс адаптации организма к физическим нагрузкам. Адаптация — совокупность физиологических реакций, лежащая в основе приспособлений организма к изменению окружающих условий и направленная на сохранение относительного постоянства его внутренней среды — гомеостаза.

В понятиях «адаптация, адаптированность», с одной стороны, и «тренировка, тренированность», с другой стороны, много общих черт, главной из которых является достижение нового уровня работоспособности. Адаптация организма к физическим нагрузкам заключается в мобилизации и использовании функциональных резервов организма, совершенствовании имеющихся физиологических механизмов регуляции. Никаких новых функциональных явлений и механизмов в процессе адаптации не наблюдается, просто имею-

щиеся уже механизмы начинают работать совершеннее, интенсивнее и экономичнее (урежение сердцебиения, углубление дыхания и др.).

Процесс адаптации связан с изменениями в деятельности всего комплекса функциональных систем организма (сердечно-сосудистая, дыхательная, нервная, эндокринная, пищеварительная, сенсомоторная и др. системы). Разные виды физических упражнений предъявляют различные требования к отдельным органам и системам организма. Правильно организованный процесс выполнения физических упражнений создает условия для совершенствования механизмов, поддерживающих гомеостаз. В результате этого сдвиги, происходящие во внутренней среде организма, быстрее компенсируются, клетки и ткани становятся менее чувствительными к накоплению продуктов обмена веществ.

Среди физиологических факторов, определяющих степень адаптации к физическим нагрузкам, большое значение имеют показатели состояния систем, обеспечивающих транспорт кислорода, а именно — система крови и дыхательная система.

Кровь и кровеносная система

В организме взрослого человека содержится 5–6 л крови. В состоянии покоя 40–50 % ее не циркулирует, находясь в так называемом «депо» (селезенка, кожа, печень). При мышечной работе увеличивается количество циркулирующей крови (за счет выхода из «депо»). Происходит ее перераспределение в организме: большая часть крови устремляется к активно работающим органам: скелетным мышцам, сердцу, легким. Изменения в составе крови направлены на удовлетворение возросшей потребности организма в кислороде. В результате увеличения количества эритроцитов и гемоглобина повышается кислородная емкость крови, т. е. увеличивается количество кислорода, переносимого в 100 мл крови. При занятиях спортом увеличивается масса крови, повышается количество гемоглобина (на 1–3 %), увеличивается число эритроцитов (на 0,5–1 млн. в кубическом мм), возрастает количество лейкоцитов и их активность, что повышает сопротивляемость организма к простудным и инфекционным заболеваниям. В результате мышечной деятельности активизируется система свертывания крови. Это одно из проявлений срочной адаптации организма к воздействию физических нагрузок и возможным травмам с последующим кровотечением. Программируя «с опережением» такую ситуацию, организм повышает защитную функцию системы свертывания крови.

Двигательная деятельность оказывает существенное влияние на развитие и состояние всей системы кровообращения. В первую очередь, изменяется само сердце: увеличиваются масса сердечной мышцы и размеры сердца. У тренированных масса сердца составляет в среднем 500 г, у нетренированных — 300.

Сердце человека чрезвычайно легко поддается тренировке и как ни один дру-гой орган нуждается в ней. Активная мышечная деятельность способствует гипер-

трофии сердечной мышцы и увеличению его полостей. Объем сердца у спортсменов больше на 30 %, чем у не занимающихся спортом. Увеличение объема сердца, особенно его левого желудочка, сопровождается повышением его сократительной способности, увеличением систолического и минутного объемов.

Физическая нагрузка способствует изменению деятельности не только сердца, но и кровеносных сосудов. Активная двигательная деятельность вызывает расширение кровеносных сосудов, снижение тонуса их стенок, повышение их эластичности. При физических нагрузках почти полностью раскрывается микроскопическая капиллярная сеть, которая в покое задействована всего на 30–40 %. Все это позволяет существенно ускорить кровоток и, следовательно, увеличить поступление питательных веществ и кислорода во все клетки и ткани организма.

Работа сердца характеризуется непрерывной сменой сокращений и расслаблений его мышечных волокон. Сокращение сердца называется систолой, расслабление — диастолой. Количество сокращений сердца за одну минуту — частота сердечных сокращений (ЧСС). В состоянии покоя у здоровых нетренированных людей ЧСС находится в пределах 60–80 уд/мин, у спортсменов — 45–55 уд/мин и ниже. Урежение ЧСС в результате систематических занятий физическими упражнениями называется брадикардией. Брадикардия препятствует «изнашиванию миокарда и имеет важное оздоровительное значение. На протяжении суток, в течение которых не было тренировок и соревнований, сумма суточного пульса у спортсменов на 15–20 % меньше, чем у лиц того же пола и возраста, не занимающихся спортом.

Мышечная деятельность вызывает учащение сердцебиения. При напряженной мышечной работе ЧСС может достигать 180–215 уд/мин. Следует отметить, что увеличение ЧСС имеет прямо пропорциональную зависимость с мощностью мышечной работы. Чем больше мощность работы, тем выше показатели ЧСС. Тем не менее, при одинаковой мощности мышечной работы ЧСС у менее подготовленных лиц значительно выше. Кроме того, при выполнении любой двигательной деятельности ЧСС изменяется в зависимости от пола, возраста, самочувствия, условий занятий (температура, влажность воздуха, время суток и т. д.).

При каждом сокращении сердца кровь выбрасывается в артерии под большим давлением. В результате сопротивления кровеносных сосудов ее передвижение в них создается давлением, называемое кровяным давлением. Наибольшее давление в артериях называют систолическим или максимальным, наименьшее — диастолическим или минимальным. В состоянии покоя у взрослых людей систолическое давление составляет 100–130 мм рт. ст., диастолическое — 60–80 мм рт. ст. По данным Всемирной организации здравоохранения, артериальное давление до 140/90 мм рт. ст. является нормотоническим, выше этих величин — гипертоническим, а ниже 100–60 мм рт. ст. — гипотоническим. В процессе выполнения физических упражнений, а также после окончания тренировки, артериальное давление обычно повышается. Степень его повышения зависит от мощности выполненной физической нагрузки и уровня тренированности человека. Диастолическое давление изменяется менее выражено, чем систолическое. После длительной и очень напряженной деятельности (например, участие в марафоне) диастолическое давление

(в некоторых случаях и систолическое) может быть меньше, чем до выполнения мышечной работы. Это обусловлено расширением сосудов в работающих мышцах.

Важными показателями производительности сердца являются систолический и минутный объем. Систолический объем крови (ударный объем) — это количество крови, выбрасываемой правым и левым желудочками при каждом сокращении сердца. Систолический объем в покое у тренированных — 70–80 мл, у нетренированных — 50–70 мл. Наибольший систолический объем наблюдается при ЧСС 130–180 уд/мин. При ЧСС свыше 180 уд/мин он сильно снижается. Поэтому наилучшие возможности для тренировки сердца имеют физические нагрузки в режиме 130–180 уд/мин. Минутный объем крови — количество крови, выбрасываемое сердцем за одну минуту, зависит от ЧСС и систолического объема крови. В состоянии покоя минутный объем крови (МОК) составляет в среднем 5–6 л, при легкой мышечной работе увеличивается до 10–15 л, при напряженной физической работе у спортсменов может достигать 42 л и более. Увеличение МОК при мышечной деятельности обеспечивает повышенную потребность органов и тканей в кровоснабжении.

Дыхательная система

Изменения показателей дыхательной системы при выполнении мышечной деятельности оцениваются по частоте дыхания, жизненной емкости легких, потреблением кислорода, кислородным долгом и другими более сложными лабораторными исследованиями. Частота дыхания (смена вдоха и выдоха и дыхательной паузы) — количество дыханий в одну минуту. Определение частоты дыхания производится по спирограмме или по движению грудной клетки. Средняя частота у здоровых лиц 16–18 в минуту, у спортсменов — 8–12. При физической нагрузке частота дыхания увеличивается в среднем в 2–4 раза и составляет 40–60 дыхательных циклов в минуту. С учащением дыхания неизбежно уменьшается его глубина. Глубина дыхания — это объем воздуха спокойного вдоха и ли выдоха при одном дыхательном цикле. Глубина дыхания зависит от роста, веса, размера грудной клетки, уровня развития дыхательных мышц, функционального состояния и степени тренированности человека. Жизненная емкость легких (ЖЕЛ) — наибольший объем воздуха, который можно выдохнуть после максимального вдоха. У женщин ЖЕЛ составляет в среднем 2,5–4 л, у мужчин — 3,5–5 л. Под влиянием тренировки ЖЕЛ возрастает, у хорошо тренированных спортсменов она достигает 8 л. Минутный объем дыхания (МОД) характеризует функцию внешнего дыхания, определяется произведением частоты дыхания на дыхательный объем. В покое МОД составляет 5–6 л, при напряженной физической нагрузке возрастает до 120–150 л/мин и более. При мышечной работе ткани, особенно скелетные мышцы, требуют значительно больше кислорода, чем в покое, и вырабатывают больше углекислого газа. Это приводит к увеличению МОД, как за счет учащения дыхания, так и вследствие увеличения дыхательного объема. Чем тяжелее работа, тем относительно больше МОД (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Средние показатели реакции сердечно-сосудистой и дыхательной систем на физическую нагрузку

Параметры	В покое	При интенсивной физической нагрузке
Частота сердечных сокращений	50–75 уд/мин	160–210 уд/мин
Систолическое артериальное давление	100–130 мм рт. ст.	200–250 мм рт. ст.
Систолический объем крови	60–70 мл	150–170 мл и выше
Минутный объем крови (МОК)	4–5 л/мин	30–35 л/мин и выше
Частота дыхания	14 раз/мин	60–70 раз/мин
Альвеолярная вентиляция (эффективный объем)	5 л/мин	120 л/мин и более
Минутный объем дыхания	5–6 л/мин	120–150 л/мин

Максимальное потребление кислорода (МПК) является основным показателем продуктивности как дыхательной, так и сердечно-сосудистой (в целом — кардио-респираторной) систем. МПК — это наибольшее количество кислорода, которое человек способен потребить в течение одной минуты на 1 кг веса. МПК измеряется количеством миллилитров за 1 мин на 1 кг веса (мл/мин/кг). МПК является показателем аэробной способности организма, т. е. способности совершать интенсивную мышечную работу, обеспечивая энергетические расходы за счет кислорода, поглощаемого непосредственно во время работы. Величину МПК можно определить математическим расчетом, используя специальные номограммы; можно в лабораторных условиях при работе на велоэргометре или восхождении на ступеньку. МПК зависит от возраста, состояния сердечно-сосудистой системы, массы тела. Для сохранения здоровья необходимо обладать способностью потреблять кислород как минимум на 1 кг — женщинам не менее 42 мл/мин, мужчинам — не менее 50 мл/мин. Когда в клетки тканей поступает меньше кислорода, чем нужно для полного обеспечения потребности в энергии, возникает кислородное голодание, или гипоксия.

Кислородный долг — это количество кислорода, которое требуется для окисления продуктов обмена веществ, образовавшихся при физической работе. При интенсивных физических нагрузках, как правило, наблюдается метаболический ацидоз различной степени выраженности. Его причиной является «закисление» крови, т. е. накопление в крови метаболитов обмена веществ (молочной, пировиноградной кислот и др.). Для ликвидации этих продуктов обмена нужен кислород — создается кислородный запрос. Когда кислородный запрос выше потребления кислорода в данный момент, образуется кислородный долг. Нетренированные люди способны продолжить работу при кислородном долге 6–10 л, спортсмены могут выполнять такую нагрузку, после которой возникает кислородный долг в 16–18 л и более. Кислородный долг ликвидируется после окончания работы. Время его ликвидации зависит

от длительности и интенсивности предыдущей работы (от нескольких минут до 1,5 ч).

Пищеварительная система

Систематически выполняемые физические нагрузки повышают обмен веществ и энергии, увеличивают потребность организма в питательных веществах, стимулирующих выделение пищеварительных соков, активизируют перистальтику кишечника, повышают эффективность процессов пищеварения.

Однако при напряженной мышечной деятельности могут развиваться тормозные процессы в пищеварительных центрах, уменьшающие кровоснабжение различных отделов желудочно-кишечного тракта и пищеварительных желез в связи с тем, что необходимо обеспечивать кровью усиленно работающие мышцы. В то же время сам процесс активного переваривания обильной пищи в течение 2–3 ч после ее приема снижает эффективность мышечной деятельности, так как органы пищеварения в этой ситуации оказываются как бы более нуждающимися в усиленном кровообращении. Кроме того, наполненный желудок приподнимает диафрагму, тем самым, затрудняя деятельность органов дыхания и кровообращения. Вот почему физиологическая закономерность требует принимать пищу за 2,5–3,5 ч до начала тренировки, и через 30–60 минут после нее.

Выделительная система

При мышечной деятельности значительна роль органов выделения, которые выполняют функцию сохранения внутренней среды организма. Желудочно-кишечный тракт выводит остатки переваренной пищи; через легкие удаляются газообразные продукты обмена веществ; сальные железы, выделяя кожное сало, образуют защитный, смягчающий слой на поверхности тела; слезные железы обеспечивают влагу, смачивающую слизистую оболочку глазного яблока. Однако основная роль в освобождении организма от конечных продуктов обмена веществ принадлежит почкам, потовым железам и легким.

Почки поддерживают в организме необходимую концентрацию воды, солей и других веществ; выводят конечные продукты белкового обмена; вырабатывают гормон ренин, влияющий на тонус кровеносных сосудов. При больших физических нагрузках потовые железы и легкие, увеличивая активность выделительной функции, значительно помогают почкам в выводе из организма продуктов распада, образующихся при интенсивно протекающих процессах обмена веществ.

Нервная система в управлении движениями

При управлении движениями ЦНС осуществляет очень сложную деятельность. Для выполнения четких целенаправленных движений необходимо непрерывное поступление в ЦНС сигналов о функциональном состоянии мышц, о степени их сокращения и расслабления, о позе тела, о положении суставов и угла сгиба в них. Вся эта информация передается от рецепторов сенсорных систем и особенно от рецепторов двигательной сенсорной систе-

мы, расположенных в мышечной ткани, сухожилиях, суставных сумках. От этих рецепторов по принципу обратной связи и по механизму рефлекса ЦНС поступает полная информация о выполнении двигательного действия и о сравнении ее с заданной программой. При многократном повторении двигательного действия импульсы от рецепторов достигают двигательных центров ЦНС, которые соответственным образом меняют свою импульсацию, идущую к мышцам, с целью совершенствования разучиваемого движения до уровня двигательного навыка.

Двигательный навык — форма двигательной деятельности, выработанная по механизму условного рефлекса в результате систематических упражнений. Процесс формирования двигательного навыка проходит три фазы: генерализации, концентрации, автоматизации.

Фаза *генерализации* характеризуется расширением и усилением процессов возбуждения, в результате чего в работу вовлекаются лишние группы мышц, а напряжение работающих мышц оказывается неоправданно большим. В этой фазе движения скованы, неэкономичны, неточны и плохо координированы.

Фаза *концентрации* характеризуется снижением процессов возбуждения благодаря дифференцированному торможению, концентрируясь в нужных зонах головного мозга. Исчезает излишняя напряженность движений, они становятся точными, экономичными, выполняются свободно, без напряжения, стабильно.

В фазе *автоматизации* навык уточняется и закрепляется, выполнение отдельных движений становится как бы автоматическим и не требует контроля сознания, которое может быть переключено на окружающую обстановку, поиск решений и т. п. Автоматизированный навык отличается высокой точностью и стабильностью всех составляющих его движений.

4.9. Внешняя среда. Природные и социально-экологические факторы и их воздействие на организм

Организм человека как единая саморегулирующая и саморазвивающая система существует не изолирована, а в тесном взаимодействии с окружающей её внешней средой. Вне окружающей среды жизнь невозможна. Вся жизнедеятельность человека осуществляется в условиях постоянного воздействия различных факторов окружающей внешней среды: *физических* — колебания атмосферного давления, температуры окружающей среды, проникающей радиации, шума, вибрации и др.; *химических* — различные вещества в воде, воздухе, земле, пище; *биологических* — инфекции, вирусы.

Из внешней среды в организм поступают вещества, необходимые для его жизнедеятельности и развития, как полезных, так и вредных, которые как бы стремятся нарушить постоянство внутренней среды. Организм же за счет взаимодействия функциональных систем всячески стремится сохранить его

постоянство или гомеостаз. Благодаря деятельности ряда регуляторных механизмов организм способен сохранять постоянство внутренней среды при резких изменениях различных характеристик внешней среды — больших перепадов температур, повышения или понижения влажности воздуха, освещения и т. п. Чем точнее и надежнее регулируется постоянство внутренней среды организма, тем в меньшей степени организм зависит от изменений внешних условий. Поддержание гомеостаза является основой физиологической адаптации (приспособление) организма к изменениям окружающей среды.

В свою очередь, важным фактором адаптации человека является тренировка. Так, регулярная тренировка холодом, водными процедурами (закаливание), выполнение физических упражнений в различных температурных режимах обеспечивает повышение сопротивляемости организма к изменениям температуры.

Мышечная деятельность вызывает напряжения всех функциональных систем, сопровождается гипоксией, что также тренирует механизмы регуляции, улучшает восстановительные процессы, совершенствует адаптацию к неблагоприятным условиям среды (к изменениям давления, недостатку кислорода, перепадам температур, шумам и т. д.). Регулярные занятия физическими упражнениями в условиях повышенной или пониженной температуры и влажности воздуха приводят к адаптации (акклиматизации) организма, что характеризуется повышением работоспособности в этих условиях. Лица, хорошо физически подготовленные, легче переносят жару, холод, перепады давления.

Деятельность целого организма в единстве с внешней средой определяется не только биологическими и физическими, но и *экологическими* факторами. Загрязнение атмосферы, почвы, подземных вод, повышения радиации — все это создает жесткие условия воздействия внешней среды на человека. Значительная часть болезней современного человека — результат ухудшения окружающей его экологической обстановки. Все это во многом может препятствовать широкому использованию средств физической культуры на открытом воздухе. Не рекомендуется выполнять какие-либо формы физических упражнений (утренние, вечерние оздоровительные пробежки, длительная вело езда, катание на роликах и др.) вдоль автомобильных дорог, стоянок, вблизи промышленных предприятий. При выполнении физических упражнений повышаются функции сердечно-сосудистой и дыхательной систем, увеличивается газообмен (человек больше вдыхает и выдыхает), а, следовательно, повышается негативное воздействие грязного воздуха на организм человека. И здесь следует отметить, что регулярные занятия физическими упражнениями и спортом повышают специфическую устойчивость организма к экологически неблагоприятным факторам.

Успехи науки и техники, наряду с полезным эффектом приводят в современной жизни и к неблагоприятным последствиям *социального* характера. Автоматизация, компьютеризация, постоянный дефицит времени снижают

необходимый уровень двигательной активности. В результате образ жизни большинства людей, особенно тех, чей профессиональный труд связан с большими умственными нагрузками, стал характеризоваться недостаточной двигательной активностью — *гипокинезией*. Установлено, что гипокинезический режим вызывает, в конечном итоге, нарушение общебиологического баланса, приводя к состоянию, которое называется *гиподинамией*. Гиподинамия проявляется в снижении обмена веществ, понижении уровня функционирования ряда систем организма, атрофии мышц, деминерализации костей.

При гипокинезическом режиме особенно страдает сердечно-сосудистая система. Объем сердца у физически не активных людей меньше, чем у спортсменов. Это обусловлено относительно тонким мышечным слоем и малыми полостями желудочков сердца. Даже при небольшой физической нагрузке такое сердце не может обеспечить необходимое увеличение кровотока, что ведет к утомлению человека и невозможности продолжать работу.

Наряду с недостаточным развитием сердца у малоактивных людей наблюдается ряд неблагоприятных изменений в сосудистой системе. У них раньше и быстрее происходят склеротические изменения в сосудах сердца и головного мозга, препятствующие усилению кровоснабжения этих жизненно важных органов при физических и эмоциональных напряжениях. Изменения функционального состояния стенок артериальных сосудов способствует повышению кровяного давления. Это неблагоприятно отражается на жизнедеятельности организма не только при физических нагрузках, но и при мышечном покое.

Гипокинезия приводит к недостаточному развитию системы дыхания. В обычных условиях человек может это не замечать, поскольку основными потребителями кислорода являются мышцы, а их масса у нетренированных невелика. Кроме того, в состоянии покоя его много не требуется. Однако если нетренированные мышцы выполняют даже небольшую нагрузку, то потребность в кислороде резко возрастает. Органы дыхания и кровообращения не могут ее удовлетворить. В связи с этим в организме накапливаются продукты окисления и потому малоактивный человек вынужден прекращать работу.

При недостаточной двигательной активности ухудшается питание мышц. В результате уменьшается их объем, сила, растяжимость и упругость. Мышцы становятся вялыми, дряблыми, теряют скоростные качества, выносливость, резко снижается их сила. Кости становятся более хрупкими, уменьшается подвижность в суставах. Из-за ослабления мышц, связочного и костного аппарата туловища и нижних конечностей нарушается осанка, деформируются позвоночник, грудная клетка, изменяется свод стопы. Это влечет за собой целую цепь дальнейших нарушений здоровья, снижение работоспособности.

Лекция 5

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ ФИЗИЧЕСКИМИ УПРАЖНЕНИЯМИ

5.1. Мотивация и целенаправленность самостоятельных занятий

По мнению многих ученых, оптимальный двигательный режим для молодых людей в возрасте от 14 до 25 лет должен составлять 8–10 часов в неделю. В настоящее время наблюдается значительное несоответствие между умственной и физической нагрузкой студентов, поскольку на предмет «Физическая культура», согласно учебному плану, предусматривается всего 4 академических часа в неделю, что составляет при любой организации учебных занятий лишь 30–35 % оптимального суточного объема движений. Поэтому важно находить дополнительные резервы увеличения двигательного режима студентов. И здесь большое значение имеет самостоятельная форма занятий физическими упражнениями.

Выбор направленности и формы самостоятельных занятий зависит, прежде всего, от мотивации человека. Формирование мотивов, переходящих в потребность регулярных занятий физическими упражнениями, происходит под воздействием различных факторов, влияющих на образ жизни человека, в том числе, традиции в семье, веяния моды, пропаганды ЗОЖ.

Целями самостоятельных занятий могут быть: активный отдых, укрепление и коррекция здоровья, повышение уровня физического развития и физической подготовленности, выполнение различных тестов, достижение спортивных результатов и т. д.

Конкретная направленность и организационные формы использования самостоятельных занятий зависят от пола, возраста, состояния здоровья, уровня физической и спортивной подготовленности занимающихся. Можно выделить гигиеническую, оздоровительно-рекреативную (рекреация — восстановление), общеподготовительную, спортивную, профессионально-прикладную и лечебную направленности:

гигиеническая — предполагает использование средств физической культуры для восстановления работоспособности и укрепления здоровья;

оздоровительно-рекреативная — предусматривает использование средств физической культуры после окончания рабочего дня, в выходные дни и в период каникул в целях послерабочего восстановления организма и профилактики переутомления и перенапряжения;

общеподготовительная — обеспечивает всестороннюю физическую подготовленность и поддержание ее в течение длительного периода времени на уровне требований и норм какой-либо системы тестов, например, на уров-

не контрольных тестов для оценки физической подготовленности учебной программы для студентов вузов Российской Федерации;

спортивная — имеет целью повышение спортивного мастерства занимающихся, участие в спортивных соревнованиях, достижение возможно высоких спортивных результатов;

профессионально-прикладная направленность предусматривает использование средств физической культуры и спорта в системе научной организации труда и для подготовки к профессиональной деятельности с учетом особенностей получаемой специальности;

лечебное направление заключается в использовании физических упражнений, закаливающих факторов и гигиенических мероприятий в общей системе лечебных мер по восстановлению здоровья или определенных функций организма, сниженных или утраченных в результате заболеваний или травмы.

5.2. Формы самостоятельных занятий

Организационные формы самостоятельных занятий физическими упражнениями и спортом определяются их целью и задачами. Существуют три основные формы самостоятельных занятий: утренняя гигиеническая гимнастика, упражнения в течение учебного (рабочего) дня, самостоятельные тренировочные занятия в свободное время.

Утренняя гигиеническая гимнастика (УГГ) включается в распорядок дня в утренние часы после пробуждения от сна.

В комплекс УГГ следует включать упражнения для всех групп мышц, упражнения на гибкость и дыхательные упражнения. Не рекомендуется выполнять упражнения статического характера, со значительными отягощениями, на выносливость (например, длительный бег до утомления).

При составлении комплексов и их выполнении рекомендуется физическую нагрузку на организм повышать постепенно, с максимумом в середине или второй половине комплекса.

Каждое упражнение следует начинать в медленном темпе и с небольшой амплитудой движений с постепенным ее увеличением. Между сериями из 2–3 упражнений (а для силовых упражнений — после каждого) выполняются упражнения на расслабление или медленный бег (20–30 с).

Дозировка физических упражнений, т. е. увеличение или уменьшение их интенсивности, обеспечивается: изменением амплитуды движений; ускорением или замедлением темпа; увеличением или уменьшением числа повторений упражнений; включением в работу большего или меньшего числа мышечных групп; увеличением или сокращением пауз для отдыха.

УГГ может сочетаться с самомассажем и закаливанием организма. Сразу же после выполнения комплекса УГГ рекомендуется сделать самомассаж

основных мышечных групп ног, туловища и рук и выполнить водные процедуры с учетом правил и принципов закаливания.

Упражнения в течение учебного (рабочего) дня обеспечивают предупреждение наступающего утомления, способствуют поддержанию высокой работоспособности на длительное время без перенапряжения. Упражнения выполняются в перерывах между учебными занятиями. Обычно это — простые общеразвивающие упражнения (наклоны, повороты, круговые движения головы; круговые движения в плечевых, локтевых суставах и т. п.); изометрические (максимальное напряжение и расслабление мышц кистей, рук, ног, туловища); специальные для мышц глаз (движения глаз вправо-влево, вверх-вниз, круговые движения).

Самостоятельные тренировочные занятия можно проводить индивидуально и в группе. Групповая тренировка более эффективна, чем индивидуальная. Необходимо помнить, что самостоятельные занятия в одиночку можно проводить только на стадионах, спортивных площадках, в парках, в черте населенных пунктов. Самостоятельные индивидуальные занятия на местности или в лесу вне населенных пунктов во избежание несчастных случаев не допускаются. Выезд или выход для тренировок за пределы населенного пункта может проводиться группами из 3–5 человек и более. При этом должны быть приняты все необходимые меры предосторожности по профилактике спортивных травм, обморожения и т. д. Не допускается также отставание от групп отдельных занимающихся.

Выбор количества занятий в неделю зависит в значительной степени от цели самостоятельных занятий. Для поддержания физического состояния на достигнутом уровне достаточно заниматься два раза в неделю. Для его повышения — не менее трех раз, а для достижения заметных спортивных результатов — 4–5 раз в неделю и более. Тренироваться надо через 2–3 часа после приема пищи. Не рекомендуется тренироваться утром сразу после сна натощак, а также поздно вечером.

Тренировочные занятия, как правило, носят комплексный характер, т. е. должны способствовать развитию всего комплекса физических качеств, а также укреплению здоровья и повышению общей работоспособности организма. Специализированный характер занятий требует более индивидуального подхода и предварительной подготовки, т. е. специального отбора тренировочных средств, нагрузок, места и времени занятий, консультаций со специалистами.

Самостоятельные тренировочные занятия проводятся по общепринятой структуре: подготовительная (разминка), основная и заключительная части.

5.3. Выбор видов спорта или систем физических упражнений

Выбор индивидуального вида спорта, той или иной системы физических упражнений зависит, прежде всего, от мотивации человека. В большинстве случаев у юношей сильно выражено стремление добиться через занятия

спортом самоутверждения, социального признания, хорошего развития физических качеств. У девушек, как правило, преобладает желание иметь красивое телосложение. В целом мотивы, побуждающие к занятиям спортом вообще и к выбору одного из них, в частности, могут быть различны.

Выбор видов спорта для укрепления здоровья, коррекции недостатков физического развития и телосложения.

Занятия отдельными видами спорта, системами физических упражнений могут способствовать развитию определённых органов и систем организма. С помощью правильно подобранных физических упражнений можно улучшить многие показатели физического развития (масса тела, окружность грудной клетки, жизненная емкость лёгких).

При выборе вида спорта с целью коррекции недостатков физического развития и телосложения следует сформировать своё твёрдое представление об идеале телосложения, так как каждый вид спорта влияет различно на те или другие антропометрические показатели.

Наибольшие возможности, например, в избирательной коррекции отдельных недостатков телосложения, представляют регулярные занятия атлетической гимнастикой, шейпингом, аэробикой, гантельной гимнастикой, т. е. теми упражнениями, которые и направлены преимущественно на решение подобных задач.

Выбор видов спорта, повышающих функциональные возможности организма.

Для повышения функциональных возможностей организма, совершенствования деятельности сердечно-сосудистой и дыхательной систем наиболее эффективно выбирать и самостоятельно заниматься циклическими видами спорта: бег, ходьба на лыжах, плавание, велоезда, катание на коньках.

Выбор видов спорта и систем физических упражнений для активного отдыха.

С этой точки зрения рекомендуется выбирать вид спорта или систему физических упражнений с учётом темперамента, психологической настроенности, эмоционального состояния.

Так, если человек легко отвлекается от работы, а затем быстро в неё включается, если он общителен с окружающими, эмоционален в спорах, для него предпочтительными будут игровые виды спорта или единоборства; если же он усидчив, сосредоточен в работе и склонен к однородной деятельности без постоянного переключения внимания, если способен в течение продолжительного времени выполнять физически тяжёлую работу, значит, ему подойдут занятия длительным бегом, лыжным спортом, плаванием, велоспортом; а если замкнут, необщителен, неуверен в себе или чрезмерно чувствителен к мнению окружающих, ему не стоит заниматься постоянно в группах.

Психофизическая подготовка к будущей профессии и овладение жизненно необходимыми умениями и навыками.

Выбор видов спорта, систем физических упражнений, в этом случае проводится, чтобы достичь лучшей специальной психофизической подготовленности к избранной профессии. Так, если ваша будущая профессия требует повышенной общей выносливости, то вы должны выбирать виды спорта, в наибольшей степени развивающих это качество (бег на длинные дистанции, лыжные гонки и т. п.). Если ваш будущий труд связан с длительным напряжением зрительного анализатора, освойте виды спорта и упражнения, тренирующие микро-мышцы глаза (настольный теннис, теннис, бадминтон).

5.4. Особенности самостоятельных занятий избранным видом спорта

Самостоятельные тренировочные занятия можно проводить с использованием различных видов спорта или систем физических упражнений. При этом, прежде всего, рекомендуются наиболее общедоступные виды спорта, в основном циклические, менее других требующие высокого уровня спортивной подготовленности, а также наиболее популярные игровые виды спорта, если занимающиеся уже обладают достаточным уровнем практических навыков в данном виде спорта.

Оздоровительный бег является одной из самых лучших и доступных форм занятий физической культурой. Благодаря естественности и простоте движений, возможностям проводить тренировки практически в любых условиях и в процессе занятий добиваться значительного расширения функциональных возможностей, бег является самым распространенным и массовым увлечением во многих странах мира.

Чтобы повысить эффективность занятий оздоровительным бегом, необходимо освоить рациональную технику, научиться правильно, дозировать продолжительность и скорость бега.

Ошибки в технике бега (нарушения в осанке, неправильная постановка стопы и др.) могут вызывать болезненные ощущения отдельных мышечных групп, сухожилий, суставов ног, спины. Чтобы избежать этого, необходимо правильное выполнение беговых движений. Лучшей техникой бега обладают те бегуны, которые используют постановку ноги на носок. Такая постановка увеличивает силу отталкивания за счет энергии упругой деформации в мышцах ног и снижает время опоры. Нога ставится на грунт мягким, загребающим движением. Если это вызывает трудности, можно осуществлять постановку стопы с пятки с последующим перекатом на носок. Нужно стремятся снизить горизонтальное торможение в фазе амортизации, то есть ставить ногу с «загребающим» движением ближе к проекции центра тяжести тела. Избегайте «натыкания» на ногу или «ударной» постановки ноги. Беговой шаг должен быть легким, пружинящим, с минимальными вертикальными и боковыми колебаниями. Туловище при беге держится прямо или имеет незначительный наклон вперед, плечи опущены и расслаблены, руки без напряжения движутся вперед-назад. Продолжительность и скорость бега определяется в зависи-

мости от уровня подготовки занимающихся и поставленных задач. Критериями дозировки физической нагрузки при занятиях оздоровительным бегом являются: продолжительность бега, скорость, дистанция бега.

Под влиянием регулярных занятий бегом во всех система организма происходит функциональная перестройка. Активизация деятельности мышц при занятиях оздоровительным бегом приводит к повышению активности всех обменных процессов. Опыт показывает, что, тренируясь 3–4 раза в неделю даже с минимальным объемом нагрузок можно добиться существенного улучшения функционального состояния сердечно-сосудистой и дыхательной систем.

Проводить занятия на свежем воздухе зимой можно при температуре воздуха не ниже –20°С. При более низкой температуре целесообразно провести занятие в помещении, заменив бег гимнастическими упражнениями и бегом на месте.

После каждого занятия через 10–15 минут желательно принять душ, который успокаивает нервную систему, очищает кожу, улучшает кровообращение. Не рекомендуется после занятий принимать холодный душ. Холодный душ без предварительного закаливания организма может вызвать простудные заболевания.

Заниматься бегом нельзя тем, кто страдает такими заболеваниями, как сердечная недостаточность, стенокардия, гипертоническая болезнь, сердечные пороки, бронхиальная астма, хронический бронхит и т. д. В любом случае необходимо посоветоваться с врачом.

Занятия *лыжным* спортом более сложны в организационном и методическом плане. К подготовленности занимающихся предъявляются повышенные требования. Главным критерием готовности к лыжным занятиям является физическое состояние организма, выражающееся в отсутствии медицинских противопоказаний для тренировок на холоде, а также владение некоторыми техническими навыками передвижения на лыжах. Для самостоятельных тренировочных занятий лыжным спортом, особенно начинающим, следует выбирать относительно ровные трассы, без больших перепадов высоты на подъемах и спусках. Основной направленностью самостоятельных оздоровительных занятий лыжным спортом является закаливание организма, развитие выносливости и, конечно же, совершенствование ранее изученной техники лыжных ходов.

Занятия *атлетической гимнастикой*, довольно популярные в последнее время, направлены на развитие силы, силовой выносливости и ловкости. Конечная цель таких занятий — формирование гармоничного и красивого телосложения. Хороший эффект дают силовые упражнения для целенаправленного воздействия на недостаточно развитые группы мышц, коррекцию фигуры (сутулость, опущенные плечи, впалая грудь, крыловидные лопатки, отвислый живот).

Атлетическая гимнастика включает упражнения с гантелями, гирями, амортизатором, штангой и другими отягощениями. Воздействуя на различные мышечные группы, упражнения с отягощениями способствуют гармоническому развитию мускулатуры тела, улучшают осанку.

Занятия атлетической гимнастикой рекомендуется проводить во второй половине дня. Вес отягощений выбирается таким образом, чтобы каждое упражнение можно было выполнять 8–10 раз подряд. Для развития абсолютной силы в каком-либо движении вес отягощения увеличивается, а число повторений уменьшается. Для развития силовой выносливости, уменьшения жировых отложений применяются отягощения меньшего веса с большим числом повторений (16 и более). Наиболее целесообразно в тренировке вначале выполнять упражнения с малыми отягощениями, а в последующих подходах увеличивать вес, уменьшая число повторений. Упражнения следует выполнять ритмично без задержки дыхания, делая вдох в момент расслабления мышц. Интервал отдыха между упражнениями обычно составляет 1–2 минуты, в зависимости от скорости восстановления дыхания.

Спортивные игры оказывают разностороннее воздействие на занимающихся, улучшая их функциональное состояние, физическую подготовку и координацию движений. Для того чтобы тренировки в спортивных играх оказались более эффективными, необходимо соблюдать следующие правила. До начала игр следует проводить разминку, включающую медленный бег, общеразвивающие упражнения и упражнения для тех групп мышц, которые принимают наибольшую нагрузку в данной игре. Соблюдать все правила, связанные с техникой безопасности, обращая внимание на соответствие обуви, инвентаря, ровность покрытия площадки и др. требования.

5.5. Особенности самостоятельных занятий женщин

Организм женщины имеет анатомо-физиологические особенности, которые необходимо учитывать при проведении самостоятельных занятий физическими упражнениями или спортивной тренировки. В отличие от мужского у женского организма менее прочное строение костей, меньшее общее развитие мускулатуры, более широкий тазовый пояс и более мощная мускулатура тазового дна. Для здоровья женщины большое значение имеет развитие мышц брюшного пресса, спины и тазового дна. От их развития зависит нормальное положение внутренних органов. Особенно важно развитие мышц тазового дна.

Одной из причин недостаточного развития этих мышц у студенток и работниц умственного труда является малоподвижный образ жизни. При положении сидя мышцы тазового дна не противодействуют внутрибрюшному давлению и растягиваются от тяжести лежащих над ними органов. В связи с этим мышцы теряют свою эластичность и прочность, что может привести к нежелательным изменениям положения внутренних органов и к ухудшению их функциональной деятельности.

Ряд характерных для организма женщины особенностей имеется и в деятельности сердечно-сосудистой, дыхательной, нервной и других систем. Все это выражается более продолжительным периодом восстановления организма после физической нагрузки, а также более быстрой потерей состояния тренированности при прекращении тренировок.

Особенности женского организма должны строго учитываться в организации, содержании, методике проведения самостоятельных занятий. Подбор физических упражнений, их характер и интенсивность должны соответствовать физической подготовленности, возрасту, индивидуальным возможностям студенток. Необходимо исключать случаи форсирования тренировки для того, чтобы быстро достичь высоких результатов. Разминку следует проводить более тщательно и более продолжительно, чем при занятиях мужчин. Рекомендуется остерегаться резких сотрясений, мгновенных напряжений и усилий, например, при занятиях прыжками и в упражнениях с отягощением. Полезны упражнения в положении сидя, и лежа на спине с подниманием, отведением, приведением и круговыми движениями ног, с подниманием ног и таза до положения «березка», различного рода приседания.

Даже для хорошо физически подготовленных студенток рекомендуется исключить упражнения, вызывающие повышение внутрибрюшного давления и затрудняющие деятельность органов брюшной полости и малого таза. К таким упражнениям относятся прыжки в глубину, поднимание больших тяжестей и другие, сопровождающиеся задержкой дыхания и натуживанием.

При выполнении упражнений на силу и быстроту движений следует постепенно увеличивать тренировочную нагрузку, более плавно доводить ее до оптимальных пределов, чем при занятиях мужчин.

Упражнения с отягощениями применяются с небольшими весами, сериями по 8–12 движений с вовлечением в работу различных мышечных групп. В интервалах между сериями выполняются упражнения на расслабление с глубоким дыханием и другие упражнения, обеспечивающие активный отдых.

Функциональные возможности аппарата кровообращения и дыхания у девушек и женщин значительно ниже, чем у юношей и мужчин, поэтому нагрузка на выносливость для девушек и женщин должна быть меньше по объему и повышаться на более продолжительном отрезке времени.

Женщинам при занятиях физическими упражнениями и спортом следует особенно внимательно осуществлять самоконтроль. Необходимо наблюдать за влиянием занятий на течение овариально-менструального цикла и характер его изменения. Во всех случаях неблагоприятных отклонений необходимо обращаться к врачу.

Женщинам противопоказаны физические нагрузки, спортивная тренировка и участие в спортивных соревнованиях в период беременности. После родов к занятиям физическими упражнениями и спортом рекомендуется приступать не ранее чем через 8–10 месяцев.

Лекция 6

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАКАЛАВРА И СПЕЦИАЛИСТА

6.1. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста

В рамках общей готовности выпускников вузов к профессиональной деятельности физическая готовность человека занимает равнозначное место наряду с духовной (идейной, гражданской, нравственной), специально-трудовой (теоретической, технической, технологической) и психической (умственной, волевой, рефлекторно-эмоциональной).

Сегодня физическое здоровье является не просто желательным качеством, а необходимым условием профессиональной деятельности специалиста: он должен обладать резервом физических и функциональных возможностей для своевременной адаптации к быстро меняющимся условиям производственной и внешней среды, объему и интенсивности труда, способностью к полному восстановлению в заданном лимите времени.

Физическое здоровье отражает такую степень физического развития человека, его двигательных навыков и умений, которая позволяет наиболее полно реализовать его творческие возможности. Более того, зачастую физическая подготовка человека, индивидуальный уровень его физической культуры определяют выбор будущей профессии.

На большинстве современных предприятий и учреждений обязательна хорошая физическая форма специалистов – необходимое условие при приеме на работу. Безусловно, первое, чего ждет работодатель, – это проявления высоких профессиональных качеств. Но помимо этого слабое здоровье специалиста потенциально неэкономично для финансового состояния предприятий и учреждений. Это относится к сотрудникам, страдающим различными заболеваниями, тяжело переносящим профессиональные (умственные, физические, психологические) нагрузки. Напротив, специалист, обладающий хорошей физической формой и функционально более подготовленный, имеет лучшую работоспособность. Его труд более эффективен, а в экстремальных условиях он способен проявить максимальные усилия.

С переходом к рыночным отношениям большинство предприятий и учреждений свободны в выборе работников. Работодатели при этом руководствуются соображениями экономической выгоды. Потеря значительных сумм на оплату больничных листов, а иногда и на оплату дорогого лечения сотрудников, стрессовые ситуации, возникающие из-за нервозности и некоммуникабельности отдельных специалистов, вынуждают работодателя избавляться от таких сотрудников. Практика показывает, что далеко не всегда трудовое законодательство может защитить неугодного работника.

Приведенные аргументы отнюдь не предрекают неудачную профессиональную карьеру молодым специалистам с ослабленным здоровьем или физическими недостатками, однако дают повод уже сегодня, в период обучения в вузе, серьезно задуматься о будущей профессиональной деятельности. Для этого нужно начать строить свою жизнь по-новому, положив в основу свободного времяпрепровождения занятия физическими упражнениями. Человек, ведущий физически активный, здоровый образ жизни в состоянии полноценно выполнять любые профессиональные обязанности, возлагаемые на него работодателем в рамках профессии.

Говоря о профессиональной деятельности выпускников высшей школы, мы представляем, прежде всего, служащих, занимающихся преимущественно интенсивной интеллектуальной деятельностью (с повышенным напряжением внимания, зрения), сопровождающейся малой подвижностью, что зачастую ведет к значительной психической напряженности и усталости. Образование, которое получают выпускники вузов, предполагает именно такую организационную форму их трудовой деятельности. В результате такой характер труда выпускника высшей школы приводит к перегруженности одних функциональных систем организма и недогруженности других, что неблагоприятно сказывается на общей дееспособности специалиста. Обычно это умственное перенапряжение, с одной стороны, и снижение мышечного тонуса, застой лимфы в суставах опорно-двигательного аппарата – с другой. Для корректировки этих психофизиологических «перекосов» необходимы как профилактические мероприятия в рабочий период, так и специально выделяемое время в периоды досуга для активного восстановления сил и улучшения самочувствия.

6.2. Производственная физическая культура, ее цель и задачи

Производственная физическая культура (ПФК) — система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой профессиональной дееспособности. Форма и содержание этих мероприятий определяются особенностями профессионального труда и быта человека. Заниматься ПФК можно как в рабочее, так и в свободное время. При неблагоприятных условиях труда (повышенная запыленность, загазованность) мероприятия ПФК могут осуществляться только после работы.

Цель ПФК — способствовать укреплению здоровья и повышению эффективности труда. Эффективность труда можно повысить за счет расширения физиологически допустимых границ его интенсивности, а также за счет повышения индивидуальной производительности, на уровень которой также оказывает определенное влияние физическая подготовленность.

Задачи ПФК:

подготовить организм человека к оптимальному включению в профессиональную деятельность;

активно поддерживать оптимальный уровень работоспособности во время работы и восстанавливать его после ее окончания;

заблаговременно проводить акцентированную психофизическую подготовку к выполнению отдельных видов профессиональной деятельности;

профилактика возможного влияния на организм человека неблагоприятных факторов профессионального труда в конкретных условиях.

6.3. Методические основы производственной физической культуры

Основа производственной физической культуры — теория активного отдыха. Великий русский ученый И. М. Сеченов показал, что для организма наиболее благоприятен такой режим работы, когда происходит смена нагрузки, перемена усилий и групп работающих мышц. Он экспериментально доказал, что работоспособность восстанавливается быстрее и полнее не в состоянии покоя или пассивного отдыха, а в активном состоянии, когда специально организованные движения выполняются другими, неутомленными частями тела. В результате в утомленных функциональных системах усиливаются процессы восстановления и их работоспособность повышается.

В трудах другого великого русского физиолога И. П. Павлова мы находим объяснение того, как устойчивая работоспособность зависит от правильного чередования периодов работы и отдыха, о роли ЦНС в этом процессе.

Методическое обеспечение производственной физической культуры требует учитывать не только физические, но и психические нагрузки — умственную и нервно-эмоциональную напряженность труда, которая характеризуется степенью включения в работу высшей нервной деятельности и психических процессов. Чем большая нагрузка приходится на высшие отделы коры больших полушарий головного мозга, тем важнее переключить внимание работающих на другой вид деятельности.

Итак, методика ПФК находится в зависимости от характера и содержания труда и имеет «контрастный» характер:

чем больше физическая нагрузка в процессе труда, тем меньше она в период активного отдыха, и наоборот;

чем меньше в активную деятельность включены большие мышечные группы, тем в большей степени они подключаются при занятиях различными формами ПФК;

чем больше нервно-эмоциональное и умственное напряжение в профессиональной деятельности, тем меньше оно должно быть в разнообразных физических упражнениях ПФК.

6.4. Производственная физическая культура в рабочее время

В рабочее время ПФК реализуется через производственную гимнастику.

Производственная гимнастика — это комплексы специальных упражнений, применяемых в режиме рабочего дня, чтобы повысить общую и профессиональную работоспособность, а также с целью профилактики и восстановления.

Видами (формами) производственной гимнастики являются: вводная гимнастика, физкультурная пауза, физкультурная минутка, микропауза активного отдыха.

При построении комплексов упражнений необходимо учитывать:

1) рабочую позу (стоя или сидя), положение туловища (согнутое или прямое, свободное или напряженное);

2) рабочие движения (быстрые или медленные, амплитуда движения, их симметричность или асимметричность, однообразие или разнообразие, степень напряженности движений);

3) характер трудовой деятельности (нагрузка на органы чувств, психическая и нервно-мышечная нагрузка, сложность и интенсивность мыслительных процессов, эмоциональная нагрузка, необходимая точность и повторяемость движений, монотонность труда);

4) степень и характер усталости по субъективным показателям (рассеянное внимание, головная боль, ощущение болей в мышцах, раздражительность);

5) возможные отклонения в здоровье, требующие индивидуального подхода при составлении комплексов производственной гимнастики;

6) санитарно-гигиеническое состояние места занятий (обычно комплексы проводятся на рабочих местах).

Вводная гимнастика. С нее рекомендуется начинать рабочий день. Она проводится до начала работы и состоит из 5–8 общеразвивающих и специальных упражнений продолжительностью 5–7 мин.

Цель вводной гимнастики в том, чтобы активизировать физиологические процессы в тех органах и системах организма, которые играют ведущую роль при выполнении конкретной работы. Гимнастика позволяет легче включиться в рабочий ритм, сокращает период врабатываемости, увеличивает эффективность труда в начале рабочего дня и снижает отрицательное воздействие резкой нагрузки при включении человека в работу.

В комплексе упражнений вводной гимнастики следует использовать специальные упражнения, которые по своей структуре, характеру близки к действиям, выполняемым во время работы, имитируют их. С учетом сложных технологических и организационных особенностей ряда современных профессий вводную гимнастику невозможно проводить на рабочем месте, поэтому специфическую функцию вводной гимнастики может достаточно эффективно выполнить утренняя гигиеническая гимнастика.

Физкультурная пауза. Она проводится, чтобы дать срочный активный отдых, предупредить или ослабить утомление, снижение работоспособности в течение рабочего дня. Комплекс состоит из 7–8 упражнений, повторяемых несколько раз в течение 5–10 мин.

Место физкультурной паузы и количество повторений зависит от продолжительности рабочего дня и динамики работоспособности.

При обычном 7–8-часовом рабочем дне с часовым обеденным перерывом при «классической» кривой изменения работоспособности рекомендуется проводить две физкультурные паузы: через 2–2,5 ч после начала работы и за 1–1,5 ч до ее окончания. Комплекс упражнений физкультурной паузы подбирается с учетом особенностей рабочей позы, движений, характера, степени тяжести и напряженности труда.

Физкультурная пауза при благоприятных санитарно-гигиенических условиях может проводиться на рабочих местах. Целесообразно в комплекс упражнений физкультурной паузы для работающих у компьютера или с документами включать специальные упражнения для снятия утомления мышц глаз.

Рис. 3.1. Пальцевые повороты

Пальцевые повороты. Это упражнение — первый шаг на пути ликвидации напряженного состояния глаз.

Поставьте указательный палец какой-нибудь руки перед своим носом (рис. 3.1). Мягко поворачивайте свою голову из стороны в сторону, смотря при этом мимо пальца, а не на него. Вам покажется, что палец двигается. Очень быстро ощущение движения можно добиться, если вы закроете глаза и будете делать повороты таким образом, чтобы кончик носа каждый раз касался пальца во время прохождения мимо него.

Делайте эти повороты всегда по 20–30 раз, не забывая при этом о дыхании. Эти повороты обладают снимающим боль эффектом. Первый закон зрения — это движение. Когда глаз перемещается, он видит. Зрение глаза, который смотрит пристально, слабеет.

Большие повороты. Встаньте лицом к окну, расставив широко ступни ног (рис. 3.2). Затем, перенося вес тела на левую ногу, поверните голову и плечи к левой стене. После этого, перенося вес тела на правую ногу, поверните голову и плечи к правой стене. Обратите внимание на то, что при повороте к правой стене, окна проходят мимо вас влево, а при повороте к левой стене — вправо.

Во время поворотов считайте их количество. Чтобы достичь хорошей степени расслабления, надо сделать до 60 поворотов.

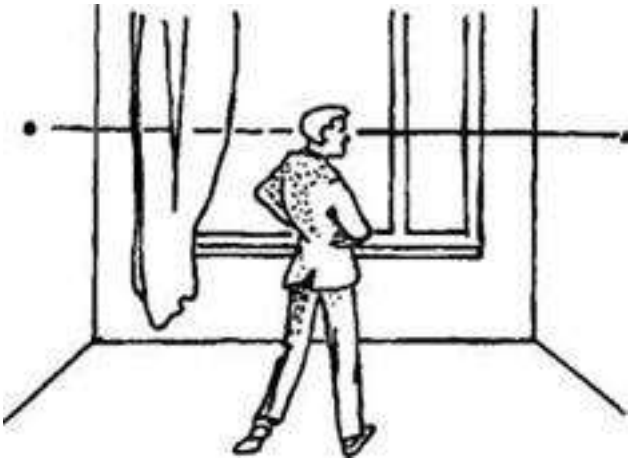


Рис. 3.2. Большие повороты

Физкультурная минутка относится к малым формам активного отдыха. Это наиболее индивидуализированная форма кратковременной физкультурной паузы, которая проводится, чтобы локально воздействовать на утомленную группу мышц. Она состоит из 2–3 упражнений и проводится в течение рабочего дня несколько раз по 1–2 мин.

Физкультминутки с успехом применяются, когда по условиям организации труда и его технологии невозможно сделать организованный перерыв для активного отдыха, т. е. в тех случаях, когда нельзя останавливать оборудование, нарушать общий ритм работы, отвлекать надолго внимание работающего. Физкультминутка может быть использована в индивидуальном порядке непосредственно на рабочем месте. Работающий человек имеет возможность выполнять физические упражнения именно тогда, когда ощущает потребность в кратковременном отдыхе в соответствии со спецификой утомления в данный момент. Для быстрого снятия зрительного утомления рекомендуется выполнить пальминг.

Микропауза активного отдыха. Это самая короткая форма производственной гимнастики, длящаяся всего 20–30с.

Цель микропауз — ослабить общее или локальное утомление путем частичного снижения или повышения возбудимости центральной нервной системы. С этим связано снижение утомления отдельных анализаторных систем, нормализация мозгового и периферического кровообращения. В микропаузах используются мышечные напряжения и расслабления, которые можно многократно применять в течение рабочего дня. Используются приемы самомассажа.

6.5. Физическая культура и спорт в свободное время

Основные формы занятий физкультурой в свободное время:

утренняя гигиеническая гимнастика;

утренние или вечерние специально направленные занятия физическими упражнениями;

краткие занятия физическими упражнениями в обеденный перерыв;

попутная тренировка;

физкультурно-спортивные занятия с целью активного отдыха и повышения функциональных возможностей, профессионально-прикладной физической подготовки.

Утренняя гигиеническая гимнастика. Комплекс несложных упражнений утренней гигиенической гимнастики («зарядки») позволяет легко и приятно перейти от утренней вялости к активному состоянию, быстрее ликвидировать застойные явления, возникающие в организме после ночного бездействия. Применительно к производственной физической культуре утренняя зарядка повышает возбудимость центральной нервной системы, постепенно активизирует основные функциональные системы организма и тем самым ускоряет врабатываемость в трудовой процесс. Наблюдения за группой студентов, регулярно выполнявших утреннюю зарядку, и за теми, кто не делал ее, показали, что у первых период включения в качественный учебный труд составил 15 мин, у вторых — до 45 мин.

При составлении индивидуального комплекса следует позаботиться, чтобы он удовлетворял следующим требованиям:

упражнения должны соответствовать функциональным возможностям организма, специфике трудовой деятельности;

выполняться в определенной последовательности;

носить преимущественно динамический характер, выполняться без значительных усилий и задержки дыхания;

нагрузка должна постепенно возрастать с некоторым снижением к концу зарядки;

комплекс следует периодически обновлять, так как привычность упражнений снижает эффективность занятий.

Рекомендуется следующая примерная схема последовательности упражнений утренней гимнастики (для работников умственного труда):

1. Упражнения, способствующие постепенному переходу организма из заторможенного состояния в рабочее (ходьба, медленный бег, потягивание).

2. Упражнения, активизирующие деятельность сердечно-сосудистой системы (махи руками в разных направлениях, неглубокие выпады и т. п.).

3. Упражнения, укрепляющие мышцы тела, тренирующие дыхание, улучшающие мозговое кровообращение (вращение и наклоны головы, туловища, повороты вправо и влево, наклоны в сторону, прогибание назад).

4. Упражнения на развитие силовых возможностей.

5. Упражнения, способствующие подвижности суставов.

6. Упражнения для мышц брюшного пресса.

7. Упражнения для ног, включая приседание на одной ноге, подскоки.

8. Завершают утреннюю гигиеническую гимнастику упражнения на расслабление и восстановление дыхания (ходьба с движениями рук).

Продолжительность утренней гимнастики от 8–10 до 20–30 мин. Практически здоровые люди в возрасте до 40 лет могут проводить такую зарядку

в темпе, при котором пульс повышается до 150 уд/мин (после 50 лет — пульс до 140 уд/мин, для 60-летних — 120 уд/мин).

Однако далеко не все люди легко и безболезненно переносят в ранние утренние часы повышенные нагрузки. Для некоторых целесообразно ограничиться минимумом упражнений, направленных на снятие утренней вялости, а более активные упражнения перенести на послерабочие вечерние часы.

Утренние или вечерние специально направленные физические упражнения. Занятия в виде специально подобранного комплекса упражнений проводятся с повышенной нагрузкой и имеют профилактическую направленность.

Благодаря физическим упражнениям можно повысить: быстроту и точность движений, координацию мелкой моторики, устойчивость и быстроту распределения внимания, силовую выносливость групп мышц, которые выдерживают основную рабочую нагрузку. Так, в этих целях, в комплекс специально направленных физических упражнений для работников интеллектуального вида труда рекомендуется включать броски, ведения, передача баскетбольного мяча (развивающие быстроту и точность движения); гантельную гимнастику для укрепления основных работающих мышц (рис. 3.3).

С помощью специально направленных упражнений снимаются неблагоприятные последствия малоподвижного, тяжелого физического, монотонного труда, работы в вынужденной неудобной позе, с повышенной нервно-эмоциональной напряженностью, в неблагоприятных санитарно-гигиенических условиях (см. табл.).

Краткие занятия физическими упражнениями в обеденный перерыв. Известный кардиолог профессор Н. Мухарлямов писал, что тем, у кого «сидячая» работа, в обед следует ограничиться чаем с бутербродом, а остальное время перерыва использовать для прогулки, игры в настольный теннис, легкой пробежки. Иными словами, вместо того чтобы приобретать калории, следует активно их расходовать, а полный обед лучше перенести на послерабочее время.

Во многих учреждениях в обеденный перерыв сотрудники с увлечением играют в настольный теннис. Это и есть часть производственной физической культуры, в которой присутствуют элементы повышенной двигательной активности и своеобразной гимнастики микромышц глаз, гимнастики зрительного анализатора.

Общая физическая нагрузка во время игры может быть весьма значительной, ведь за одну партию игрок выполняет 15–20 подач, от 60 до 150 ударов, 15–20 раз наклоняется за мячом.

Попутная тренировка — это по своей сути неорганизованное индивидуальное действие, направленное на повышение двигательной активности без существенных затрат дополнительного времени. Термин «тренировка» здесь весьма условен. Речь идет об использовании для дополнительной физической нагрузки обычных условий труда и быта. Сюда относится пешее передвижение вместо езды на транспорте по пути на работу и обратно.

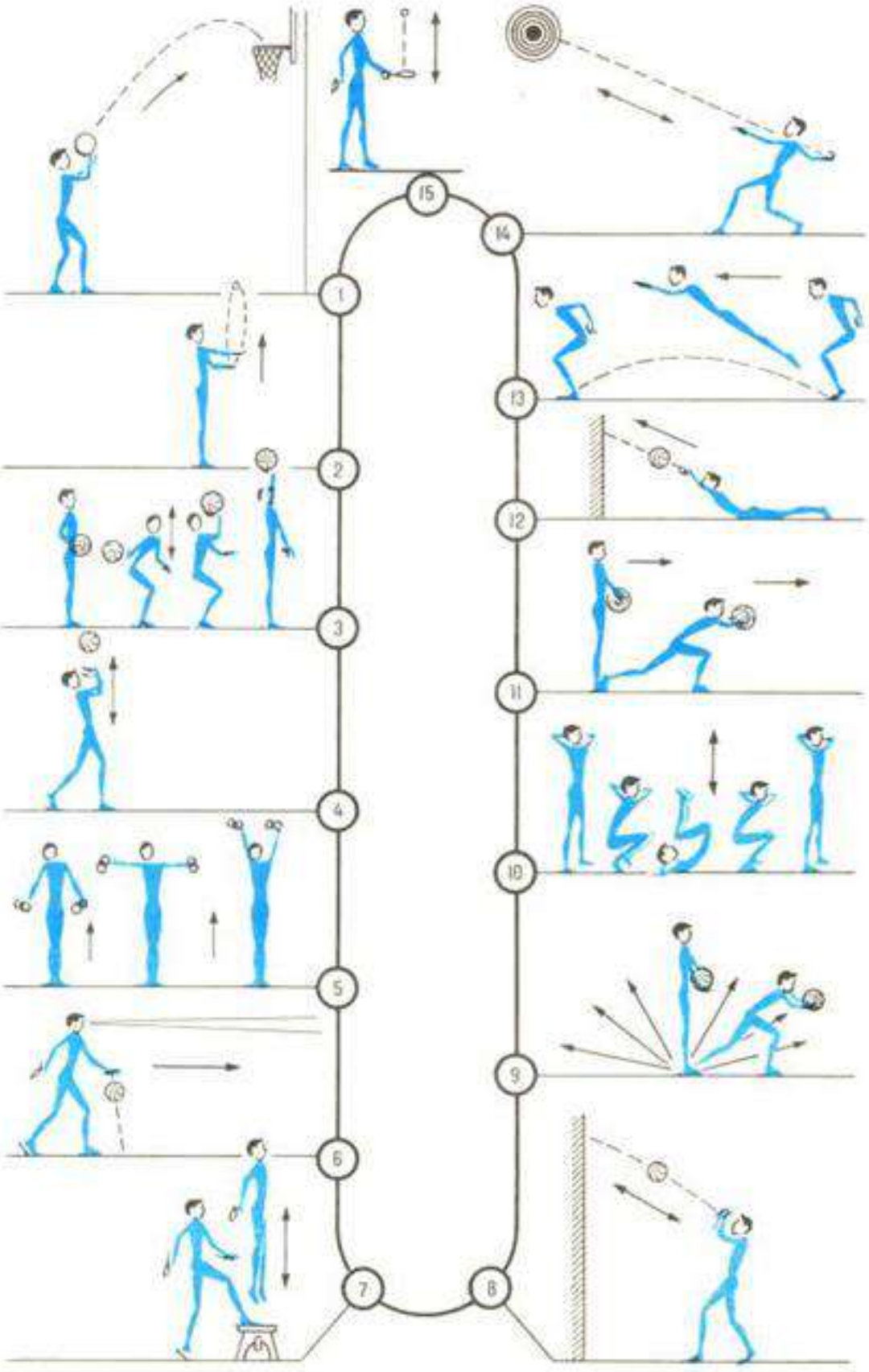


Рис. 3.3. Комплекс специальных физических упражнений
для работников интеллектуального вида труда

Таблица 3.1

Направленность комплексов физических упражнений профилактического воздействия на самостоятельных и групповых занятиях
(с использованием материалов Н. А. Мусаелова, Л. Н. Нифонтовой)

Негативные факторы профессионального труда	Направленность занятий и подбора упражнений
Тяжелый физический труд	Профилактика перенапряжения мышечного аппарата и отрицательного влияния на опорно-двигательный аппарат
Гипокинезия и гиподинамия	Развитие выносливости, силы, подвижности суставов, координации движений, ловкости
Неудобная или однообразная рабочая поза	Коррекция осанки, ликвидация застойных явлений в области малого таза и нижних конечностей, профилактика шейных остеохондрозов и пояснично-крестцовых радикулитов
Повышенная загруженность мышц кисти и предплечья	Профилактика перенапряжения мышц и нервно- мышечных заболеваний рук
Монотонность	Двигательная перемена деятельности, повышенная эмоциональность занятий
Повышенная нервно-эмоциональная напряженность	Снятие нервной напряженности, стабилизация работы сердечно-сосудистой и дыхательной систем, расслабление
Неблагоприятные санитарно-гигиенические условия	Улучшение функции дыхания в благоприятных условиях, повышение устойчивости к высоким, низким температурам и к их перепадам

Дополнительная физическая нагрузка очень важна для представителей малоподвижных видов труда (оптимальный расход энергии на мышечную работу составляет 1300–2200 ккал в сутки). Кроме того, как отмечают психологи, за время пешего передвижения у человека снижается нервно-эмоциональное напряжение. Это особенно важно при возвращении домой после напряженного дня.

Чтобы активизировать работу крупных мышечных групп, имеющих недостаточную нагрузку, необходимо подниматься по лестничным маршам, эскалаторам метро. При подъеме по лестнице затрачивается значительно больше энергии, чем при ходьбе по ровной местности. Поднимаясь по обычной лестнице в среднем темпе, человек расходует 0,012 ккал/кг на 1 м подъема. Затраты энергии при спуске составляют одну треть затрат при подъеме. Поэтому следует взять за правило не пользоваться без особой нужды лифтом при подъеме хотя бы до четвертого этажа. Получить дополнительную физическую нагрузку помогают разнообразные бытовые и хозяйственные работы: уборка квартиры, мытье пола, работа на приусадебном участке и в личном хозяйстве. Все эти виды труда приравниваются к физическому труду умеренной тяжести.

Почти в любых условиях можно делать изометрические упражнения на отдельные группы мышц, совершенно не заметные для окружающих. Олимпийский чемпион доктор медицинских наук профессор А. Н. Воробьев в этой связи указывал: «Тренирует мышцы любая физическая нагрузка. Скажем, когда мне приходится ехать в поезде дальнего следования, делаю так называемые изометрические упражнения — с их помощью можно дать нагрузку на любую мышцу. В дополнение — приседания, отжимания».

Физкультурно-спортивные занятия для активного отдыха и повышения функциональных возможностей. Эти занятия предприятие или учреждения могут организовать для своих сотрудников. Место могут выбрать сами занимающиеся. Занятия проводятся с целью активного отдыха, общего оздоровления, повышения функциональных возможностей отдельных систем организма в следующих формах:

группы здоровья;

группы общей физической подготовки;

спортивные секции по видам спорта;

самостоятельные физкультурные занятия и спортивная тренировка в индивидуальных видах спорта.

Группы здоровья. Цель занятий — укрепить защитные свойства организма к внешним факторам и условиям производства (профессиональной деятельности), повысить уровень общей подготовленности. В этих группах, как правило, занимаются мужчины от 40 и женщины от 35 лет, имеющие некоторые отклонения в состоянии здоровья. Методика проведения занятий требует строго дозировать физическую нагрузку с учетом индивидуальных особенностей состояния здоровья каждого занимающегося.

Группы общей физической подготовки (ОФП). Занятия в группах ОФП проводятся, чтобы обеспечить общую физическую подготовленность, обучить некоторым спортивным упражнениям, развить физические качества, необходимые для того или другого вида спорта, что позволяет в дальнейшем продолжить занятия в одной из спортивных секций.

Группы ОФП комплектуются главным образом из молодежи и людей среднего возраста (мужчины до 40, женщины до 35 лет). Занятия включают самые разнообразные упражнения и элементы из различных видов спорта. Широко используются спортивные игры.

Занятия в спортивных секциях. Они организуются для людей молодого и среднего возраста. Выбор вида спорта зависит от особенностей контингента работающих и конкретной деятельности учреждения или предприятия. Занятия проводятся по общепринятой методике спортивной подготовки и предполагают участие в соревнованиях.

Различные профессиональные группы избирают различные виды спорта и физические упражнения. Условия труда и быта, характер профессиональной деятельности и ряд других факторов накладывают свой отпечаток на особенности активного отдыха человека.

Самостоятельные физкультурные занятия и спортивная тренировка. Когда условия жизни не позволяют человеку заниматься в организованных группах и коллективах, он может делать это самостоятельно, в индивидуальном порядке. Желательно заниматься физкультурой, проконсультировавшись с врачом врачебно-физкультурного диспансера, с методистом-тренером или используя полученный ранее опыт занятий в учебных заведениях, армии или в спортивных секциях. Приобрести необходимые методические знания можно, изучая специальную литературу по методике физкультурных занятий и спортивной подготовке. Как правило, индивидуальной спортивной подготовкой занимаются лица, имеющие многолетний опыт спортивной тренировки.

6.6. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры

Статистически доказано, что здоровый, физически подготовленный человек меньше подвержен случайным и профессиональным травмам в силу хорошей реакции, достаточных скоростно-силовых возможностей. У него более высокая устойчивость против заболеваний, проникающей радиации.

Основная задача физических упражнений профилактической направленности — повысить устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов труда. К ним относятся: перенапряжение, возникающее при тяжелом физическом труде; гипокинезия — ограничение количества и объема движений; монотония, связанная с выполнением одинаковых операций, с непрерывной концентрацией внимания (именно в этом состоянии, подобном полудреме, увеличивается вероятность травматизма); рабочая поза, которая становится причиной целого ряда неблагоприятных отклонений (заболевание органов малого таза, кифозы, сколиозы, ослабление мышц живота и др.); повышенная нервно-эмоциональная напряженность труда, вибрация и укачивание, неблагоприятные санитарно-гигиенические условия (запыленность, загазованность, плохое освещение).

Чтобы снизить эти неблагоприятные воздействия, в свободное время проводится так называемая профилактическая гимнастика. Это комплекс упражнений, подобранных для профилактики неблагоприятных влияний в процессе труда и снижения профессионального травматизма. Количество упражнений, темп их выполнения, продолжительность комплекса в каждом отдельном случае различные.

Лекция 7

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА

7.1. Определение понятия профессионально-прикладной физической подготовки

Принцип органической связи физического воспитания с практикой трудовой деятельности наиболее конкретно воплощается в профессионально-прикладной физической подготовке (ППФП).

Современный труд приводит к перегрузкам одних функциональных систем организма и недогрузкам других, что неблагоприятно сказывается на общей дееспособности человека.

Чтобы корректировать эти психофизиологические «перекосы», проводятся мероприятия в системе организации труда, в числе которых и направленное применение специально подобранных физических упражнений. Использование средств физической культуры и спорта в целях поддержания и повышения общей и профессиональной дееспособности человека в теории и практике физической культуры получило название профессионально-прикладная физическая подготовка.

Профессионально-прикладная физическая подготовка — это специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности.

Основное назначение ППФП — направленное развитие и поддержание на оптимальном уровне тех психических и физических качеств человека, к которым предъявляет повышенные требования конкретная профессиональная деятельность, а также выработка функциональной устойчивости организма к условиям этой деятельности и формирование прикладных двигательных умений и навыков.

Каждая профессия предъявляет к человеку специфические требования и часто очень высокие к его физическим и психическим качествам, прикладным навыкам. В связи с этим возникает необходимость профилирования процесса физического воспитания при подготовке студентов к трудовой деятельности, сочетания общей физической подготовки со специализированной — профессионально-прикладной физической подготовкой.

Геодезисту, геологу необходимо умение ориентироваться на местности. Он должен уметь подготовить ночлег, приготовить пищу в походных условиях. Правильная переправа через реку или поведение в горах, тайге — жизненно необходимые навыки. Занятия туризмом для таких специальностей будут подготовкой к профессиональной деятельности.

Чтобы реализоваться в профессиональной деятельности, работникам ряда инженерно-технических специальностей (инженер-радиоэлектронщик, инженер-механик и др.), нужно обладать целым рядом физических качеств. От них требуется умение дозировать небольшие по величине силовые напряжения при пользовании различными ручными и ножными органами управления (кнопками, рукоятками, рычагами, педалями), при работе с персональным компьютером, дисплейной техникой, осциллографом и т. д. Работа представителей умственного вида труда (экономисты, дизайнеры, конструкторы, юристы) часто характеризуется гиподинамией, длительным пребыванием в вынужденной позе (сидя, стоя) во время проектных работ, операторской деятельности. Все это говорит о необходимости развития статической выносливости мышц туловища, спины, испытывающих наибольшие напряжения во время малоподвижной работы.

Профессиональная деятельность ряда современных инженерно-технических специальностей часто содержит операции, связанные с манипулированием небольшими предметами, инструментами. Они должны иметь способность выполнять быстрые, точные и экономные движения, обладать ловкостью и координацией движений рук, пальцев.

В профессиях инженера, менеджера, преподавателя, ученого важную роль играют психические качества. При напряженной умственной деятельности особенно необходимо внимание: способность одновременно воспринимать несколько объектов (объем внимания), выполнять несколько действий (распределение внимания), быстро переносить внимание с объекта на объект (концентрация внимания). Кроме того, требуются: оперативное мышление, оперативная и долговременная память, нервно-эмоциональная устойчивость, выдержка, самообладание.

Таким образом, профессиональная деятельность современных специалистов предъявляет к ним довольно жесткие требования, в том числе к физическим и психическим качествам и способностям. В процессе общей физической подготовки практически невозможно сформировать такой уровень психофизической подготовленности, который обеспечил бы высокопроизводительную профессиональную деятельность. Во многих случаях необходимы специальные занятия физическими упражнениями и спортом, то есть профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП).

В период подготовки к профессиональной деятельности, то есть во время учебы в вузе, необходимо создать психофизические предпосылки и готовность студента:

к ускорению профессионального обучения;

достижению высокопроизводительного труда в избранной профессии;

предупреждению профессиональных заболеваний и травматизма, обеспечению профессионального долголетия;

использованию средств физической культуры и спорта для активного отдыха и восстановления общей и профессиональной работоспособности в рабочее и свободное время;

выполнению служебных и общественных функций по внедрению физической культуры и спорта в профессиональном коллективе.

7.2. Задачи ППФП

Конкретные задачи ППФП студентов определяются особенностями их будущей профессиональной деятельности и состоят в том, чтобы:

формировать необходимые прикладные знания;

осваивать прикладные умения и навыки;

воспитывать прикладные психофизические качества;

воспитывать прикладные специальные качества.

Прикладные знания связаны с будущей профессиональной деятельностью. Студент получает прикладные знания на лекциях по учебной дисциплине «Физическая культура», во время бесед и методических установок на учебно-тренировочных занятиях, путем самостоятельного изучения литературы.

Прикладные умения и навыки обеспечивают безопасность в быту и при выполнении профессиональных видов работ. Они формируются в процессе активных занятий физической культурой и спортом. Особая роль в этом принадлежит прикладным видам спорта: туризму, автомотоспорту, водным видам спорта и др.

Прикладные физические качества — быстрота, сила, выносливость, гибкость и ловкость — необходимы во многих видах профессиональной деятельности. Одни виды труда предъявляют повышенные требования к общей выносливости, другие — быстроте или ловкости, третьи — к силе отдельных групп мышц и т. п. Заблаговременное акцентированное формирование нужных прикладных физических качеств в процессе физического воспитания до профессионально требуемого уровня и является одной из задач ППФП.

Прикладные психические качества и свойства личности, необходимые будущему специалисту, могут формироваться и на учебно-тренировочных занятиях, и самостоятельно. На учебных занятиях по физической культуре, спортивной тренировке, при регулярных самостоятельных занятиях физическими упражнениями могут быть созданы также условия, при которых проявляются такие волевые качества, как настойчивость, решительность, смелость, выдержка, самообладание, самодисциплина.

Многие спортивные и особенно игровые моменты могут моделировать возможные жизненные ситуации в производственном коллективе при выполнении профессиональных видов работ. Воспитанная в спортивной деятельности привычка соблюдать установленные нормы и правила поведения (чувство коллективизма, выдержка, уважение к соперникам, трудолюбие, самодисцип-

лина) переносятся в повседневную жизнь, в профессиональную деятельность. Сознательное преодоление трудностей в процессе регулярных занятий физической культурой и спортом, борьба с нарастающим утомлением, ощущениями боли и страха воспитывают волю, самодисциплину, уверенность в себе.

Прикладные специальные качества — это способность организма противостоять специфическим воздействиям внешней среды: холода и жары, укачивания в автомобиле, на море, в воздухе, гипоксии. Такие способности можно развивать путем закаливания, дозированной тепловой тренировки, специальными упражнениями, воздействующими на вестибулярный аппарат (кувырки, вращения в различных плоскостях), укреплением мышц брюшного пресса, упражнениями на выносливость, при которых возникает двигательная гипоксия и т. д.

Формировать специальные качества можно в процессе ППФП не только с помощью специально подобранных упражнений, но и при регулярных занятиях соответствующими прикладными видами спорта. Следует иметь в виду и особенности так называемой неспецифической адаптации человека. Установлено, что хорошо физически развитый и тренированный человек быстрее акклиматизируется в новой местности, легче переносит действие низкой и высокой температуры, более устойчив к инфекциям, проникающей радиации и т. д.

7.3. Основные факторы, определяющие содержание ППФП

В различных сферах профессионального труда в настоящее время насчитывается несколько тысяч профессий, а специальностей — десятки тысяч.

Лишь сравнительно немногие из современных профессий требуют предельной или близкой к ней мобилизации физических способностей в процессе самой трудовой деятельности. В большинстве же видов профессионального труда, даже физического, требования к физическим возможностям далеко не максимальны.

Чтобы успешно подготовить себя к профессиональной деятельности, необходимо знать основные факторы, определяющие конкретное содержание ППФП (профессиограмму):

формы (виды) труда специалистов данного профиля;

условия и характер труда;

режим труда и отдыха;

особенности динамики работоспособности специалистов в процессе труда и специфика их профессионального утомления и заболеваемости.

Формы труда. Основные формы труда — физический и умственный. Это разделение несколько условно, но необходимо, так как с его помощью легче изучать динамику работоспособности специалиста в течение рабочего дня. Кроме того, подобное разделение обеспечивает более эффективный подбор средств физической культуры и спорта в целях подготовки студента

к предстоящей профессиональной деятельности. Например, для умственного труда важны различные качества внимания. Устойчивость в проявлении внимания развивают легкоатлетические упражнения (бег 15–20 м за указанное время, эстафеты, кроссовый бег по пересеченной местности и др.); спортивные игры; лыжная подготовка (спуски с гор с различными видами торможений, преодоление неровностей, ориентирование).

Условия труда — продолжительность рабочего времени, комфортность производственной сферы (температура, вибрация, шум, загрязненность и т. п.) Правильно подобранные средства ППФП в процессе физического воспитания способствуют повышению резистентности организма по отношению к неблагоприятным производственным факторам, содействуют увеличению адаптационных возможностей организма молодого специалиста. Выносливость и устойчивость к высокой температуре достигаются с помощью физических упражнений, сопровождающихся значительным теплообразованием: бег на 500, 1000 и 3000 м, интенсивное передвижение на лыжах, игра в футбол, баскетбол. Выносливость и устойчивость к низкой температуре обеспечивается с помощью физических упражнений, выполняемых в условиях низкой температуры в облегченной одежде, закаливание холодным воздухом и водой.

Характер труда — особенности двигательных рабочих операций, при характеристике которых имеют в виду главным образом:

тип движений (поднимающие, опускающие, вращательные, ударные и пр.);

амплитуду движений (малая, средняя, большая);

силовые характеристики движения (статическая, динамическая нагрузка, величина усилий);

особенности координации движений.

Так, например, при работе операторов на пультах управления довольно часто движения выполняются с очень малой амплитудой — меньше 2 см; при кнопочном управлении перемещение кнопки составляет от 2 до 12 мм с силой нажатия от 200 до 1600 г. Таким образом, двигательные действия оператора характеризуются микродвижениями, высокими требованиями к быстроте двигательной реакции, точности движения, при постоянном напряжении внимания.

Режим труда и отдыха. Рациональным режимом труда и отдыха на любом предприятии считается такой режим, который оптимально сочетает эффективность труда, индивидуальную производительность, работоспособность и здоровье трудящихся.

При разработке соответствующих разделов ППФП необходимо знать и учитывать организационную структуру и особенности производственного процесса, а также проводить совместный анализ рабочего и нерабочего времени, поскольку между основным трудом и деятельностью человека в свободное время существует объективная связь.

7.4. Средства ППФП студентов

Было бы ошибкой считать, что адекватными средствами ППФП могут служить только упражнения, аналогичные по форме профессиональным трудовым действиям. Современная ППФП опирается на использование упражнений, позволяющих направленно мобилизовать именно те профессионально важные функциональные свойства организма, двигательные и сопряжённые с ними способности, от которых существенно зависит результативность профессиональной деятельности.

Средства ППФП студента специфичны и достаточно разнообразны. К ним следует отнести:

прикладные физические упражнения и отдельные элементы различных видов спорта;

прикладные виды спорта (их целостное применение);

оздоровительные силы природы и гигиенические факторы;

вспомогательные средства, обеспечивающие качество учебного процесса ППФП.

Прикладные физические упражнения — упражнения, посредством которых вырабатывают двигательные умения и навыки, находящие применение в условиях профессиональной деятельности или в экстремальных ситуациях.

Для направленного воздействия на вестибулярные функции и воспитания способности поддерживать равновесие в усложненных условиях (инженер-строитель, инженер электрических сетей) применяют упражнения на повышенной (пониженной) опоре, малоустойчивой платформе, батуте, упражнения в равновесии, в лазании по вертикальной, наклонной и горизонтальной лестнице (рис. 4.1); для повышения устойчивости организма к кислородному голоданию (подводник, водолаз) — серийные скоростные упражнения в беге, плавании, нырянии, специальные упражнения с задержкой дыхания; для устойчивости к перегреванию (инженер-литейщик) — продолжительный бег в плотной одежде или в жаркую погоду, марш-броски и т. п.

При подготовке к ряду профессий довольно широко применяются естественные движения (ходьба, бег, прыжки, метания, лазание, передвижения на лыжах и т. д.). Это обусловлено тем, что в некоторых видах трудовой деятельности (геолог, монтажник, моряк и др.) совершенные навыки в естественных движениях имеют непосредственно прикладное значение. Углубленное овладение ими является непременным условием эффективной профессиональной деятельности.

Прикладные виды спорта. Каждый вид спорта способствует совершенствованию определённых физических и психических качеств. И если эти качества, умения и навыки, осваиваемые в ходе спортивного совершенствования, совпадают с профессиональными, то такие виды спорта считаются профессионально-прикладными.

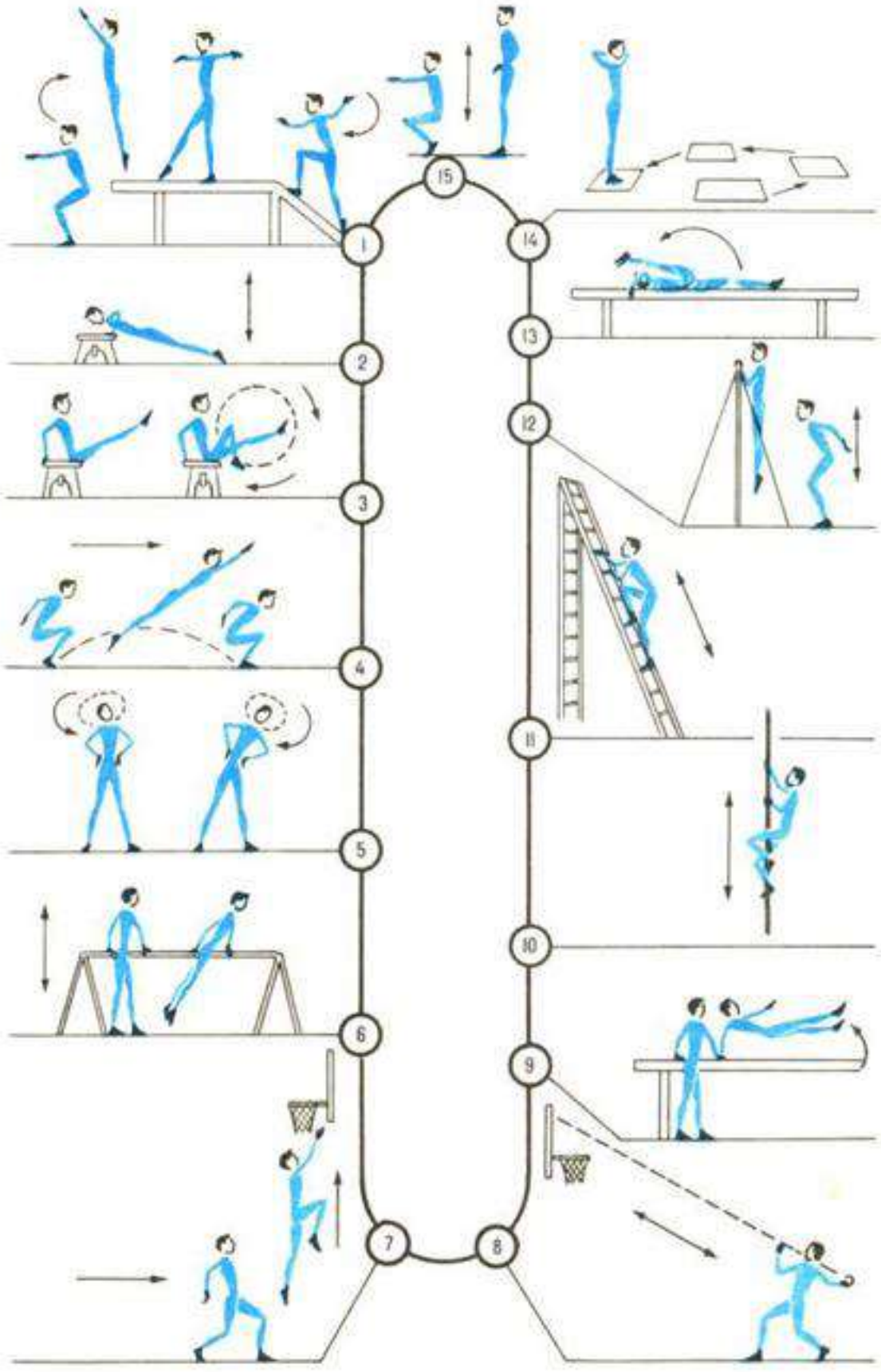


Рис. 4.1. Комплекс прикладных физических упражнений инженера-строителя

Немаловажен и опосредованный прикладной опыт занятий отдельными видами спорта. Применение средств физической культуры и спорта в профессиональной деятельности основывается на явлении «переноса» тренированности. И хотя упражнения, используемые ППФП, не копируют профессиональные движения, однако создают необходимую почву для успешного овладения профессиональными навыками. Так, например, некоторые категории инженерно-технических специальностей (инженер-строитель, инженер-механик) сталкиваются в своей профессиональной деятельности с подъемом и перемещением различных видов грузов. Знание основ техники поднятия тяжестей, приобретенных в процессе занятий силовыми видами спорта, в профессиональной деятельности будут иметь прикладную направленность и способствовать соблюдению правил безопасности. Инженер-строитель, ранее занимавшийся тяжелой атлетикой, никогда не станет тянуть вес вверх путём разгибания спины, что часто наблюдается в быту, так как при этом создаётся колоссальная нагрузка на межпозвоночные диски. Правильный подъём веса всегда начинают с активного разгибания ног, путём напряжения крупной передней группы мышц бедра (рис. 4.2).

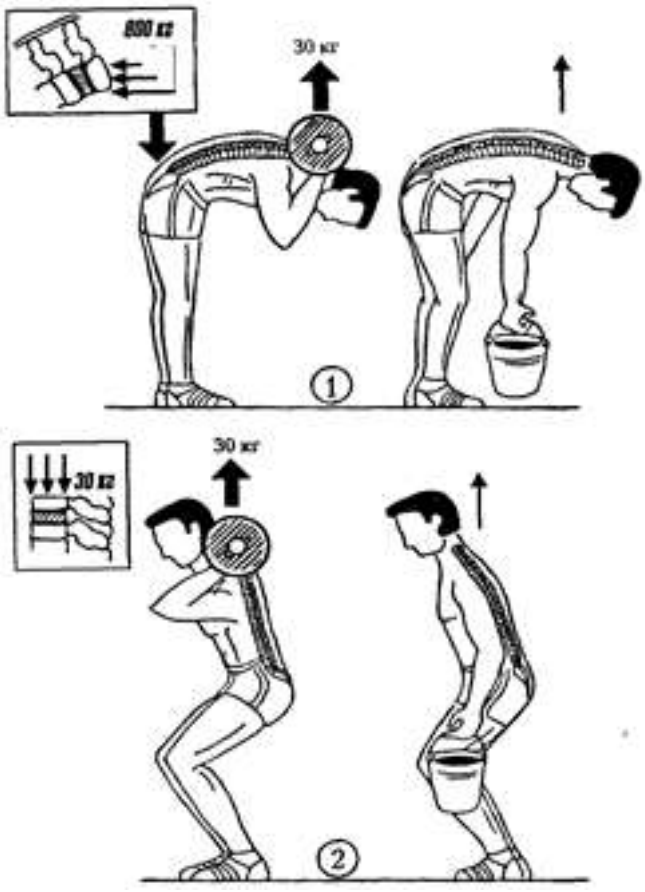


Рис. 4.2. Воздействие на межпозвоночные диски груза, поднимаемого различными способами (по Р. Хедману): 1 — неправильно; 2 — правильно

Для ряда профессий существуют специальные прикладные виды спорта. Для пожарных — это пожарно-прикладной спорт, содержание которого составляют наиболее важные навыки и качества, необходимые при борьбе с огнем: быстрое приведение средств пожаротушения в рабочее состояние; преодоление высоких стен, оконных проемов, лестничных маршей: имитация спасательных операций на большой высоте; пребывание в задымленном или загазованном помещении в условиях ограниченной видимости и другие упражнения.

Для водолазов, гидрологов, исследователей морских глубин прикладным видом спорта является подводный спорт — погружение на заданную глубину, размещение, поиск предметов, подъем различных предметов из воды.

Элементы состязательности, сопряжённые с повышенными физическими и психическими нагрузками, позволяют широко использовать спорт в процессе совершенствования профессионально-прикладной физической подготовки студентов. Однако занятия прикладными видами спорта не единственный метод решения всего комплекса вопросов ППФП студентов из-за недостаточной избирательности и неполного охвата задач подготовки будущего специалиста к любой конкретной профессии.

Оздоровительные силы природы и гигиенические факторы – обязательные средства ППФП студентов, особенно для воспитания специальных прикладных качеств, обеспечивающих продуктивную работу в различных географо-климатических условиях. С помощью специально организованных занятий можно достичь повышенной стойкости организма к холоду, жаре, солнечной радиации, резким колебаниям температуры воздуха. Это обучение приёмам закаливания организма и выполнения гигиенических мероприятий, а также мероприятия по ускорению восстановительных процессов в организме (специальные водные процедуры, различные бани и др.)

Вспомогательные средства ППФП, обеспечивающие её эффективность, — это различные тренажёры, специальные технические приспособления, с помощью которых можно моделировать отдельные условия и характер будущего профессионального труда.

7.5. Организация и формы ППФП в вузе

Организация ППФП студентов в высших учебных заведениях предполагает использование специализированной подготовки в учебное и свободное время.

Для расширения психофизической подготовки с профессиональной направленностью в основном учебном отделении могут быть организованы специализированные учебные группы по ППФП, а в спортивном — учебные группы по прикладным видам спорта.

Студенты, занимающиеся в специальном учебном отделении, осваивают те элементы, которые доступны им по состоянию здоровья.

ППФП студентов на учебных занятиях проводится в форме теоретических и практических занятий.

Цель теоретических занятий — дать будущим специалистам прикладные знания, которые бы обеспечили сознательное и методически правильное использование средств физической культуры и спорта для подготовки к профессиональным видам труда. Учебный материал должен быть рассчитан не только на подготовку студента в личном плане, но и на его подготовку как будущего руководителя производственного или творческого коллектива. Для этого можно использовать теоретические и методико-практические, а также учебно-тренировочные занятия. Вопросы ППФП, связанные с техникой безопасности, целесообразнее объяснять именно во время практических занятий.

ППФП во внеучебное время необходима студентам, имеющим недостаточную общую и специальную физическую подготовленность. Формы ППФП в свободное время:

секционные занятия в вузе по прикладным видам спорта под руководством преподавателя-тренера;

самостоятельные занятия прикладными видами спорта в различных спортивных группах вне вуза (в туристических клубах и т. д.);

самостоятельное выполнение студентами заданий преподавателей кафедры физического воспитания.

Одна из форм ППФП — массовые оздоровительно-физкультурные и спортивные мероприятия, например, внутривузовские соревнования между учебными группами, курсами, факультетами.

Лекция 8

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ. СПОРТИВНАЯ ПОДГОТОВКА

8.1. Понятия общей и специальной физической подготовки

Физическая подготовка — это педагогический процесс, направленный на воспитание физических качеств и развитие функциональных возможностей, создающих благоприятные условия обеспечения жизнедеятельности человека. Понятием «физическая подготовка» пользуются тогда, когда необходимо подчеркнуть прикладную направленность физического воспитания по отношению к трудовой, военной, спортивной и иной деятельностью. Различают общую физическую подготовку (ОФП) и специальную физическую подготовку (СФП).

Общая физическая подготовка (ОФП) — это процесс совершенствования двигательных физических качеств, направленных на всестороннее и гармоничное физическое развитие человека. ОФП способствует повышению функциональных возможностей, общей работоспособности, является основой (базой) для специальной подготовки и достижения высоких результатов в выбранной сфере деятельности или виде спорта. Средствами ОФП являются физические упражнения (бег, плавание, спортивные и подвижные игры, лыжный спорт, велоезда, упражнения с отягощениями и др.), оздоровительные силы природы и гигиенические факторы. С общей физической подготовкой связано достижение физического совершенства — уровня здоровья и всестороннего развития физических способностей, соответствующих спортивной, военной, профессиональной и иной деятельности.

Необходимость широкого разнообразия средств ОФП определяется тем, что в сферу занятий физическими упражнениями с общеподготовительной направленностью вовлекаются практически все слои населения — от младенческого до пожилого возраста.

Задачами ОФП являются: 1) укрепление и сохранение здоровья, совершенствование телосложения, гармоническое физическое развитие, поддержание общего уровня функциональных возможностей организма, многолетнее сохранение высокого уровня трудоспособности; 2) развитие всех основных физических качеств — силы, выносливости, гибкости, быстроты и ловкости; 3) создание базовой основы для специальной физической подготовленности к конкретным видам деятельности — трудовой, военной, бытовой и т. д.

Общая физическая подготовка — основная целевая задача педагогического процесса физического воспитания студенческой молодежи, ориентированной на укрепление здоровья, повышение общей работоспособности и эффективности учебного труда. Однако, следует помнить что даже достаточно высокая общефизическая подготовленность зачастую не может обеспечить

успеха в подготовке к конкретному виду профессии или виду спорта. В этих случаях необходима дополнительная специальная подготовка: в области спорта — специальная физическая подготовка, в профессиональной деятельности — профессионально-прикладная физическая подготовка.

Специальная физическая подготовка (СФП) характеризуется уровнем развития физических способностей, возможностей органов и функциональных систем, непосредственно определяющих достижения в избранном виде спорта.

8.2. Спортивная подготовка

Физическая подготовка (как общая, так и специальная) осуществляется в процессе спортивной тренировки.

Термин «спортивная тренировка» в значительной мере совпадает по своему содержанию с термином «подготовка спортсменов». Вместе с тем, их необходимо различать. Подготовка спортсмена — понятие более широкое.

Спортивная подготовка — это целесообразное использование знаний, средств, методов и условий, позволяющее направленно воздействовать на развитие спортсмена и обеспечивать необходимую степень его готовности к спортивным достижениям. Спортивная подготовка включает физическую, техническую, тактическую, психическую стороны подготовки спортсмена.

Спортивная тренировка — это та часть подготовки спортсмена, которая построена на основе метода упражнения. Например, если спортсмен выполняет какие-либо физические упражнения, то это значит, что в ходе подготовки осуществляется спортивная тренировка. Если же он изучает особенности соревновательной деятельности соперников путем просмотра видеозаписей, то в этом случае подготовка проводится, а тренировка — нет. Положительный эффект тренировки должен выражаться в повышенном уровне функциональных возможностей организма спортсмена, общей и специальной работоспособности. Функциональное состояние спортсмена, его тренированность — главный объект управления в процессе спортивной тренировки. В свою очередь, система подготовки спортсмена включает такие процессы как: соревнование, спортивную тренировку, материальное и информационное обеспечение условий подготовки.

В тренировочной, и особенно в соревновательной деятельности, ни одна сторона из сторон спортивной подготовки не проявляется изолировано. Они объединяются в сложный многофункциональный процесс, направленный на достижение наивысших спортивных результатов.

Техническая подготовка — обучение технике действий, выполняемых в соревнованиях или служащих средствами тренировки. В процессе технической подготовки спортсмен овладевает техникой избранного вида спорта, осваивает соответствующие двигательные умения и навыки, доводя их до возможно высокой степени совершенства.

Тактическая подготовка спортсмена предполагает усвоение теоретических основ спортивной тактики, практическое освоение тактических приемов, их комбинации, вариантов, воспитание тактического мышления и других способностей, определяющих тактическое мастерство.

Психическая подготовка. Основным содержанием психической подготовки является воспитание волевых способностей: целеустремленности, решительности и смелости, настойчивости и упорства, выдержки и самообладания, самостоятельности и инициативности. Психическая подготовка осуществляется в процессе тренировок с постепенно возрастающими трудностями и в соревновательных условиях.

Физическая подготовка. Как уже указывалось выше, физическая подготовка разделяется на общую и специальную физическую подготовку. Каждый вид спорта предъявляет свои специфические требования к физической подготовленности спортсмена — уровню развития отдельных физических качеств, функциональных возможностей и телосложению. Поэтому имеются определенные различия в содержании и методики физической подготовки в том или ином виде спорта, у спортсменов различного возраста и квалификации. Соотношение ОФП и СФП в тренировочном процессе зависит от решаемых задач, возраста, квалификации и индивидуальных особенностей спортсмена, вида спорта, этапов и периодов тренировочного процесса. В процессе многолетней тренировки с ростом мастерства спортсмена, увеличивается удельный вес средств СФП и соответственно уменьшается объем средств ОФП. Эффективность тренировочного процесса можно определять по качеству таких понятий как: тренированность, подготовленность, спортивная форма.

Тренированность спортсмена характеризуется степенью функционального приспособления организма к предъявляемым тренировочным нагрузкам, формирующаяся в результате систематических физических упражнений и способствующая повышению работоспособности.

Тренированность подразделяется на общую и специальную.

Общая тренированность формируется под воздействием упражнений общеразвивающего характера, повышающих функциональные возможности организма.

Специальная тренированность приобретается вследствие выполнения конкретного вида мышечной деятельности в избранном виде спорта.

Тренированность всегда ориентирована на конкретный вид специализации спортсмена и выражается:

в повышении уровня функциональных возможностей его организма,

специфической и общей работоспособности,

в достигнутой степени совершенства спортивных умений и навыков.

Подготовленность — это комплексный результат физической, технической, тактической, психической подготовок спортсмена.

Спортивная форма — это высшая степень подготовленности спортсмена, характеризующаяся его способностью к одновременной реализации в со-

ревновательной деятельности различных сторон подготовки спортсмена (технической, физической, тактической, психической). Спортивная форма связана с проявлением комплексного восприятия соревновательной деятельности в избранном виде спорта: «чувство воды», «чувство льда», «чувство мяча» и т. д.

8.3. Средства спортивной подготовки

Основными специфическими средствами спортивной подготовки являются физические упражнения — соревновательные, специально подготовительные и общеподготовительные.

Соревновательные упражнения — это целостные двигательные действия (либо совокупность двигательных действий), которые являются средством соревновательной борьбы в избранном виде спорта и выполняются по возможности в соответствии с правилами соревнований по избранному виду спорта. Например, в тяжелой атлетике — отдельные упражнения двоеборья штангиста (рывок, толчок); в спортивном плавании — плавание определенных дистанций спортивными стилями (кроль на груди, баттерфляй, брасс, кроль на спине). Понятие «соревновательное упражнение» тождественно виду спорта.

Специально подготовительные упражнения — это упражнения, имеющие сходство с соревновательными упражнениями по структуре движения, ритмическим, временным и другим характеристикам. Например, для легкоатлета-бегуна это будет бег отрезков избранной дистанции; для игровиков — игровые действия и комбинации. Другим примером могут служить упражнения, приближенные по форме к соревновательному действию: у лыжников гонщиков — упражнения на лыжероллерах; у гимнастов — упражнения на батуте и т. д.

В зависимости от направленности тренировочных занятий, специально подготовительные упражнения подразделяются на подводящие (для освоения формы, техники движений) и развивающие (для развития силы, выносливости, гибкости и других физических качеств) упражнения. К числу специально подготовительных упражнений относятся и имитационные упражнения, которые максимально соответствует по координационной структуре характеру выполнения соревновательного упражнения.

Общеподготовительные упражнения являются преимущественно средствами общей подготовки спортсмена. С этой целью могут использоваться самые разнообразные общефизические упражнения, упражнения из смежных видов спорта.

Кроме тренировочных упражнений в спортивной тренировке широко используются естественно-оздоровительные средства: водные и воздушные процедуры, тренировочные занятия в различных погодных условиях, в условиях среднегорья и высокогорья. Они используются для повышения устойчи-

вости организма к влиянию охлаждения, согревания, недостатку кислорода, т. е. для закаливания и укрепления здоровья спортсмена.

8.4. Организация и структура отдельного тренировочного занятия

Исходным целостным звеном, объединяющим в определенном порядке элементы спортивной тренировки, является структура отдельного тренировочного занятия (урочного и неурочного характера). Отдельное тренировочное занятие имеет типичные части: подготовительную (получившую в спортивной практике название «разминки»), основную и заключительную. Содержание отдельного тренировочного занятия определяется направленностью решаемых двигательных задач. Для спортивной практики не типично множество основных задач, намеченных на отдельное занятие. Повышенная сложность требований спортивного совершенствования обязывает контролировать усилия в каждом отдельном занятии на относительно небольшом круге заданий. Нередко основное содержание тренировочного занятия может составлять всего один вид двигательной деятельности, например кроссовый бег. Подготовительная и заключительная части занятия в данном случае также строятся в значительной мере на содержании бега. При более разнообразном содержании занятий его структура усложняется, прежде всего, в основной части, где более сложным становится порядок сочетания различных упражнений, чередование нагрузок и отдыха. Тем не менее, структура тренировочного занятия в спорте, как правило, более монолитна, чем в других формах физического воспитания.

Подготовительная часть учебно-тренировочного занятия или разминка. Любая физическая тренировка должна начинаться с разминки. Это жесткое и необходимое условие методики проведения занятий, и оно вполне объяснимо. Физиологической предпосылкой, способствующей совершенствованию мышечной деятельности во время занятий физическими упражнениями, должна быть определенная степень возбудимости ЦНС, соматической и вегетативной нервных систем. Это состояние организма может быть достигнуто в первую очередь подготовительными, разминочными упражнениями.

Физиологический эффект разминки объясняется тем, что вегетативные органы и системы человека обладают определенной инертностью и не сразу начинают действовать на том функциональном уровне, который требуется для качественного обеспечения двигательной деятельности.

Сущность разминки заключается в повышении подвижности вегетативных органов и систем человека и возбудимости нервных процессов. Предварительная мышечная работа способствует ускорению физико-химических процессов обмена веществ, а именно в самой скелетной мускулатуре, что отражается на повышении внутренней температуры, облегчающей химические реакции.

В процессе разминки работоспособность повышается постепенно, примерно до уровня, необходимого в период основной работы. Другими словами, разминка решает задачу усиления деятельности организма и его отдельных систем для обеспечения вывода на необходимый уровень работоспособности. Она вызывает новую установку в работе внутренних органов, усиливает деятельность дыхательной системы, выражающуюся в изменении частоты и глубины дыхания, что, в свою очередь, ведет к увеличению легочной вентиляции и газообмена, повышает деятельность системы кровообращения, усиливает обмен веществ в мышцах опорно-двигательного аппарата. Все эти изменения ведут к плавному переходу организма от состояния покоя к готовности перенести определенную физическую нагрузку.

Кроме того, грамотно проведенная разминка дает еще один положительный результат: снижается риск травматизма во время выполнения основной физической нагрузки. Разминка сопровождается повышением температуры кожи и тела, а при этом уменьшается вязкость мышц, т. е. их внутреннее трение, повышается эластичность связок и сухожилий, что и является положительным фактором для предотвращения травм. Помимо этого во время разминки достигается оптимальный уровень возбудимости именно тех центральных и периферических систем и звеньев двигательного аппарата, которые необходимы для выполнения предстоящего упражнения.

Возникает закономерный вопрос: как правильно построить вводную часть тренировочного занятия или предстартовую разминку к соревнованиям?

Большинство исследований по вопросам разминки и практический опыт тренеров говорят о том, что разминка должна состоять из двух взаимосвязанных частей — общей и специальной.

Задача первой части разминки — повысить функциональные возможности организма в целом на более высокий уровень работоспособности. При этом происходит своего рода «разогревание» организма. Поэтому она может быть почти схожей во всех видах спорта и состоять из ходьбы, медленного бега, комплекса общеразвивающих упражнений. Оптимальное время циклической части разминки 10–15 мин. Гимнастические движения должны быть составлены в виде комплекса последовательно выполняемых упражнений разной направленности.

Физиологически обоснованной является последовательность всевозможных движений, начиная с верхних частей тела и заканчивая нижними:

1. Наклоны, повороты, круговые движения головы.

2. Сгибание и разгибание, круговые движения, последовательно выполняемые кистями рук, локтевыми и плечевыми суставами.

3. Наклоны, повороты, круговые движения туловища.

4. Маховые движения ногами, приседания, выпады.

Каждое упражнение следует начинать в медленном темпе и с небольшой амплитудой движений с постепенным ее увеличением. После такого, либо подобного комплекса, можно приступать к специальной части разминки.

Специальная часть разминки должна быть тесно связана со специализацией избранного вида спорта. Ее задача сводится к установлению наиболее оптимальных взаимоотношений между структурой предстоящего движения и деятельностью ЦНС. Здесь происходит основная «настройка» организма на предстоящую работу. Упражнения, используемые в специальной части разминки, по своему содержанию должны быть максимально приближены к основным тренировочным или соревновательным.

Основная часть учебно-тренировочного занятия обеспечивает решение задач по обучению техники двигательных действий и воспитанию физических и личностных качеств.

Учебно-тренировочные занятия, направленные на повышение уровня *физической подготовленности* строятся на основе использования разнообразных физических упражнений — общеразвивающих, спортивных, отражающих специфику избранного вида спорта, упражнений из других видов спорта. Используются различные методы тренировки: равномерный, повторный, интервальный, круговой, соревновательный и игровой. Объем и интенсивность применяемых общеразвивающих, специально-подготовительных, соревновательных упражнений; количество повторений, серий, характер и продолжительность отдыха подбираются с учетом пола, возраста, состояния здоровья, уровня подготовленности, психофизического состояния, условий мест занятий.

Учебно-тренировочные занятия, направленные на *техническую подготовленность*, отличаются не высокой моторной (двигательной) плотностью занятий. Содержанием таких занятий является отработка основ, деталей техники, разучивание новых движений, совершенствование техники ранее разученных двигательных действий.

В спортивной тренировке наиболее распространены *смешанные* (комплексные) учебно-тренировочные занятия, направленные на решение задач обучения технике, воспитания физических и личностных качеств, контроль за уровнем физической подготовленности.

Заключительная часть учебно-тренировочного занятия предназначена для постепенного снижения нагрузки и, соответственно, восстановления организма. В этих целях используют малоинтенсивный бег, ходьба, дыхательные упражнения и упражнения на растягивание и расслабление. Хорошо заканчивать тренировку водными процедурами.

8.5. Физические нагрузки и их дозирование

Основным фактором, определяющим степень воздействия мышечной деятельности на физическое развитие, является нагрузка физических упражнений.

Нагрузка физических упражнений (физическая нагрузка) — это определенная мера их влияния на организм занимающихся, а также степень преодо-

леваемых при этом субъективных и объективных трудностей. Два разных по уровню физической подготовленности студента, выполняя одинаковую мышечную работу, получат разную по величине нагрузку. То есть, нагрузка — это не сама работа, а ее следствие. Действием нагрузки является ответная реакция организма на выполненную работу. Одним из основных показателей соответствия нагрузки уровню подготовленности организма являются внешние признаки утомления (табл. 1).

Таблица 1

Внешние признаки утомления

Признаки	Степень утомления		
	легкая	значительная	очень большая
Цвет кожи лица и туловища	Небольшое покраснение	Значительное покраснение	Резкое покраснение, побледнение, синюшность губ
Потливость	Небольшая, чаще на лице	Большая, головы и туловища	Очень сильная, выступление соли
Дыхание	Учащенное ровное	Значительное учащение, периодически через рот	Резко учащенное, поверхностное, появление одышки
Движения	Не нарушены	Неуверенные	Покачивания, нарушения координации движений, дрожание конечностей — тремор
Внимание	Безошибочное	Неточность выполнения команд	Замедленное выполнение заданий
Самочувствие	Жалоб нет	Жалобы на усталость, сердцебиение, одышку и т. д.	Сильная усталость, боль в ногах, головокружение, шум в ушах, головная боль, тошнота и др.

Физические нагрузки в каждом конкретном случае должны быть оптимальными: недостаточные нагрузки — не эффективны, чрезмерные — наносят вред организму. Если нагрузка остается прежней и не изменяется, то ее воздействие становится привычным и перестает быть развивающим стимулом. Поэтому постепенное увеличение физической нагрузки является необходимым требованием занятий физическими упражнениями.

По своему характеру нагрузки подразделяются на тренировочные и соревновательные; по величине — умеренные, средние, высокие или предельные нагрузки; по направленности — способствующие совершенствованию отдельных физических качеств (скоростных, силовых, координационных и др.).

Тренировочные нагрузки характеризуются рядом физических и физиологических показателей. К физическим показателям нагрузки относятся количественные признаки выполняемой работы (амплитуда движений, количество повторений, темп выполнения, степень сложности упражнения и др.). Физиологические параметры характеризуют уровень мобилизации функциональных резервов организма (увеличение ЧСС, ударного объема крови, минутного объема).

Дозирование физической нагрузки, регулирование интенсивности их воздействия на организм связаны со следующими факторами, которые необходимы учитывать:

количество повторений упражнения: чем большее число раз повторяется упражнение, тем больше нагрузка, и наоборот;

амплитуда движений: с увеличением амплитуды нагрузка на организм возрастает;

исходное положение: положение, из которого выполняется упражнение, существенно влияет на степень физической нагрузки. К ним относятся: изменение формы и величины опорной поверхности при выполнении упражнений (стоя, сидя, лежа), применение исходных положений, изолирующих работу вспомогательных групп мышц (с помощью гимнастических снарядов и предметов), усиливающих нагрузку на основную мышечную группу и на весь организм, изменения положения центра тяжести тела по отношению к опоре;

темп выполнения упражнений: темп может быть медленным, средним, быстрым. В циклических упражнениях, например, большую нагрузку дает быстрый темп, в силовых — медленный темп;

продолжительность и характер пауз отдыха между упражнениями. Более продолжительный отдых способствует более полному восстановлению организма. По характеру паузы отдыха могут быть пассивными и активными. При активных паузах, когда выполняются легкие упражнения разгрузочного характера или упражнения в мышечном расслаблении, восстановительный эффект повышается.

Учитывая вышеперечисленные факторы, можно уменьшать или увеличивать суммарную физическую нагрузку в одном занятии и в серии занятий на продолжительном периоде времени.

Совокупность физических параметров нагрузки, их комбинации определяют в целом интенсивность и объем тренировочной нагрузки.

Наиболее информативным и широко используемым показателем интенсивности физических нагрузок является *частота сердечных сокращений.* В основе определения интенсивности тренировочной нагрузки по частоте сердечных сокращений лежит связь между ними — чем больше нагрузка, тем больше частота сердечных сокращений.

Относительная рабочая частота сердечных сокращений (%ЧСС$_{max}$) — это выраженное в процентах отношение частоты сердечных сокращений во время нагрузки и максимальной частоты сердечных сокращений для данного человека. Приближенно ЧСС$_{max}$ можно рассчитать по формуле:

ЧСС$_{max}$ = 220 – возраст человека (лет)

При определении интенсивности тренировочных нагрузок по частоте сердечных сокращений используются два показателя: пороговая и пиковая частота сердечных сокращений. Пороговая частота сердечных сокращений — это наименьшая интенсивность, ниже которой тренировочного эффекта не возникает. Пиковая частота сердечных сокращений — это наибольшая ин-

тенсивность, которая не должна быть превышена в результате тренировки. Примерные показатели частоты сердечных сокращений у здоровых людей, занимающихся спортом могут быть пороговая — 75 % и пиковая — 95 % от максимальной частоты сердечных сокращений. Чем ниже уровень физической подготовленности человека, тем ниже должна быть интенсивность тренировочной нагрузки.

Индивидуальные зоны интенсивности нагрузок определяются по частоте сердечных сокращений (рис. 1.1).

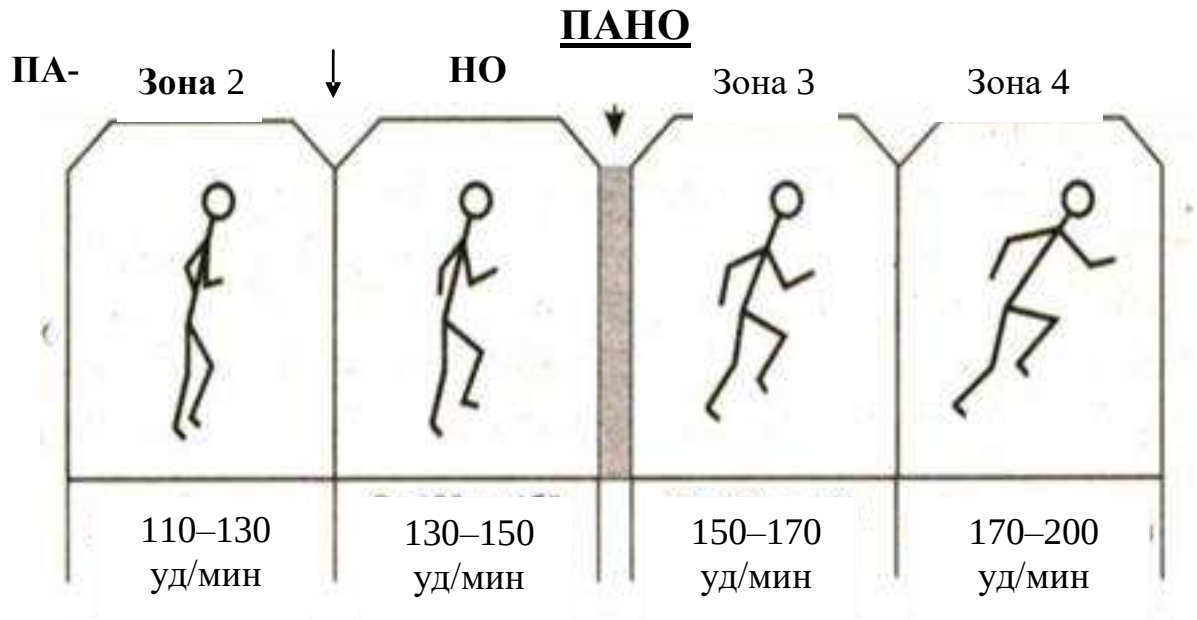


Рис. 1.1. Зоны интенсивности нагрузок по ЧСС:
1 — зона умеренной интенсивности; 2 — зона средней интенсивности; 3 — зона большой интенсивности; 4 — зона высокой или предельной интенсивности; ПАНО – порог анаэробного обмена

Первая зона — ЧСС 100–130 уд/мин, зона умеренной интенсивности нагрузок, характеризуется аэробным процессом энергетических превращений (без кислородного долга). Работа в этой зоне интенсивности считается легкой и может выполняться долго. Тренировочный эффект может обнаружиться лишь у слабо подготовленных студентов; начинающих заниматься; у лиц со слабым здоровьем, особенно имеющим сердечно-сосудистые и дыхательные заболевания. Спортсменами может применяться в целях разминки, для восстановления или активного отдыха.

Вторая зона — ЧСС 130–150 уд/мин, зона средней интенсивности нагрузок, характеризующаяся также аэробным процессом энергообеспечения мышечной деятельности. Она стимулирует восстановительные процессы, улучшает обменные процессы, совершенствует аэробные способности, развивает общую выносливость. Как тренировочная зона наиболее типична для начинающих спортсменов. Работа в этой зоне может выполняться от одного до

нескольких часов (длительный кроссовый бег, длительное непрерывное плавание, марафонские дистанции и др.).

Третья зона — ЧСС 150–170 уд/мин, зона большой интенсивности — смешанная, аэробно-анаробная. В этой зоне включаются анаэробные (бескислородные) механизмы энергообеспечения мышечной деятельности. Считается, что 150 уд/мин — это порог анаэробного обмена (ПАНО). Однако, у слабо подготовленных занимающихся ПАНО может наступить и при частоте сердечных сокращений 130–140 ударов в минуту, тогда как у хорошо тренированных спортсменов ПАНО может «отодвинуться» к границе 160–170 ударов в минуту. Тренировочная работа в этой зоне может проходить в зависимости от подготовленности от 10–15 минут до часа и более (в практике спорта высших достижений). Она содействует развитию и совершенствованию специальной выносливости, требующей высоких аэробных способностей.

Четвертая зона — 170–200 уд/мин, зона высокой или предельной интенсивности нагрузок, анаэробно-аэробная. В четвертой зоне совершенствуются анаэробные механизмы энергообеспечения на фоне значительного кислородного долга. В связи с высокой интенсивностью нагрузки продолжительность ее короткая (от 3–5 до 30 мин).

В целом продолжительность занятий в той или иной зоне интенсивности нагрузок зависит от уровня подготовленности.

Лекция 9

ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УЧЕБНОГО ТРУДА И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ. СРЕДСТВА ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ В РЕГУЛИРОВАНИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

9.1. Психофизиологические характеристики интеллектуальной деятельности

Обучение в высшей школе — сложный и достаточно длительный процесс, имеющий ряд характерных особенностей и предъявляющий высокие требования к пластичности психики и физиологии молодых людей. Учебный процесс студентов — это умственный труд, к которому принято относить работы, связанные с приемом и переработкой информации и требующие преимущественно напряжения сенсорного аппарата, памяти, активации процессов мышления, эмоциональной сферы.

Для большинства современных профессий интеллектуальной деятельности характерны ускоренный темп, резкое увеличение объема и разнородности информации, дефицит времени для принятия решений, а также возрастание социальной значимости этих решений и личной ответственности. Характерной особенностью данного вида труда является сильное возбуждение головного мозга и вегетативной нервной системы и в то же время малое участие мышечной системы. В процессе умственного труда основная нагрузка приходится на центральную нервную систему, обеспечивающую протекание психических процессов — восприятия, внимания, памяти, мышления, эмоции.

Выявлено отрицательное воздействие на организм пребывания в «сидячей позе», характерной для умственного труда. В таком положении кровь скапливается в сосудах, расположенных ниже сердца. Уменьшается объем циркулирующей крови, что ухудшает кровоснабжение ряда органов, в том числе и мозга. Ухудшается венозное кровообращение. Когда мышцы не работают, вены переполняются кровью, движение ее замедляется, нарушается деятельность циркуляторного аппарата кровообращения. Все это приводит к функциональному напряжению, нарушению питания клеток головного мозга, снижению работоспособности и, в целом, может быть причиной возникновения заболеваний сердечно-сосудистой и нервной систем.

9.2. Работоспособность и влияние на нее различных факторов

Работоспособность — это способность человека выполнять конкретную деятельность в рамках заданных временных лимитов и параметров эффективности. С одной стороны, она отражает возможности биологической природы человека, служит показателем его дееспособности, с другой — вы-

ражает его социальную сущность, являясь показателем успешности овладения требованиями какой-то конкретной деятельности.

В процессе учебной деятельности работоспособность студента определяется воздействием разнообразных внешних и внутренних факторов не только по отдельности, но и в их сочетании. Эти *факторы* можно разделить на следующие группы: 1) *физиологического* характера — состояние здоровья студента, состояние сердечно-сосудистой, дыхательной, эндокринной и других систем; 2) *физического* характера — степень и характер освещенности помещения, температура воздуха, уровень шума и другие; 3) *психического* характера — самочувствие, настроение, мотивация и др.; 4) с*оциального* характера — условия мест занятий, условия проживания, питания и др.

Существуют общие закономерности изменения работоспособности на протяжении учебного дня, в начале которого студент не сразу «входит в учебу», когда даже самая привычная учебная деятельность выполняется с некоторым затруднением, а работоспособность повышается постепенно.

Первый период динамики работоспособности получил наименование периода *врабатывания*. В течение этого периода наблюдается некоторое рассогласование между учебными требованиями и функциональным состоянием организма студента. Чем рассогласование больше, тем длительнее период врабатывания.

Второй период — *оптимальной (устойчивой)* работоспособности — характеризуется полной мобилизацией (физиологической, психической, организационной) организма на выполнение учебной деятельности. Этот период в норме должен быть самым длительным.

Третий период — *полной компенсации* — характеризуется появлением начальных признаков утомления, которые компенсируются волевыми усилиями или положительной мотивацией к выполнению учебных заданий.

Четвертый период — *неустойчивой компенсации* — характеризуется нарастанием утомления; волевые усилия уже не могут обеспечить поддержание работоспособности. Требуется отдых и восстановление.

Снижение работоспособности в результате учебной деятельности и закономерно наступающее утомление является нормальной реакцией человека. С физиологической точки зрения *утомление* — это функциональное состояние организма, вызванное умственной или физической работой. Состояние утомления усиливается во время работы и уменьшается в процессе отдыха (активного, пассивного и сна).

При утомлении деятельность внешних органов чувств или заметно повышается, или до крайности ослабевает; снижается сила памяти — быстро исчезает из памяти то, что незадолго до этого было усвоено. Наступление утомления не всегда обнаруживается в одновременном ослаблении всех сторон умственной деятельности. В связи с этим условно различают местное и общее утомление. Так, снижение эффективности в одном виде учебного труда может сопровождаться сохранением его эффективности в другом виде. На-

пример, устав заниматься вычислительными операциями, можно успешно заниматься чтением. Но может быть и такое состояние общего утомления, при котором необходим отдых, сон.

Процесс утомления может характеризоваться субъективным симптомом — усталостью. Ощущение усталости считается одним из наиболее чувствительных показателей утомления. Усталость характеризуется тяжестью в голове и конечностях, общей слабостью, разбитостью, вялостью и недомоганием.

Однако выраженность усталости не всегда соответствует степени утомления. То есть, она не может служить объективным показателем работоспособности. В основе этого несоответствия, в первую очередь, лежит разная эмоциональная настройка работающего на выполняемую работу. Например, при высокой мотивации работающего, выполняющего приятную и социально-значимую работу, усталость не возникает у него в течение длительного времени. И, наоборот, при бесцельной, неинтересной работе усталость может возникнуть, когда объективно утомление или вовсе еще не наступило, или выраженность его далеко не соответствует степени усталости.

Наряду с основным фактором (учебной нагрузкой), существует ряд дополнительных причин способствующих наступлению утомления. Эти причины сами по себе не вызывают утомление, однако, сочетаясь с действием основного фактора, вызывают более раннее и выраженное его проявление. К числу дополнительных причин можно отнести:

факторы внешней среды (температура, влажность, газовый состав, барометрическое давление и др.);

факторы, связанные с нарушением режимов труда и отдыха;

факторы, обусловленные изменением привычных суточных биоритмов, и выключение сенсорных раздражении;

социальные факторы, мотивация и др.

В определенной мере работоспособность в учебной деятельности зависит от свойств личности студента, особенностей нервной системы, темперамента. Высокая работоспособность обеспечивается только в том случае, если жизненный ритм молодого человека правильно согласуется с естественными биологическими ритмами. Чем точнее совпадает начало учебно-трудовой деятельности с подъемом жизненно важных функций организма, тем продуктивнее будет учебный труд.

Различают студентов с устойчивой стереотипностью изменения работоспособности. Студенты, отнесенные к «утреннему» типу, так называемые жаворонки. Для них характерно то, что они встают рано, с утра бодры, жизнерадостны, приподнятое настроение сохраняют в утренние и дневные часы. Наиболее работоспособны с 9 до 14 ч. Вечером их работоспособность заметно снижается. Студенты «вечернего» типа — «совы» — наиболее работоспособны с 18 до 24 ч. Они поздно ложатся спать, часто не высыпаются, нередко опаздывают на занятия; в первой половине дня заторможены. Очевидно, период снижения работоспособности студентов обоих типов целесообразно ис-

пользовать для отдыха, обеда, если же необходимо заниматься, то наименее трудными дисциплинами. Для «сов» целесообразно с 18 ч устраивать консультации и занятия по наиболее сложным разделам программы.

Наблюдения показали, что у студентов, которые по оптимуму работоспособности относятся к группе утренних, в 1,5 раза чаще возникает гипертония, чем в группе вечерних. Объясняется это тем, что у «жаворонков» утром организм быстрее и активнее перестраивается с отдыха на работу — уже в 6 ч у этих студентов больше выбрасывается в кровь адреналина, норадреналина, которые поднимают артериальное давление. У студентов вечерней группы внутренние механизмы, влияющие на повышение давления, работают медленнее.

Есть еще и третья группа студентов — аритмики, они занимают промежуточное положение между «жаворонками» и «совами», но все же они ближе к «жаворонкам».

9.3. Средства физической культуры в обеспечении работоспособности студента

Принято считать, что физические упражнения являются одним из лучших «лекарств» от утомления и повышения работоспособности.

Дело в том, что импульсы от опорно-двигательного аппарата резко повышают тонус клеток коры головного мозга за счет улучшения в них обменных процессов. Одновременно существенно возрастает выброс в кровь гормонов эндокринными железами, что также усиливает обменные процессы во всех органах. Наконец, при активной работе мышц быстро улучшается кровообращение, а с ним — дыхание, работа печени и почек по выведению из крови токсичных шлаков, угнетающе действующих на нервные клетки.

В начале учебного дня, проведя утреннюю гигиеническую гимнастику, можно обеспечить ускоренный переход организма к бодрому работоспособному состоянию. Во время сна центральная нервная система человека находится в состоянии отдыха от дневной активности. При этом снижена физиологическая активность организма, которая после пробуждения начинает повышаться постепенно, иногда слишком медленно. Человек может ощущать вялость, сонливость, порой беспричинную раздражительность, что негативно сказывается на его работоспособности. Выполнение физических упражнений вызывает потоки нервных импульсов от работающих мышц и суставов и приводит центральную нервную систему (ЦНС) в активное, деятельное состояние. Соответственно активизируется и работа внутренних органов, обеспечивая человеку повышение работоспособности и давая ему ощутимый прилив бодрости.

В течение учебного дня рекомендуется применять физкультминутки и физкультпаузы в целях снятия физического утомления и продления времени высокой работоспособности.

Физкультминутка выполняется в течение 1–2 мин и состоит из 2–3 упражнений, которые подбираются специально для тех групп мышц, в которых ощущается усталость. Первое упражнение обычно заключается в распрямлении спины, отведении спины назад. Следующие упражнения — наклоны, повороты, маховые движения.

Для снятия утомления мышц глаз можно выполнить двухминутный *пальминг* (погружение) (рис. 2.1). Для этого надо принять удобное, расслабленное положение, закрыть глаза ладонями рук (положение перевернутой буквы У). Правильное исполнение пальминга включает овладение его физической и психической сторонами. Мягко закройте глаза и прикройте их чашеобразно сложенными ладонями рук крест-накрест так, чтобы мизинцы наложились друг на друга. Пальцы скрестите на лбу. Никакого напряжения в руках, веках и бровях.

Рис. 2.1. Пальминг

Пальминг считается легчайшим способом достижения расслабления. С психической стороны необходимо видение абсолютно черного поля перед глазами. Черного поля не надо сознательно добиваться, оно само появится автоматически, как только будет достигнута необходимая для этого степень расслабления тела и психики. Если человек способен правильно контролировать свои мысли, свою психическую деятельность, добиться видения черного удается практически мгновенно.

Пальминг дает глазам отдых. Отдых расслабляет мышцы глаз и одновременно активизирует нервные клетки глаз. Желательно делать пальминг понемногу, но часто.

Хорошо снимает зрительное утомление частое моргание. Оно увеличивает приток слезной жидкости, расслабляюще действующей на глазное яблоко и мышцы.

Физкультпауза применяется при более сильном утомлении. Выполняется обычно 5–7 упражнений, которые могут вызвать эффект восстановления работоспособности в результате смены вида деятельности. Примерное содержание комплекса физкультпаузы: 1-е упражнение — потягивание; 2-е упражнение — для мышц туловища, рук, ног; 3-е упражнение — то же, но динамично; 4-е упражнение — приседание, прыжки; 5-е упражнение — маховые движения; 6-е упражнение — на расслабление мышц рук; 7-е упражнение — на внимание.

Учебные занятия по физическому воспитанию имеют важную роль в повышении работоспособности студентов.

Структура организации учебного процесса в вузе оказывает воздействие на организм студента, изменяя его функциональное состояние, влияя на работоспособность.

В режиме учебного дня в период врабатывания (нулевая и первая учебная пара) предпочтительно использовать физические нагрузки с ЧСС 110–130 уд/мин и моторной плотностью до 65–80 % или с ЧСС 130–160 удар/мин при моторной плотности 50–65 %. Такой режим занятий сокращает период врабатывания в учебном труде, стимулирует период высокой работоспособности, способствует его сохранению до конца учебного дня. Занятия с ЧСС выше 160 уд/мин рекомендуется использовать на последних часах учебного расписания.

При двух занятиях в неделю наибольший уровень умственной работоспособности наблюдается при сочетании занятий с ЧСС 130–160 уд/мин с интервалами занятий 1–3 дня. Использование двух занятий в неделю с ЧСС свыше 160 уд/мин ведет к значительному снижению умственной работоспособности, особенно для нетренированных.

Для лиц с ослабленным здоровьем, а также для студентов с высоким уровнем тренированности в данные режимы должны быть внесены соответствующие изменения.

Физические упражнения во внеучебное время играют особую роль в развитии общей выносливости и, как следствие, — повышении работоспособности. В этих целях обычно применяются упражнения циклического характера: бег, плавание, ходьба на лыжах и т. д.

Оздоровительный бег является самым доступным и эффективным средством поддержания и повышения работоспособности. Общее влияние бега на организм связано с изменениями функционального состояния ЦНС, компенсацией недостающих энергозатрат, функциональными сдвигами в системе кровообращения. Кроме того, тренировка в беге на развитие выносливости является незаменимым средством разрядки и нейтрализации отрицательных эмоций, которые вызывают хроническое нервное перенапряжение, что в свою очередь ведет к повышению риска инфаркта миокарда в результате избыточного поступления в кровь гормонов надпочечников — адреналина и норадреналина. Особенно полезен в этом отношении вечерний бег, который снимает отрицательные эмоции, накопленные за день, и «сжигает» избыток адреналина, выделяемого в результате стрессов. Таким образом, бег является лучшим природным транквилизатором, более действенным, чем лекарственные препараты.

Оздоровительный бег оптимальной дозировки в сочетании с водными процедурами является лучшим средством борьбы с неврастенией и бессонницей. Трехкратная олимпийская чемпионка по легкой атлетике Татьяна Казанкина охарактеризовала эффект такого сочетания как «выбивание психологического стресса физическим».

Успокаивающее влияние бега усиливается действием гормонов гипофиза — *эндорфинов*, которые выделяются в кровь при беге на выносливость. В процессе физической нагрузки их содержание в крови возрастает в пять раз по сравнению с состоянием покоя, и повышенная их концентрация удерживается в течение нескольких часов после завершения тренировки. Эндорфины вызывают

состояние своеобразной эйфории, ощущение радости, физического и психического благополучия, подавляют чувство голода и боли, в результате чего резко улучшается настроение. Психиатры широко используют циклические упражнения при лечении депрессивных состояний, независимо от их причины.

В результате более полноценного отдыха центральной нервной системы повышается не только физическая, но и умственная работоспособность. Многие ученые отмечают повышение творческой активности и плодотворности научных исследований после начала занятий оздоровительным бегом (даже в пожилом возрасте).

Плавание. Регулярные занятия плаванием благоприятно влияют на центральную нервную систему, процессы восстановления и повышения работоспособности. Это, прежде всего, связано со спецификой водной среды. Плывущий в воде человек находится почти в невесомом состоянии, находясь в горизонтальном положении. Эти необычные условия способствуют тому, что функции организма протекают иначе, чем в вертикальном положении, когда человек стоит или передвигается по земле. При плавании на центры головного мозга воздействует целый поток новых раздражителей, вызванных движениями в полувесомости, горизонтальным положением тела, глубоким дыханием, давлением воды на область грудной клетки и кожный покров тела и др. На все эти раздражители из соответствующих центров головного мозга посылаются новые ответные реакции. А те центры головного мозга, которые активно функционировали в наземных условиях, в это время отдыхают, восстанавливаются. Поэтому после плавания с оптимальной нагрузкой человек чувствует себя обновленным, бодрым, способным продолжать учебную или другую деятельность. Регулярные занятия плаванием способствуют улучшению сна, содействуют формированию уравновешенного и сильного типа нервной деятельности.

Лыжный спорт. Ходьба на лыжах по своим функциональным характеристикам относится к циклическим аэробным упражнениям и оказывает эффект схожий с оздоровительным бегом и плаванием. Занятия на свежем воздухе, в общении с природой, оказывают положительное влияние на нервную систему, нормализуют процессы торможения и возбуждения, «успокаивают» организм после наряженной умственной деятельности.

Лекция 10

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ

10.1. Методические принципы физического воспитания

Систематическое воздействие физических упражнений на организм человека может быть успешным в том случае, когда методика их применения (система средств и способов) согласуется с основными правилами, закономерностями процесса физического воспитания. Знание и соблюдение этих закономерностей, или иначе принципов, позволяет эффективно овладеть конкретным двигательным навыком и развить то или иное физическое качество (силу, выносливость, гибкость и т. д.). И, наоборот, — не знание принципов или их неумелое применение существенным образом тормозит успешность обучения движением, затрудняет формирование физических качеств.

Основными принципами методики обучения и воспитания (методическими принципами), которыми необходимо руководствоваться в процессе построения занятий физическими упражнениями, являются принципы сознательности и активности, наглядности, доступности и индивидуализации, систематичности, динамичности.

Принципы сознательности и активности предусматривают формирование осмысленного отношения и устойчивого интереса студентов к занятиям физическими упражнениями. Это, в свою очередь, возможно только при творческом сотрудничестве преподавателя и студента. Педагогическое мастерство, профессионализм преподавателя заключается в доведении до сознания студентов конкретного смысла и значения выполняемых заданий, объяснением не только того, что и как выполнять, но и почему предлагается именно это, а не другое упражнение, почему его следует выполнять так, а не иначе, как оно влияет на те или иные функции организма. Совместный анализ удачного или не удачного выполнения упражнений, поиск ошибок в технике движений, причин их возникновения и путей устранения способствует формированию у студентов сознательного и активного отношения к процессу обучения, приучает их к самоанализу, самооценке, самоконтролю двигательной деятельности, развивает интерес и стремление к самосовершенствованию.

Путь к физическому совершенству — прежде всего большой напряженный труд. Здесь неизбежны и утомительные упражнения, и «скучные» задания, интерес к которым проявляется лишь на основе глубокого понимания студентом их важности и необходимости в процессе становления гармонически развитой личности. Именно на этой основе формируется устойчивое стремление преодолевать трудности, проявлять инициативность, самостоятельность, творческую активность в процессе физического совершенствования.

Принцип наглядности. Этот принцип в физическом воспитании обеспечивается комплексным использованием многообразных форм наглядности: показ двигательного действия преподавателем или подготовленным студентом, просмотр учебных видеофильмов, наглядных пособий, рисунков, схем, зрительных и слуховых ориентиров и др. Применение различных форм и средств наглядности способствуют формированию точного образа двигательного действия или двигательного задания (модели деятельности) в целом.

Принцип доступности и индивидуализации. Этот принцип обязывает строго учитывать возрастные особенности, пол, уровень подготовленности, индивидуальные различия в физических и психических способностях студентов. Доступность упражнений или нагрузок не означает полное отсутствие трудности при их выполнении, а предполагает постоянное и последовательное преодоление их путем мобилизации физических и духовных сил занимающихся. Мера доступности изменяется в зависимости от степени технической, физической и функциональной подготовленности студента: что было недоступно на одном этапе обучения, становится в дальнейшем легко выполнимым. В соответствии с этим должны изменяться и предъявляемые требования.

Принцип систематичности — это, прежде всего, регулярность занятий, рациональное распределение нагрузок и отдыха. Если за учебным или тренировочным занятием последует слишком большой перерыв, то это приведет к снижению уровня работоспособности. Систематичность или непрерывность процесса обучения и воспитания заключается в том, что положительный эффект каждого последующего занятия должен как бы «наслаиваться» на «следы» предыдущего, закрепляя и углубляя их. В итоге эффект ряда занятий «суммируется» — возникает кумулятивный эффект системы занятий, то есть относительно стойкие адаптационные перестройки функционального характера, которые составляют основу физической подготовленности, тренированности и стабильных двигательных навыков.

Принцип динамичности предусматривает целенаправленное повышение требований к двигательной деятельности студентов за счет обновления и усложнения применяемых физических упражнений, методов обучения, условий занятий, а также величины нагрузки — ее объема и интенсивности. Без этого нельзя обеспечить развитие физических, волевых качеств, освоить новые формы двигательных умений и навыков, совершенствовать деятельность функциональных систем организма.

Рассмотренные принципы отражают различные закономерности и стороны целостного процесса физического воспитания. Они составляют не сумму, а единство принципиальных методических положений, взаимно обусловленных и дополняющих друг друга. Отступление от одного из принципов может разладить весь сложный процесс физического воспитания и сделать безрезультативным большой труд преподавателя и студента.

10.2. Средства физического воспитания

К средствам физического воспитания относятся физические упражнения, оздоровительные силы природы и гигиенические факторы (рис. 3.1). Основным специфическим средством физического воспитания являются физические упражнения, вспомогательными средствами — оздоровительные силы природы и гигиенические факторы.

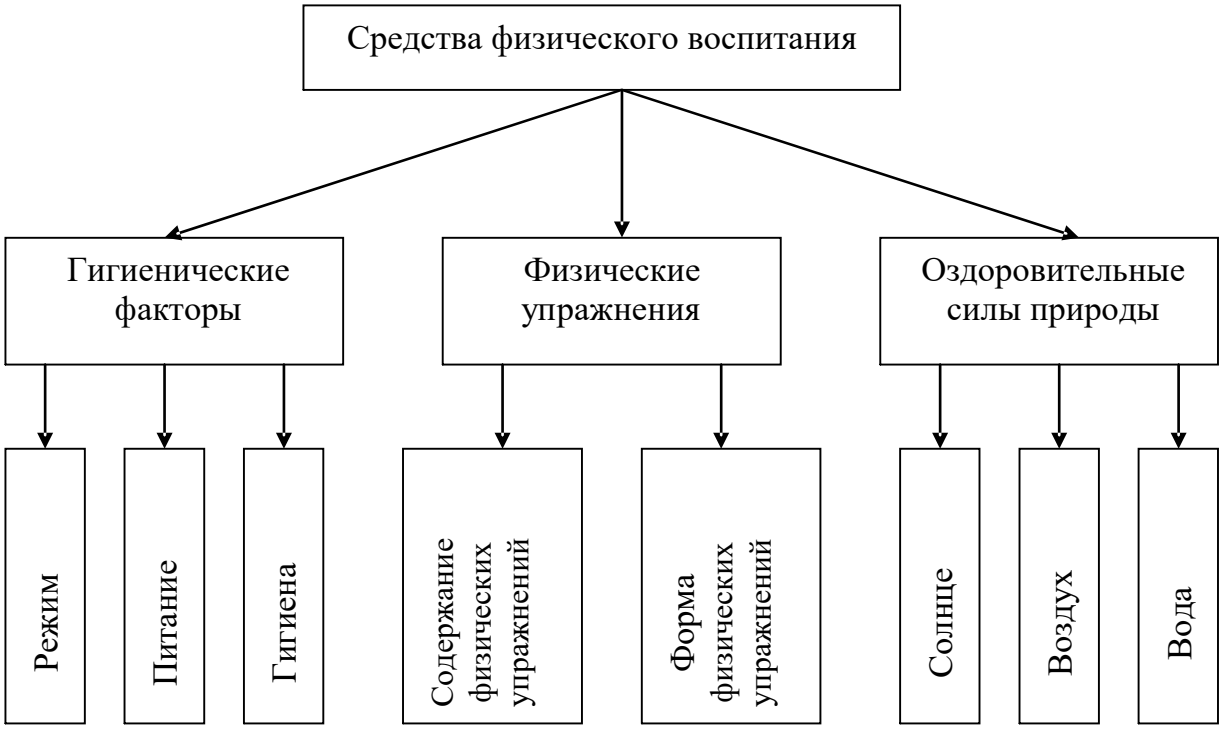


Рис. 3.1. Средства физического воспитания

Физические упражнения — это двигательные действия, направленные на решение задач физического воспитания. Число разработанных и используемых в различных видах спорта физических упражнений (циклических, ациклических, динамических, статических, аэробных, анаэробных и др.) велико. Они различны по форме, содержанию, направленности (рис. 3.2).

Соблюдение *гигиенических правил* в процессе физического воспитания усиливает положительный эффект физических упражнений. Требования гигиены к режиму нагрузок и отдыха, питания и внешних условий занятий (чистота, освещенность, вентиляция мест занятий) способствуют эффективности проводимых физических упражнений.

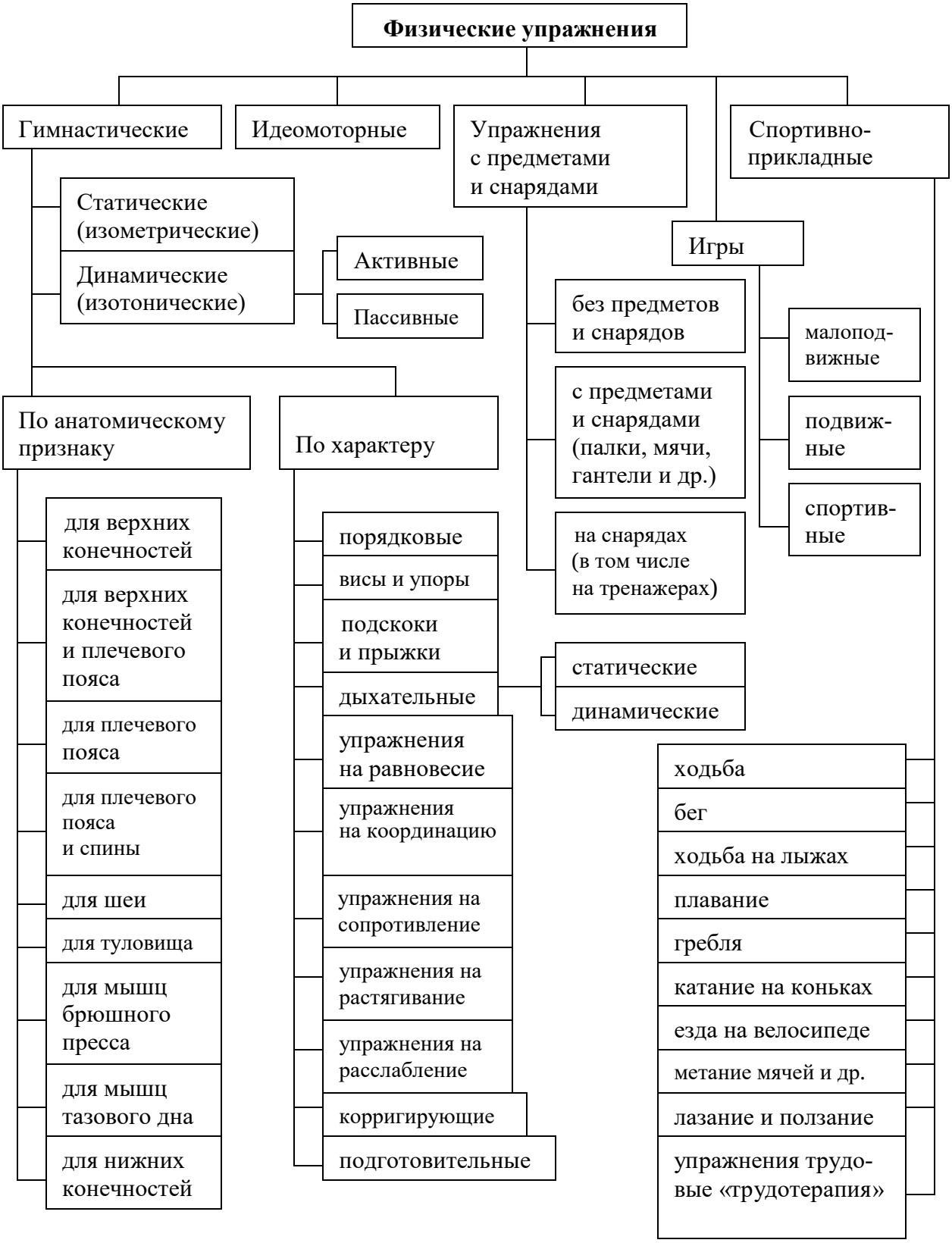


Рис. 3.2. Классификация физических упражнений

10.3. Методы физического воспитания

В физическом воспитании применяются общепедагогические (применяемые во всех случаях обучения и воспитания) и специфические (характерные только для физического воспитания) методы.

Из *общепедагогических* методов, широко используемых в физическом воспитании, следует выделить словесные методы. Практически вся деятельность в процессе обучения и воспитания связана с использованием метода словесного воздействия: сообщают знания, дают задания, руководят их выполнением, анализируют и оценивают результаты, управляют поведением занимающихся. К словесным методам относятся: лекции, беседы, рассказ, объяснения, указания, распоряжения и команды, словесные оценки, комментарии, замечания и многое другое. Применение того или иного словесного метода зависит от возраста занимающихся, этапа обучения двигательному действию, уровня физической и интеллектуальной подготовленности.

К *специфическим* методам физического воспитания относятся методы строго регламентированного упражнения, игровой и соревновательный методы.

Сущность методов *строго регламентированного упражнения* заключается в том, что каждое физическое упражнение выполняется в строго заданной форме и точно обусловленной физической нагрузкой. Методы строго регламентированного упражнения обладают большими педагогическими возможностями. Они позволяют: 1) строго регламентировать нагрузку по объему и интенсивности, управлять ее динамикой в зависимости от психофизического состояния студента; 2) точно дозировать интервалы отдыха между частями нагрузки, не вызывая перенапряжения функциональных систем организма; 3) избирательно воспитывать физические качества; 4) эффективно осваивать технику физических упражнений.

В практике физического воспитания все методы строго регламентированного упражнения подразделяются на две группы: методы обучения технике двигательного действия и методы воспитания физических качеств.

Обучение технике двигательного действия может осуществляться как при разучивании его по частям, так и при целостном его выполнении. Метод обучения двигательному действию *по частям* (метод расчлененного упражнения) предполагает разучивание сложного по структуре двигательного действия по фазам или элементам с последовательным их объединением по мере освоения в целостное физическое упражнение. Обычно применяется на начальном этапе обучения.

Метод *целостного* обучения применяется на любом этапе обучения. Сущность его состоит в том, что техника двигательного действия осваивается с самого начала в целостной структуре.

Методы воспитания физических качеств

Методы строгой регламентации, применяемые для воспитания физических качеств, представляют собой различные комбинации нагрузок и отдыха. Основными параметрами регулирования и дозирования нагрузки в любом из методов являются: интенсивность, длительность, количество повторений упражнения, интервалы и характер отдыха.

Равномерный метод характеризуется тем, что при его применении занимающиеся выполняют физические упражнения непрерывно с относительно постоянной интенсивностью. С увеличением интенсивности работы длительность ее уменьшается, и наоборот. Наиболее типичными примерами построения учебно-тренировочного занятия с использованием равномерного метода являются: длительный непрерывный бег, плавание, бег на лыжах, катание на коньках, велоезда. Интенсивность выполнения упражнений, как правило, умеренная (при ЧСС 130–170 уд/мин), продолжительность — от 15 до 90 мин и более. Тренировочное занятие с равномерной нагрузкой способствует совершенствованию сердечно-сосудистой и дыхательной систем, развитию общей и специальной выносливости, воспитанию волевых качеств.

Переменный метод характеризуется направленным изменением нагрузки в процессе тренировочного занятия (скорости, темпа, величины усилий и т. д.). Применяются упражнения как с убывающей, так и с увеличивающейся (прогрессирующей) нагрузкой. Прогрессирующая нагрузка (например, последовательное однократное поднимание штанги весом 40–50–60–70–80 кг с полными интервалами отдыха между подходами; пробегание отрезков 200+400+800+1200 м) способствует повышению функциональных возможностей организма, развивает специальную выносливость. Убывающая (нисходящая) нагрузка (например, пробегание отрезков в следующем порядке: 800+400+200+100 м с жесткими интервалами отдыха между ними) позволяет достигать больших объемов нагрузки тренировочного занятия, что важно при воспитании выносливости.

Повторный метод характеризуется многократным выполнением упражнения через интервалы отдыха, в течение которого происходит достаточно полное восстановление работоспособности. Например, сгибание и разгибание рук в упоре лежа 20–25 раз, повторить 3–4 серии с отдыхом до достаточно полного восстановления; повторное пробегание отрезков 400 м х 6 раз. В первом случае развивается силовая выносливость, во втором — специальная беговая выносливость.

Интервальный метод, также как и повторный, характеризуется многократным повторением упражнения, но уже с интервалами отдыха не до полного восстановления, а жестко регламентированными интервалами. Пауза отдыха устанавливается с таким расчетом, чтобы перед началом очередного повторения упражнения пульс был в пределах 120–140 уд/мин (при рабочем пульсе 160–180 уд/мин), то есть каждая новая нагрузка дается в стадии неполного восстановления. Например, пробегание отрезков 30 м 10 раз через 1–

1,5 мин отдыха. Данное упражнение развивает скоростную выносливость. Если выполнить эту же работу (30 м х 10 повт.), а интервалы отдыха увеличить до почти полного восстановления (как в повторном методе), то мы обеспечим развитие не скоростной выносливости, а, в большей степени, — скорости.

Круговой метод представляет собой последовательное выполнение специально подобранных физических упражнений, воздействующих на различные мышечные группы и функциональные системы. Для каждого упражнения определяется место или «станция» (рис. 3.3). Обычно круг составляет 8–10 станций. На каждой из них студент выполняет упражнение (например, подтягивание, приседание, отжимание, прыжки, упражнение на пресс и т. д.) и проходит круг от одного до трех раз. Используется для развития и совершенствования всех физических качеств.

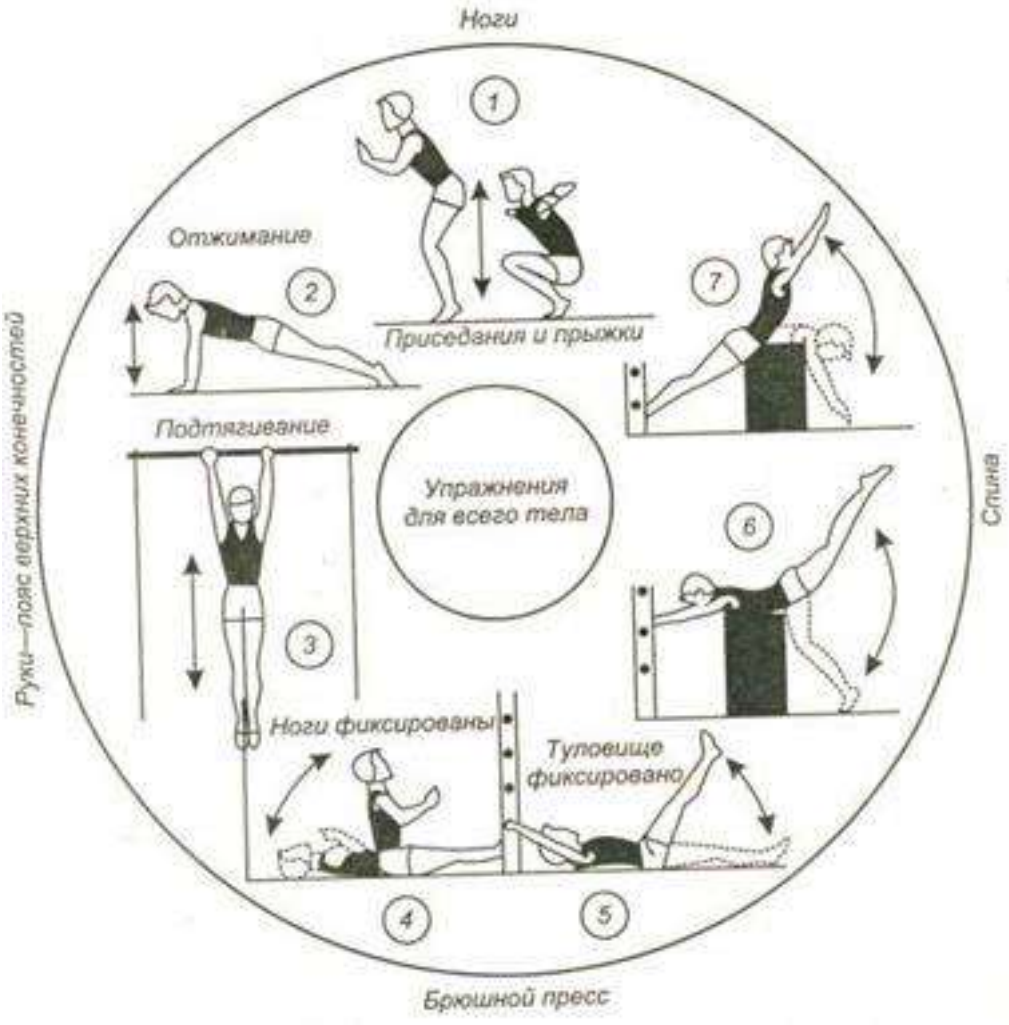


Рис. 3.3. Метод круговой тренировки

Игровой метод — это метод использования физических упражнений в игровой форме. Он характеризуется отсутствием жесткой регламентации действий, наличием вероятностных условий их выполнения. Игровой метод

используется для комплексного совершенствования двигательной деятельности в усложненных или облегченных условиях, развития таких качеств и способностей, как быстрота реакции, координация движений, пространственная ориентация. Соблюдение условий и правил игры содействует воспитанию нравственных качеств: чувства взаимопомощи и сотрудничества, коллективизма, самостоятельности, инициативности, сознательной дисциплинированности и другие ценные личностные качества. Присущий игровому методу фактор эмоциональности способствует формированию устойчивого интереса и положительного отношения к занятиям физическими упражнениями.

Соревновательный метод — это выполнение физических упражнений в форме соревнований. Основная черта соревновательного метода — сопоставление сил занимающихся в условиях организованного соперничества за первенство или высокое спортивное достижение. Фактор соперничества создает особый эмоциональный и физиологический фон, который значительно усиливает воздействие физических упражнений и способствует максимальному проявлению функциональных возможностей организма. Обязательным условием соревновательного метода является подготовленность студентов к выполнению тех физических упражнений, в которых они должны соревноваться.

10.4. Основы обучения движениям

Обучение в процессе физического воспитания обеспечивает одну из его сторон — физическое образование, содержанием которого является системное освоение человеком рациональных способов управления своими движениями, приобретение необходимого в жизни фонда двигательных умений, навыков, знаний.

При овладении техникой какого-либо двигательного действия вначале возникает умение его выполнять, затем по мере дальнейшего разучивания умение постепенно переходит в навык. Умение и навык отличаются друг от друга главным образом степенью освоенности, т. е. способами управления со стороны сознания человека.

Двигательное умение — это такая степень владения техникой двигательного действия, которая характеризуется сознательным управлением движения, неустойчивостью и не стабильностью выполнения. Дальнейшее совершенствование двигательного действия при многократном повторении способствует переходу умения в навык. Это достигается постоянным уточнением, повторением и коррекцией движения. В результате появляется слитность, устойчивость движения, а главное — автоматизированный характер управления движением.

Двигательный навык — это оптимальная степень владения техникой двигательного действия, характеризующаяся автоматизмом (минимальный

контроль со стороны сознания) управления движений, высокой прочностью и надежностью выполнения.

Обучение двигательным действиям — это длительный, последовательный и многоэтапный процесс.

Цель первого этапа обучения (*этап начального разучивания*) — сформировать основы техники изучаемого движения и добиться его выполнения в общих чертах.

Обучение начинается с создания первоначального представления двигательного действия посредством рассказа, объяснения, демонстрации техники (показ двигательного действия преподавателем, использования плакатов, рисунков и др.). Создание первоначального представления завершается пробными попытками выполнить двигательное действие. Если двигательное действие сложное — разучивают по частям, несложное по технике двигательное действие разучивают в целом. Освоение движений может протекать без ошибок и с появлением их. На этапе начального разучивания наиболее типичные ошибки — это лишние, ненужные движения, закрепощенность движений, нарушение ритма и согласованности выполнения двигательного действия. С первых повторений физического упражнения необходимо обязательно исправлять двигательные ошибки, так как при многократном выполнении они закрепляются, автоматизируются.

Цель второго этапа обучения (*этап углубленного разучивания*) — совершенствование двигательного умения. В процессе второго этапа обучения осваиваются детали движения при их раздельном выполнении, а затем в целостном движении.

Эффективность обучения на этом этапе во многом зависит от правильного подбора методов, приемов и средств обучения. Уточнение, корректировка техники двигательного действия при углубленном разучивании предпочтительно осуществлять при целостном его выполнении. Эффективно выполнять двигательные действия в усложненных вариантах, в соревновательных условиях (на лучшее исполнение техники двигательного действия). На этом этапе изменяются методы словесного воздействия. Ведущими становятся анализ и разбор техники, обсуждение основ и деталей техники, самоанализ индивидуальной техники.

Цель третьего этапа обучения (*этап формирования двигательного навыка*) — совершенствование двигательного навыка. В процессе многократного повторения разучиваемого двигательного действия отдельные его движения становятся все более привычными, осваиваются и постепенно автоматизируются его координационные механизмы и двигательные умения переходят в навык.

Основные задачи третьего этапа обучения — добиться стабильности и автоматизма выполнения двигательного действия, довести до необходимой степени совершенства индивидуальные черты техники. На этом этапе увеличится количество повторений в обычных и новых, непривычных условиях,

в сочетании с другими двигательными действиями, при различных внешних помехах, в соревновательной и игровой деятельности. Этот этап может длиться очень долго, так как изменение уровня развития физических качеств, требует коррекции техники самого движения.

10.5. Развитие физических качеств

Одной из основных задач, решаемой в процессе физического воспитания, является обеспечение оптимального развития физических качеств. Физическими качествами принято называть врожденные морфофункциональные качества, благодаря которым возможна физическая активность и целесообразная двигательная деятельность человека. К основным физическим качествам относят силу, быстроту, выносливость, гибкость, ловкость.

Сила — способность преодолевать внешнее сопротивление или противодействовать ему посредством мышечных напряжений. Развитие силы сопровождается утолщением и ростом мышечных волокон.

Средствами развития силы являются физические упражнения с повышенным отягощением (сопротивлением): упражнения с весом внешних предметов (гири, разборные гантели, штанга с набором дисков разного веса, вес партнера и т. д.); упражнения с преодолением собственного веса тела (подтягивание в висе, отжимание в упоре, удержание равновесия в упоре, в висе и т. д.); упражнение с использованием спортивных тренажеров; упражнения с использованием внешней среды (бег и прыжки по рыхлому песку, бег и прыжки в гору, бег против ветра и т.д.); упражнения с использованием сопротивления упругих предметов (эспандеры, резиновые жгуты, фитомячи и т. д.).

Силовые упражнения в отдельном занятии могут занимать всю основную часть, если воспитание силы является главной задачей учебного занятия. В других случаях, силовые упражнения выполняются в конце основной части занятия, но не после упражнений на выносливость. Силовые упражнения хорошо сочетаются с упражнениями на растягивания и расслабление. Величину отягощения обычно дозируют весом отягощения, количеством повторений в одном подходе, числом подходов (серий).

Для развития силы применяют различные методы.

Метод максимальных усилий — выполнение упражнений с предельными и околопредельными отягощениями. При одном подходе выполняется 1–3 повторения, 5–6 подходов с отдыхом 4–8 мин. Данный метод связан с развитием «взрывной силы», совершенствованием межмышечной и внутримышечной координации. В тренировке начинающих не используется.

Метод динамических усилий способствует созданию максимального силового напряжения посредством работы с непредельным отягощением с максимальной скоростью. Это обеспечивается применением малых и средних отягощений. Выполняется 3–6 серий по 15–20 повторений, отдых 2–4 мин. Данный метод способствует развитию скоростно-силовых качеств.

Метод повторных (непредельных) усилий предусматривает использование непредельных отягощений с предельным числом повторений («до отказа»). Вес непредельного отягощения подбирается с учетом подготовленности занимающегося. Обычно это выполнение упражнений с отягощением 30–70 % от максимального, 3–6 серий по 4–12 повторений, отдых 2–4 мин. Серийные повторение такой работы с непредельным отягощением содействуют сильной активизации обменно-трофических (питательных) процессов в мышечной и других системах организма, способствуют повышению общего уровня функциональных возможностей систем и органов, эффективному наращиванию мышечной массы.

Метод круговой тренировки обеспечивает комплексное воздействие на различные мышечные группы. Упражнения проводятся по «станциям» и подбираются таким образом, что каждая последующая серия включала в работу новую группу мышц.

Быстрота — комплекс функциональных свойств организма, определяющих скоростные характеристики движений, а также двигательной реакции. Средствами развития быстроты являются соревновательные специальные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью, скоростно-силовые упражнения, подвижные и спортивные игры. Упражнения выполняют повторно в максимально быстром темпе в облегченных или затруднённых условиях. Длительность выполнения упражнения небольшая.

Выносливость — это способность противостоять физическому утомлению в процессе мышечной деятельности. Различают два вида выносливости: общую и специальную.

Общая выносливость — способность выполнять работу с невысокой интенсивностью в течение продолжительного времени за счет аэробных источников энергообеспечения. Средствами развития общей (аэробной) выносливости являются упражнения, вызывающие максимальную производительность сердечно-сосудистой и дыхательной систем. В практике физического воспитания применяют самые разнообразные по форме физические упражнения циклического и ациклического характера; продолжительный бег, бег по пересеченной местности, бег на лыжах, бег на коньках, езда на велосипеде, плавание, игры и игровые упражнения и др. Основными методами развития обшей выносливости являются: 1) равномерный метод с умеренной и переменной интенсивностью нагрузок; 2) повторный метод; 3) метод круговой тренировки; 4) игровой и соревновательный методы.

Специальная выносливость — это способность эффективно выполнять работу в определенной трудовой или спортивной деятельности. Средством развития специальной выносливости (скоростной, силовой, координационной, скоростно-силовой и т. д.) являются специально подготовительные упражнения, максимально приближенные по форме, структуре и особенностям воздействия на функциональные системы организма, собственно соревновательные упражнения и общеподготовительные средства.

Ловкость — способность быстро, точно, экономно решать двигательные задачи. Основным средством воспитания ловкости являются: физические упражнения повышенной координационной сложности и содержащие элементы новизны. Сложность физических упражнений можно увеличить за счет изменения пространственных, временных и динамических параметров, а также за счет внешних условий, изменяя порядок расположения снарядов, их вес, высоту; изменяя площадь опоры или увеличивая ее подвижность в упражнениях на равновесие и т. п.; комбинируя двигательные навыки; сочетая ходьбу с прыжками, бег и ловлю предметов; выполняя упражнения по сигналу или за ограниченное время.

Упражнения, направленные на развитие ловкости, эффективны до тех пор, пока они не будут выполняться автоматически. Затем они теряют свою ценность, так как любые, освоенные до навыка и выполняемые в одних и тех же постоянных условиях двигательные действия на стимулируют дальнейшее развитие ловкости.

Таким образом, развитию ловкости способствуют систематическое разучивание новых усложненных движений, применение упражнений, требующих мгновенной перестройки двигательной деятельности: спортивные, подвижные игры, единоборства.

Гибкость — способность выполнять упражнения с большой амплитудой. Гибкость зависит от эластичности мышц, связок, суставных сумок; связана с фактором наследственности, на нее влияют возраст, регулярные занятия физическими упражнениями.

Для развития гибкости применяют упражнения на растягивание мышц, мышечных сухожилий и суставных связок с постепенно возрастающей амплитудой. Среди упражнений на растягивание различают активные, пассивные и статические.

Активные движения с полной амплитудой (махи руками и ногами, рывки, наклоны и вращательные движения туловищем) можно выполнять без предметов и с предметами (гимнастические палки, обручи, мячи и т. д.).

Пассивные упражнения на гибкость включают: движения, выполняемые с помощью партнера; движения, выполняемые с отягощениями; движения, выполняемые с помощью резинового эспандера или амортизатора; пассивные движения с использованием собственной силы (притягивание туловища к ногам, сгибание кисти одной руки другой рукой и т. п.).

Статические упражнения, выполняемые с помощью партнера, собственного веса тела или силы, требуют сохранения неподвижного положения с предельной амплитудой в течение определенного времени (6–9 сек). После этого следует расслабление, а затем повторение упражнения.

Упражнения для развития гибкости рекомендуется проводить путем активного выполнения движений с постепенно увеличивающейся амплитудой, использования пружинящих «самозахватов», покачиваний, маховых движений.

Основные правила применения упражнений в растягивании: не допускаются болевые ощущения, движения выполняются в медленном темпе, постепенно увеличиваются их амплитуда и степень применения силы партнера.

Лекция 11

СПОРТ. ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ВЫБОР ВИДОВ СПОРТА ИЛИ СИСТЕМ ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

11.1. Определение понятия «спорт»

Спорт — это сложное социальное явление, один из видов физической культуры общества, исторически сложившейся в форме соревновательной деятельности, специальной подготовки к ней, а также специфических межличностных отношений, норм и достижений, возникающих в процессе этой деятельности.

Принципиальной отличительной чертой спорта от других видов занятий физическими упражнениями является наличие соревновательной деятельности. И физкультурник, и спортсмен могут использовать в своих занятиях и тренировках одни и те же физические упражнения (например, бег), но при этом спортсмен всегда сравнивает свои достижения в физическом совершенствовании с успехами других спортсменов в очных соревнованиях. Занятия физкультурника направлены на личное совершенствование безотносительно к достижениям в этой области других занимающихся.

Спорт — эффективное средство для совершенствования человека, для преобразования его духовной и физической природы; действенный фактор воспитания и самовоспитания.

Занятия спортом, участие в соревнованиях — это прекрасные возможности нравственного воспитания спортсменов. Спорт даёт ни с чем не сравнимую возможность проверить человека в самых острых бескомпромиссных ситуациях, раскрыть все стороны его характера, выявить его жизненное кредо.

Систематические занятия спортом содействуют формированию таких черт характера, как сила воли, смелость, самообладание, решительность, настойчивость, уверенность в своих силах, выдержка, дисциплинированность и др.

В ходе спортивной борьбы раскрываются такие черты нравственного облика спортсмена, как благородство, честность, уважение к сопернику, способность подчинить своё поведение нормам спортивной этики.

Фэйр Плэй (англ. — честная игра) — массовое спортивное движение, в котором спортсмены, тренеры, болельщики, вообще все, кто связан со спортом должны придерживаться основного принципа — *не стремиться к победе любой ценой*, на спортивной площадке сохранять честь и благородство. По предложению Российского комитета Фэйр Плэй в 1993 году приз «Трофей Пьера де Кубертена за благородный жест» присужден нашей великой лыжнице Раисе Сметаниной. Среди лауреатов наград Фэйр Плэй — трехкратный олимпийский чемпион борец Александр Карелин, бесстрашная альпинистка не раз выручавшая товарищей в самую трудную минуту Екатерина Иванова,

олимпийский чемпион по теннису Евгений Кафельников, передавший крупную сумму своих призовых денег семьям погибших в авиакатастрофе.

Занятие спортом и присутствие на спортивных соревнованиях, в ходе которых спортсмены демонстрируют физически совершенные и гармоничные движения, а также красивые, благородные поступки, развивают у людей чувство прекрасного, воспитывают у них эстетические вкусы, чувства, идеалы, потребности. Многие люди приобщаются к спорту не только потому, что они руководствуются какими-то утилитарными целями — укрепить здоровье, установить рекорд и т. п., в значительной степени их привлекает возможность получить эстетическое удовольствие от спортивных занятий, от возможности постоянно созерцать прекрасное и создавать его в виде совершенных по красоте движений, грациозного до виртуозности владения собственным телом, движениями и т. д.

При занятиях спортом возрастают показатели умственной работоспособности; восприятие, мышление и др.

Рассматривая роль спорта в умственном воспитании, следует учитывать его воздействие на интеллектуальные и познавательные возможности человека. Занимаясь физическими упражнениями, в процессе тренировки и соревнований, человек глубже познаёт закономерности, которым подчиняются формирование физического совершенства, развитие физических качеств, овладение умениями и навыками, приобретает важные знания о структуре и функциях организма, о причинах и механизме физического развития, о личной и общественной гигиене и т. д. Систематические занятия физической культурой и спортом укрепляют нервную систему, благотворно сказываются на общем самочувствии человека, стимулируют бодрость и жизнерадостность. По данным научных исследований, те, кто систематически занимаются физической культурой и спортом, болеют значительно меньше тех, кто к ним не причастен. Спорт, как ничто другое, помогает бороться с такими губительными, особенно для молодёжи, пороками, как курение, алкоголизм и наркомания.

Спорт является мощным средством профилактики различных заболеваний и, следовательно, фактором, гарантирующим достаточно высокий уровень физической готовности.

11.2. Массовый спорт. Спорт высших достижений

Современный спорт подразделяется на массовый, спорт высших достижений и профессиональный спорт.

Массовый спорт — составная часть спорта, основным содержанием которого является рациональное использование человеком двигательной деятельности в качестве фактора подготовки к жизненной практике, оптимизации своего физического состояния и развития.

Массовый спорт даёт возможность миллионам людей совершенствовать свои физические качества и двигательные возможности, укреплять здоровье и продлевать творческое долголетие, а значит, противостоять нежелательным воздействиям на организм современного производства и условий повседневной жизни.

Цель занятий различными видами массового спорта — укрепить здоровье, улучшить физическое развитие, подготовленность и активно отдохнуть. Это связано с решением ряда частных задач: повысить функциональные возможности отдельных систем организма, скорректировать физическое развитие и телосложение, повысить общую и профессиональную работоспособность, овладеть жизненно необходимыми умениями и навыками, приятно и полезно провести досуг, достичь физического совершенства.

К элементам массового спорта значительная часть молодёжи приобщается ещё в школьные годы, а в некоторых видах спорта в дошкольном возрасте. Именно массовый спорт имеет наибольшее распространение в студенческих коллективах.

Особенности массового спорта определяются тем, что спортивная деятельность строится в зависимости от иной деятельности, доминирующей в жизни (учебной, трудовой), и потому занимает подчиненное место в индивидуальном выборе образа жизни; затраты времени и сил на спортивные занятия довольно жёстко ограничены, что объективно сдерживает и уровень спортивных достижений.

Ныне действующая программа по учебной дисциплине «Физическая культура» для студентов высших учебных заведений позволяет практически каждому студенту приобщиться к массовому спорту. Это можно сделать как в учебное, так и в не учебное время.

Спорт высших достижений — составная часть спорта, представляющая систему организованной подготовки спортсменов высокой квалификации и проведения соревнований с целью достижения максимальных результатов.

Цель спорта высших достижений принципиально отличается от цели массового. Это достижение максимально возможных спортивных результатов или побед на крупнейших спортивных соревнованиях.

Спорт высших достижений предполагает систематические, многолетние, целенаправленные тренировки и соревнования, в процессе которых решаются задачи достижения максимальных результатов.

Деятельность в сфере спорта высших достижений превращается в основную на многие годы, и очень часто такие спортсмены становятся «профессионалами». Это направление спортивного движения по самой природе своей — удел немногих. Спортсмены такого уровня составляют всего лишь сотые доли процента от общего числа занимающихся спортом. Спорт высших достижений проторяет пути к спортивным вершинам, делая их в какой-то мере доступнее для многих, вооружая массовый спорт передовым опытом.

Спорт высших достижений характеризуется постоянным прогрессивным ростом уровня спортивных результатов и установлением всё новых и новых, иногда феноменальных, рекордов — «рекордов века».

Высокие результаты достигаются интенсификацией учебно-тренировочного процесса. Известно, что спортивный успех — это талант, помноженный на труд, труд до самоотречения, до самопожертвования. Действительно, нагрузка ведущих спортсменов мира в подготовительном периоде составляет, например, у бегунов — до 500 км, лыжников — 1000 км в месяц; пловцов — 20 км в день; тяжелоатлеты измеряют нагрузки тоннами; велосипедисты имеют до 365 тренировочных дней в году; в спортивных играх — до 100 матчей в год и т. д.

Такие нагрузки неизбежно приводят к быстрой сменяемости поколений, омолаживанию некоторых видов спорта (женская спортивная гимнастика, фигурное катание, женское плавание). Отсюда возникает проблема поиска талантов, набора и отбора, работы со спортивным резервом (специализированные детско-юношеские спортивные школы олимпийского резерва).

Профессиональный спорт — предпринимательская деятельность, целью которой является удовлетворение интересов профессиональных спортивных организаций, спортсменов, избравших спорт своей профессией, и зрителей. Спортсмен-профессионал — спортсмен, для которого занятия спортом являются основным видом деятельности и который получает в соответствии с контрактом заработную плату и иное денежное вознаграждение за подготовку к спортивным соревнованиям и участие в них.

Для оценки достигаемых в любом виде спорта результатов разработана Единая всероссийская спортивная классификация (ЕВСК). Она является нормативным документом, определяющим требования, условия и порядок присвоения спортивных званий и разрядов в Российской Федерации. Структура ЕВСК предусматривает присвоение III, II, I юношеских разрядов, III, II, I разрядов и разряд «кандидат в мастера спорта» (КМС). Спортивных званий в ЕВСК два – мастер спорта России (МС) и мастер спорта России международного класса (МСМК). За особо выдающиеся спортивные достижения спортсмену присваивается звание «Заслуженный мастер спорта России». Для присвоения разрядов и званий в одних видах спорта необходимо выполнить разрядные нормативы и требования, в других – только разрядные требования. Они устанавливаются с учетом особенностей развития вида спорта, пола и возраста спортсменов. Разрядные нормативы выражены в мерах длины, веса и времени, а разрядные требования – в очках, баллах, занятом месте на соревнованиях, количестве побед над соперником, достижении определенного рейтинга. В действующую ЕВСК периодически вносятся коррективы, в связи с прогрессивными изменениями в уровне подготовки спортсменов, модернизацией спортивного инвентаря, повышением качества спортивных сооружений и соревновательных трасс.

Спорт высших достижений характерен высочайшим уровнем медико-биологического обеспечения: сеть врачебно-физкультурных диспансеров, институтов травматологии, постоянно действуют комплексные научные группы, группы допинг-контроля и пр. Получило развитие использование более 30 видов нетрадиционных стимулирующих анаболических средств гормонального характера, изготовленных на основе мужских гормонов, которые, как правило, способствуют наращиванию мышечной массы и развивают силовые показатели.

Большие резервные возможности человеческого организма могут раскрываться с помощью специальных приёмов психологической подготовки спортсмена.

В целом, спорт высших достижений немыслим без использования современных достижений человеческого общества, применяемых в науке и технике, современных технологий и материаловедения, медицины и фармакологии, кибернетики и биомеханики, психологии и педагогики и т. д.

11.3. Студенческий спорт

Студенческий спорт — составная часть спорта, культивируемая в высших учебных заведениях, интегрирующая массовый спорт и спорт высших достижений.

Возрастные особенности студенческой молодежи, специфика учебного труда и быта студентов, особенности их возможностей и условий занятий физической культурой и спортом позволяют выделить в особую категорию студенческий спорт.

Организационные особенности студенческого спорта:

доступность и возможность заниматься спортом в часы обязательных учебных занятий по дисциплине «Физическая культура» (элективный курс в основном учебном отделении, учебно-тренировочные занятия в спортивном учебном отделении);

возможность заниматься спортом в свободное от учебных академических занятий время в вузовских спортивных секциях и группах, а также самостоятельно;

возможность систематически участвовать в студенческих спортивных соревнованиях доступного уровня (в учебных зачетных соревнованиях, во внутри- и вневузовских соревнованиях по избранным видам спорта).

Вся эта система даёт возможность каждому практически здоровому студенту сначала ознакомиться, а затем выбрать вид спорта для регулярных занятий.

Во многих вузах функционируют спортивные секции по различным видам спорта, в которых занимаются студенты курса спортивного совершенствования. Финансовые возможности, региональные и природно-климатические условия не всегда позволяют вузу культивировать большинство видов спорта

на уровне специализированных спортивных секций. И все же, согласно статистическим данным, почти в каждом российском вузе работают не менее 15–17 спортивных секций и клубов, где студенты занимаются легкой атлетикой, лыжными видами спорта, различными видами спортивных единоборств, водными видами спорта, гимнастикой и акробатикой. В любом вузе развиваются какие-либо из игровых видов спорта.

Студенты-спортсмены, входящие в группы высшего спортивного мастерства краевого или областного уровня, в составы сборных команд краев, областей или сборных команд России среди юниоров, молодежи, взрослых, часто проходят подготовку в системе учебно-тренировочных сборов. В таких условиях для спортсменов создаются все необходимые условия для восстановления после тренировочных нагрузок. Сюда входит сбалансированное питание, хорошие бытовые условия, восстановительные процедуры (сауна, массаж). На таких тренировочных сборах спортсмены ежедневно находятся под наблюдением спортивного врача и малейшие отклонения в состоянии спортсмена фиксируются и устраняются.

Несмотря на значительные временные и энергетические затраты на тренировки, студенты-спортсмены, имея более высокую общую работоспособность, могут практически не отставать от своих сокурсников по освоению дисциплин учебной программы. Они легче переключаются с одного вида деятельности на другой, психологически более устойчивы к стрессовым ситуациям. В конечном итоге подавляющее большинство студентов-спортсменов проходят полный курс обучения в вузе и получают высшее образование.

11.4. Студенческие спортивные соревнования

Спортивные соревнования — одна из наиболее эффективных форм организации массовой оздоровительной и спортивной работы. Без участия в них нет спорта, нет воспитания спортсмена.

Вся система студенческих спортивных соревнований построена на основе принципа «от простого к сложному», т. е. от внутривузовских зачётных соревнований в учебной группе, на курсе (зачастую по упрощенным правилам) к межвузовским и т. д. до международных студенческих соревнований.

Внутривузовские спортивные соревнования включают в себя зачётные соревнования внутри учебных групп, учебных потоков на курсе, соревнования между курсами факультетов, между факультетами (рис. 4.1). На первых этапах внутривузовских соревнований может участвовать каждый спортсмен, вне зависимости от уровня его спортивной подготовленности.

В межвузовских соревнованиях (первенства района, города, области, края, республики) обычно участвуют и соревнуются сильнейшие студенты — спортсмены лично или в составе сборных команд вуза. Целевые задачи межвузовских соревнований могут быть самыми различными: выяснить спортив-

ное преимущество вуза; установить личные контакты между будущими коллегами по профессии (товарищеские встречи).

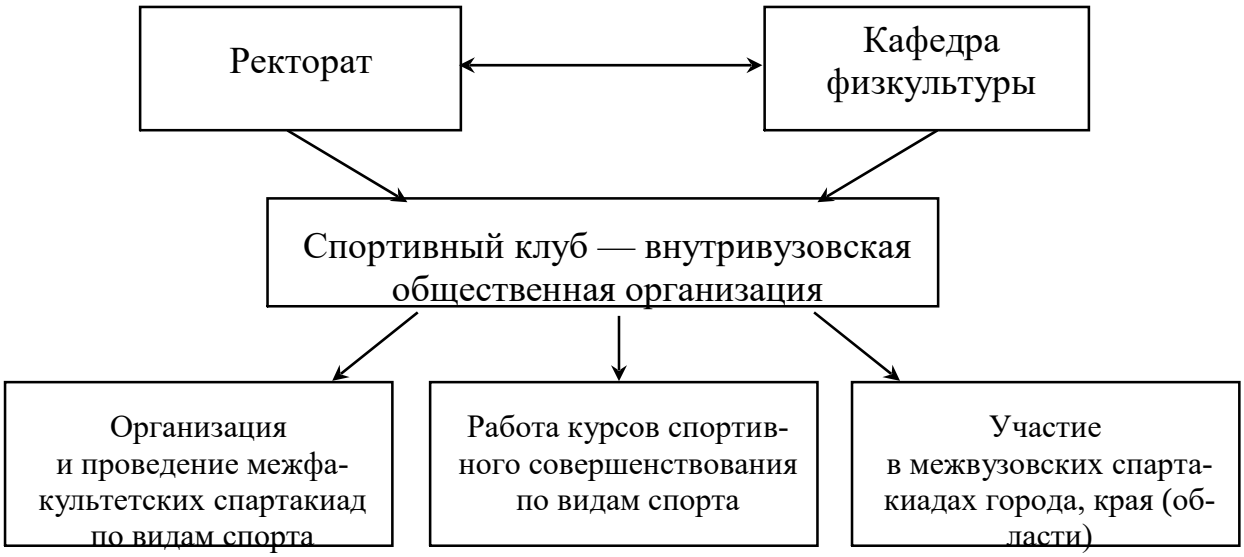


Рис. 4.1. Внутривузовская спортивная деятельность

Студенческие соревнования разного уровня служат хорошим показателем работы отдельных спортивных секций. А областные и краевые межвузовские спартакиады являются оценкой общего развития спорта в отдельном вузе. В программе таких студенческих спартакиад насчитывается более 20 видов спорта. Обычно им предшествуют межфакультетские спартакиады вузов. Последние, в свою очередь, являются финалом внутрифакультетских соревнований, в которых любой студент вуза может принять участие.

Координацию учебно-тренировочной деятельности курсов спортивного совершенствования и участия спортсменов в студенческих соревнованиях осуществляют спортивные клубы — внутривузовские общественные организации. От работы этих клубов во многом зависит спортивная жизнь студентов в учебном заведении. Ректорат и кафедра физической культуры оказывают спортклубу материальную и методическую поддержку в работе отдельных спортивных секций, в организации и проведении соревнований.

Важную роль в организации межвузовских соревнований играет общественное объединение студентов и сотрудников высших учебных заведений – Российский студенческий спортивный союз (РССС), созданный в 1993 году (рис. 4.2). Он призван консолидировать усилия всех причастных к студенчеству организаций в развитии физкультурно-оздоровительной работы и студенческого спорта. Российский студенческий спортивный союз устанавливает и поддерживает международные студенческие спортивные связи, являясь коллективным членом Международной федерации университетского спорта

(ФИСУ). По результатам студенческих соревнований, проводимых РССС, определяются составы команд студентов на международные соревнования. Самыми значимыми международными студенческими соревнованиями являются Всемирные студенческие игры, которые называются универсиадой. Всемирные студенческие игры проводятся один раз в два года: каждый нечетный год — летние и каждый четный год — зимние.

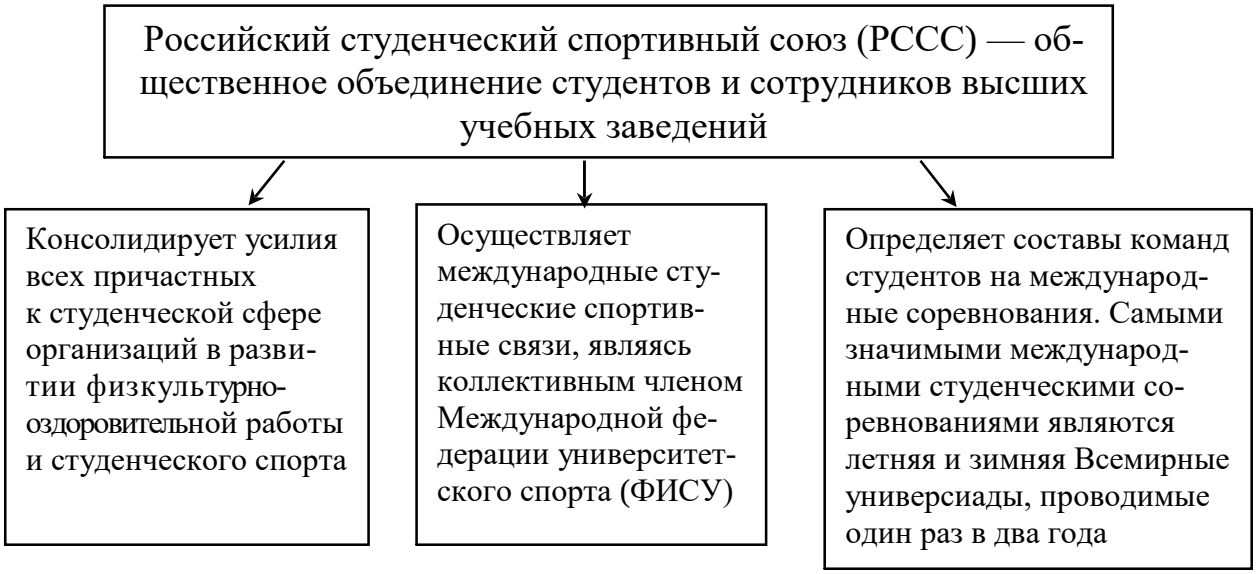


Рис. 4.2. Межвузовская спортивная деятельность

Спортивные успехи студентов становятся не только их личным достижением, но и достоянием вуза, в котором они обучаются, что, безусловно, поддерживает престиж высшего учебного заведения. Студенты-спортсмены России успешно выступают и на официальных международных стартах. Так, в составе олимпийской сборной России в Лиллехаммере (1994) было около 75 % студентов.

Основные понятия, используемые в курсе лекций по физической культуре и спорту (элективные курсы по физической культуре и спорту)

1) вид программы - спортивное соревнование по определенному виду спорта или одной из его дисциплин, в результате которого осуществляется распределение мест и (или) медалей среди участников спортивного соревнования;

1.1) антидопинговое обеспечение - проведение мероприятий, направленных на предотвращение допинга в спорте и борьбу с ним;
(п. 1.1 введен Федеральным законом от 07.05.2010 N 82-ФЗ)

1.2) базовые виды спорта - виды спорта, включенные в программы Олимпийских игр, Паралимпийских игр, а также иные виды спорта, развиваемые субъектами Российской Федерации на своих территориях с учетом сложившихся исторических традиций развития спорта высших достижений, представительства спортсменов от субъектов Российской Федерации в составах спортивных сборных команд Российской Федерации по видам спорта и участия данных команд во всероссийских и в международных официальных спортивных мероприятиях. Перечень базовых видов спорта утверждается федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке и реализации государственной политики и нормативно-правовому регулированию в сфере физической культуры и спорта, а также по оказанию государственных услуг (включая предотвращение допинга в спорте и борьбу с ним) и управлению государственным имуществом в сфере физической культуры и спорта (далее - федеральный орган исполнительной власти в области физической культуры и спорта), в установленном им по согласованию с Олимпийским комитетом России и Паралимпийским комитетом России порядке;
(п. 1.2 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

2) вид спорта - часть спорта, которая признана в соответствии с требованиями настоящего Федерального закона обособленной сферой общественных отношений, имеющей соответствующие правила, утвержденные в установленном настоящим Федеральным законом порядке, среду занятий, используемый спортивный инвентарь (без учета защитных средств) и оборудование;

2.1) Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс "Готов к труду и обороне" (ГТО) (далее также - комплекс ГТО) - программная и нормативная основа системы физического воспитания населения, устанавливающая государственные требования к уровню его физической подготовленности;
(п. 2.1 введен Федеральным законом от 05.10.2015 N 274-ФЗ)

3) военно-прикладные и служебно-прикладные виды спорта - виды спорта, основой которых являются специальные действия (в том числе приемы), связанные с выполнением военнослужащими и сотрудниками некоторых федеральных органов исполнительной власти (далее - лица,

проходящие специальную службу) своих служебных обязанностей, подготовкой граждан допризывного и призывного возрастов к военной службе, и которые развиваются в рамках деятельности одного или нескольких федеральных органов исполнительной власти;
(в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 204-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

3.1) волонтеры - граждане Российской Федерации и иностранные граждане, участвующие на основании гражданско-правовых договоров в организации и (или) проведении физкультурных мероприятий, спортивных мероприятий без предоставления указанным гражданам денежного вознаграждения за осуществляемую ими деятельность;
(п. 3.1 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

3.1-1) детско-юношеский спорт - часть спорта, направленная на спортивную подготовку несовершеннолетних граждан в организациях, осуществляющих спортивную подготовку, а также на участие таких граждан в спортивных соревнованиях, в которых спортсмены, не достигшие возраста восемнадцати лет или иного возраста, указанного в этих целях в федеральных стандартах спортивной подготовки, являются основными участниками;
(п. 3.1-1 введен Федеральным законом от 02.06.2016 N 153-ФЗ)

3.2) животные, участвующие в спортивных соревнованиях, - животные, участвующие в соответствии с правилами вида спорта в спортивных соревнованиях по данному виду спорта;
(п. 3.2 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

3.3) зрители - физические лица, находящиеся в месте проведения официального спортивного соревнования, не являющиеся его участниками и иным образом не задействованные в проведении такого соревнования, в том числе в обеспечении общественного порядка и общественной безопасности при проведении такого соревнования;
(п. 3.3 введен Федеральным законом от 23.07.2013 N 192-ФЗ)

3.4) контролер-распорядитель - физическое лицо, которое прошло специальную подготовку в порядке, установленном федеральным органом исполнительной власти в области физической культуры и спорта, имеет удостоверение контролера-распорядителя, выданное в порядке, установленном федеральным органом исполнительной власти в области физической культуры и спорта, и привлекается организатором официального спортивного соревнования и (или) собственником, пользователем объекта спорта на договорной основе для обеспечения общественного порядка и общественной безопасности при проведении официального спортивного соревнования;
(п. 3.4 в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 204-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

4) массовый спорт - часть спорта, направленная на физическое воспитание и физическое развитие граждан посредством проведения

организованных и (или) самостоятельных занятий, а также участия в физкультурных мероприятиях и массовых спортивных мероприятиях;

4.1) место проведения официального спортивного соревнования - объект спорта, а также территории, специально подготовленные для проведения официального спортивного соревнования, в том числе участки автомобильных дорог, площадей, улиц, водных объектов;

(п. 4.1 введен Федеральным законом от 23.07.2013 N 192-ФЗ)

5) национальные виды спорта - виды спорта, исторически сложившиеся в этнических группах населения, имеющие социально-культурную направленность и развивающиеся на территории Российской Федерации;

(п. 5 в ред. Федерального закона от 23.06.2014 N 170-ФЗ)

(см. текст в предыдущей редакции)

6) общероссийская спортивная федерация - общероссийская общественная организация, которая создана на основе членства, получила государственную аккредитацию и целями которой являются развитие одного или нескольких видов спорта на территории Российской Федерации, их пропаганда, организация, проведение спортивных мероприятий и подготовка спортсменов - членов спортивных сборных команд Российской Федерации;

(п. 6 в ред. Федерального закона от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

(см. текст в предыдущей редакции)

6.1) региональная спортивная федерация - региональная общественная организация, являющаяся членом общероссийской спортивной федерации (далее - региональная общественная организация), или структурное подразделение (региональное отделение) общероссийской спортивной федерации, которые получили государственную аккредитацию и целями которых являются развитие одного или нескольких видов спорта на территории субъекта Российской Федерации, их пропаганда, организация, проведение спортивных мероприятий и подготовка спортсменов - членов спортивных сборных команд субъекта Российской Федерации;

(п. 6.1 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

7) объекты спорта - объекты недвижимого имущества или комплексы недвижимого имущества, специально предназначенные для проведения физкультурных мероприятий и (или) спортивных мероприятий, в том числе спортивные сооружения;

7.1) олимпийская делегация Российской Федерации - олимпийская команда России, а также представители Олимпийского комитета России, органов государственной власти Российской Федерации, общероссийских спортивных федераций, обеспечивающие участие членов олимпийской команды России в Олимпийских играх и других международных спортивных мероприятиях, проводимых Международным олимпийским комитетом, континентальными ассоциациями национальных олимпийских комитетов;

(п. 7.1 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ; в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 204-ФЗ)

(см. текст в предыдущей редакции)

7.2) олимпийская команда России - коллектив, состоящий из спортсменов, тренеров и иных специалистов в области физической культуры и спорта, принимающих участие от имени Российской Федерации в Олимпийских играх и других международных спортивных мероприятиях, проводимых Международным олимпийским комитетом, континентальными ассоциациями национальных олимпийских комитетов;
(п. 7.2 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ; в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 204-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

8) организатор физкультурного мероприятия или спортивного мероприятия - юридическое или физическое лицо, по инициативе которого проводится физкультурное мероприятие или спортивное мероприятие и (или) которое осуществляет организационное, финансовое и иное обеспечение подготовки и проведения такого мероприятия;

9) официальные физкультурные мероприятия и спортивные мероприятия - физкультурные мероприятия и спортивные мероприятия, включенные в Единый календарный план межрегиональных, всероссийских и международных физкультурных мероприятий и спортивных мероприятий, календарные планы физкультурных мероприятий и спортивных мероприятий субъектов Российской Федерации, муниципальных образований;

9.1) паралимпийская делегация Российской Федерации - паралимпийская команда России, а также представители Паралимпийского комитета России, органов государственной власти Российской Федерации, общероссийских спортивных федераций, обеспечивающие участие членов паралимпийской команды России в Паралимпийских играх и других международных спортивных мероприятиях, проводимых под патронажем Международного паралимпийского комитета;
(п. 9.1 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

9.2) паралимпийская команда России - коллектив, состоящий из спортсменов, тренеров и иных специалистов в области физической культуры и спорта, принимающих участие от имени Российской Федерации в Паралимпийских играх и других международных спортивных мероприятиях, проводимых под патронажем Международного паралимпийского комитета;
(п. 9.2 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ)

10) программа спортивной подготовки - программа поэтапной подготовки физических лиц по виду спорта (спортивным дисциплинам), определяющая основные направления и условия спортивной подготовки на каждом ее этапе, разработанная и реализуемая организацией, осуществляющей спортивную подготовку, в соответствии с требованиями федеральных стандартов спортивной подготовки;
(п. 10 в ред. Федерального закона от 06.12.2011 N 412-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

10.1) программа развития вида спорта - программа, которая разрабатывается соответствующей общероссийской спортивной федерацией сроком на четыре года (на олимпийский, паралимпийский цикл) в порядке,

установленном федеральным органом исполнительной власти в области физической культуры и спорта, устанавливает цели, задачи, мероприятия и целевые показатели деятельности общероссийской спортивной федерации по развитию соответствующего вида спорта в Российской Федерации и утверждается этим органом;
(п. 10.1 введен Федеральным законом от 29.06.2015 N 204-ФЗ)

11) профессиональный спорт - часть спорта, направленная на организацию и проведение спортивных соревнований, за участие в которых и подготовку к которым в качестве своей основной деятельности спортсмены получают вознаграждение от организаторов таких соревнований и (или) заработную плату;

11.1) символика физкультурного мероприятия или спортивного мероприятия - флаг, логотип, гимн, девиз организатора физкультурного мероприятия или спортивного мероприятия, официальное наименование физкультурного мероприятия или спортивного мероприятия и обозначения, связанные с таким организатором, образованные на их основе слова и словосочетания и сходные с ними обозначения при упоминании с наименованиями соответствующих видов спорта и (или) указанных мероприятий; зарегистрированные в качестве товарных знаков такого организатора обозначения; охраняемые в качестве промышленных образцов и (или) объектов авторских прав такого организатора талисманы указанных мероприятий, плакаты, опознавательная символика, предметы дизайна указанных мероприятий, кубки и медали участников спортивных соревнований; охраняемые в качестве объектов авторских прав такого организатора произведения науки, литературы и искусства, а также объекты смежных прав такого организатора, содержащие обозначения, которые предназначены для индивидуализации указанных мероприятий; любые иные обозначения и объекты, разработанные организатором мероприятия для официального использования на указанных мероприятиях и принадлежащие ему;
(п. 11.1 введен Федеральным законом от 07.06.2013 N 108-ФЗ)

12) спорт - сфера социально-культурной деятельности как совокупность видов спорта, сложившаяся в форме соревнований и специальной практики подготовки человека к ним;

13) спорт высших достижений - часть спорта, направленная на достижение спортсменами высоких спортивных результатов на официальных всероссийских спортивных соревнованиях и официальных международных спортивных соревнованиях;

14) спортивная дисквалификация спортсмена - отстранение спортсмена от участия в спортивных соревнованиях, которое осуществляется международной спортивной федерацией по соответствующему виду спорта или общероссийской спортивной федерацией по соответствующему виду спорта за нарушение правил вида спорта, или положений (регламентов) спортивных соревнований, или антидопинговых правил, или норм,

утвержденных международными спортивными организациями, или норм, утвержденных общероссийскими спортивными федерациями;
(п. 14 в ред. Федерального закона от 07.05.2010 N 82-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

15) спортивная дисциплина - часть вида спорта, имеющая отличительные признаки и включающая в себя один или несколько видов, программ спортивных соревнований;

15.1) спортивная подготовка - тренировочный процесс, который подлежит планированию, включает в себя обязательное систематическое участие в спортивных соревнованиях, направлен на физическое воспитание и совершенствование спортивного мастерства лиц, проходящих спортивную подготовку, и осуществляется на основании государственного (муниципального) задания на оказание услуг по спортивной подготовке или договора оказания услуг по спортивной подготовке в соответствии с программами спортивной подготовки;
(п. 15.1 введен Федеральным законом от 06.12.2011 N 412-ФЗ)

15.2) спортивный резерв - лица, проходящие спортивную подготовку в целях включения их в состав спортивных сборных команд, в том числе спортивных сборных команд Российской Федерации;
(п. 15.2 введен Федеральным законом от 06.12.2011 N 412-ФЗ)

16) спортивная федерация - общественная организация, которая создана на основе членства и целями которой являются развитие одного или нескольких видов спорта, их пропаганда, организация, а также проведение спортивных мероприятий и подготовка спортсменов - членов спортивных сборных команд;

17) спортивное сооружение - инженерно-строительный объект, созданный для проведения физкультурных мероприятий и (или) спортивных мероприятий и имеющий пространственно-территориальные границы;

18) спортивное соревнование - состязание (матч) среди спортсменов или команд спортсменов по различным видам спорта (спортивным дисциплинам) в целях выявления лучшего участника состязания (матча), проводимое по утвержденному его организатором положению (регламенту);
(в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 202-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

19) спортивные мероприятия - спортивные соревнования, а также тренировочные мероприятия, включающие в себя теоретическую и организационную части, и другие мероприятия по подготовке к спортивным соревнованиям с участием спортсменов;
(в ред. Федеральных законов от 06.12.2011 N 412-ФЗ, от 25.12.2012 N 257-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

20) спортивные сборные команды Российской Федерации - формируемые общероссийскими спортивными федерациями (за исключением олимпийской команды России, паралимпийской команды России) коллективы спортсменов, относящихся к различным возрастным

группам, тренеров, ученых, специалистов в области физической культуры и спорта для подготовки к международным спортивным соревнованиям и участия в них от имени Российской Федерации;
(в ред. Федерального закона от 25.12.2012 N 257-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

20.1) спортивная делегация Российской Федерации - члены спортивных сборных команд Российской Федерации, представители физкультурно-спортивных организаций, спортивных федераций, Олимпийского комитета России, Паралимпийского комитета России, Сурдлимпийского комитета России, Специальной олимпиады России, Российского студенческого спортивного союза, должностные лица органов государственной власти Российской Федерации, представляющие на международных спортивных мероприятиях, за исключением Олимпийских игр, Паралимпийских игр и других международных спортивных мероприятий, проводимых Международным олимпийским комитетом, континентальными ассоциациями национальных олимпийских комитетов и Международным паралимпийским комитетом, Российскую Федерацию и (или) обеспечивающие права и законные интересы российских спортсменов в период проведения международных спортивных мероприятий;
(п. 20.1 введен Федеральным законом от 25.12.2012 N 257-ФЗ; в ред. Федерального закона от 29.06.2015 N 204-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

21) спортивный судья - физическое лицо, уполномоченное организатором спортивного соревнования обеспечить соблюдение правил вида спорта и положения (регламента) о спортивном соревновании, прошедшее специальную подготовку и получившее соответствующую квалификационную категорию;

22) спортсмен - физическое лицо, занимающееся выбранными видом или видами спорта и выступающее на спортивных соревнованиях;

23) спортсмен высокого класса - спортсмен, имеющий спортивное звание и выступающий на спортивных соревнованиях в целях достижения высоких спортивных результатов;

23.1) студенческий спорт - часть спорта, направленная на физическое воспитание и физическую подготовку обучающихся в профессиональных образовательных организациях и образовательных организациях высшего образования, их подготовку к участию и участие в физкультурных мероприятиях и спортивных мероприятиях, в том числе в официальных физкультурных мероприятиях и спортивных мероприятиях;
(п. 23.1 введен Федеральным законом от 03.12.2011 N 384-ФЗ, в ред. Федерального закона от 02.07.2013 N 185-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

23.2) студенческая спортивная лига - некоммерческая организация, которая создана на основе членства и целями которой являются содействие в популяризации студенческого спорта и развитии одного или нескольких видов спорта, организация и проведение физкультурных мероприятий и

спортивных мероприятий со студентами. Членами студенческой спортивной лиги могут быть физические лица, юридические лица, осуществляющие деятельность в области студенческого спорта;
(п. 23.2 введен Федеральным законом от 03.12.2011 N 384-ФЗ)

24) тренер - физическое лицо, имеющее соответствующее среднее профессиональное образование или высшее образование и осуществляющее проведение со спортсменами тренировочных мероприятий, а также осуществляющее руководство их состязательной деятельностью для достижения спортивных результатов;
(в ред. Федеральных законов от 06.12.2011 N 412-ФЗ, от 02.07.2013 N 185-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

24.1) федеральные стандарты спортивной подготовки - совокупность минимальных требований к спортивной подготовке по видам спорта (за исключением военно-прикладных, служебно-прикладных видов спорта, а также национальных видов спорта, развитие которых не осуществляется соответствующей общероссийской спортивной федерацией), разработанных и утвержденных в соответствии с настоящим Федеральным законом и обязательных для организаций, осуществляющих спортивную подготовку;
(п. 24.1 введен Федеральным законом от 06.12.2011 N 412-ФЗ, в ред. Федеральных законов от 25.12.2012 N 257-ФЗ, от 23.06.2014 N 170-ФЗ)
(см. текст в предыдущей редакции)

25) физическое воспитание - процесс, направленный на воспитание личности, развитие физических возможностей человека, приобретение им умений и знаний в области физической культуры и спорта в целях формирования всесторонне развитого и физически здорового человека с высоким уровнем физической культуры;

26) физическая культура - часть культуры, представляющая собой совокупность ценностей, норм и знаний, создаваемых и используемых обществом в целях физического и интеллектуального развития способностей человека, совершенствования его двигательной активности и формирования здорового образа жизни, социальной адаптации путем физического воспитания, физической подготовки и физического развития;

27) физическая подготовка - процесс, направленный на развитие физических качеств, способностей (в том числе навыков и умений) человека с учетом вида его деятельности и социально-демографических характеристик;

28) физическая реабилитация - восстановление (в том числе коррекция и компенсация) нарушенных или временно утраченных функций организма человека и способностей к общественной и профессиональной деятельности инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья с использованием средств и методов адаптивной физической культуры и адаптивного спорта, которые направлены на устранение или возможно более полную компенсацию ограничений жизнедеятельности, вызванных нарушением здоровья;

29) физкультурные мероприятия - организованные занятия граждан физической культурой;

30) физкультурно-спортивная организация - юридическое лицо независимо от его организационно-правовой формы, осуществляющее деятельность в области физической культуры и спорта в качестве основного вида деятельности. Положения настоящего Федерального закона, регулирующие деятельность физкультурно-спортивных организаций, применяются соответственно к индивидуальным предпринимателям, осуществляющим деятельность в области физической культуры и спорта в качестве основного вида деятельности;

31) школьный спорт - часть спорта, направленная на физическое воспитание и физическую подготовку обучающихся в общеобразовательных организациях, их подготовку к участию и участие в физкультурных мероприятиях и спортивных мероприятиях, в том числе в официальных физкультурных мероприятиях и спортивных мероприятиях;

(п. 31 введен Федеральным законом от 03.12.2011 N 384-ФЗ, в ред. Федерального закона от 02.07.2013 N 185-ФЗ)

(см. текст в предыдущей редакции)

32) целевая комплексная программа подготовки спортсменов к Олимпийским играм, Паралимпийским играм, Сурдлимпийским играм (далее - целевая комплексная программа) - программа, которая разрабатывается общероссийской спортивной федерацией, является составной частью программы развития вида спорта и устанавливает цели, задачи, мероприятия и целевые показатели деятельности общероссийской спортивной федерации по подготовке и выступлению спортивной сборной команды Российской Федерации по соответствующему виду спорта на Олимпийских играх, Паралимпийских играх, Сурдлимпийских играх.

(п. 32 введен Федеральным законом от 29.06.2015 N 204-ФЗ)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом 3
1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий 3
1.1.1. Утренняя физическая гимнастика 3
1.1.2. Упражнения в течение учебного дня… 4
1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия… 4
1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий 5
1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин 6
1.2 Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма 7
1.2.1 Оценка физического развития… 9
1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности) 10
2. Другие виды самостоятельной работы
2.1 Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности 12
2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 м) 12
2.1.2 Техника выполнения упражнения… 12
2.1.3 Методы самостоятельной тренировки 13
2.1.4. Средства тренировки быстроты 13
2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива 14
2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин 15
2.2.1. Техника выполнения упражнения… 15
2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин 15
2.3.1. Техника выполнения упражнения… 15
2.3.2. Методы развития силы 16
2.4. Тест на общую выносливость (бег 2000 и 3000 м) 17
2.4.1. Техника бега на длинные дистанции 17
2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения Самостоятельных тренировок 18
3.Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности 21

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом

1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий

Планирование самостоятельных занятий осуществляется студентами при консультации преподавателей и должно быть направлено на достижение единой цели – сохранение хорошего здоровья, поддержание высокого уровня физической и умственной работоспособности, достижение поставленной задачи.

Существуют три формы самостоятельных занятий:

1. Утренняя физическая гимнастика (УФГ).

2. Упражнения в течение учебного (рабочего) дня.

3. Самостоятельные тренировочные занятия.

1.1.1. Утренняя физическая гимнастика

Выполняется ежедневно. В комплекс УФГ следует включать упражнения для всех групп мышц, упражнения на гибкость и дыхание, бег, бег (прыжковые упражнения).

Не рекомендуется выполнять:

- упражнения статического характера;

- со значительными отягощениями;

- упражнения на выносливость.

При выполнении УФГ рекомендуется придерживаться определенной последовательности выполнения упражнений:

- медленный бег, ходьба (2-3 мин.);

- потягивающие упражнения в сочетании с глубоким дыханием;

- упражнение на гибкость и подвижность для мышц рук, шеи, туловища и ног;

- силовые упражнения без отягощений или с небольшими отягощениями для рук, туловища, ног (сгибание-разгибание рук в упоре лежа, упражнения с легкими гантелями, с эспандерами);

- различные наклоны в положении стоя, сидя, лежа, приседания на од-ной и двух ногах и др.;

- легкие прыжки или подскоки (например, со скалкой) – 20-30 с.;

- упражнения на расслабление с глубоким дыханием.

При составлении комплексов УФГ рекомендуется физиологическую нагрузку на организм повышать постепенно, с максимумом во второй половине комплекса. К концу выполнения комплекса нагрузка снижается и организм приводится в спокойное состояние.

Между сериями из 2-3 упражнений (а при силовых – после каждого) выполняется упражнение на расслабление или медленный бег (20-30с.).

УФГ должна сочетаться с самомассажем и закаливанием организма. Сразу же после выполнения комплекса УФГ рекомендуется сделать самомассаж основных мышечных групп ног, туловища, рук (5-7 мин.) и выполнить водные процедуры с учетом правил и принципов закаливания.

1.1.2. Упражнения в течение учебного дня

Выполняются в перерывах между учебными и самостоятельными занятиями.

Они обеспечивают предупреждение наступающего утомления, способствуют поддержанию высокой работоспособности на длительное время без перенапряжения.

При выполнении этих упражнений следует придерживаться следующих правил:

1. Проводить в хорошо проветренных помещениях или на открытом воздухе.

2. Растягивать и расслаблять мышцы, испытывающие статическую нагрузку.

3. Нагружать неработающие мышцы.

1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия

Можно проводить индивидуально или в группе из 3-5 человек и более. Групповая тренировка более эффективна, чем индивидуальная. Заниматься рекомендуется 3-4 раза в неделю по 1,5 -2 часа. Заниматься менее двух раз в неделю нецелесообразно, т.к. это не способствует повышению уровня

тренированности организма. Тренировочные занятия должны носить комплексный характер, т.е. способствовать развитию всего комплекса физических качеств, а также укреплению здоровья и повышению общей работоспособности организма.

Каждое самостоятельное тренировочное занятие состоит из трех частей:

1. Подготовительная часть (разминка) (15-20 мин. для одночасового занятия): ходьба (2-3 мин.), медленный бег (8-10 мин.), общеразвивающие упражнения на все группы мышц, соблюдая последовательность «сверху вниз», затем выполняются специально-подготовительные упражнения, выбор которых зависит от содержания основной части.

2. В основной части (30-40 мин.) изучаются спортивная техника и тактика, осуществляется тренировка развития физических, волевых качеств. При выполнении упражнений в основной части занятия необходимо придерживаться следующей последовательности:

После разминки выполняются упражнения, направленные на изучение и совершенствование техники, и упражнения на быстроту, затем упражнения для развития силы и в конце основной части занятия – для развития выносливости.

3. В заключительной части (5-10 мин.) выполняются медленный бег (3-8 мин.), переходящий в ходьбу (2-6 мин.), упражнения на расслабление в сочетании с глубоким дыханием, которые обеспечивают постепенное снижение тренировочной нагрузки и приведение организма в сравнительно спокойное состояние.

1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий

Методические принципы, которыми необходимо руководствоваться при проведении самостоятельных тренировочных занятий, следующие:

- принцип сознательности и активности предполагает углубленное изучение занимающимися теории и методики спортивной тренировки, осознанное отношение к тренировочному процессу, понимание целей и задач занятий, рациональное применение средств и методов тренировки в каждом занятии, учет

объема и интенсивности выполняемых упражнений и физических нагрузок, умение анализировать и оценивать итоги тренировочных занятий;

- принцип систематичности требует непрерывности тренировочного процесса, рационального чередования физических нагрузок и отдыха, преемственности и последовательности тренировочных нагрузок от занятия к занятию. Эпизодические занятия или занятия с большими перерывами (более 4-5 дней) неэффективны и приводят к снижению достигнутого уровня тренированности;

- принцип доступности и индивидуализации обязывает планировать и включать в каждое тренировочное занятие физические упражнения, по своей сложности и интенсивности доступные для выполнения занимающимися. При определении содержания тренировочных занятий необходимо соблюдать правила: от простого – к сложному, от легкого – к трудному, от известного – к неизвестному, а также осуществлять учет индивидуальных особенностей занимающихся: пол, возраст, физическую подготовленность, уровень здоровья, волевые качества, трудолюбие, тип высшей нервной деятельности и т.п. Подбор упражнений, объем и интенсивность тренировочных нагрузок нужно осуществлять в соответствии с силами и возможностями организма занимающихся;

- принцип динамичности и постепенности определяет необходимость повышения требований к занимающимся, применение новых, более сложных физических упражнений, увеличение тренировочных нагрузок по объему и интенсивности. Переход к более высоким тренировочным нагрузкам должен проходить постепенно с учетом функциональных возможностей и индивидуальных особенностей занимающихся.

Если в тренировочных занятиях был перерыв по причине болезни, то начинать занятия следует после разрешения врача при строгом соблюдении принципа постепенности. Вначале тренировочные нагрузки значительно снижаются и постепенно доводятся до занимающегося в тренировочном плане уровня.

Все выше перечисленные принципы находятся в тесной взаимосвязи. Это различные стороны единого, целостного повышения функциональных возможностей занимающихся.

1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин

Организм женщины имеет анатомо-физиологические особенности, которые необходимо учитывать при проведении самостоятельных занятий физическими упражнениями или спортивной тренировки. В отличие от мужского, у женского организма менее прочное строение костей, ниже общее развитие мускулатуры тела, более широкий тазовый пояс и мощнее мускулатура тазового дна. Для здоровья женщины большое значение имеет развитие мышц брюшного пресса, спины и тазового дна. От их развития зависит нормальное положение внутренних органов. Особенно важно развитие мышц тазового дна.

Одной из причин недостаточного развития этих мышц у студенток и работниц умственного труда является малоподвижный образ жизни. При положении сидя мышцы тазового дна не противодействуют внутрибрюшному давлению и растягиваются от тяжести лежащих над ними органов. В связи с этим мышцы теряют свою эластичность и прочность, что может привести к нежелательным изменениям положения внутренних органов и к ухудшению их функциональной деятельности.

Ряд характерных для организма женщины особенностей имеется и в деятельности сердечно-сосудистой, дыхательной, нервной и других систем. Все это выражается более продолжительным периодом восстановления организма после физической нагрузки, а также более быстрой потерей состояния тренированности при прекращении тренировок.

Особенности женского организма должны строго учитываться в организации, содержании, методике проведения самостоятельных занятий. Подбор физических упражнений, их характер и интенсивность должны соответствовать физической подготовленности, возрасту, индивидуальным возможностям студенток. Необходимо исключать случаи форсирования

тренировок для того, чтобы быстро достичь высоких результатов. Разминку следует проводить более тщательно и более продолжительно, чем при занятиях мужчин. Рекомендуется остерегаться резких сотрясений, мгновенных напряжений и усилий, например, при занятиях прыжками и в упражнениях с отягощением. Полезны упражнения, в положении сидя, и лежа на спине с подниманием, отведением, приведением и круговыми движениями ног, с подниманием ног и таза до положения «березка», различного рода приседания.

Даже для хорошо физически подготовленных студенток рекомендуется исключить упражнения, вызывающие повышение внутрибрюшного давления и затрудняющие деятельность органов брюшной полости и малого таза. К таким упражнениям относятся прыжки в глубину, поднимание больших тяжестей и другие, сопровождающиеся задержкой дыхания и натуживанием.

При выполнении упражнений на силу и быстроту движений следует более постепенно увеличивать тренировочную нагрузку, более плавно доводить ее до оптимальных пределов, чем при занятиях мужчин.

Упражнения с отягощениями применяются с небольшими весами, сериями по 8-12 движений с вовлечением в работу различных мышечных групп. В интервалах между сериями выполняются упражнения на расслабление с глубоким дыханием и другие упражнения, обеспечивающие активный отдых.

Функциональные возможности аппарата кровообращения и дыхания у девушек и женщин значительно ниже, чем у юношей и мужчин, поэтому нагрузка на выносливость для девушек и женщин должна быть меньше по объему и повышаться на более продолжительном отрезке времени.

Женщинам при занятиях физическими упражнениями и спортом следует особенно внимательно осуществлять самоконтроль. Необходимо наблюдать за влиянием занятий на течение овариально-менструального цикла и характер его изменения. Во всех случаях неблагоприятных отклонений необходимо обращаться к врачу.

Женщинам противопоказаны физические нагрузки, спортивная тренировка и участие в спортивных соревнованиях в период беременности. После родов к

занятиям физическими упражнениями и спортом рекомендуется приступать не ранее чем через 8-10 месяцев.

1.2. Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма

Данные самоконтроля записываются в дневник, они помогают контролировать и регулировать правильность подбора средств, методику проведения учебно-тренировочных занятий. У отдельных занимающихся количество показателей самоконтроля в дневнике и порядок записи могут быть различными, но одинаково важно для всех правильно оценивать отдельные показатели, лаконично фиксировать их в дневнике.

В дневнике самоконтроля рекомендуется регулярно регистрировать:

- субъективные данные (самочувствие, сон, аппетит, болевые ощущения);

- объективные данные (частота сердечных сокращений (ЧСС), масса тела, тренировочные нагрузки, нарушения режима, спортивные результаты).

Субъективные данные:

Самочувствие - отмечается как хорошее, удовлетворительное или плохое. При плохом самочувствии фиксируется характер необычных ощущений.

Сон - отмечается продолжительность и глубина сна, его нарушения (трудное засыпание, беспокойный сон, бессонница, недосыпание и др.).

Аппетит - Отмечается как хороший, удовлетворительный, пониженный и плохой. Различные отклонения состояния здоровья быстро отражаются, поэтому его ухудшение, как правило, является результатом переутомления или заболевания.

Болевые ощущения - фиксируются по месту их локализации, характеру (острые, тупые, режущие и т.п.) и силе проявления.

Объективные данные:

ЧСС – важный показатель состояния организма. Его рекомендуется подсчитывать регулярно, в одно и то же время суток, в покое. Лучше всего утром, лежа, после пробуждения, а также до тренировки (за 3-5 мин) и сразу после спортивной тренировки.

Нормальными считаются следующие показатели ЧСС в покое:

- мужчины (тренированные/не тренированные) 50-60/70-80;

- женщины (тренированные/не тренированные) 60-70/75-85.

С увеличением тренированности ЧСС понижается.

Интенсивность физической нагрузки также определяться по ЧСС, которая измеряется сразу после выполнения упражнений.

При занятиях физическими упражнениями рекомендуется придерживаться следующей градации интенсивности:

- малая интенсивность – ЧСС до 130 уд/мин. При этой интенсивности эффективного воспитания выносливости не происходит, однако создаются предпосылки для этого, расширяется сеть кровеносных сосудов в скелетных мышцах и в сердечной мышце (целесообразно применять при выполнении разминки);

- средняя интенсивность от 130 до 150 уд/мин.;

- большая интенсивность – ЧСС от 150 до 180 уд/мин. В этой тренировочной зоне интенсивности к аэробным механизмам подключаются анаэробные механизмы энергообеспечения, когда энергия образуется при распаде энергетических веществ в условиях недостатка кислорода;

- предельная интенсивность – ЧСС 180 уд/мин. и больше. В этой зоне интенсивности совершенствуются анаэробные механизмы энергообеспечения.

Существенным моментом при использовании ЧСС для дозирования нагрузки является ее зависимость от возраста.

Известно, что по мере старения уменьшается возможность усиления сердечной деятельности за счет учащения сокращения сердца во время мышечной работы. Оптимальную ЧСС с учетом возраста при продолжительных упражнениях можно определить по формулам:

- для начинающих: ЧСС (оптимальная) = 170 – возраст (в годах)

- для занимающихся регулярно в течении 1-2 лет:

- ЧСС (оптимальная) = 180 – возраст (в годах)

Зависимость максимальной величины ЧСС от возраста при тренировке на выносливость можно определить по формуле:

- ЧСС (максимальная) = 220 – возраст (в годах)

Например, для занимающихся в возрасте 18 лет максимальная ЧСС будет равна 220-18=202 уд/мин.

Важным показателем приспособленности организма к нагрузкам является скорость восстановления ЧСС сразу после окончания нагрузки. Для этого определяется ЧСС в первые 10 секунд после окончания нагрузки, пересчитывается на 1 мин. и принимается за 100%. Хорошей реакцией восстановления считается:

- снижение через 1 мин. на 20%;

- через 3 мин. – на 30%;

- через 5 мин. – на 50%,

- через 10 мин. – на 70 – 75%. (отдых в виде медленной ходьбы).

Масса тела должна определяться периодически (1-2 раза в месяц) утром натощак, на одних и тех же весах. В первом периоде тренировки масса обычно снижается, а затем стабилизируется и в дальнейшем за счет прироста мышечной массы несколько увеличивается. При резком снижении массы тела следует обратиться к врачу.

Тренировочные нагрузки в дневник самоконтроля записываются коротко, вместе с другими показателями самоконтроля они дают возможность объяснить различные отклонения в состоянии организма.

Спортивные результаты показывают, правильно ли применяются средства и методы тренировочных занятий. Их анализ может выявить дополнительные резервы для роста физической подготовленности и спортивного мастерства.

В процессе занятий физическими упражнениями рекомендуется периодически оценивать уровень своего физического развития и физической (функциональной) подготовленности.

1.2.1. Оценка физического развития

Проводится с помощью антропометрических измерений: рост стоя и сидя, масса тела, окружность грудной клетки, жизненная емкость легких (ЖЁЛ) и сила кисти сильнейшей руки, которые дают возможность определить:

- уровень и особенности физического развития;

- степень его соответствия полу и возрасту;

- имеющиеся отклонения;

- улучшение физического развития под воздействием занятий физическими упражнениями.

Применяются следующие антропометрические индексы:

- Весо-ростовой показатель

- ВРП= масса тела (грамм.)/длина тела (см.)

Хорошая оценка:

- для женщин 360-405 г/см.;

- для мужчин 380-415 г/см.

Индекс Брока

Оптимальная масса тела для людей ростом от 155 до 165 см. равна длине тела в сантиметрах минус 100. При росте 165-175 см. вычитают 105, при росте более 175 см. – 110.

Силовой показатель (СП)

Показывает соотношение между массой тела и мышечной силой. Обычно, чем больше мышечная масса, тем больше сила. Силовой показатель определяется по формуле и выражается в процентах:

$$\frac{\text{сила (кг)}}{\text{общая масса тела (кг)}} \times 100$$

Для сильнейшей руки:

- для мужчин - 65-80%

- для женщин - 48-50%.

1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности)

Определение резервных возможностей организма

Осуществляется с помощью физиологических проб сердечно-сосудистой (ССС) и дыхательной (ДС) систем.

Общее требования:

1. Проводить в одно и то же время суток.

2. Не ранее чем через 2 часа после приема пищи.

3. При температуре 18-20 градусов, влажности менее 60%.

Функциональная проба с приседанием

Проверяемый отдыхает стоя 3 мин., на 4-й мин. подсчитывается ЧСС за 15 с. с пересчетом на 1 мин. (исходная частота). Далее выполняется 20 приседаний за 40 с., поднимая руки вперед. Сразу после приседаний подсчитывается ЧСС в течение первых 15 с. с пересчетом на 1 мин. Определяется увеличение ЧСС после приседаний сравнительно с исходной в процентах.

Оценка:

- отлично – до 20%;

- хорошо – 20-40%;

- удовлетворительно – 40-65%;

- плохо – 66-75%;

- более 75%.

Ортостатическая проба

Применяется для оценки сосудистого тонуса.

Отдых 5 минут в положении лежа, подсчитывают ЧСС в положении лежа за 1 мин. (исходная ЧСС), после чего занимающийся встает, и снова подсчитывает пульс за 1 мин.

Оценка:

- «хорошо» - не более 11 ударов (чем меньше разница, тем лучше);

- «удовлетворительно» - от 12 до 18 ударов (потливость);

- «неудовлетворительно» - более 19 ударов (потливость, шум в ушах).

Проба Штанге (задержка дыхания на вдохе),

проба Генча (задержка дыхания на вдохе)

Оценивается устойчивость организма к недостатку кислорода, а также общий уровень тренированности.

После 5 мин. отдыха сидя, сделать 2-3 глубоких вдоха и выдоха, затем сделать полный вдох (выдох) и задержать дыхание. Отмечается время от момента задержания дыхания до ее прекращения.

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	90 сек	80 сек
Хорошо	80-89 сек	70-79 сек
Удовлетворительно	50-79 сек	40-69 сек
Неудовлетворительно	50 и ниже	40 и ниже

Проба Генча

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	45 сек	35 сек
Хорошо	40-44 сек	30-34 сек
Удовлетворительно	30-39 сек	20-29 сек
Неудовлетворительно	30 и ниже	20 и ниже

С нарастанием тренированности время задержания дыхания возрастает, при снижении или отсутствии тренированности – снижается.

Самоконтроль прививает занимающимся грамотное и осмысленное отношение к своему здоровью и к знаниям физической культурой и спортом, имеет большое воспитательное значение.

2. Другие виды самостоятельной работы

2.1. Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности

2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 метров)

Нормативы:

- у студенток нормативы в беге на 100 метров следующие: 15.7 сек - 5 очков; 16,0 - 4; 17,0 -3; 17,9 - 2; 18,7 - 1.

- студенты должны показать результаты в следующих пределах: 13,2 сек - 5 очков; 13,8 - 4; 14,0 - 3; 14,3 - 2; 14,6 - 1.

2.1.2. Техника выполнения упражнения

При анализе бега на 100 м. принято выделять следующие основные фазы:

- старт и стартовый разгон;

- бег по дистанции;

- финиширование.

Старт и стартовый разгон

Существует два вида старта: низкий и высокий. Экспериментальные данные показывают, что новичкам и спортсменам 2-го разряда лучше применять высокий старт. Такая закономерность наблюдается до результата 11,4-11,6 с. и объясняется технической сложностью низкого старта. Поэтому следует ограничиться только овладением техникой высокого старта.

По команде «На старт» занимающийся подходит к стартовой линии, ставит сильнейшую (толчковую ногу) вплотную к линии, маховая нога располагается на 1,5-2 стопы назад на носок, расстояние между ними 15-20 см. Туловище выпрямлено, руки опущены, вес тела распределяется равномерно на обе ноги.

По команде «Внимание» вес тела переносится на впереди согнутую стоящую ногу, разноименная рука вперед. Проекция плеч находится за стартовой линией на расстоянии 5-8 см. Взгляд направлен вперед - вниз.

По команде «Марш» бегун мощно разгибает толчковую ногу и стремится максимально быстро вынести маховую ногу вперед с постановкой ее сверху вниз на дорожку. Руки работают максимально активно, плечевой пояс не закрепощен, кисти расслаблены. Стартовый разгон характеризуется постепенным увеличением длины шагов, уменьшением наклона туловища и приближением стоп к средней линии.

Бег по дистанции

Перед бегущим стоит задача удержать развитую горизонтальную скорость до финиша. Этому будет способствовать сохранение длины и частоты шагов.

Во время бега маховая нога ставится с носка спереди проекции общего центра тяжести тела (ОЦТТ) сверху вниз. Взаимодействие маховой ноги с грунтом называется передним толчком. Задний толчок выполняется мощным разгибанием бедра и сгибанием стопы. Голова держится прямо. Руки согнуты (угол сгибания в локтевых суставах примерно 90 град.).

При движении руки вперед кисть поднимается до уровня плеч. Назад рука отводится до «отказа» и угол сгибания в локтевом суставе увеличивается. Пальцы рук слегка согнуты.

Финиширование

Наклон туловища увеличивается. На последних метрах дистанции необходимо стремиться не потерять свободы движений и пробегать финиш без снижения скорости.

2.1.3. Методы самостоятельной тренировки

- Повторный метод - повторное выполнение упражнений с около-предельной и предельной скоростью. Отдых продолжается до восстановления. Упражнения повторяются до тех пор, пока скорость не начнет снижаться.

- Переменный метод - когда пробегаются дистанции, например, с варьированием скорости и ускорения. Цель - исключить стабилизацию скорости («скоростной барьер»).

- Соревновательный метод - предполагает выполнение упражнений на быстроту в условиях соревнований. Эмоциональный подъем на соревнованиях способствует мобилизации на максимальные проявления быстроты, позволяет выйти на новый рубеж скорости.

2.1.4. Средства тренировки быстроты

Частоту движений, а вместе с ней и быстроту циклических движений развивают с помощью упражнений, которые можно выполнять с максимальной скоростью, а также с помощью скоростно-силовых упражнений для ациклических движений. При этом упражнения должны отвечать следующим требованиям:

- техника упражнений должна обеспечивать выполнение движений на предельных скоростях;

- упражнения должны быть хорошо освоены, чтобы не требовалось волевого усилия для их выполнения;

- продолжительность упражнений должна быть такой, чтобы скорость не снижалась вследствие утомления - 20-22 с.

Основным средством отработки бега по дистанции является бег с максимальной скоростью. Такой бег выполняется 5-6 раз по 30-40 метров. В тренировке можно чередовать бег в обычных, облегченных (с горки, угол 4-5 град.) и затрудненных (в горку или с сопротивлением) условиях.

Для развития скоростной выносливости рекомендуется пробегать большую дистанцию (120-150 м), когда очередная пробежка начинается при пульсе 120 уд/мин.

Для тренировки в беге на 100 метров следует использовать кроссы (6 км, 30 мин), повторный бег на отрезках 200 м в 3/4 силы. Спортивные игры (баскетбол, футбол) также приносят пользу в развитии быстроты.

Можно рекомендовать и упрощенную методику, обеспечивающую минимально необходимый уровень подготовленности:

- повторный метод - в одном занятии 3-4 пробегания по 20-30 метров с максимальной скоростью и интервалами отдыха для восстановления пульса до 110-120 уд/мин;

- переменный метод - пробегание 2-х отрезков по 30 метров с максимальной скоростью и последующим переходом на спокойный бег 150--200 метров. Выполняется 3-4 подхода.

Для ощутимого сдвига в подготовленности такие тренировки рекомендуется проводить 3-4 раза в неделю.

2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива

При подготовке к сдаче бега на 100 метров следует учитывать общие требования по питанию при занятиях физическими упражнениями:

1. По времени - прием пищи не менее чем за 2-3 часа.

2. По составу - не есть тяжелой пищи (мясо, яйца, масло, молочные продукты, жирную, долго перевариваемую пищу).

Не рекомендуется выходить на старт с переполненным желудком.

Непосредственно перед сдачей норматива необходимо провести разминку с использованием специальных упражнений:

1. Бег с высоким подниманием бедра.

2. Бег с «захлестыванием» голеней назад.

3. Семенящий бег.

4. Прыжки с ноги на ногу (шаги).

5. Бег в упоре стоя у гимнастической стенки.

6. Бег с ускорением с высокого старта с подачей стартовых команд (2-3 ускорения по 10-15 метров).

Разминка заканчивается за 10 минут до старта.

Непосредственно перед стартом нельзя отдыхать лежа, сидя, необходимо постоянно находиться в движении (прохаживаться, выполнять упражнения на растяжку). Частота сердечных сокращений непосредственно перед стартом должна быть 110 – 120 уд/мин.

Психологическая подготовка заключается в мысленном «прокручивании» в голове этапов преодоления дистанции: старта, стартового разбега, бега по дистанции, финиширования с концентрацией внимания на технике выполнения каждого этапа.

При выполнении теста не разрешается:

- наступать на линию старта (стартовая линия входит в дистанцию);

- перебегать на соседние дорожки.

2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин

(поднимание (сед) и опускание туловища из положения лежа, ноги закреплены, руки за головой)

Нормативы: 60 раз - 5 очков, 50 - 4, 40 - 3, 30 - 2, 20 - 1.

Это упражнение используется для оценки развития мышц живота (брюшного пресса).

О мышцах брюшного пресса следует сказать особо. Эта группа мышц участвует в большинстве движений. Она создает хороший «мышечный корсет»,

охватывающий брюшную полость и способствующий нормальному функционированию внутренних органов, что положительно влияет на состояние здоровья.

2.2.1. Техника выполнения упражнения

И.п. (исходное положение) – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, стопы прижаты к полу, руки в замок за головой, локти разведены.

Это силовое упражнение состоит из 4-х фаз:

- поднимание туловища;

- фиксация его в вертикальном положении;

- опускание;

- пауза в горизонтальном положении.

Голова держится прямо, локти в стороны, дыхание ритмично.

2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин (подтягивание на перекладине)

Учебной программой по физической культуре предусмотрено тестирование студентов для определения уровня их силового развития. Нормативы следующие: 15 раз - 5 очков, 12 - 4, 9 - 3, 7 - 2, 5 - 1;

2.3.1. Техника выполнения упражнения

Каждый цикл подтягивания в висе на перекладине включает:

- исходное положение - вис на вытянутых руках хватом сверху (большими пальцами внутрь);

- подъем до пересечения подбородком линии перекладины;

- опускание в исходное положение.

При выполнении теста разрешается сгибание, разведение ног, запрещаются рывковые движения туловищем и руками, хлестовые движения ногами. Выполнение засчитывается только при полном выпрямлении рук в локтевых суставах.

Наиболее экономично подтягивание при хвате рук на ширине плеч. Если кисти рук расположены ближе друг к другу, то положение тела становится менее устойчивым и отклонения придется компенсировать за счет дополнительных

мышечных усилий, что будет увеличивать энерготраты и снижать результат. Возрастают энерготраты и при широком хвате (шире плеч). Это связано с тем, что для фиксации лопаток при широком хвате требуется большая, чем при хвате на ширине плеч, сила мышц, приближающих лопатки к позвоночному столбу.

Опускание в вис (в исходное положение) после подтягивания должно выполняться спокойно. Дыхание не задерживается.

2.3.2. Методы развития силы

На практике распространены следующие методы силовой подготовки:

- метод максимальных усилий;
- метод повторных усилий;
- метод динамических усилий.

Согласно методу максимальных усилий выполнение упражнений организуется таким образом, чтобы занимающийся смог подтянуться 1-3 раза в одном подходе (при условии, что он способен самостоятельно подтянуться как минимум 2-3 раза). Такое достигается за счет применения дополнительного внешнего отягощения. Делается 5-6 подходов с перерывами 2-4 минуты.

По методу повторных усилий подтягивания в одном подходе выполняются до «отказа». Если занимающийся имеет максимальный индивидуальный показатель 10-15 подтягиваний и более, то следует применять отягощение весом 30-70% от максимального. Например, занимающийся может подтянуться 1 раз с максимальным отягощением 10 кг. Значит, для тренировки по методу повторных усилий следует подобрать вес отягощения 3-7 кг. Выполняется 3-6 подходов с отдыхом между ними 2-4 мин.

Разнообразить упражнения можно, применяя метод динамических усилий. Если занимающийся легко выполняет 10-15 подтягиваний, то следует применять отягощения до 30% от максимального. В одном подходе 10-15 повторений. Темп - максимально быстрый. Всего 3-6 подходов. Во время отдыха следует добиваться наиболее полного восстановления, чтобы в следующем подходе выполнить упражнение без существенной потери скорости.

Сравнивая динамический и статический методы развития силы, необходимо отметить следующее:

- При динамическом режиме работы мышц происходит достаточное кровоснабжение. Мышца функционирует как насос - при расслаблении наполняется кровью и получает кислород и питательные вещества.

- Во время статического усилия мышца постоянно напряжена и непрерывно давит на кровеносные сосуды. В результате она не получает кислород и питательные вещества. Это ограничивает продолжительность работы мышц.

2.4. Тест на общую выносливость - бег 2000 и 3000 метров

Нормативы:

- студентки - бег 2000 метров - 10 мин.15 сек. - 5 очков; 10.50 - 4; 11.15 - 3; 11.50 - 2; 12.15 - 1;

- студенты - бег 3000 метров - 12.00 - 5; 12.35 - 4; 13.10 - 3; 13.50 - 2; 14.00 - 1.

2.4.1. Техника бега на длинные дистанции

Бег на средние и длинные дистанции начинается с высокого старта. По команде «На старт!» бегун ставит у линии более сильную ногу, а другую отставляет назад на носок (на 30 – 50 см), немного сгибает ноги, туловище наклоняет вперед и тяжесть тела переносит на впереди стоящую ногу. По команде «Марш!» бегун начинает бег, делая первые шаги в большом наклоне, который постепенно уменьшается. Длина шагов увеличивается, бег ускоряется, бегун набирает скорость и в короткое время переходит к свободному бегу на дистанции. Бег на дистанции. Во время бега на дистанции туловище вертикально или слегка наклонено вперед (5-7°). Небольшой наклон туловища вперед позволяет лучше использовать силы отталкивания и быстрее продвигаться вперед. Слишком большой наклон приводит к «падающему» бегу, при котором труднее выносить вперед согнутую ногу, в связи с чем уменьшается длина шага, а следовательно, и скорость бега. Кроме того, при большом наклоне постоянно напряжены мышцы, удерживающие туловище от увеличивающегося наклона. Отсутствие наклона ухудшает условия отталкивания, однако улучшает возможность выноса вперед

согнутой в коленном суставе свободной ноги. При правильном положении туловища создаются благоприятные условия для работы мышц и внутренних органов. Наклон туловища у бегунов изменяется в пределах 2-3°: увеличивается к моменту отталкивания и уменьшается в полетной фазе. Положение головы существенно влияет на положение туловища. Надо держать голову прямо и смотреть вперед. В фазе отталкивания таз подается вперед, что является важной особенностью техники бега на длинные дистанции и позволяет полнее использовать силу реакции опоры. В технике бега на длинные дистанции важнее всего движения ног. Нога, немного согнутая, ставится на грунт упруго и эластично с передней части стопы, а затем касается его всей стопой. Постановка ноги на переднюю часть стопы позволяет эффективнее использовать эластические свойства мышц голени, активно участвующие в отталкивании. Следы стоп на дорожке у бегунов находятся на одной линии, носки почти не разворачиваются в стороны. Эффективное отталкивание характеризуется выпрямлением ноги во всех суставах. Угол отталкивания в беге на средние дистанции примерно равен 50-55°. При правильном отталкивании таз подан вперед, голень маховой согнутой ноги параллельна бедру толчковой ноги. Быстрый вынос маховой ноги вперед облегчает отталкивание. Бегуны на длинные дистанции меньше поднимают бедро маховой ноги вверх, чем бегуны на средние и короткие дистанции. Длина шага на длинные дистанции не постоянна даже у одних и тех же бегунов. Колебания зависят от наступившего утомления, неравномерности пробегания отдельных участков дистанции, качества беговой дорожки, ветра и состояния бегуна. Обычно шаг с сильнейшей ноги на несколько сантиметров больше, чем шаг со слабейшей ноги. Длина шага равна 160 – 215 см. Повышение скорости бега за счет увеличения длины шага ограничено, так как слишком длинный шаг требует очень больших затрат сил. Кроме того, длина шага в основном зависит от индивидуальных данных бегуна. Поэтому скорость бега повышают за счет увеличения частоты шагов, которая зависит от тренированности бегуна. Движения плечевого пояса и рук связаны с движениями ног. Выполнять их надо легко, не напряженно. Это во многом зависит от умения расслаблять мышцы

плечевого пояса. Движения рук помогают бегуну сохранять равновесие тела во время бега. Амплитуда движения рук зависит от скорости бега. Кисти при движении вперед не пересекают средней линии тела и поднимаются примерно до уровня ключицы. При движении рук назад кисти доходят до задней линии туловища (если смотреть на бегуна сбоку). Руки двигаются маятникообразно, пальцы рук свободно сложены, предплечья не напряжены, плечи не поднимаются вверх. При финишировании, длина которого зависит от дистанции и оставшихся сил бегуна, движения руками делаются быстрее, наклон тела увеличивается, а угол отталкивания уменьшается. Спортсмен переходит на скоростной бег, при котором скорость повышается главным образом за счет увеличения частоты шагов. К концу дистанции вследствие утомления некоторые бегуны наклоняют туловище назад. Такое положение туловища не способствует эффективности бега, так как усилия отталкивания направляются больше вверх. Техника бега на вираже имеет некоторые особенности: туловище немного наклонено влево, к бровке, правая рука движется несколько размашистей левой, причем правый локоть дальше отводится в сторону, а правая стопа ставится с некоторым поворотом внутрь. Ритм дыхания зависит от индивидуальных особенностей и скорости бега (с увеличением скорости бега увеличивается и частота дыхания). Бегун не должен задерживать дыхание. Дышать следует одновременно через нос и полуоткрытый рот, при этом важно следить за полным выдохом.

2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения самостоятельных тренировок

В некоторых случаях тренировка может стать причиной различных осложнений, включая травмы опорно-двигательного аппарата.

Основная причина травматизма опорно-двигательного аппарата - перенапряжение. Слишком быстрое увеличение тренировочных нагрузок является чрезмерным для детренированных мышц, связок и суставов. К дополнительным факторам, способствующим повреждению опорно-двигательного аппарата, можно отнести:

- бег по твердому грунту;

- избыточную массу тела;

- обувь, не пригодную для бега;

-грубые ошибки в технике.

Следовательно, меры по профилактике травм должны быть направлены на устранение или ослабление воздействия этих факторов:

- Во время кроссового бега часто болит в правом боку (печень), либо в левом боку (селезенка). Печень важный орган в жизнедеятельности нашего организма (синтез жиров и углеводов, обмен белков и витаминов) является кровяным депо. Так вот в результате переполнения кровью печени возникают колики. Глубокое дыхание снижает приток крови к правому предсердию, уменьшает болевые ощущения. Бег не надо прекращать, необходимо снизить скорость передвижения и стараться дышать глубже.

- В процессе тренировок после значительного перерыва (отдыха) или при резком увеличении нагрузок могут появляться боли в мышцах, как правило, на другой день. Во время физической работы в организме образуются продукты распада, часть которых выводится из организма через мочевыделительную систему, а другая часть, в том числе, молочная кислота задерживается в мышечных тканях. Чтобы избавиться от нее, необходимо мышцу непосредственно после физической нагрузки заставить растянуться (с помощью упражнений на растяжение), а на следующий день выполнять какую-либо физическую работу, т.е. сокращаться. Эти меры помогут ускорить вывод молочной кислоты из мышц. Боли могут длиться несколько дней и если не предпринимать никаких мер, мышца теряет эластичность, становиться твердой. В этом случае могут помочь: массаж, банные процедуры, применение согревающих мазей и гелей.

- При выполнении напряженной физической работы длительное время, например, кроссовый бег, возникают такие состояния, которые получили название «мертвая точка» и «второе дыхание». Уже через некоторое время бега в организме начинаются изменения, которые заставляют нас прекратить мышечную деятельность. Такое временное снижение работоспособности получило название

«мертвая точка». Механизм возникновения такого состояния недостаточно изучен. Предполагают, что он обусловлен временным нарушением деятельности скелетных мышц и органов, обеспечивающих доставку кислорода в организм. Эти нарушения приводят к изменениям в работе нервных центров, что, в свою очередь, приводит к нарушениям в работе отдельных физиологических систем. Время возникновения и продолжительность этого состояния зависит от многих факторов, в частности от длительности и интенсивности физической нагрузки (например, при беге на 5-10 км и более возникает через 5-6 мин бега), от тренированности. Чем лучше тренирован человек, тем позже возникает это состояние и протекает менее тяжело (почти незаметно). Преодоление этого состояния требует значительного волевого усилия. В процессе проведения учебных и тренировочных занятий необходимо приучать себя преодолевать это неприятное ощущение, возникающее при кислородной недостаточности и накоплении продуктов кислотно-щелочного распада при обмене веществ. Наступлению «второго дыхания» способствуют усиленные дыхательные упражнения, глубокие выдохи, освобождающие организм от накопившейся углекислоты, что способствует наступлению кислотно-щелочного баланса в организме. Преодолеть состояние «мертвой точки» можно, если снизить интенсивность физической нагрузки, но это нежелательно, т.к. не будет адаптации организма к такого рода деятельности.

- При занятиях физическими упражнениями могут возникнуть отклонения в деятельности сердца - учащенное сердцебиение. Оно может быть следствием стенокардии, ссоры, неурядицы в быту, семье, боязни, страха, дистрофий миокарда. Возникновение болей - сигнал опасности, в этих случаях необходимо прекратить занятия и обратиться к врачу.

- Существует состояние, называемое гравитационным шоком. Часто возникает при внезапной остановки после относительно интенсивного бега (чаще после финиша) в связи с прекращением действия «мышечного насоса». Большая масса крови застаивается в раскрытых капиллярах и венах мышц нижних конечностей, на периферии. Возникает анемия (обескровливание) мозга,

недостаточное снабжение его кислородом. Появляется резкое побледнение, слабость, головокружение, тошнота, потеря сознания, исчезновение пульса. Пострадавшего необходимо уложить на спину, поднять вверх ноги (выше головы), обеспечив отток венозной крови к сердцу, улучшив снабжение головного мозга кислородом, поднести к носу ватку смоченную нашатырным спиртом. Основная профилактика гравитационного шока - исключение внезапной остановки, постепенное замедление бега.

- Гипогликемическое состояние - следствие недостаточного количества в организме сахара, нарушение углеводного обмена в результате длительной физической нагрузки. Ощущается сильный голод, головокружение, иногда потеря сознания. Профилактика – легко усваиваемые углеводы до начала длительной физической нагрузки (немного сахара, меда и т.п.) или специальные питательные смеси.

- Солнечный и тепловой удары - возникают при длительной работе под действием солнечных лучей на обнаженную голову или тело. Тепловой удар - остро развивающееся болезненное состояние, обусловленное перегреванием организма. Его признаками являются: усталость, головная боль, слабость, боли в ногах, спине, тошнота, шум в ушах, повышение температуры, потемнение в глазах, ухудшение дыхания (прерывистое), потеря сознания.

Первая помощь: пострадавшего поместить в прохладное место, снять одежду, приподнять голову, охладить область сердца (холодный компресс), напоить. Дать понюхать нашатырный спирт, сердечные средства. При нарушении дыхания сделать искусственное дыхание.

При обморожениях на охлажденном участке вначале чувствуется легкое пощипывание, затем чувствительность теряется. Особенно поддаются ему пальцы рук, ног, нос, уши. Если произошло обморожение нельзя растирать пораженные места снегом, это только повредит кожу. Необходимо поместить обмороженный участок в тепло не растирать, а согревать при комнатной температуре. Обмороженные места смазать жиром (вазелином).

3. Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности

Выполнение контрольных нормативов требует от студента мобилизации всех своих сил и здесь следует принимать во внимание и учитывать все что может повлиять на конечный результат, в том числе характер учебно-познавательной деятельности, предшествующий зачетному занятию.

В течение учебного дня, занимаясь то одним видом учебно-познавательной деятельности, то другим, обучающиеся должны переключаться с выполнения одного вида задач на другой, и каждый раз проходит какое-то время, пока будет достигнуто оптимальное соответствие состояния личности и организма обучающегося к условиям проведения определенного вида учебно-познавательной деятельности – период адаптации.

Можно говорить о том, что к каждому учебному занятию кроме практической и теоретической подготовленности, определенного уровня умений и навыков по предмету, от студентов требуется некоторая психофизиологическая и физическая готовность. В этом случае под ней подразумевается готовность психических, физиологических и обеспечивающих двигательные действия систем человека к выполнению определенного рода учебно-познавательной деятельности.

Многообразие видов учебно-познавательной деятельности определяет многообразие психофизиологических и физических состояний обучающихся. Под психофизиологическим и физическим состоянием предлагается понимать целостные психофизиологические и физические реакции обучаемого на внешние и внутренние факторы, направленные на достижение полезного результата.

Параметром психофизиологического и физического состояния является величина, характеризующая какую-либо из реакций организма обучаемого на внешние или внутренние факторы.

Уровень психофизиологической и физической готовности к предстоящему занятию, зависит от индивидуальных особенностей личности обучаемого и

определенных внешних факторов, воздействующих на него на предыдущем занятии. Эти факторы можно разделить на три вида:

- санитарно-гигиенические условия;
- временные условия;
- организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности.

К санитарно-гигиеническим условиям относятся температура и влажность воздуха, освещенность, содержание кислорода в воздухе, эргономичность учебных мест, запыленность, загазованность места проведения занятия. К временным условиям относятся: время дня, день недели, месяц семестра, время года, а также время, прошедшее после последнего приема пищи.

Вышеперечисленные факторы оказывают существенное влияние на психофизиологическую и физическую готовность. Второй фактор заставляет учитывать объективные закономерности колебания уровня работоспособности студентов в течение учебного дня, учебной недели, семестра. Как известно, в течение учебного дня объективно наблюдается два периода подъема работоспособности: один в первой половине дня, второй – в послеобеденное время. Каждому периоду характерны три фазы: врабатывание, повышенная работоспособность, снижение работоспособности. В течение недели те же фазы распределяются следующим образом: понедельник, вторник – врабатывание; среда, четверг – повышенная работоспособность; пятница, суббота – снижение работоспособности. Исследования показали, что и семестровый цикл разделяется на те же фазы.

Влияние фактора «организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности» в данном случае рассматривается, как влияние особенностей психофизиологической и физической деятельности обучаемых на предыдущем занятии на их психофизиологическую и физическую готовность к последующему виду учебно-познавательной деятельности, в нашем случае к зачету. Психофизиологическая деятельность характеризуется напряженностью и характером мыслительной деятельности, а также нервно-эмоциональной напряженностью учебной деятельности.

Физическая деятельность характеризуется интенсивностью, видом мышечных действий и работой обеспечивающих эту деятельность физиологических систем. Мышечные действия могут носить статический и динамический характер: поддержание рабочей позы «сидя», «стоя», выполнение чертежной, письменной работы, настройка и обслуживание аппаратуры, выполнение гимнастических упражнений и т.п. При этом используются, в той или иной степени, основные физические качества: сила, быстрота, выносливость, ловкость.

Влияние всех вышеперечисленных факторов преломляется через индивидуальные особенности личности, такие как типологические свойства нервной системы и темперамента, возрастные, морфологические, биохимические особенности организма, уровень физической подготовленности, состояние здоровья и другие, выливаясь, в итоге, в психофизиологическую и физическую готовность студента к предстоящему виду учебно-познавательной деятельности.

Следует отметить, что особенно явно эти проблемы проявляются при чередовании занятий по общенаучным, общеинженерным и специальным дисциплинам с практическими занятиями по физической культуре. В этом случае происходит смена видов деятельности, в одном из которых доминирующую роль играет умственная работа с пониженной двигательной активностью и сохранением определенной рабочей позы, в другом – разнообразная активная двигательная деятельность с сопровождающей ее мыслительной работой.

Методика проведения занятий предусматривает проведение вводной (подготовительной) части для организации обучающихся, приведения их в состояние готовности к решению задач основной части, в нашем случае к сдаче контрольного норматива, и заключительной – для подведения итогов, приведения организма в относительно спокойное состояние (для занятий по физической культуре), но при проведении этих частей занятий, как правило, не учитывается характер предыдущей и последующей деятельности студентов. Неучтение этого факта отрицательно влияет на скорость адаптации к виду учебно-познавательной деятельности, что особенно наглядно проявляется при чередовании практических

занятий по физической культуре с занятиями по общеинженерным и специальным дисциплинам.

Складывается противоречие между имеющим место в практике обучения несоответствием уровня психофизиологической и физической готовности обучающихся, объективно складывающейся в ходе проведения предшествующего занятия, видом учебно-познавательной деятельности последующего занятия и неучтением этого факта в общепринятых методиках проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий, в том числе, по дисциплине «физическая культура»

Это противоречие можно устранить, обеспечив управление процессом адаптации студентов к смене видов учебно-познавательной деятельности в ходе проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий.

Для каждой темы занятия по физической культуре в зависимости от педагогической ситуации, складывающейся из контекстной пары - вид предшествующего и вид последующего занятия, можно установить наиболее предпочтительные адаптирующие, предметно-ориентированные варианты проведения подготовительной и заключительной частей, оперативно поддерживающие достаточно высокий уровень психофизиологической и физической готовности при чередовании этих занятий с занятиями по другим дисциплинам.

Видится актуальной задача управления процессом адаптации обучаемых к смене видов учебно-познавательной деятельности с целью сокращения времени врабатывания и повышения эффективности как занятий, так и сдачи контрольных нормативов. Для решения этой задачи представляется наиболее целесообразным использовать проведение подготовительной (разминки) и заключительной частей занятий с адаптирующим, предметно-ориентированным содержанием.

В этом случае под управлением адаптацией следует понимать процесс педагогического воздействия с целью установления оптимального соответствия личности обучаемого и условий осуществления учебной деятельности в ходе осуществления им познавательной деятельности, которое позволяет индивидууму

более эффективно удовлетворять актуальные познавательные потребности, и реализовывать связанные с ними значимые цели.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.О.08 ПСИХОЛОГИЯ КОМАНДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОРАЗВИТИЯ

Направление подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

Направленность (профиль)
Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Управления персоналом	Горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Ветошкина Т.А	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И. О.)*
Протокол № 1 от 10.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Автор: Полянок О.В., к.пс.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по написанию реферата	5
2	Методические рекомендации по написанию эссе	13
3	Методические рекомендации по написанию реферата статьи	17
4	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	23
5	Методические рекомендации по составлению тестовых заданий	27
6	Требования к написанию и оформлению доклада	29
7	Методические рекомендации к опросу	34
8	Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	36
9	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	38
10	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	40
	Заключение	43
	Список использованных источников	44

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по написанию реферата

Реферат - письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение длительного срока (от одной недели до месяца).

Реферат (от лат. referrer - докладывать, сообщать) - краткое точное изложение сущности какого-либо вопроса, темы на основе одной или нескольких книг, монографий или других первоисточников. Реферат должен содержать основные фактические сведения и выводы по рассматриваемой теме[1].

Выполнение и защита реферата призваны дать аспиранту возможность всесторонне изучить интересующую его проблему и вооружить его навыками научного и творческого подхода к решению различных задач в исследуемой области.

Основными задачами выполнения и защиты реферата являются развитие у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, среди них:

- формирование навыков аналитической работы с литературными источниками разных видов;
- развитие умения критически оценивать и обобщать теоретические положения;
- стимулирование навыков самостоятельной аналитической работы;
- углубление, систематизация и интеграция теоретических знаний и практических навыков по соответствующему направлению высшего образования;
- презентация навыков публичной дискуссии.

Структура и содержание реферата

Подготовка материалов и написание реферата - один из самых трудоемких процессов. Работа над рефератом сводится к следующим этапам.

1. Выбор темы реферата.
2. Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата.
3. Конкретизация необходимых элементов реферата.
4. Сбор и систематизация литературы.
5. Написание основной части реферата.
6. Написание введения и заключения.
7. Представление реферата преподавателю.
8. Защита реферата.

Выбор темы реферата

Перечень тем реферата определяется преподавателем, который ведет дисциплину. Вместе с тем, аспиранту предоставляется право самостоятельной формулировки темы реферата с необходимым обоснованием целесообразности ее разработки и согласованием с преподавателем. Рассмотрев инициативную тему реферата студента, преподаватель имеет право ее отклонить, аргументировав свое решение, или, при согласии студента, переформулировать тему.

При выборе темы нужно иметь в виду следующее:

1. Тема должна быть актуальной, то есть затрагивать важные в данное время проблемы общественно-политической, экономической или культурной жизни общества.

2. Не следует формулировать тему очень широко: вычленение из широкой проблемы узкого, специфического вопроса помогает проработать тему глубже.

---

[1] Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Какой бы интересной и актуальной ни была тема, прежде всего, следует удостовериться, что для ее раскрытия имеются необходимые материалы.

4. Тема должна открывать возможности для проведения самостоятельного исследования, в котором можно будет показать умение собирать, накапливать, обобщать и анализировать факты и документы.

5. После предварительной самостоятельной формулировки темы необходимо проконсультироваться с преподавателем с целью ее возможного уточнения и углубления.

Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата

Подбор литературы следует начинать сразу же после выбора темы реферата. Первоначально с целью обзора имеющихся источников целесообразно обратиться к электронным ресурсам в сети Интернет и, в частности, к электронным информационным ресурсам УГГУ: благодаря оперативности и мобильности такого источника информации, не потратив много времени, можно создать общее представление о предмете исследования, выделить основные рубрики (главы, параграфы, проблемные модули) будущего курсовой работы. При подборе литературы следует также обращаться к предметно-тематическим каталогам и библиографическим справочникам библиотеки УГГУ, публичных библиотек города.

Предварительное ознакомление с источниками следует расценивать как первый этап работы над рефератом. Для облегчения дальнейшей работы необходимо тщательно фиксировать все просмотренные ресурсы (даже если кажется, что тот или иной источник непригоден для использования в работе над рефератом, впоследствии он может пригодиться, и тогда его не придется искать).

Результатом предварительного анализа источников является рабочий план, представляющий собой черновой набросок исследования, который в дальнейшем обрастает конкретными чертами. Форма рабочего плана допускает определенную степень произвольности. Первоначальный вариант плана должен отражать основную идею работы. При его составлении следует определить содержание отдельных глав и дать им соответствующее название; продумать содержание каждой главы и наметить в виде параграфов последовательность вопросов, которые будут в них рассмотрены. В реферате может быть две или три главы - в зависимости от выбранной проблемы, а также тех целей и задач исследования.

Работа над предварительным планом необходима, поскольку она дает возможность еще до начала написания реферата выявить логические неточности, информационные накладки, повторы, неверную последовательность глав и параграфов, неудачные формулировки выделенных частей или даже реферата в целом.

Рабочий план реферата разрабатывается студентом самостоятельно и может согласовываться с преподавателем.

Конкретизация необходимых элементов реферата

Реферат должен иметь четко определенные цель и задачи, объект, предмет и методы исследования. Их необходимо сформулировать до начала непосредственной работы над текстом.

Цель реферата представляет собой формулировку результата исследовательской деятельности и путей его достижения с помощью определенных средств. Учитывайте, что у работы может быть только одна цель.

Задачи конкретизируют цель, в реферате целесообразно выделить три-четыре задачи. Задачи - это теоретические и практические результаты, которые должны быть получены в реферате. Постановку задач следует делать как можно более тщательно, т.к. их

решение составляет содержание разделов (подпунктов, параграфов) реферата. В качестве задач может выступать либо решение подпроблем, вытекающих из общей проблемы, либо задачи анализа, обобщения, обоснования, разработки отдельных аспектов проблемы, ведущие к формулировке возможных направлений ее решения.

Объект исследования - процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения.

Предмет исследования - все то, что находится в границах объекта исследования в определенном аспекте рассмотрения.

Методы исследования, используемые в реферате, зависят от поставленных цели и задач, а также от специфики объекта изучения. Это могут быть методы системного анализа, математические и статистические методы, сравнения, обобщения, экспертных оценок, теоретического анализа и т.д.

Впоследствии формулировка цели, задач, объекта, предмета и методов исследования составят основу Введения к реферату.

Сбор и систематизация литературы

Основные источники, использование которых возможно и необходимо в реферате, следующие:

- учебники, рекомендованные Министерством образования и науки РФ;
- электронные ресурсы УГГУ на русском и иностранном языках;
- статьи в специализированных и научных журналах;
- диссертации и монографии по изучаемой теме;
- инструктивные материалы и законодательные акты (только последних изданий);
- данные эмпирических и прикладных исследований (статистические данные, качественные интервью и т.д.)
- материалы интернет-сайтов.

Систематизацию получаемой информации следует проводить по основным разделам реферата, предусмотренным планом. При изучении литературы не стоит стремиться освоить всю информацию, заключенную в ней, а следует отбирать только ту, которая имеет непосредственное отношение к теме работы. Критерием оценки прочитанного является возможность его использования в реферате.

Сбор фактического материала - один из наиболее ответственных этапов подготовки реферата. От того, насколько правильно и полно собран фактический материал, во многом зависит своевременное и качественное написание работы. Поэтому, прежде чем приступить к сбору материала, аспиранту необходимо тщательно продумать, какой именно фактический материал необходим для реферата и составить, по возможности, специальный план его сбора и анализа. После того, как изучена и систематизирована отобранная по теме литература, а также собран и обработан фактический материал, возможны некоторые изменения в первоначальном варианте формулировки темы и в плане реферата.

Написание основной части реферата

Изложение материала должно быть последовательным и логичным. Общая логика написания параграфа сводится к стандартной логической схеме «Тезис - Доказательство - Вывод» (количество таких цепочек в параграфе, как правило, ограничивается тремя - пятью доказанными тезисами).

Все разделы реферата должны быть связаны между собой. Особое внимание следует обращать на логические переходы от одной главы к другой, от параграфа к параграфу, а внутри параграфа - от вопроса к вопросу.

Использование цитат в тексте необходимо для того, чтобы без искажений передать мысль автора первоисточника, для идентификации взглядов при сопоставлении различных

точек зрения и т.д. Отталкиваясь от содержания цитат, необходимо создать систему убедительных доказательств, важных для объективной характеристики изучаемого вопроса. Цитаты также могут использоваться и для подтверждения отдельных положений работы.

Число используемых цитат должно определяться потребностями разработки темы. Цитатами не следует злоупотреблять, их обилие может восприниматься как выражение слабости собственной позиции автора. Оптимальный объем цитаты - одно- два, максимум три предложения. Если цитируемый текст имеет больший объем, его следует заменять аналитическим пересказом.

Во всех случаях употребления цитат или пересказа мысли автора необходимо делать точную ссылку на источник с указанием страницы.

Авторский текст (собственные мысли) должен быть передан в научном стиле. Научный стиль предполагает изложение информации от первого лица множественного числа («мы» вместо «я»). Его стоит обозначить хорошо известными маркерами: «По нашему мнению», «С нашей точки зрения», «Исходя из этого мы можем заключить, что...» и т.п. или безличными предложениями: «необходимо подчеркнуть, что...», «важно обратить внимание на тот факт, что.», «следует отметить.» и т.д.

Отдельные положения реферата должны быть иллюстрированы цифровыми данными из справочников, монографий и других литературных источников, при необходимости оформленными в справочные или аналитические таблицы, диаграммы, графики. При составлении аналитических таблиц, диаграмм, графиков используемые исходные данные выносятся в приложение, а в тексте приводятся результаты расчетов отдельных показателей (если аналитическая таблица по размеру превышает одну страницу, ее целиком следует перенести в приложение). В тексте, анализирующем или комментирующем таблицу, не следует пересказывать ее содержание, а уместно формулировать основной вывод, к которому подводят табличные данные, или вводить дополнительные показатели, более отчетливо характеризующие то или иное явление или его отдельные стороны. Все материалы, не являющиеся необходимыми для решения поставленной в работе задачи, также выносятся в приложение.

Написание введения и заключения

Введение и заключение - очень важные части реферата. Они должны быть тщательно проработаны, выверены логически, стилистически, орфографически и пунктуационно.

Структурно введение состоит из нескольких логических элементов. Во введении в обязательном порядке обосновываются:

- актуальность работы (необходимо аргументировать, в силу чего именно эта проблема значима для исследования);
- характеристика степени разработанности темы (краткий обзор имеющейся научной литературы по рассматриваемому вопросу, призванный показать знакомство студента со специальной литературой, его умение систематизировать источники, критически их рассматривать, выделять существенное, оценивать ранее сделанное другими исследователями, определять главное в современном состоянии изученности темы);
- цель и задачи работы;
- объект и предмет исследования;
- методы исследования;
- теоретическая база исследования (систематизация основных источников, которые использованы для написания своей работы);
- структура работы (название глав работы и их краткая характеристика).

По объему введение занимает 1,5-2 страницы текста, напечатанного в соответствии с техническими требованиями, определенными преподавателем.

Заключение содержит краткую формулировку результатов, полученных в ходе работы, указание на проблемы практического характера, которые были выявлены в процессе исследования, а также рекомендации относительно их устранения. В заключении возможно повторение тех выводов, которые были сделаны по главам. Объем заключения - 1 - 3 страницы печатного текста.

Представление реферата преподавателю

Окончательный вариант текста реферата необходимо распечатать и вставить в папку-скоросшиватель. Законченный и оформленный в соответствии с техническими требованиями реферат подписывается студентом и представляется в распечатанном и в электронном виде в срок, обозначенный преподавателем.

Перед сдачей реферата аспирант проверяет его в системе «Антиплагиат» (http://www.antiplagiat.ru/), пишет заявление о самостоятельном характере работы, где указывает процент авторского текста, полученный в результате тестирования реферата в данной системе. Информацию, полученную в результате тестирования реферата в данной системе (с указанием процента авторского текста), аспирант в печатном виде предоставляет преподавателю вместе с окончательным вариантом текста реферата, который не подлежит доработке или замене.

Защита реферата

При подготовке реферата к защите (если она предусмотрена) следует:

1. Составить план выступления, в котором отразить актуальность темы, самостоятельных характер работы, главные выводы и/или предложения, их краткое обоснование и практическое и практическое значение - с тем, чтобы в течение 3 - 5 минут представить достоинства выполненного исследования.
2. Подготовить иллюстративный материал: схемы, таблицы, графики и др. наглядную информацию для использования во время защиты. Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом процедуры защиты реферата.

Критерии оценивания реферата

Критерии оценивания реферата: новизна текста, степень раскрытия сущности вопроса, соблюдение требований к оформлению.

Новизна текста – обоснование актуальности темы; новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы; умение работать с литературой, систематизировать и структурировать материал; наличие авторской позиции, самостоятельная интерпретация описываемых в реферате фактов и проблем – 4 балла.

Степень раскрытия сущности вопроса - соответствие содержания доклада его теме; полнота и глубина знаний по теме; умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по вопросу (проблеме); оценка использованной литературы (использование современной научной литературы) – 4 балла.

Соблюдение требований к оформлению - правильность оформления ссылок на источники, списка использованных источников; грамотное изложение текста (орфографическая, пунктуационная, стилистическая культура); владение терминологией; корректность цитирования – 4 балла.

Критерии оценивания публичного выступления (защита реферата): логичность построения выступления; грамотность речи и владение профессиональной терминологией; обоснованность выводов; умение отвечать на вопросы; поведение при защите работы *(*манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы и т.д.) соблюдение требований к объёму доклада – 10 баллов.

Критерии оценивания презентации: дизайн и мультимедиа – эффекты, содержание – 4 балла.

Всего – 25 баллов.

Оценка «зачтено»

Оценка *«зачтено»* – реферат полностью соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 23-25 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, присутствует новизна и самостоятельность в постановке проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, широкий диапазон и качество (уровень) используемого информационного пространства (привлечены различные источники научной информации), прослеживается наличие авторской позиции и самостоятельной интерпретации описываемых в реферате фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована полнота и глубина знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены альтернативные взгляды на рассматриваемую проблему и обосновано сбалансированное заключение; представлен критический анализ использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе соблюдены правила русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое и полное определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона гармонирует с цветом текста, всё отлично читается, использовано 3 цвета шрифта, все страницы выдержаны в едином стиле, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, звуковой фон соответствует единой концепции и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание является строго научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) усиливают эффект восприятия текстовой части информации, орфографические , пунктуационные, стилистические ошибки отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами в наиболее адекватной форме, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: выступление логично построено, выводы аргументированы, свободное владение профессиональной терминологией, в речи отсутствуют орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы, владеет различными способами привлечения и удержания внимания и интереса аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «*зачтено*» - реферат в основном соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 18-22 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного

пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе имеются незначительные ошибки правил русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона хорошо соответствует цвету текста, всё можно прочесть, использовано 3 цвета шрифта, 1-2 страницы имеют свой стиль оформления, отличный от общего, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна, звуковой фон соответствует единой концепции и привлекает внимание зрителей в нужных местах - именно к информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание в целом является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) соответствуют тексту, орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки практически отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены

Критерии оценивания публичного выступления : выступление логично построено, выводы аргументированы, испытывает незначительные затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в незначительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы , владеет ограниченным набором способов привлечения внимания аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка *«зачтено»* - реферат частично соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 13-17 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста частично не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе имеются ошибки правил русской орфографии и пунктуации, в целом выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), частично не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона плохо соответствует цвету текста, использовано более 4 цветов шрифта, некоторые страницы имеют свой стиль оформления, гиперссылки выделены, анимация дозирована, звуковой фон не соответствует единой концепции, но не носит отвлекающий характер, размер шрифта средний (соответственно,

объём информации слишком большой — кадр несколько перегружен), ссылки работают, содержание включает в себя элементы научности, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) в определенных случаях соответствуют тексту, есть орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки, наборы числовых данных чаще всего проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной ключевые слова в тексте, чаще всего, выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: в выступлении нарушено логическое построение, выводы не аргументированы, испытывает затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает краткие ответы на вопросы, в целом соблюдены этические нормы поведения при защите работы, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «не зачтено»

Оценка *«не зачтено»* - реферат не соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 0-12 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы не обоснована, не сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал не систематизирован, ограниченный диапазон используемого информационного пространства (привлечен 1 источник научной информации), отсутствует авторская позиция в реферате.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата не соответствует теме, не продемонстрирована осведомленность знаний по теме, отсутствует личная оценка (вывод), представлен 1 позиция рассмотрения проблемы, заключение не обосновано, отсутствует критический обзор использованной литературы.

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе выполнена с ошибками правил русской орфографии и пунктуации, не выдержана стилистическая культура научного текста, отсутствует четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона не соответствует цвету текста, использовано более 5 цветов шрифта, каждая страница имеет свой стиль оформления, гиперссылки не выделены, анимация отсутствует (или же презентация перегружена анимацией), звуковой фон не соответствует единой концепции, носит отвлекающий характер, слишком мелкий шрифт (соответственно, объём информации слишком велик — кадр перегружен), не работают отдельные ссылки, содержание не является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) не соответствуют тексту, много орфографических, пунктуационных, стилистических ошибок, наборы числовых данных не проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация не представляется актуальной и современной, ключевые слова в тексте не выделены

Критерии оценивания публичного выступления: отказывается от защиты или в выступлении нарушено логическое построение, отсутствуют выводы, не использует профессиональную терминологию, в речи допускает значительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, не отвечает на вопросы, нарушает со этические нормы поведения при защите работы, не соблюдены требования к объёму доклада.

2.Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем (тема может быть предложена и студентом, но обязательно должна быть согласована с преподавателем). Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

При работе над Введением могут помочь ответы на следующие вопросы: «Надо ли давать определения терминам, прозвучавшим в теме эссе?», «Почему тема, которую я раскрываю, является важной в настоящий момент?», «Какие понятия будут вовлечены в мои рассуждения по теме?», «Могу ли я разделить тему на несколько более мелких подтем?».

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить. Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например,

стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).
2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).
3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

3. Методические рекомендации по написанию реферата статьи

Реферирование представляет собой интеллектуальный творческий процесс, включающий осмысление, аналитико-синтетическое преобразование информации и создание нового документа - реферата, обладающего специфической языково-стилистической формой.

Рефератом статьи (далее - реферат) называется текст, передающий основную информацию подлинника в свернутом виде и составленный в результате ее смысловой переработки[2].

Основными функциями рефератов являются следующие: информативная, поисковая, индикативная, справочная, сигнальная, адресная, коммуникативная.

Информативная функция. Поскольку реферат является кратким изложением основного содержания первичного документа, главная его задача состоит в том, чтобы передавать фактографическую информацию.

Отсюда информативность является наиболее существенной и отличительной чертой реферата.

Поисковая и справочная функции. Как средство передачи информации реферат нередко заменяет чтение первичного документа. Обращаясь к рефератам, пользователь осуществляет по ним непосредственный поиск информации, причем информации фактографической. В этом проявляется поисковая функция реферата, а также функция справочная, поскольку извлекаемая из реферата информация во многом представляет справочный интерес.

Индикативная функция. Реферат должен характеризовать оригинальный материал не только содержательно, но и описательно. Путем описания обычно даются дополнительные характеристики первичного материала: его вид (книга, статья), наличие в нем иллюстраций и т.д.

Кроме того, в реферате иногда приходится ограничиваться лишь названием или перечислением отдельных вопросов содержания. Это еще одно свойство реферата, которое принято называть индикативностью.

Адресная функция. Точным библиографическим описанием первичного документа одновременно достигается то, что реферат способен выполнять адресную функцию, без чего бессмысленен документальный информационный поиск.

Сигнальная функция. Эта функция реферата проявляется, когда осуществляется оперативное информирование с помощью авторских рефератов о планах выпуска литературы, а также о существовании неопубликованных, в том числе депонированных работ.

Диапазон использования рефератов очень широк. Они применяются как в индивидуальном, так и в коллективном информационном обеспечении, проводимом в интересах научно-исследовательских работ, учебного процесса и т.д. Они же являются средством международного обмена информацией и выполняют научно-коммуникативные функции в интернациональном масштабе.

Являясь наиболее экономным средством ознакомления с первоисточником, реферат должен отразить все существенные моменты последнего и особо выделить основную мысль автора. Многообразные функции реферата в системе научных коммуникаций можно объединить в следующие основные группы: информативные, поисковые, коммуникативные. Поскольку реферат передает в сжатом виде текст первоисточника, он позволяет специалисту либо получить релевантную информацию, либо сделать вывод о том, что обращаться к первоисточнику нет необходимости.

Существует три основных способа изложения информации в реферате.

---

[2] Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

Экстрагирование - представление информации первоисточника в реферате. Эта методика достаточно проста: референт отмечает предложения, которые затем полностью или с незначительным перефразированием переносятся в реферат-экстракт.

Перефразирование - наиболее распространенный способ реферативного изложения. Здесь имеет место частичное текстуальное совпадение с первоисточником. Перефразирование предполагает не использование значительной части сведений оригинала, а перестройку его смысловой и синтаксической структуры. Перестройка текста достигается за счет таких операций, как замещение (одни фрагменты текста заменяются другими), совмещения (объединяются несколько предложений в одно) и обобщение.

Интерпретация - это способ реферативного изложения, когда содержание первоисточника может раскрываться либо в той же последовательности, либо на основе обобщенного представления о нем. Разновидностью интерпретированных рефератов могут быть авторефераты диссертаций, тезисы докладов научных конференций и совещаний.

Для качественной подготовки реферата необходимо владеть основными приемами анализа и синтеза, знать основные требования, предъявляемые к рефератам, их структурные и функциональные особенности.

Процесс реферирования делится на пять основных этапов:

1. Определение способа охвата первоисточника, который в данном конкретном случае наиболее целесообразен, для реферирования (общее, фрагментное, аспектное и т.д.).
2. Беглое ознакомительное чтение, когда референт решает вопрос о научно-практической значимости и информационной новизне первоисточника. Анализ его вида позволяет осуществить выбор аспектной схемы изложения реферата.
3. Конструирование текста реферата, которое осуществляется с использованием приемов перефразирования, обобщения, абстрагирования и т.д. Очень редко предложения или фрагменты оригинала используются без изменения. Запись полученных в результате синтеза конструкций осуществляется в последовательности, соответствующей разработанной схеме или плану.
4. Критический анализ полученного текста с точки зрения потребителя реферата.
5. Оформление и редактирование, которые являются заключительным этапом подготовки реферата.

Все, что в первичном документе не заслуживает внимания потребителя реферата, должно быть опущено. Так, в реферат не включаются:

- общие выводы, не вытекающие из полученных результатов;
- информация, не понятная без обращения к первоисточнику;
- общеизвестные сведения;
- второстепенные детали, избыточные рассуждения;
- исторические справки;
- детальные описания экспериментов и методик;
- сведения о ранее опубликованных документах и т. д.

Приемы составления реферата позволяют обеспечить соблюдение основных методических принципов реферирования: адекватности, информативности, краткости и достоверности.

Хотя реферат по содержанию зависит от первоисточника, он представляет собой новый, самостоятельный документ. Общими требованиями к языку реферата являются точность, краткость, ясность, доступность.

По своим языковым и стилистическим средствам реферат отличается от первоисточника, поскольку референт использует иные термины и строит предложения в соответствии со стилем реферата. Наряду с сообщением могут использоваться перифразы. Вместе с тем в ряде случаев стилистика реферата может совпадать с первоисточником, что особенно характерно для расширенных рефератов.

Изложение реферата должно обеспечивать наибольшую семантическую адекватность, семантическую эквивалентность, краткость и логическую последовательность. Для этого

необходимы определенные лексические и грамматические средства. Адекватность и эквивалентность достигаются за счет правильного употребления терминов, краткость - за счет экономной структуры предложений и использования терминологической лексики.

Быстрое и адекватное восприятие реферата обеспечивается употреблением простых законченных предложений, имеющих правильную грамматическую форму. Громоздкие предложения затрудняют понимание реферата, поэтому сложные предложения, как правило, расчленяются на ряд простых при сохранении логических взаимоотношений между ними путем замены соединительных слов, например, местоимениями.

Широко используются неопределенно-личные предложения без подлежащего. Они концентрируют внимание читающего только на факте, усиливая тем самым информационно-справочную значимость реферата.

Реферату, как одному из жанров научного стиля, присущи те же семантико-структурные особенности, что и научному стилю в целом: объективность, однозначность, логичность изложения, безличная манера повествования, широкое использование научных терминов, абстрактной лексики и т.д. В то же время этот жанр имеет и свою специфику стиля: фактографичность (констатация фактов), обобщенно-отвлеченный характер изложения, предельная краткость, подчеркнутая логичность, стандартизация языкового выражения.

Рефераты делятся на информативные (реферат-конспект), индикативные, указательные (реферат-резюме) и обзорные (реферат-обзор)[3]. В основу их классификации положена степень аналитико-синтетической переработки источника.

Информативные рефераты включают в себя изложение (в обобщенном виде) всех основных проблем, изложенных в первоисточнике, их аргументацию, основные результаты и выводы, имеющие теоретическую и практическую ценность.

Индикативные рефераты указывают только на основные моменты содержания первоисточника. Их также называют реферативной аннотацией.

Научные рефераты отражают смысловую сторону образно-тематического содержания. В его основе лежат такие мыслительные операции, как обобщение и абстракция.

Реферат-резюме направлен на перечисление основных проблем источника без содержания доказательств.

Реферат, независимо от его типа, имеет единую структуру:

- название реферируемой работы (или выходные данные);
- композиция реферируемой работы;
- главная мысль реферируемого материала;
- изложение содержания;
- выводы автора по реферируемому материалу.

Обычно в самом первоисточнике главная мысль становится ясной лишь после прочтения всего материала, в реферате же с нее начинается изложение содержания, она предшествует всем выводам и доказательствам. Такая последовательность изложения необходима для того, чтобы с самого начала сориентировать читателя относительно основного содержания источника и его перспективной ценности. Выявление главной мысли источника становится весьма ответственным делом референта и требует от него вдумчивого отношения к реферируемому материалу. Иногда эта главная мысль самим автором даже не формулируется, а лишь подразумевается. Референту необходимо суметь сжато ее сформулировать, не внося своих комментариев.

Содержание реферируемого материала излагается в последовательности первоисточника по главам, разделам, параграфам. Обычно дается формулировка вопроса, приводится вывод по этому вопросу и необходимая цепь доказательств в их логической последовательности.

---

[3] Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. - 368с.

Следует иметь в виду, что иногда выводы автора не вполне соответствуют главной мысли первоисточника, так как могут быть продиктованы факторами, выходящими за пределы излагаемого материала. Но в большинстве случаев выводы автора вытекают из главной мысли, выявление которой и помогает их понять.

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств представлен в таблице 1.

Таблица 1

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств

Смысловые части реферата	**Используемые языковые средства**
1. Название реферируемой работы (или выходные данные)	- В. Вильсон. Наука государственного управления // Классики теории государственного управления: американская школа. Под ред. ДЖ. Шафритца, А. Хайда. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – с. 24-42.; - Статья называется (носит название, озаглавлена)
2. Композиция реферируемой работы	- Статья • состоит из…… • делится на ….. • начинается с……. • кончается (чем?)…….; - В статье можно выделить две части…….
3. Проблематика и основные положения работы	- Статья • посвящена теме (проблеме, вопросу) …… • представляет собой анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) …….. - Автор статьи • ставит (рассматривает, освещает, поднимает, затрагивает) следующие вопросы (проблемы) …… • особо останавливается (на чем?) ..... • показывает значение (чего?) …….. • раскрывает сущность (чего?) ……. • обращает внимание (на что?) …… • уделяет внимание (чему?) ….. • касается (чего?) ……. - В статье • рассматривается (что?) …. • анализируется (что?) ….. • делается анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) (чего?) …… • раскрывается, освещается вопрос… • обобщается (что?) ……. • отмечается важность (чего?) …… • касается (чего?)….. - В статье • показано (что?) …… • уделено большое внимание (чему?) …… • выявлено (что?) ……. • уточнено (что?) ……..
4. Аргументация основных положений работы	- Автор • приводит примеры (факты, цифры, данные) ……. • иллюстрирует это положение …….. • подтверждает (доказывает, аргументирует) свою точку зрения примерами (данными)… - в подтверждение своей точки зрения автор приводит доказательства (аргументы, ряд доказательств, примеры, иллюстрации, данные, результаты наблюдений)… - Для доказательств своих положений автор описывает • эксперимент …… • в ходе эксперимента автор привлекал …

5. Выводы, заключения	• выполненные исследования показывают… • приведенные наблюдения (полученные данные) приводят к выводу (позволяют сделать выводы).. • из сказанного можно сделать вывод, что ….. • анализ результатов свидетельствует … - На основании проведенных наблюдений (полученных данных, анализ результатов) • был сделан вывод (можно сделать заключение) …. • автор приводит выводы …….

Реферат может содержать комментарий референта, только в том случае, если референт является достаточно компетентным в данном вопросе и может вынести квалифицированное суждение о реферируемом материале. В комментарий входят критическая характеристика первоисточника, актуальность освещенных в нем вопросов, суждение об эффективности предложенных решений, указание, на кого рассчитан реферируемый материал.

Комментарий реферата может содержать оценку тех или иных положений, высказываемых автором реферируемой работы. Эта оценка чаще всего выражает согласие или несогласие с точкой зрения автора. Языковые средства, которые используются при этом, рассмотрены в таблице 2.

Таблица 2

Языковые средства, используемых при оценке те положений, высказываемых автором реферируемой работы

Смысловые части комментарии	**Используемые языковые средства**
Смысловые части комментарии	- Автор • справедливо указывает …. • правильно подходит к анализу (оценке) …. • убедительно доказывает …. • отстаивает свою точку зрения …. • критически относится к работам предшественников ….. - Мы • разделяем точку зрения (мнения, оценку) автора …… • придерживаемся подобного же мнения … • критически относимся к работам предшественников …. - Можно согласится с автором, что ….. - Следует признать достоинства такого подхода к решению ….
Несогласие (отрицательная оценка)	- Автор • не раскрывает содержания (противоречий, разных точек зрения) … • противоречит себе (известным фактам) ……. • игнорирует общеизвестные факты ….. • упускает из вида ……. • не критически относится к высказанному положению …….. • не подтверждает сказанное примерами…. - Мы • придерживаемся другой точки зрения (другого, противоположного мнения) • не можем согласиться (с чем?) … • трудно согласиться с автором (с таким подходом к решению проблемы, вопроса, задачи) …. • можно выразить сомнение в том, что ….. • дискуссивно (сомнительно, спорно) , что …… • к недостаткам работы можно отнести ……

В реферате могут быть использованы цитаты из реферируемой работы. Они всегда ставятся в кавычки. Следует различать три вида цитирования, при этом знаки препинания ставятся, как в предложениях с прямой речью.

1. Цитата стоит после слов составителя реферата. В этом случае после слов составителя реферата ставится двоеточие, а цитата начинается с большой буквы. Например:

Автор статьи утверждает: «В нашей стране действительно произошел стремительный рост национального самосознания».

2. Цитата стоит перед словами составителя реферата. В этом случае после цитаты ставится запятая и тире» а слова составителя реферата пишутся с маленькой буквы. Например: «В нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания», - утверждает автор статьи.

3. Слова составителя реферата стоят в середине цитаты. В этом случае перед ними и после них ставится точка с запятой. Например: «В нашей стране, - утверждает автор статьи, - действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Цитата непосредственно включается в слова составителя реферата. В этом случае (а он является самым распространенным в реферате) цитата начинается с маленькой буквы. Например: Автор статьи утверждает, что «в нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[4]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[4] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

5. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

Требования к составлению тестовых заданий

Тестовое задание (ТЗ) - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

1. Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.
2. Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.
3. Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.
4. Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

Требования к формам ТЗ

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.

Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

Тестовое задание закрытой формы

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом количестве часто

бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

Тестовое задание открытой формы

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

Тестовые задания на установление правильной последовательности

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

Тестовые задания на установление соответствия

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

6.Требования к написанию и оформлению доклада

Доклад (или отчёт) – один из видов монологической речи, публичное, развёрнутое, официальное, сообщение по определённому вопросу, основанное на привлечении документальных данных.

Обычно любая научная работа заканчивается докладом на специальном научном семинаре, конференции, где участники собираются, чтобы обсудить научные проблемы. На таких семинарах (конференциях) всегда делается доклад по определённой теме. Доклад содержит все части научного отчёта или статьи. Это ответственный момент для докладчика. Здесь проверяются знание предмета исследования, способности проводить эксперимент и объяснять полученные результаты. С другой стороны, люди собираются, чтобы узнать что-то новое для себя. Они тратят своё время и хотят провести время с пользой и интересом. После выступления докладчика слушатели обязательно задают вопросы по теме выступления, и докладчику необходимо научиться понимать суть различных вопросов. Кроме того, на семинаре задача обсуждается, рассматривается со всех сторон, и бывает, что автор узнаёт о своей работе много нового. Часто возникают интересные идеи и неожиданные направления исследований. Работа становится более содержательной. Следовательно, доклад необходим для развития самой науки и для студентов. В этом состоит главное предназначение доклада.

На студенческом семинаре (конференции) всегда подводится итог, делаются выводы, принимается решение или соответствующее заключение. Преподаватель (жюри) выставляет оценку за выполнение доклада и его предъявление, поскольку в учебном заведении данная форма мероприятия является обучающей. Оценки полезно обсуждать со студентами: это помогает им понять уровень их собственных работ. С лучшими сообщениями, сделанными на семинарах, студенты могут выступать впоследствии на студенческих конференциях. Поэтому каждому студенту необходимо обязательно предварительно готовить доклад и учиться выступать публично.

Непосредственная польза выступления студентов на семинаре (конференции) состоит в следующем.

1. Выступление позволяет осуществлять поиск возможных ошибок в постановке работы, методике исследования, обобщении полученных результатов, их интерпретации. Получается, что студенты помогают друг другу улучшить работу. Что может быть ценнее?
2. Выступление дает возможность учиться излагать содержание работы в короткое время, схватывать суть вопросов и толково объяснять существо. Следовательно, учиться делать доклад полезно для работы в любой области знаний.
3. На семинаре (конференции) докладчику принято задавать вопросы. Студентам следует знать, что в научной среде не принято осуждать коллег за заданные в процессе обсуждения вопросы. Однако вопросы должны быть заданы по существу проблемы, исключать переход на личностные отношения. Публичное выступление позволяет студентам учиться корректно, лаконично и по существу отвечать на вопросы, демонстрировать свои знания.

Требования к подготовке доклада

Доклад может иметь форму публичной лекции, а может содержать в себе основные тезисы более крупной работы (например, реферата, курсовой, дипломной работы, научной статьи). Обычно от доклада требуется, чтобы он был:

- точен в части фактического материала и содержал обоснованные выводы;
- составлен с учетом точки зрения адресата;
- посвящен проблемам, непосредственно относящимся к определенной теме;
- разделен на части, логично построенные;
- достаточно обширен, чтобы исчерпать заявленную тему доклада, но не настолько, чтобы утомлять адресата;

- интересно написан и легко читался (слушался);
- понятен, нагляден и привлекателен по оформлению.

Как правило, доклад содержит две части: текст и иллюстрации. Представление рисунков, таблиц, графиков должно быть сделано с помощью компьютера. Компьютер - идеальный помощник при подготовке выступления на семинаре (конференции). Каждая из частей доклада важна. Хорошо подготовленному тексту всегда сопутствует хорошая презентация. Если докладчик не нашёл времени хорошо подготовить текст, то у него плохо подготовлены и иллюстрации. Это неписаное правило.

Доклад строится по определённой схеме. Только хорошая система изложения даёт возможность логично, взаимосвязано, кратко и убедительно изложить результат. Обычно участники конференции знают, что должно прозвучать в каждой части выступления. В мире ежегодно проходят тысячи семинаров, сотни различных конференций, технология создания докладов совершенствуется. Главное - говорить о природе явления, о процессах, проблемах и причинах Вашего способа их решения, аргументировать каждый Ваш шаг к цели.

На следующие вопросы докладчику полезно ответить самому себе при подготовке выступления, заблаговременно (хуже, если подобные вопросы возникнут у слушателей в процессе доклада). Естественно, отвечать целесообразно честно...

1. Какова цель выступления**?**

Или: «Я, автор доклада, хочу...»:

- информировать слушателей о чем-то;
- объяснить слушателям что-то;
- обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т.п.) со слушателями;
- спросить у слушателей совета;
- сделать себе PR;
- пожаловаться слушателям на что-то (на жизнь, ситуацию в стране и т.п.).

Т.е. ради чего, собственно, затевается выступление? Если внятного ответа на Вопрос нет, то стоит задуматься, нужно ли такое выступление?

2. Какова аудитория?

На кого рассчитано выступление:

- на студентов;
- на клиента (-ов);
- на коллег-профессионалов;
- на конкурентов;
- на присутствующую в аудитории подругу (друзей)?

3. Каков объект выступления?

О чем собственно доклад, что является его «ядром»:

- одна модель;
- серия моделей;
- динамика изменения модели (-ей);
- условия применения моделей;
- законченная методика;
- типовые ошибки;
- прогнозы;
- обзор, сравнительный анализ;
- постановка проблемы, гипотеза;
- иное?

Естественно, качественный доклад может касаться нескольких пунктов из приведенного списка...

4. Какова актуальность доклада?

Или: почему сегодня нужно говорить именно об этом?

5. В чем заключается новизна темы?

Или: если заменить многоумные и иноязычные термины в тексте доклада на обычные слова, то не станет ли содержание доклада банальностью?

Ссылается ли автор на своих предшественников? Проводит ли сравнение с существующими аналогами?

Стоит заметить, что новизна и актуальность - разные вещи. Новизна характеризует насколько ново содержание выступления по сравнению с существующими аналогами. Актуальность - насколько оно сейчас нужно. Бесспорно, самый выигрышный вариант - и ново, и актуально. Неплохо, если актуально, но не ново. Например, давняя проблема, но так никем и не решенная. Терпимо, если не актуально, но ново - как прогноз. Пример: сделанный Д.И. Менделеевым в XIX веке прогноз, что в будущем дома будут не только обогревать, но и охлаждать (кондиционеров тогда и вправду не знали).

Но если и не ново и не актуально, то нужно ли кому-то такое выступление?

6. Разработан ли автором план (структура и логика) выступления?

Есть ли логичная последовательность авторской мысли? Или же автор планирует свой доклад в стиле: «чего-нибудь наболтаю, а наглядный материал и вопросы слушателей как-нибудь помогут вытянуть выступление...?»

Есть ли выводы с четкой фиксацией главного и нового? Как они подводят итог выступлению?

7. Наглядная иллюстрация материалов

Нужна ли она вообще, и если да, то, что в ней будет содержаться? Отражает ли она логику выступления?

Иллюстрирует ли сложные места доклада?

Важно помнить: иллюстративный материал не должен полностью дублировать текст доклада. Слушатель должен иметь возможность записывать: примеры, дополнения, подробности, свои мысли... А для этого необходимо задействовать как можно больше видов памяти. Гигантской практикой образования доказано: материал усваивается лучше, если зрительная и слуховая память подкрепляются моторной. Т.е. надо дать возможность слушателям записывать, а не только пассивно впитывать материал.

Следует учитывать и отрицательный момент раздаточных материалов: точное повторение рассказа докладчика. Или иначе: если на руках слушателей (в мультимедийной презентации) есть полный письменный текст, зачем им нужен докладчик? К слову сказать, часто красивые слайды не столько иллюстрируют материал, сколько прикрывают бедность содержания...

8. Корректные ссылки

Уже много веков в научной среде считается хорошим тоном указание ссылок на первоисточники, а не утаивание их.

9. Что останется у слушателей:

- раздаточный или наглядный материал: какой и сколько?
- собственные записи: какие и сколько? И что сделано автором по ходу доклада для того, чтобы записи слушателей не искажали авторский смысл?
- в головах слушателей: какие понятия, модели, свойства и условия применения были передам слушателям?

Требования к составлению доклада

Полезно придерживаться следующей схемы составления доклада на семинаре (конференции).

Время Вашего доклада ограничено, обычно на него отводится 5-7 минут. За это время докладчик может успеть зачитать в темпе обычной разговорной речи текст объёмом не более

3-5-и листов формата А4. После доклада - вопросы слушателей и ответы докладчика (до 3 минут). Полное время Вашего выступления - не более 10-и минут.

Сначала должно прозвучать название работы и фамилии авторов. Обычно название доклада и авторов произносит руководитель семинара (председатель конференции). Он представляет доклад, но допустим и такой вариант, при котором докладчик сам произносит название работы и имена участников исследования. Потраченное время - примерно 30 с.

Следует знать, что название - это краткая формулировка цели. Поэтому название должно быть конкретным и ясно указывать, на что направлены усилия автора. Если в названии менее 10-и слов - это хороший тон. Если больше - рекомендуется сократить. Так советуют многие международные журналы. В выступлении можно пояснить название работы другими словами. Возможно, слушатели лучше Вас поймут, если Вы скажете, какое явление исследуется, что измеряется, что создаётся, разрабатывается или рассчитывается. Максимально ясно покажите, что именно Вас интересует.

Введение (до 1 мин)

В этой части необходимо обосновать необходимость проведения исследования и его актуальность. Другими словами, Вы должны доказать, что доклад достоин того, чтобы его слушали. Объясните, почему важно исследовать данное явление. Расскажите, чем интересен выбранный объект с точки зрения науки, заинтересуйте своих слушателей темой Вашего исследования.

Скажите, кто и где решал подобную задачу. Укажите сильные и слабые стороны известных результатов. Учитывайте то, что студенту необходимо учиться работать с литературой, анализировать известные факты. Назовите источники информации, Ваших предшественников по имени, отчеству и фамилии и кратко, какие ими были получены результаты. Обоснуйте достоинство Вашего способа исследования в сравнении с известными результатами. Учтите, что студенческое исследование может быть и познавательного характера, то есть можно исследовать известный науке факт. Поясните, чем он интересен с Вашей точки зрения. Ещё раз сформулируйте цель работы и покажите, какие задачи необходимо решить, чтобы достигнуть цели. Что нужно сделать, создать, решить, вычислить? Делите целое на части - так будет понятнее и проще.

Методика исследования (до 30 сек.)

Методика, или способ исследования, должна быть обоснована. Поясните, покажите преимущества и возможности выбранной Вами методики при проведении экспериментального исследования.

Теоретическая часть (до 1 мин)

Эта часть обязательна в докладе. Редкий случай, когда можно обойтись без теоретического обоснования предстоящей работы, ведь экспериментальное исследование должно базироваться на теории. Здесь необходимо показать сегодняшний уровень Вашего понимания проблемы и на основании теории попытаться сформулировать постановку задачи. Покажите только основные соотношения и обязательно дайте комментарий. Скажите, что основная часть теории находится в содержании работы (реферате).

Экспериментальная часть (для работ экспериментального типа) (1,5-2 мин.)

Покажите и объясните суть проведённого Вами эксперимента. Остановитесь только на главном, основном. Второстепенное оставьте для вопросов.

Результаты работы (до 1 мин.)

1. Перечислите основные, наиболее важные, на Ваш взгляд, результаты работы.
2. Расскажите, как он был получен, укажите его характерные особенности.
3. Поясните, что Вы считаете самым важным и почему.
4. Следует ли продолжать исследование, и, если да, то в каком направлении?
5. Каким результатом можно было бы гордиться? Остановитесь на нём подробно.

6. Скажите, что следует из представленной вами информации.

7. Покажите, удалось ли разобраться в вопросах, сформулированных при постановке задачи. Обязательно скажите, достигнута ли цель работы. Закончено ли исследование?

8. Какие перспективы?

9. Покажите, что результат Вам нравится.

Выводы (до 1 мин.)

Сжато и чётко сформулируйте выводы. Покажите, что твёрдо установлено в результате проведённого теоретического или экспериментального исследования. Что удалось надёжно выяснить? Какие факты заслуживают доверия?

Завершение доклада

Поблагодарите всех за внимание. Помните: если Вы закончили свой доклад на 15 секунд раньше, все останутся довольны и будут ждать начала вопросов и дискуссию. Если Вы просите дополнительно ещё 3 минуты, Вас смогут потерпеть. Это время могут отнять от времени для вопросов, где Вы могли бы показать себя с хорошей стороны. Поэтому есть смысл предварительно хорошо "вычитать" (почти выучить) доклад. Это лучший способ научиться управлять временем.

Требования к предъявлению доклада во время выступления

Докладчику следует знать следующие приёмы, обеспечивающие эффективность восприятия устного публичного сообщения.

Приемы привлечения внимания

1. Продуманный первый слайд презентации.
2. Обращение.
3. Контакт глаз.
4. Позитивная мимика.
5. Уверенная пантомимика и интонация.
6. Выбор места.

Приемы привлечения интереса

В формулировку актуальности включить информацию о том, в чём может быть личный интерес слушателей, в какой ситуации они могут его использовать?

Приемы поддержания интереса и активной мыслительной деятельности слушателей

1. Презентация (образы, схемы, диаграммы, логика, динамика, юмор, оформление).
2. Соответствующая невербальная коммуникация (все составляющие!!!).
3. Речь логичная, понятная, средний темп, интонационная выразительность.
4. Разговорный стиль.
5. Личностная вовлеченность.
6. Образные примеры.
7. Обращение к личному опыту.
8. Юмор.
9. Цитаты.
10. Временное соответствие.

Приемы завершения выхода из контакта

- обобщение;
- метафора, цитата;
- побуждение к действию.

7. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [5].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

[5] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[6].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

8. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих

[6]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

9.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо

дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

10.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала

осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации по написанию

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет геологии и геофизики

Кафедра “Математики”

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Решебник задач по высшей математике

Екатеринбург 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ **6**

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие 1. Теория множеств 6

Множества, операции, отношения 6

Практическое занятие 2. Числовые поля 12

Комплексные числа 12

Задания для самостоятельной работы 15

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ 20

Практическое занятие 1. Векторная алгебра 20

Метод координат, векторы 20

Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения 31

Векторное произведение и функция смешанного произведения 31

Прямая линия и плоскость, взаимное расположение прямой линии и плоскости 33

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства 37

Определение векторного пространства и общие свойства векторов 37

Практическое занятие 4. Линейные операторы 58

Операторы, матрицы, определители и СЛАУ 58

Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов 73

Ядро и ранг линейного оператора. Критерии совместности СЛАУ 73

Задания для самостоятельной работы 82

Векторная алгебра 82

Прямые линии и плоскости 84

Абстрактные векторные пространства 85

Операторы, матрицы 87

Часть 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА 95

ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ГЕОМЕТРИЯ 95

ПРОСТРАНСТВА E^n

Практическое занятие 1. Подпространства и специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве 95

Собственные подпространства линейного оператора 95

Самосопряжённые и ортогональные операторы. Инвариантные подпространства 104

Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства 116

Наклонная, перпендикуляр, проекция, оператор проектирования 116

Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка 122

Квадратичные формы и поверхности второго порядка 122

Задания для самостоятельной работы 132

Собственные значения и собственные векторы 132

Инвариантные подпространства 133

Геометрия пространства E^n 135

ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО 139

Практическое занятие 1. Понятие предела 139

Определение предела последовательности 139

Вычисление предела последовательности 141

Непрерывность и предел функции 147

Практическое занятие 2. Дифференцируемость функции одного переменного 151

Производная функции одного переменного 151

Логарифмическая производная 156

Производные функции, заданной неявно 158

Производные функции, заданной параметрически 159

Понятие дифференциала функции. Приближённые вычисления 160

Практическое занятие 3. Основные теоремы дифференциального исчисления 162

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши 162

Правила Лопиталя 166

Формула Тейлора и формула Маклорена 167

Практическое занятие 4. Исследование функций одного переменного 172

Промежутки монотонности функции 172

Схема исследования функции на локальные экстремумы с помощью первой производной 173

Полное исследование функции 178

Практическое занятие 5. Интегрируемость функций одного переменного 179

Непосредственное интегрирование 179

Подведение под дифференциал 180

Методы подстановки (замены переменной интегрирования) и интегрирования по частям 181

Формула Ньютона-Лейбница, вычисление определённого интеграла методом замены переменной и интегрирования по частям 182

Задания для самостоятельной работы **184**

Предел и дифференцируемость функций одного переменного

Интегрируемость функций одного переменного

ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. РЯДЫ **194**

Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных **194**

Первые частные производные функций нескольких переменных 194

Частные производные функций нескольких переменных высших порядков 200

Дифференцируемость функций нескольких переменных 201

Дифференциалы высших порядков 203

Производные сложных и неявно заданных функций 204

Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных **207**

Градиент функции и производная по направлению 207

Экстремум функции двух переменных 208

Практическое занятие 3. Числовые ряды **210**

Непосредственное вычисление суммы числового ряда 210
Необходимый признак сходимости 211
Признак сравнения 212
Признак Даламбера 213
Знакопеременные ряды 214
Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды 216
Функциональные ряды 216
Ряд Тейлора (Маклорена) 220
Задания для самостоятельной работы 222
Дифференцируемость функций нескольких переменных 222
Числовые ряды 224
Функциональные ряды 226

ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **230**
Практическое занятие 1. Базисные векторные поля **230**
Базисные векторные поля Базисные векторные поля полярной, цилиндрической и сферической систем координат 230
Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы **240**
Вычисление криволинейных интегралов 240
Практическое занятие 3. Кратные интегралы **243**
Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах 243
Вычисление площади, объёма и массы 245
Вычисление двойного интеграла в полярных координатах 246
Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах 250
Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах 251
Практическое занятие 4. Приложения **253**
Приложения криволинейных и кратных интегралов 253
Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы **259**
Поверхностные интегралы первого рода 259
Поверхностные интегралы второго рода 261
Практическое занятие 6. Векторный анализ **262**

Градиент скалярного поля. Дивергенция и ротор векторного поля 262
Интегральные теоремы векторного анализа 267
Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения 272
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 272
Дифференциальные уравнения с однородной правой частью 273
Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 275
Неполные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка 276
Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка 279
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод Лагранжа 281
Примеры из механики 283
Практическое занятие 8. Системы ОДУ **287**
Линейные однородные системы ОДУ, метод Эйлера 287
Линейные неоднородные системы ОДУ, метод Лагранжа 291
Задания для самостоятельной работы 293
Интегрирование и теория поля 293
Обыкновенные дифференциальные уравнения 298

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие 1. Теория множеств

Множества, операции, отношения

Задача 1.1.1. Найти все подмножества множества $M = \{2, 7, 9\}$.

Р е ш е н и е. Подмножествами данного множества являются: пустое множество $\varnothing$; само множество M; одноэлементные множества $\{2\}, \{7\}, \{9\}$; двухэлементные множества $\{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\}$. $\otimes$

Задача 1.1.2. Найти пересечение, объединение и разность множеств $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{b, e, f, k\}$.

Р е ш е н и е. Пересечение множеств $A \cap B$ содержит три элемента

$$A \cap B = \{b, e, f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\},$$

разность

$$A - B = \{a, c, d\}. \otimes$$

Задача 1.1.3. Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1,\ 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что $x \in R^1$.

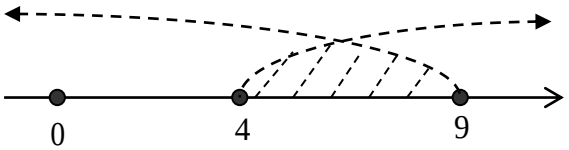


Рис. 1.

Р е ш е н и е. Решением первого неравенства является множество действительных чисел $x > 4$, решением второго неравенства является множество действительных чисел $x < 9$. Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество $M = \{x \in R^1 : 4 < x < 9\}$. $\otimes$

Задача 1.1.4. Найти произведение $A \times B$ множеств

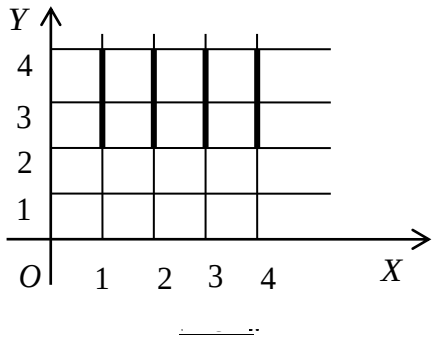
$$A=\{m,\ p\},\ B=\{e,\ f,\ k\}.$$

Р е ш е н и е. Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества A, а второй – элемент множества B:

$$A\times B=\{\{m,e\},\{m,\ f\},\{m,k\},\{p,e\},\{p,\ f\},\{p,k\}\}.\ \otimes$$

Задача 1.1.5. Изобразить на координатной плоскости произведение $A\times B$ множеств $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\in R^1:2\le y\le 4\}$.

Р е ш е н и е. Множество A конечно, а множество B – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа 1, 2, 3 или 4, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка $[2,4]$. Множество пар координатной плоскости изобразится



в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2). $\otimes$

Задача 1.1.6. Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

Р е ш е н и е. Пусть X, Y и Z – произвольные множества. Покажем, что из $X=Y$ и $Y=Z\ \Rightarrow\ X=Z$.

Пусть $x\in X$. Тогда, так как $X=Y$, имеем $x\in Y$. Но так как $Y=Z$, получаем $x\in Z$. Обратно, из $x\in Z$ следует, что $x\in X$. По закону тождества получаем $X=Z$. $\otimes$

Задача 1.1.7. Доказать, что для произвольных множеств A, B и C справедливо равенство: $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$A\setminus(B\cap C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Откуда следует, что $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. То есть, $x \in A$ и $x \notin B$, или $x \in A$ и $x \notin C$. Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$ доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\otimes$

Задача 1.1.8. Проверить непосредственно, что для множеств

$$X = \{3, 5, 7\}, Y = \{7, 9\}, Z = \{0, 1\}$$

выполняется следующее равенство: $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

Р е ш е н и е. Для левой части равенства непосредственно получаем $X \cup Y = \{3, 5, 7, 9\}$ и далее имеем:

$$(X \cup Y) \times Z = \{3, 5, 7, 9\} \times \{0, 1\} =$$

$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{9, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}, \{9, 1\}\}.$$

Для правой части получаем аналогично:

$$(X \times Z) \cup (Y \times Z) = \{\{3, 5, 7\} \times \{0, 1\}\} \cup \{\{7, 9\} \times \{0, 1\}\} =$$

$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}\} \cup \{\{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\} =$$

$$= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\}.$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу. $\otimes$

Задача 1.1.9. Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$$

множества действительных чисел R^1 алгебраической операция $x * y = x^2$ и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

Р е ш е н и е. Пусть x, y, z – любые элементы из R^+. Тогда, очевидно, $\left(\forall x \in R^+\right) x^2 \in R^+$, то есть операция $(*)$ является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$\left(\forall x \neq y\right) x * y = x^2 \neq y * x = y^2,$$

то операция $(*)$ не является коммутативной. Далее, так как

$$\left(\forall x \neq y \neq z \in R^+\right) x * \left(y * z\right) = x^2 \neq \left(x * y\right) * z = \left(x * y\right)^2 = x^4,$$

то операция $(*)$ не является ассоциативной. $\otimes$

Задача 1.1.10. Ассоциативна ли на множестве действительных чисел R^1 операция $x * y = \sin x \cdot \sin y$.

Р е ш е н и е. Для определённой операции имеем:

$$\left(\forall x, y, z \in R\right)\left(x * y\right) * z = \sin\left(\sin x \cdot \sin y\right) \cdot \sin z,$$

$$x * \left(y * z\right) = \sin x \cdot \sin\left(\sin y \cdot \sin z\right).$$

Очевидно, что $\left(x * y\right) * z = x * \left(y * z\right)$ выполняется не для всех x, y, z, следовательно, операция $(*)$ свойством ассоциативности не обладает. $\otimes$

Задача 1.1.11. На множестве $M = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «***меньше***». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.

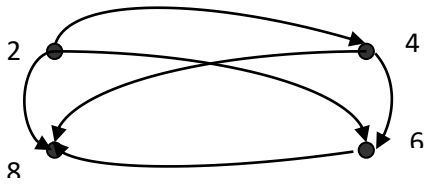


Рис. 1.8.3.

Р е ш е н и е. Отношение имеет вид:

$$2 < 4, 2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества $\Re \subset M \times M$ произведения множества M на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3. $\otimes$

Задача 1.1.12. Пусть $M=\{f,\ p,\ q\}$ и задано подмножество $\Re$ множества $M\times M$

$$\{\{f,\ p\},\{f,\ q\},\{f,\ f\},\{p,\ f\},\{q,\ f\},\{p,\ q\},\{p,\ p\},\{q,\ p\},\{q,\ q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

Р е ш е н и е. Очевидно, что для элементов множества $\Re$ истинны следующие высказывания:

$$1)\ \{f,\ f\},\{p,\ p\},\{q,\ q\}\in\Re;$$

$$2)\ \{f,\ p\}\wedge\{p,\ f\}\in\Re,\ \{f,\ q\}\wedge\{q,\ f\}\in\Re,$$
$$\{p,\ q\}\wedge\{q,\ p\}\in\Re;$$

$$3)\ \{f,\ p\}\in\Re\wedge\{p,\ q\}\in\Re\Rightarrow\{f,\ q\}\in\Re,$$
$$\{f,\ q\}\in\Re\wedge\{q,\ p\}\in\Re\Rightarrow\{f,\ p\}\in\Re,$$
$$\{p,\ f\}\in\Re\wedge\{f,\ q\}\in\Re\Rightarrow\{p,\ q\}\in\Re.$$

Поэтому отношение $\Re$ на множестве M, заданное множеством упорядоченных пар элементов M, рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\otimes$

Задача 1.1.13. Показать, что отношение включения $\subset$ является отношением порядка.

Р е ш е н и е. 1) Пусть X – произвольное множество. Так как всегда $X\subset X$, то отношение $\subset$ рефлексивно. 2) Пусть $X,\ Y,\ Z$ – произвольные множества, для которых выполняются включения $X\subset Y$ и $Y\subset Z$. Если $x\in X$, то в силу $X\subset Y$ имеем $x\in Y$, а так как $Y\subset Z$, то и $x\in Z$. Поэтому $(X\subset Y\wedge Y\subset Z)\Rightarrow X\subset Z$, то есть отношение $\subset$ транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X\subset Y\wedge Y\subset X)\Leftrightarrow X=Y,$$

то отношение $\subset$ антисимметрично.

Отношение $\subset$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка. $\otimes$

Задача 1.1.14. Пусть функция $f: M_1\to M_2$, где $M_1\subset R^1$ и $M_2\subset R^1$, задана формулой $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Требуется: найти множество определения M_1 и множество значений M_2 этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли f инъективной, сюръективной или биективной.

Р е ш е н и е. Множеством определения функции f является множество $M_1 = \{x \in R^1 : -1 \le x \le 1\}$, а множеством значений – множество $M_2 = M_1$, следовательно f осуществляет отображение M_1 на M_1, то есть является преобразованием. Так как $(\exists x \in M_1)\colon f(x) = f(-x)$, то преобразование f не является инъективным, но очевидно, что f – сюръективно. Следовательно, отображение f не является биективным. $\otimes$

Задача 1.1.15. Доказать, что множество натуральных чисел N с операцией $(*)\colon x * y = \min\{x, y\}$ является полугруппой.

Р е ш е н и е. Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция $(*)$ является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x, y \in N)\, x * y = \min\{x, y\} \in N,$$

то операция $(*)$ является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x, y, z \in N)\,(x * y) * z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, \min\{y, z\}\}.$$

Операция $(*)$ ассоциативна. Поэтому $(N, *)$ – полугруппа. $\otimes$

Задача 1.1.16. Доказать, что множество положительных действительных чисел $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$, в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R)\, x + y \overset{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \overset{def}{=} x^{\alpha},$$

является векторным пространством.

Р е ш е н и е. Согласно определению векторного пространства, в множестве R^+ должны выполняться две группы аксиом.

Аксиомы сложения:

1) $(\forall x, y \in A)\, x + y = y + x$ (**коммутативность**);
2) $(\forall x, y, z \in A)\,(x + y) + z = x + (y + z)$ (**ассоциативность**);
3) $(\exists 0 \in A)\colon (\forall x \in A)\, x + 0 = x$ (существование нулевого элемента);
4) $(\forall x \in A)(\exists (-x) \in A)\colon x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

Аксиомы умножения на число:

5) $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R)\,(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
6) $(\forall x, y \in A \wedge \forall \alpha \in R)\, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
7) $(\forall x \in A)\, 1 \cdot x = x$;
8) $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R)\,(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Во множестве R^+ операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$\left(\forall x,\, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1\right) x \cdot y \in R^+ \wedge x^{\alpha} \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x,\, y \in R^+\right) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x,\, y,\, z \in R^+\right)\left(x \cdot y\right) \cdot z = x \cdot \left(y \cdot z\right).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$\left(\forall x \in R^+\right) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как $\left(\forall x \in R^+\right) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$, то

$$\left(\alpha + \beta\right) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как $\left(x \cdot y\right)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$, то

$$\alpha \cdot \left(x + y\right) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как $x^1 = x$, то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как $x^{\alpha \cdot \beta} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha}$, то

$$\left(\alpha \cdot \beta\right) \cdot x = \alpha \cdot \left(\beta \cdot x\right).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество R^+ с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел R^1. ⊗

Практическое занятие 2. Числовые поля

Комплексные числа

Задача 1.2.1. Построить точку, изображающую комплексное число $z = -3 - 4i$.

Р е ш е н и е. В данной задаче $z = a + bi = -3 - 4i$. Так как на комплексной плоскости $a = x$ и $b = y$, то точка, изображающая на комплексной плоскости число z, имеет координаты $x = -3$ и $y = -4$. ⊗

Задача 1.2.2. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$.

Р е ш е н и е. Модуль числа $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$. Точка z лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = arctg\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$. $\otimes$

Задача 1.2.3. Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}.$$

Р е ш е н и е. Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы $i^2 = -1$. $\otimes$

Задача 1.2.4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $-2 < \operatorname{Im} z \le 3$.

Р е ш е н и е. Так как на комплексной плоскости $\operatorname{Im} z = y$, то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями $y = -2$ и $y = 3$, причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат. $\otimes$

Задача 1.2.5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $|z-1| < 3$.

Р е ш е н и е. Положим $z = x + iy$. Тогда имеем $z - 1 = (x-1) + iy$, откуда получаем

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3,$$

или

$$(x-1)^2 + y^2 < 9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке $(1; 0)$. $\otimes$

Задача 1.2.6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $\log_3 |z - 3i| < 1$.

Р е ш е н и е. Положим $z = x + iy$. Тогда для числа $z - 3i$ имеем

$$z - 3i = x + i(y-3),$$

откуда получаем

$$|z-3i| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Решая неравенство

$$\log_3 \sqrt{x^2 + (y-3)^2} < 1,$$

получаем $x^2 + (y-3)^2 < 9$. Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке с координатами $(0; 3)$. $\otimes$

Задача 1.2.7. Представить комплексное число

$$z = -\cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. По формулам приведения имеем $-\cos\vartheta = \cos(\pi - \vartheta)$. Поэтому, полагая $r = 1$ и $\varphi = \pi - \vartheta$, получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \cos(\pi - \vartheta) + i\sin(\pi - \vartheta). \otimes$$

Задача 1.2.8. Представить комплексное число $z = 4 - 4\sqrt{3}\cdot i$ в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. 1) Находим модуль: $|z| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8.$

2) Находим аргумент. Так как $\cos\varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Следовательно, $z = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \otimes$

Задача 1.2.9. Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя формулу умножения, получаем:

$$8\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}i. \otimes$$

Задача 1.2.10. Выполнить деление комплексных чисел:

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) : 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i. \otimes$$

Задача 1.2.11. Возвести комплексное $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ число в седьмую степень.

Р е ш е н и е. По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\left[2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]^7 = 2^7\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= -64\sqrt{2} + 64\sqrt{2}\,i. \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $M = \{4, 8, 11, 22\}$. Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти $X \cap Y,\ X \cup Y,\ X - Y,\ Y - X$.

3. Пусть $X = [1, 3) \cup (5, 7]$ и $Y = [2, 6]$. Найти $X \cap Y,\ X \cup Y,\ X - Y,\ Y - X$.

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x + 4 \geq 7x - 16,\ |x - 3| < 1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а) $X = \{x : 2 \leq x \leq 6\}, Y = \{y : 3 < y \leq 5\}$;

б) $X = R, Y = \{y : -2 < y \leq 3\}$;

в) $[0, 1] \times [0, 1]$;

г) $[1, 2] \times (-\infty, +\infty)$;

д) $(0, +\infty) \times [-2, -3]$.

6. Доказать, что для произвольных множеств X, Y, Z справедливы равенства:

а) $X \cup (X \cap Y) = X$;

б) $X \cap (X \cup Y) = X$

в) $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$;

г) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$;

д) $Y \cup (X \setminus Y) = X \cup Y$;

е) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

ж) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

з) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$;

и) $X \cup Y \subset Z \Rightarrow X \times Y = (X \times Z) \cap (Z \times Y)$.

7. Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей

изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8. Истинны или ложны для любых X, Y, Z следующие высказывания:

а) $\left(X \subset Y \wedge Y \subset Z\right) \Rightarrow X \subset Z$;

б) $\left(X \neq Y \wedge Y \neq Z\right) \Rightarrow X \neq Z$.

9. Найти множество истинности предиката: $\left\langle \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1} < 0 \right\rangle$.

10. Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{array}{c} \textit{Корни системы} \\ \textit{уравнений} \end{array} \begin{cases} x-y=m-1 \quad \textit{одновременно} \\ 2x-y=3-m \ \textit{положительны.} \end{cases} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката: $\left\langle x \cdot \left(x-2\right) \cdot \left(x+3\right) > 0 \right\rangle$.

12. Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число x, что для любого числа y справедливо равенство $x+y=0$»;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества R действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а) N; б) $N_{2k} = \left\{2k : k \in N\right\}$; в) $N_{2k-1} = \left\{2k-1 : k \in N\right\}$;

г) Z; д) $Z_{2k} = \left\{2k : k \in Z\right\}$; е) R; ж) $R - \left\{0\right\}$;

з) $R^+ = \left\{x \in R : x > 0\right\}$; и) $R - Q$; к) $\left\{0, 1\right\}$.

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве $R^+ = \left\{x \in R : x > 0\right\}$ множества действительных чисел R, и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1) $x * y = \dfrac{x+y}{2}$; 2) $x * y = x + y - 1$; 3) $x * y = x^2 y$;

4) $x * y = \sqrt{xy}$; 5) $x * y = \left|x - y\right|$; 6) $x * y = x^y$;

7) $x * y = x^2 + y^2$; 8) $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$.

15. На множестве $X=\{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения «x равно y», «x кратно y» и «x больше y на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества $X \times X$ задаёт соответствующее отношение?

а) $\{\{4, 2\}, \{6, 2\}, \{8, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}, \{8, 6\}, \{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8,8\}\}$;

б) $\{\{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 6\}\}$;

в) $\{\{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$.

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел N с операциями $(*): x * y = x$ и $(\circ): x \circ y = 1$ является полугруппой;

б) множества всех целых чисел Z, всех рациональных чисел Q и всех действительных чисел R являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17. Найти действительные числа x и y, если:

а) $\dfrac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2$; б) $\dfrac{2u+4i}{2x+y}-\dfrac{y}{x-i}=0$.

18. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z=\dfrac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$; б) $z=\dfrac{3-2i}{1-4i}+i^9$;

в) $z=\dfrac{5i-2}{3i+1}+i+\dfrac{8i-3}{2-i}$; г) $z=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{17+31i}{7+i}+\dfrac{12}{(1+i)^4}\right)+i$.

19. Выполнить указанные действия:

1) $(1+2i)^6$;

2) $(2+3i)\cdot(4-5i)+(2-3i)\cdot(4+5i)$;

3) $(x-1-i)\cdot(x-1+i)\cdot(x+1+i)\cdot(x+1-i)$;

4) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;

5) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

6) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$;

7) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$;

8) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

9) $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$;

10) $\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;

11) $\left[\dfrac{1}{3}\left((1-i)^4+\dfrac{7-24i}{4-3i}\right)+i\right]\dfrac{8}{(1+i)^2}$.

20. Найти такие вещественные числа x и y, что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-спряжёнными:

а) $z_1=y^2-2y+xy-x+y+(x+y)i$, $z_2=-y^2+2y+11-4i$;

б) $z_1=x+y^2+1+4i$, $z_2=ixy^2+iy^2-3$.

21. Решить уравнения:

1) $|z|+z=1+2i$;

2) $2|z|-4az+1+ai=0\ (a\in R)$;

3) $|z|+z=2-i$;

4) $3z^2-(14-8i)z+8(4-3i)=0$;

5) $2(2-i)z^2+(7-i)z+5(1+i)=0$;

6) $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$;

7) $z^4-12z^2+64=0$.

22. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}(1-i)x-(3+i)y=4,\\ 5x-(4+2i)y=4i;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1-i)x+3iy=5,\\ 2x-(3-3i)y=6.\end{cases}$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=5-i$; 3) $z_3=2i$; 4) $z_4=-\sqrt{2}i$.

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=-2i$; 3) $z_3=5-\sqrt{2}$.

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

1) $-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$; 2) $1\le|z+1|<3$; 3) $|z+i|=1$;

4) $\dfrac{\pi}{4}\le\arg(z-2+i)\le\pi$; 5) $\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\pi,\\ |1-2i-z|=2;\end{cases}$

6) $|z-1-i|\ge|z-2+i|$; 7) $|z-1+2i|\ge3$; 8) $|z-2i|+|z-i|=1$.

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z=16-16\sqrt{3}i$; 2) $z=-6\sqrt{3}-6i$; 3) $z=(\sqrt{5}-2)i$.

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

1) $z=5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

2) $z=4\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)(-3+\sqrt{3}i)$;

$4\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right):(\sqrt{3}-i)$;

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)(1+i)$; $\left(-\sqrt{5}+\sqrt{5}i\right)^3(1+i)^2$; $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)}$.

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

1) $\sqrt{-6+6\sqrt{3}i}$;

2) $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{2}--13{,}5\sqrt{2}i}$;

3) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

30. Представив комплексные числа

$$z_1=-1-i,\ z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ z_3=1+\sqrt{3}i$$

в тригонометрической форме, вычислить выражение $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Практическое занятие 1. Векторная алгебра

Метод координат, векторы

Пример 2.1.1. В декартовой системе координат задана точка $A(1;5;3)$. Найти координаты точки B, расположенной симметрично точке $A(1;5;3)$ относительно координатной плоскости X^1OX^2.

Р е ш е н и е. Координаты точки B по осям OX^1 и OX^2 такие же, как и уточки A, а координата по оси OX^3 имеет противоположный знак. Следовательно, $B(1;5;-3)$. $\otimes$

Пример 2.1.2. В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2-2\vec{e}_3,\ \vec{y}=2\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{z}=3\vec{e}_1+13\vec{e}_2+4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u}=3\vec{x}+2\vec{y}-\vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы $\left\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\right\}$ и взаимном расположении векторов.

Р е ш е н и е. Находим линейную комбинацию:

$$3\vec{x}+2\vec{y}-\vec{z}=$$

$$=3\left(\vec{e}_1+3\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)+2\left(2\vec{e}_2+5\vec{e}_3\right)-\left(3\vec{e}_1+13\vec{e}_2+4\vec{e}_3\right)=$$

$$=0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве R^3, заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости. $\otimes$

Пример 2.1.3. В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3,\ \vec{y}=4\vec{e}_1+6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора $\vec{z}=2\vec{x}-5\vec{y}$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\vec{z}=2\vec{x}-5\vec{y}=2\left(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3\right)-5\left(4\vec{e}_1+6\vec{e}_3\right)=$$

$$=-18\vec{e}_1+4\vec{e}_2-24\vec{e}_3.$$

Находим норму вектора $\vec{z}$: $\left\|\vec{z}\right\|=\sqrt{(-18)^2+4^2+(-24)^2}=\sqrt{916}.\ \otimes$

Пример 2.1.4. На плоскости R^2 задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты $O(0;\ 0),\ B(1;\ 2),\ D(5;\ 0)$ (рисунок 1.1). Найти:

1) координаты вершины C;

2) косинус угла между сторонами OB и OD;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

Р е ш е н и е. 1) По определению координаты вершины C равны координатам вектора $\vec{OC}$ (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, а $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$, то $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD}\right) = 5.$$

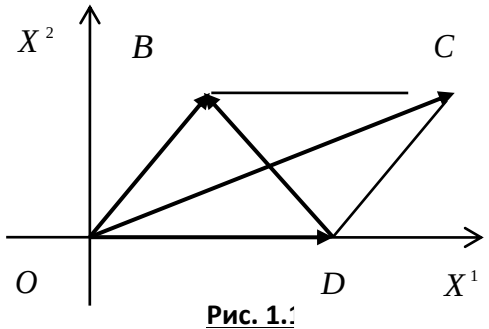


Рис. 1.1

3) Вычисляем длины векторов: $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left\|\vec{OB}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236;$$

$$\left\|\vec{OD}\right\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\}$: $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\} = \dfrac{5}{5 \cdot 2{,}236} \approx 0{,}447.$

5) Находим диагональ $\vec{DB}$:

$$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_1 = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

6) Далее, $\left\|\vec{OC}\right\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$; $\left\|\vec{DB}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

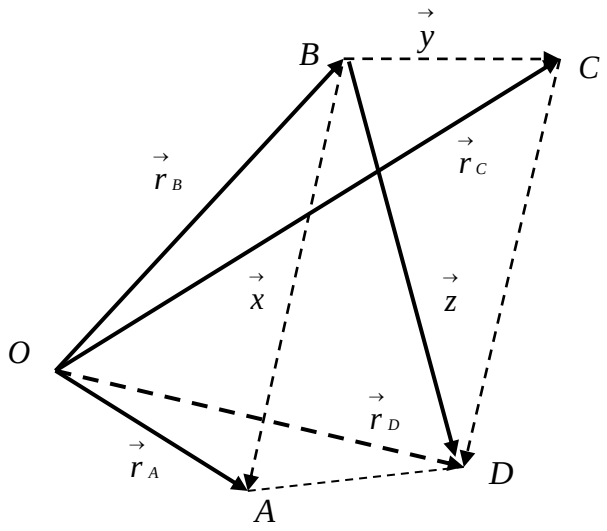
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\left\{\vec{OC},\vec{DB}\right\}=\frac{\left(\vec{OC},\vec{DB}\right)}{\left\|\vec{OC}\right\|\cdot\left\|\vec{DB}\right\|}=\frac{(-4)\cdot 6+2\cdot 2}{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\otimes$$

Пример 2.1.5. Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\vec{r}_A=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{r}_B=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{r}_C=-7\vec{e}_1+2\vec{e}_2-10\vec{e}_3;$$

Р е ш е н и е. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.



Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A-\vec{r}_B=\vec{x},\ \vec{r}_C-\vec{r}_B=\vec{y},\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{z},$$

$$\vec{r}_D=\vec{r}_B+\vec{z}=\vec{r}_B+\vec{r}_A-\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_B=\vec{r}_A+\vec{r}_C-\vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины. $\otimes$

Пример 2.1.6. В пространстве R^2 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x}=3\vec{e}_1+\sqrt{7}\,\vec{e}_2,\ \vec{y}=\vec{e}_1+\sqrt{24}\,\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор $\vec{z}$, направленный по биссектрисе угла $\left\{\vec{x},\vec{y}\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Находим длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = 4;$$

$$\left\|\vec{y}\right\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{e}_{\vec{x}} = \frac{1}{\left\|\vec{x}\right\|} \cdot \vec{x} = \frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\vec{e}_2;\ \vec{e}_{\vec{y}} = \frac{1}{\left\|\vec{y}\right\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{5}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5}\vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$:

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20}\vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7} + 8\sqrt{6}}{20}\vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому найденный вектор $\vec{z}$ является искомым вектором. $\otimes$

Пример 2.1.7. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Р е ш е н и е. 1) Находим длину вектора:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2) Находим орт вектора: $\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}}\vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{e}_3.$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}},\ \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}},\ \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}. \otimes$$

Пример 2.1.8. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,\ \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Найти скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$ двумя способами.

Р е ш е н и е. 1. Находим линейные комбинации $\vec{x} - 2\vec{y}$ и $3\vec{x} + \vec{y}$:

$$\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - 2\left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = -\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x} + \vec{y} = 3\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) + \left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$:

$$\left(-\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3\right) =$$

$$= -4 + 20 + 80 = 96.$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, 3\vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(-2\vec{y}, 3\vec{x}\right) + \left(-2\vec{y}, \vec{y}\right) =$$

$$= 3\left(\vec{x}, \vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) - 6\left(\vec{y}, \vec{x}\right) - 2\left(\vec{y}, \vec{y}\right) =$$

$$= 3\left\|\vec{x}\right\| - 5\left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} - 2\left\|\vec{y}\right\|.$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи. $\otimes$

Пример 2.1.9. Дано: $\left\|\vec{x}\right\| = 3,\ \left\|\vec{y}\right\| = 2\sqrt{5},\ \left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} = \frac{\pi}{4}$. Найти

$$\left(\vec{x} + 3\cdot\vec{y}, 3\cdot\vec{x} - \vec{y}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\left(\vec{x}+3\vec{y},\,3\vec{x}-\vec{y}\right)=3\left\|\vec{x}\right\|^2-\left(\vec{x},\,\vec{y}\right)+9\left(\vec{y},\,\vec{x}\right)-3\left\|\vec{y}\right\|^2=$$

$$=3\left\|\vec{x}\right\|^2+8\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x},\,\vec{y}\right\}-3\left\|\vec{y}\right\|^2=-33+24\sqrt{10}.\otimes$$

Пример 2.1.10. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=5\vec{e}_1-3\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы $\left\{\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3\right\}$ образуют новый базис в пространстве R^3.

2) Найти координаты вектора $\vec{x}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2+6\vec{e}_3$ относительно базиса $\left\{\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_2-2\alpha_3=0,\\ 2\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3=0,\\ -3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространства R^3.

2) Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ относительно нового базиса записываем разложение вектора $\vec{x}$ по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$. Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$. Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

Пример 2.1.11. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \ \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y},$$

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)$:

$$\left(\vec{x}, 2\vec{z}\right) = \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\ 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)\right) = 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2 = 2.$$

2) находим вектор $\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y}$:

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z}\right)\vec{x} + \vec{y} = 2\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\right) + \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3.$$

3) Находим скалярное произведение $\left(2\cdot\vec{x}, \vec{z}\right)$:

$$\left(2\cdot\vec{x}, \vec{z}\right) = \left(2\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3\right), \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)\right) =$$

$$= \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) = 4 + 4 - 6 = 2.$$

4) Находим вектор $\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y}$:

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z}\right)\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 22\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3.$$

5) Находим расстояние между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\rho\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{(-8)^2+4^2+1^2}=\sqrt{81}=9.\otimes$$

Пример 2.1.12. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки $A(2;4;6)$, $B(1;3;5)$, $C(0;2;3)$. Найти длины сторон треугольника ABC, косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора $\vec{AB}+\vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-5\vec{e}_3$.

Р е ш е н и е. 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3;$$

$$\vec{AC}=-2\vec{e}_1-2\vec{e}_2-3\vec{e}_3;$$

$$\vec{BC}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника ΔABC:

$$\left\|\vec{AB}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3};$$

$$\left\|\vec{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17};$$

$$\left\|\vec{BC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos\vartheta=\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|}=\frac{x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2}\sqrt{\left(y^1\right)^2+\left(y^2\right)^2+\left(y^3\right)^2}}:$$

$$\cos\left\{\vec{AB},\vec{AC}\right\}=\frac{\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|}=\frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA},\vec{BC}\right\}=\frac{\left(\vec{BA},\vec{BC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}=\frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA},\vec{CB}\right\}=\frac{\left(\vec{CA},\vec{CB}\right)}{\left\|\vec{CA}\right\|\cdot\left\|\vec{CB}\right\|}=\frac{10}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{6}}=\frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора $\vec{AB}+\vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-5\vec{e}_3$:

$$\Pr_{\vec{z}}\left\{\vec{AB}+\vec{AC}\right\}=\frac{(-3)\cdot1+(-3)\cdot2+(-4)\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{11}{\sqrt{30}}.\otimes$$

Пример 2.1.13. Пусть на плоскости X^1OX^2 даны две точки $A_1\left(x_1^1;\,x_1^2\right)$ и $A_2\left(x_2^1;\,x_2^2\right)$. Найти координаты точки $A\left(x^1;\,x^2\right)$, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda$.

Р е ш е н и е. Предположим, что отрезок A_1A_2 не параллелен оси OX^1. Точки A_1, A, A_2 спроектируем на оси OX^1, и OX^2 (рисунок).

Имеем по условию задачи

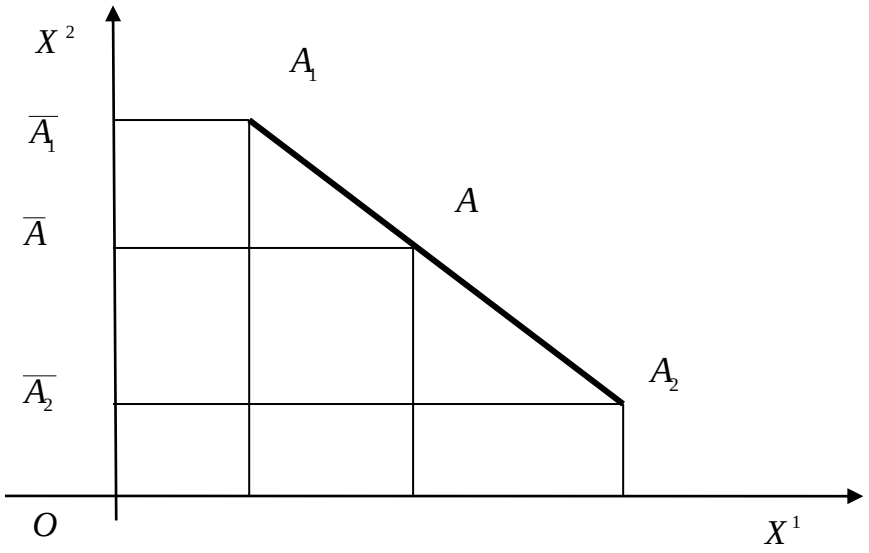
$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\overline{A_1}\,\overline{A}}{\overline{A}\,\overline{A_2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1}\,\overline{A}=\left|x_1^2-x^2\right|,\ \overline{A}\,\overline{A_2}=\left|x^2-x_2^2\right|.$$

Откуда

$$\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\left|x_1^2-x^2\right|}{\left|x^2-x_2^2\right|}.$$



Точка $\overline{A}$ лежит между точками A_1 и A_2, поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left|x_1^2 - x^2\right|}{\left|x^2 - x_2^2\right|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^2 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2\right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1\right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки A:

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1\right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1\right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения

Векторное произведение и функция смешанного произведения

Пример 2.2.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Если в некоторой декартовой системе координат векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3,\ \vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left((-2)\cdot(-6) - (-1)\cdot 1\right)\vec{e}_1 + \left((-1)\cdot(-2) - 3\cdot(-6)\right)\vec{e}_2 +$$

$$+\left(3\cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\right)\vec{e}_3 = 13\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{570}. \otimes$$

Пример 2.2.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| = 1 \text{ и } \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6}.$$

Р е ш е н и е. Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}\right] = 3\left[\vec{a}, \vec{a}\right] + \left[\vec{a}, \vec{b}\right] +$$

$$+9\left[\vec{b},\vec{a}\right]+3\left[\vec{b},\vec{b}\right]=-8\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S=\left\|\left[\vec{x},\vec{y}\right]\right\|=8\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=8\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\sin\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}=8\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=4.\otimes$$

Пример 2.2.3. Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3,\ \vec{y}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Предлагается решить задачу самостоятельно. $\otimes$

Прямая линия и плоскость, взаимное расположение прямой линии и плоскости

Пример 2.2.4. Получить уравнение плоскости $H^2\subset R^3$, проходящей через начало координат O и через две точки $M_1(4;-2;1)$, $M_2(2;4;-3)$.

Р е ш е н и е. Радиус-векторы точек M_1 и M_2

$$\vec{x}\equiv\vec{OM}_1=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{y}\equiv\vec{OM}_2=2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\vec{N}=\left[\vec{OM}_1,\vec{OM}_2\right]\equiv\left[\vec{x},\vec{y}\right]=$$

$$=\left(x^2y^3-x^3y^2\right)\vec{e}_1+\left(x^3y^1-x^1y^3\right)\vec{e}_2+\left(x^1y^2-x^2y^1\right)\vec{e}_3=:$$

$$=\left[(-2)\cdot(-3)-1\cdot4\right]\vec{e}_1+\left[1\cdot2-4\cdot(-3)\right]\vec{e}_2+\left[4\cdot4-(-2)\cdot2\right]\vec{e}_3=$$

$$=2\vec{e}_1+14\vec{e}_2+20\vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+x^3\vec{e}_3$$

текущей точки M плоскости её нормальному вектору

$$\left(\vec{N}, \vec{OM}\right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \otimes$$

Пример 2.2.5. Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0,\ x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

Р е ш е н и е. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\right\} = \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right)}{\left\|\vec{N}_1\right\| \cdot \left\|\vec{N}_2\right\|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}. \otimes$

Пример 2.2.6. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0,\ x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

Р е ш е н и е. Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая линия принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{a}=\left[\vec{N}_1,\vec{N}_2\right]=\left(x^2y^3-x^3y^2\right)\vec{e}_1+\left(x^3y^1-x^1y^3\right)\vec{e}_2+\left(x^1y^2-x^2y^1\right)\vec{e}_3=$$

$$=\left[1\cdot(-3)-1\cdot(-1)\right]\vec{e}_1+\left[1\cdot1-1\cdot(-3)\right]\vec{e}_2+\left[1\cdot(-1)-1\cdot1\right]\vec{e}_3=$$

$$=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3.$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости X^1OX^3, для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1+\quad x^3=\quad 2, \\ x^1-3x^3=-6 \\ \qquad x^2=0. \end{cases}$$

Получаем решение $x_0^1=0,\ x_0^2=0,\ x_0^3=2.$

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2}=\frac{x^2}{4}=\frac{x^3-2}{-2}.\ \otimes$$

Пример 2.2.7. Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1-2}{1}=\frac{x^2-3}{1}=\frac{x^3+1}{-4},$$

и плоскости с уравнением $x^1+x^2+2x^3-9=0.$

Р е ш е н и е. Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left(\vec{N},\vec{l}\right)=\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2-4\vec{e}_3\right)=-6\neq0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны. Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1 = 2 + t, \\ x^2 = 3 + t, \\ x^3 = -1 - 4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра t_0, соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим x^1, x^2, x^3 из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём $t_0 = -1$. Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1 = 1,\ x_0^2 = 2,\ x_0^3 = 3. \otimes$$

Пример 2.2.8. Найти расстояние от точки $M(1;\ 0;\ 1)$ до плоскости H^2 с уравнением $4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0.$

Р е ш е н и е. Расстояние от точки M до плоскости – это длина вектора $\vec{M_0M}$ с начальной точкой M и конечной точкой M_0 – проекцией точки M на плоскость H^2.

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1;\ 0;\ 1)$ перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор плоскости $\vec{l} = \vec{N} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2}{6} = \frac{x^3 - 1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 4t, \\ x^2 = \quad 6t, \\ x^3 = 1 + 4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0 = \frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции M_0 точки $M(1;\,0;\,1)$ на плоскость H^2:

$$x^1 = 2,\; x^2 = \frac{3}{2},\; x^3 = 2.$$

Вектор

$$\vec{M_0M} = (2-1)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)\vec{e}_2 + (2-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho\left(M,\, H^2\right) = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \otimes$$

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

Определение векторного пространства и общие свойства векторов

Пример 2.3.1. Пусть P – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},\; a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля P:

1) $\left(\forall|a\rangle, |b\rangle \in P^n\right) |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ $

2) $\left(\forall|a\rangle \in P^n\right)$ и $\left(\forall \alpha \in P\right) \alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}$.

Показать, что множество P^n является n-мерным векторным пространством.

Р е ш е н и е. Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

Аксиомы сложения.

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле P, действительно

$$\left[|a\rangle + |b\rangle\right] + |c\rangle = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \dots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \dots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \dots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}\right] = |a\rangle + \left[|b\rangle + |c\rangle\right]$$

.

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле P, действительно

$$|a\rangle+|b\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\cdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\\cdots\\b_n+a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}=|b\rangle+|a\rangle.$$

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)|a\rangle+|0\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\\\cdots\\a_n+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)-|a\rangle=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\cdots\\-a_n\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle+\left(-|a\rangle\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\cdots\\-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_1\\a_2-a_2\\\cdots\\a_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}.$$

Аксиомы умножения вектор-столбца на числа. Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

1) $\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)$ и $\left(\forall\alpha\in P\right)$

$$\alpha\left(|a\rangle+|b\rangle\right)=\alpha\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+b_1)\\\alpha(a_2+b_2)\\\dots\\\alpha(a_n+b_n)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix};$$

2) $(\forall\alpha,\ \beta\in P)$

$$(\alpha+\beta)|a\rangle=(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)a_1\\(\alpha+\beta)a_2\\\dots\\(\alpha+\beta)a_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle;$$

3) $1\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix};$

4) $(\alpha\beta)|a\rangle=(\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha\beta)a_1\\(\alpha\beta)a_2\\\dots\\(\alpha\beta)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(\beta a_1)\\\alpha(\beta a_2)\\\dots\\\alpha(\beta a_n)\end{pmatrix}=\dots=\alpha\left[\beta|a\rangle\right],$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество P^n является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\\dots\\0\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix}+\dots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца $|a\rangle$, он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или ***канонический*** базис в векторном пространстве P^n.

Теперь очевидно, что множество P^n является n-мерным векторным пространством. $\otimes$

Пример 2.3.2. Показать, что если система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\}$ линейно независима, то и любая её подсистема также линейно независима.

Р е ш е н и е. Пусть $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ – подсистема данной системы, то есть $m < n$. Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ линейно зависима. Тогда можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Учитывая свойство нуль вектора

$$\left(\forall \vec{x} \in X \right) \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\vec{0} = 0\,\vec{x}_{m+1} + \dots + 0\,\vec{x}_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m + 0\,\vec{x}_{m+1} + \dots + 0\,\vec{x}_n = \vec{0},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависимость векторов системы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \right\}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости ***произвольной*** подсистемы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \right\}$ линейно независимой системы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \right\}$ не верно. $\otimes$

Пример 2.3.3. Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

Р е ш е н и е. *Необходимость.* Если из двух векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ хотя бы один равен нуль вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть система $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению найдутся такие числа $\alpha, \beta \in R$, что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа неравны нулю одновременно.

Пусть $\beta \neq 0$. Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) \vec{x}.$$

Обозначая $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть теперь векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, покажем, что система $\left\{\vec{x},\ \vec{y}\right\}$ линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть $\nu \neq 0$, тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu} \nu \vec{x},$$

откуда получаем

$$\nu \vec{y} = \lambda \nu \vec{x},$$

или

$$\mu \vec{x} + \nu \vec{y} = \vec{0},$$

где $\mu = -\lambda \nu$. Так как $\lambda \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то система векторов $\left\{\vec{x},\ \vec{y}\right\}$ линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.3.4. Показать, что система трёх векторов пространства R^3 линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

Р е ш е н и е. Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

Необходимость. Пусть система $\left\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\right\}$ линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа $\alpha, \beta, \gamma \in R$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}.$$

Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{x} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{y}.$$

Приложив векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ к общей точке O, легко видеть, что вектор $\vec{z}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{x},\ \vec{b} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны, покажем, что система $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}$ линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{x} = \mu\vec{y} + \lambda\vec{z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов $\left\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right\}.\otimes$

Пример 2.3.5. Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, |a_4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle + \alpha_3|a_3\rangle + \alpha_4|a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов. $\otimes$

Пример 2.3.6. Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ можно выразить в виде разложения по векторам подсистемы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$.

Р е ш е н и е. Так как подсистема $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$ – максимальная по числу векторов линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор $\vec{a}_{m+1}$, получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие неравные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве $\alpha_{m+1} \neq 0$ так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ одновременно равны нулю. Но тогда система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \right\}$ будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}, \ \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}, \ \ldots, \ \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение. $\otimes$

Пример 2.3.7. Дана система функций

$$\left\{ e^t, e^{2t}, e^{3t} \right\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \ \left(\forall t \in (-\infty, +\infty)\right)$$

влечёт за собой выполнение условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим СЛАУ для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого положим в тождестве $t = 0$, получим

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

Дифференцируя тождество по t и полагая $t=0$, получим

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая $t=0$, получим

$$\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0,\\ \alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=0.\end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Таким образом, система функций $\left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\}$ является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Поэтому множество функций вида

$$f(t)=\alpha e^t+\beta e^{2t}+\lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций. $\otimes$

Пример 2.3.8. Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}\subset E^4$, заданных в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}\subset E^4$ своими разложениями:

$$\vec{g}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3-3\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_3=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2+0\vec{e}_3-\vec{e}_4.$$

Р е ш е н и е. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}\subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_2\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 -$$

$$-\frac{1}{4}(-4)\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{g}_3 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_2\right\|^2}\vec{a}_2 =$$

$$= 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) -$$

$$-\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4}\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4\right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{\vec{e}_{a1},\ \vec{e}_{a2},\ \vec{e}_{a3}\right\}$ ортонормированная. $\otimes$

Пример 2.3.9. Показать, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1\right),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

Р е ш е н и е. Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0;$$

$$\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-1 - 1\right) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ является ортонормированной и, следовательно, её можно принять за один из базисов линейного многообразия L. $\otimes$

Пример 2.3.10. Пусть X – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства R^2.

Р е ш е н и е. 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).

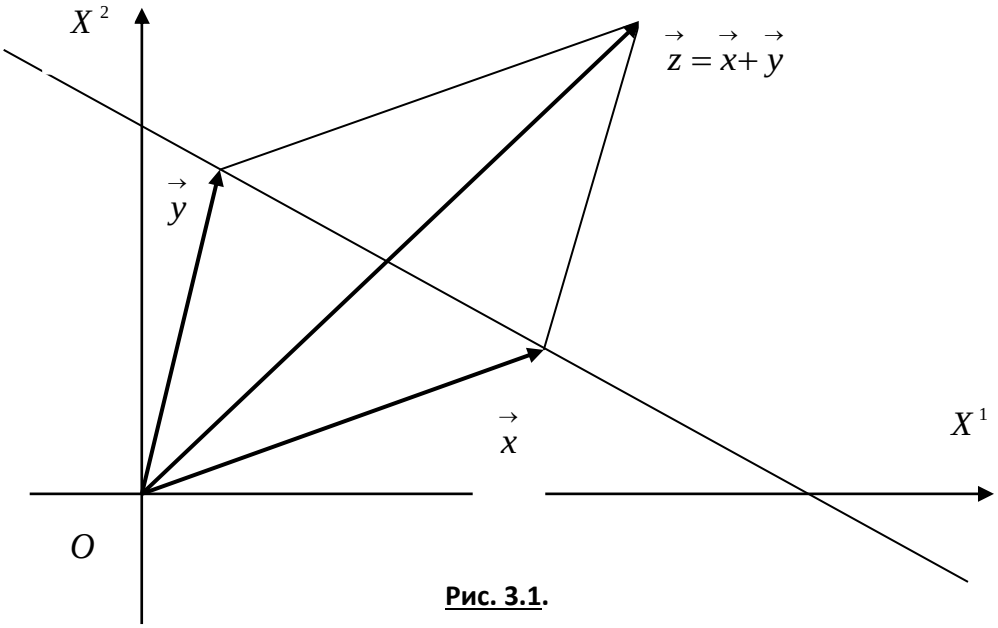


Рис. 3.1.

Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству X, так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество X не является векторным подпространством пространства R^2.

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству X и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество X является векторным подпространством пространства R^2. $\otimes$

Пример 2.3.11. Дана система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}.$$

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где $\alpha, \beta, \lambda \in R^1$, является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Р е ш е н и е. Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке $(-\pi, \pi)$.

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях $t \in (-\pi, \pi)$ получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0,\ t = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ линейно независима на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$, что и доказывает требуемой. $\otimes$

Пример 2.3.12. Показать, что система векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E^4

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \qquad (1)$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства E^4.

Р е ш е н и е. Находим значение скалярного произведения:

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 0.$$

Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова E^4, найдём векторы

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right) = 0, \\ \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая x^3 и x^4 за свободные неизвестные, то есть, например, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$. Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

или

$$\vec{x} = a\vec{a}_3 + b\vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\,\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система $\left\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$ ортогональна и в совокупности с векторами $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ также образует ортогональную систему $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$. Для получения ортонормированного базиса пространства E^4 нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{a}_1\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{a}_2\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{a}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\left\|\vec{a}_4\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_4\right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4\right\}$ ортонормирована. $\otimes$

Пример 2.3.13. В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$$

задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \; \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство H^2 пространства E^4. Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства H^2.

2) Найти базис $\left\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$ и построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$ к подпространству H^2, записать параметрические уравнения ортогонального дополнения $H^{2\perp}$.

Р е ш е н и е. 1) Координаты векторов системы $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ непропорциональны – векторы неколлинеарны. Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ линейно независимая. Векторы системы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{x}_0$ – вектор сдвига многообразия. Если $\vec{x}_0 = \vec{0}$, то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения $H^{\perp}$. Так как система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – базис подпространства H, то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left(\vec{a}_1, \vec{x} \right) = 0, \\ \left(\vec{a}_2, \vec{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённа, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a и b – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \; \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы $\left\{\vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}$ образуют линейно независимую систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$.

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$, параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства H^2:

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{9}{5}\tau_1 - \dfrac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \dfrac{3}{5}\tau_1 + \dfrac{1}{5}\tau_2, \otimes \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases}$$

Пример 2.3.14. В аффинном пространстве A^4 координатами относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ заданы четыре точки:

$$A_1(1; 4; 2; 0),\ A_2(3; 7; 3; 2),\ A_3(2; 6; 3; -1),\ A_4(1; 4; 5; 2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Р е ш е н и е. Обозначим точку A_1 через $O^* \equiv A_1$ и примем её за начало репера на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{O^*A_2} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= \vec{O^*A_3} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= \vec{O^*A_4} = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4. \end{aligned} \qquad (1)$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из этого результата заключаем, что система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ линейно независима и её можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{ O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$$

на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Пусть $M\left(x^1; x^2; x^3; x^4\right)$ – текущая точка гиперплоскости, координаты которой определены относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ вмещающего пространства A^4. Тогда её радиус-векторы $\vec{OM}$ относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ пространства A^4 и $\vec{O^*M}$ относительно репера $\left\{ O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ гиперплоскости $H^3 \subset A^4$ могут быть, соответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} &\vec{x} \equiv \vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4, \\ &\vec{O^*M} = t_1 \vec{a}_1 + t_1 \vec{a}_2 + t_1 \vec{a}_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{O^*M}, \qquad (3)$$

где

$$\vec{x}_0 \equiv \vec{OO^*} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3. \qquad (4)$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем ***параметрические уравнения***

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \tag{5}$$

гиперплоскости $H^3 \subset A^4$. Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра t_1, t_2, t_3 из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \tag{6}$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$t_1 = 2x^1 - x^2 + 2;$$

$$t_2 = -3x^1 + 2x^2 - 5;$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости $H^3 \subset A^4$, проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

Практическое занятие 4. Линейные операторы

Операторы, матрицы, определители и СЛАУ

Пример 2.4.1. В пространстве R^3 оператор $\hat{P}$ действует по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P}\vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору $\vec{x}$ его координатную проекцию на ось OX^1. Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P}\left(\alpha_1 \vec{x}_1+\alpha_2 \vec{x}_2\right)=\alpha_1 \hat{P}\vec{x}_1+\alpha_2 \hat{P}\vec{x}_2.$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\hat{P}\left(\alpha_1 \vec{x}_1+\alpha_2 \vec{x}_2\right)=$$

$$=\hat{P}\left[\alpha_1\left(x_1^1 \vec{e}_1+x_1^2 \vec{e}_2+x_1^3 \vec{e}_3\right)+\alpha_2\left(x_2^1 \vec{e}_1+x_2^2 \vec{e}_2+x_2^3 \vec{e}_3\right)\right]=$$

$$=\hat{P}\left[\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1+\left(\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(\alpha_1 x_1^3+\alpha_2 x_2^3\right)\vec{e}_3\right]=$$

$$=\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1=\alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1+\alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1=\alpha_1 \hat{P}\vec{x}_1+\alpha_2 \hat{P}\vec{x}_2.$$

Определение выполняется и оператор $\hat{P}$ линейный.

Действуя оператором $\hat{P}$ последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\hat{P}\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_2=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_3=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3.$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{P}$ называется ***оператором ортогонального проектирования на ось*** OX^1.

$\otimes$

Пример 2.4.2. Показать, что оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действующий по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right) \hat{A}\vec{x} = \left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right],$$

где фиксированные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \; \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\hat{A}\left(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\right) = \left[\vec{a}, \left[\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{b}\right]\right] = \left[\vec{a}, \alpha\left[\vec{x}, \vec{b}\right] + \beta\left[\vec{y}, \vec{b}\right]\right] =$$

$$= \alpha\left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right] + \beta\left[\vec{a}, \left[\vec{y}, \vec{b}\right]\right] = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}.$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

1) использовать свойства векторного произведения;

2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;

3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}, \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}, \vec{B}\right).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A}\vec{e}_k = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_k, \vec{b}\right]\right]$$

по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Пусть $k = 1$, тогда получаем:

$$\left[\vec{e}_1, \vec{b}\right] = \left(0\cdot 1 - 0\cdot(-1)\right)\vec{e}_1 + \left(0\cdot 1 - 1\cdot 1\right)\vec{e}_2 + \left(1\cdot(-1) - 0\cdot 1\right)\vec{e}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_1, \vec{b}\right]\right] = -5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_2, \vec{b}\right]\right] = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_3, \vec{b}\right]\right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.4.3. Показать, что если $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\} \subset X^n$ – линейно зависимая система векторов, то и система образов $\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\} \subset X^n$ при действии линейного оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$ также линейно зависимая.

Р е ш е н и е. Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ равны нулю одновременно. Действуя на обе части последнего равенства оператором $\hat{A}$, в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{A}\vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ есть ненулевые, то система образов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.4.4. Показать, что если система

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1,\ \hat{A}\vec{x}_2\ldots,\ \hat{A}\vec{x}_m\right\}\subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}\subset X^n$$

при действии оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$ линейно независимая, то и сама система $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}\subset X^n$ также линейно независимая.

Р е ш е н и е. Для системы векторов $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$ потребуем выполнения равенства нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m=\vec{0},$$

то есть предположим, что система $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$ линейно зависимая.

Действуя на обе части равенства оператором $\hat{A}$, получим

$$\alpha_1\hat{A}\vec{x}_1+\alpha_2\hat{A}\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\hat{A}\vec{x}_m=\vec{0},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1,\ \hat{A}\vec{x}_2\ldots,\ \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$$

неверное. Система линейно независимая. $\otimes$

Пример 2.4.5. Пусть $\vec{x} \in R^3$ – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\vec{x} \equiv \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$$

операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$, представленных в каноническом базисе пространства R^3 своими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 22 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 14 \\ 15 & 12 & 23 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$, для чего находим координаты образа вектора:

$$\left(AB - BA\right)|x\rangle = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^1 + 18x^2 + 2x^3 \\ -7x^1 + 4x^2 + 3x^3 \\ -2x^1 - 12x^2 - 22x^3 \end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\vec{x} = \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x} = \left(18x^1 + 18x^2 + 2x^3\right)\vec{e}_1 +$$

$$+\left(-7x^1 + 4x^2 + 3x^3\right)\vec{e}_1 + \left(-2x^1 - 12x^2 - 22x^3\right)\vec{e}_1. \otimes$$

Пример 2.4.6. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \; B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{x}$.

Р е ш е н и е. Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$2A + AB = 2\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты образа вектора $\vec{x}$, используя координатную форму записи:

$$\left(2A+AB\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-13&-16\\0&3&10\\6&-13&-16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x_1-13x_2-16x_3\\3x_2+10x_3\\6x_1-13x_2-16x_3\end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x}=\left(6x_1-13x_2-16x_3\right)\vec{e}_1+\left(3x_2+10x_3\right)\vec{e}_2+\left(6x_1-13x_2-16x_3\right)\vec{e}_3.\ \otimes$$

Пример 2.4.7. Найти $\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)$, если

$$\vec{x}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+6\vec{e}_3;\ \vec{y}=-3\vec{e}_1-\vec{e}_2-5\vec{e}_3;$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим вектор $\hat{A}\vec{x}+\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$A\left|x\right\rangle+\left|y\right\rangle=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\17\\18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\16\\13\end{pmatrix};$$

$$\hat{A}\vec{x}+\vec{y}=22\vec{e}_1+16\vec{e}_2+13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор $\vec{x}+\hat{B}\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$\left|x\right\rangle+B\left|y\right\rangle=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-20\\-20\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\-17\\-8\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}+\hat{B}\vec{y}=-19\vec{e}_1-17\vec{e}_2-8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)=22\cdot\left(-19\right)+16\cdot\left(-17\right)+13\cdot\left(-8\right)=-794.\ \otimes$$

Пример 2.4.8. Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Р е ш е н и е. 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное x^1 и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные x^3, x^4 за свободные неизвестные и, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$, выражаем через них x^2, x^1, имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2 = -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}x^4,\ x^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b,\ x^3 = a,\ x^4 = b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, |x_0\rangle = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку” $\left|x_0\right\rangle$ и имеющее направляющие векторы $\left|a\right\rangle$ и $\left|b\right\rangle$. $\otimes$

Пример 2.4.9. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & -1 & -5\end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -1\\ 4 & -5 & -9\end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент. Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -1\\ 4 & -5 & -9\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -5 & -9\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -9\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -5 & -9\end{vmatrix}=45-5=40.\ \otimes$$

Пример 2.4.10. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Определитель матрицы $\det A=5\neq 0$. Матрица A невырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_1^1=1;\ A_2^1=-3;\ A_3^1=1$$

$$A_1^2=3;\ A_2^2=1;\ A_3^2=-2;$$

$$A_1^3 = -2;\ A_2^3 = 1;\ A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$adjA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ подтверждает правильность расчёта. $\otimes$

Пример 2.4.11. Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы: $A_1^1 = 4,\ A_2^1 = -2,\ A_1^2 = -3,\ A_2^2 = 1.$

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adjA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det A}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -3\end{pmatrix}\Rightarrow x^1=9,\ x^2=-3.\ \otimes$$

Пример 2.4.12. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Имеем матричное уравнение вида $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу A^{-1} и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде $X=A^{-1}B$.

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы A равен:

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-5=1\neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_1^1=3,\ A_2^1=-1,\ A_1^2=-5,\ A_2^2=2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_1^1 & A_2^1\\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}^T=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\ A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева:

$$\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение. ⊗

Пример 2.4.13. Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$x^1 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

Аналогично находим x^2 и x^3:

$$x^2 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -2;\ x^3 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3. \otimes$$

Пример 2.4.14. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый (старый) базис пространства X^4 и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T}: X^4 \to X^4$ в этом базисе. Найти матрицу линейного оператора $\hat{T}$ в новом базисе

$$\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4\right\} \subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{a}_1, \vec{g}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{g}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{g}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

Р е ш е н и е. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как $\det A = 1$. Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\begin{array}{llll} A_1^1 = 1; & A_2^1 = -1; & A_3^1 = 0; & A_4^1 = 0; \\ A_1^2 = 0; & A_2^2 = 1; & A_3^2 = -1; & A_4^2 = 0; \\ A_1^3 = 0; & A_2^3 = 0; & A_3^3 = 1; & A_4^3 = -1; \\ A_1^4 = 0; & A_2^4 = 0; & A_3^4 = 0; & A_4^4 = 1. \end{array}$$

Теперь обратная матрица находится по формуле $\hat{A} = \dfrac{1}{\det A} adjA$ и имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора T преобразуется по формуле $T' = \left(A^{-1}\right)^T T A^T$. Проводя вычисления, получаем матрицу T':

$$T'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.\otimes$$

Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

Ядро и ранг линейного оператора. Критерии совместности СЛАУ

Пример 2.5.1. Найти ядро $K\left(\hat{A}\right)$ линейного оператора $\hat{A}: X^4 \to X^3$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4, \left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению ядро

$$K\left(\hat{A}\right)=\left\{\vec{x} \in X^4 : \hat{A}\vec{x}=\vec{0}\right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 0, \\ 3 \cdot x^2 + x^3 + 2 \cdot x^4 = 0, \\ -x^2 - 2 \cdot x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, метом Гаусса, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Принимая неизвестное x^4 за свободное неизвестное и, полагая $x^4 = t$, где t может принимать произвольные значения из R, получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t,\ x^2 = -\frac{4}{5}t,\ x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{\vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t\,\vec{a}; t \in R\right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \frac{2}{5}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием $L\left\{\vec{a}\right\}$ с направляющим вектором $\vec{a}$. $\otimes$

Пример 2.5.2. Пусть Y – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

Р е ш е н и е. Сначала покажем, что множество X квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве X алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A+B=B+A;\ (A+B)+C=A+(B+C).$$

Во множестве X имеется нейтральный элемент

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A=\begin{pmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & -a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве X каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц Y вида

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства X. Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства X. Операции сложения и умножения на число не

нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1+b_1^1 & a_2^1+b_2^1 \\ a_2^1+b_2^1 & a_2^2+b_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha A=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1^1 & \alpha\cdot a_2^1 \\ \alpha\cdot a_2^1 & \alpha\cdot a_2^2 \end{pmatrix}.\otimes$$

Пример 2.5.3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. ***Первый метод*** (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству $r(A)\le\min(m,n)=3$ ($n-$число строк, $m-$число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A\cong\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ $\cong$ использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы $r=2$.

2. ***Второй метод*** (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=5\ne 0.\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-2=0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2-2=0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы

$r(A)=2.\otimes$

Пример 2.5.4. Найти ранг $r\left(\hat{A}\right)$, множество значений $\hat{A}\left(X^5\right)$ и дефект $d\left(\hat{A}\right)$ ли-

нейного оператора $\hat{A}: X^5 \to X^3$, если этот оператор в некоторых базисах пространств X^5 и X^3 имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пусть отмечены базисы

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right\} \subset X^5, \left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $r(A) = 3.$

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3 = -2\vec{g}_1 + 10\vec{g}_2 - 9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$:

$$\hat{A}\left(X^5\right) = \left\{\vec{y} \in X^3 : \left(\forall \alpha, \beta, \eta \in R^1\right) \vec{y} = \alpha \cdot \vec{a}_1 + \beta \cdot \vec{a}_2 + \eta \cdot \vec{a}_3\right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r\left(\hat{A}\right) + d\left(\hat{A}\right) = 5,$$

откуда получаем $d\left(\hat{A}\right) = 2$. Итак, $r\left(\hat{A}\right) = 3,\ d\left(\hat{A}\right) = 2.$ $\otimes$

Пример 2.5.5. Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} = \left\{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3\right\},$$

$$L_2\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\} = \left\{\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3\right\},$$

если $\alpha_k, \beta_k \in R^1$ и

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\dim L_2 = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Базисом L_1 является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом L_2 подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства $L_1 + L_2$, вычислим ранг матрицы, столбцами которой являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ базисный минор } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства $L_1 + L_2$ есть система $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\right\}$.

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора.

Вектор $\vec{b}_2$ разложим по базису $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\right\}$ подпространства $L_1 + L_2$:

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2,\ \alpha_2^2 = 1,\ \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства $L_1 \cap L_2$. $\otimes$

Пример 2.5.6. Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{array}\right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен $5\neq 0$. Все миноры третьего порядка, как у матрицы A, так и у матрицы B, равны нулю: ранги основной и расширенной матриц $r(A)=r(B)=2$. Следовательно, СЛАУ совместна. $\otimes$

Пример 2.5.7. Выяснить, при каких значениях параметра a СЛАУ с основной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей $|b\rangle=(2\quad 1\quad a)^T$ является совместной.

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что ранг матрицы A СЛАУ $r(A)=2$. Расширенная матрица имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & a\end{pmatrix}=3a+6.$$

Если $a\neq -2$, то $\det B\neq 0$ и $r(B)=3\neq r(A)$ – СЛАУ несовместна. Если $a=-2$, то $\det B=0$. Так как у матрицы B имеются отличные от нуля миноры, то $r(B)=2=r(A)$. Поэтому при $a=-2$ СЛАУ совместна. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

Векторная алгебра

1. Даны векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

и норму (длину) вектора $\vec{u}$:

1) $\vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
$\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$;

2) $\vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$,
$\alpha = -4$, $\beta = 3$, $\gamma = -2$;

3) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$,
$\alpha = 7$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если:

1) $A(2; -2; 3)$, $B(1; -1; 2)$, $C(4; -4; 5)$;

2) $A(0; -2; 6)$, $B(-12; -2; -3)$, $C(-9; -2; -6)$;

3) $A(2; 3; -1)$, $B(4; 5; -2)$, $C(3; 1; 1)$.

3. На плоскости R^2 заданы своими координатами три вершины A, B и C параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины D;

2) косинус угла между сторонами AB и AC;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

1) $A(-1; 2; -2)$, $B(3; 4; -5)$, $C(1; 1; 0)$;

2) $A(-2; -2; 0)$, $B(-1; -2; 4)$, $C(5; -2; 1)$;

3) $A(3; 3; -1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(4; 4; -1)$.

4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти $\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\ \gamma\vec{x}+\lambda\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1+5\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{y}=\vec{e}_1+7\vec{e}_2+\vec{e}_3,$

$\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=1,\ \lambda=2;$

2) $\vec{x}=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2+8\vec{e}_3,\ \vec{y}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-7\vec{e}_3,$

$\alpha=-2,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \lambda=-2;$

3) $\vec{x}=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-8\vec{e}_3,\ \vec{y}=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+7\vec{e}_3,$

$\alpha=11,\ \beta=6,\ \gamma=2,\ \lambda=-7.$

5. Найти $\left(\vec{x}-4\vec{y},\ 6\vec{x}+\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\left\|\vec{x}\right\|=4,\ \left\|\vec{y}\right\|=5,\ \left\{\hat{\vec{x}\,,\vec{y}}\right\}=\frac{\pi}{4};$

2) $\left\|\vec{x}\right\|=6,\ \left\|\vec{y}\right\|=1,\ \left\{\hat{\vec{x}\,,\vec{y}}\right\}=\frac{\pi}{3};$

3) $\left\|\vec{x}\right\|=2{,}5,\ \left\|\vec{y}\right\|=1{,}5,\ \left\{\hat{\vec{x}\,,\vec{y}}\right\}=\frac{\pi}{6}.$

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор $\vec{x}$. Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3;$

2) $\vec{x}=-\vec{e}_1-3\vec{e}_2+5\vec{e}_3;$

3) $\vec{x}=5\vec{e}_1-\vec{e}_2-6\vec{e}_3.$

Прямые линии и плоскости

1. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$

2) $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3;$

3) $\vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 2\vec{e}_2,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$

2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если дано:

1) $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 1,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6};$

2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{4};$

3) $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 1,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{2}.$

3. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3, 1, 2)$ и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

4. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки $A_1(0; 0; 0)$; $B_1(3; 3; 0)$; $C_1(0; 3; 3)$ и $A_2(4; 5; 0)$; $B_2(1; 6; 3)$; $C_2(2; 0; 7)$ соответственно.

5. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 7; 3)$ и имеющей нормальный вектор, заданный точками $M_1(-2; -1; -8)$ и $M_2(2; 1; 8)$. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{ON}_1$, $\vec{ON}_2$ и $\vec{ON}_3$, где N_1, N_2 и N_3 – точки пересечения данной плоскости и осей координат.

6. В пространстве R^3 найти угол между плоскостями, проходящими через точки M_1, M_2, M_3 и N_1, N_2, N_3:

1) $M_1(0;7;-4)$; $M_2(4;8;-1)$; $M_3(-2;1;3)$;

$N_1(2;3;1)$; $N_2(2;0;3)$; $N_3(1;2;0)$;

2) $M_1(1;-2;2)$; $M_2(-3;2;3)$; $M_3(3;0;6)$;

$N_1(0;3;5)$; $N_2(0;-1;3)$; $N_3(4;0;0)$.

7. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

1) $\frac{x^1-2}{1}=\frac{x^2-3}{1}=\frac{x^3+1}{-4}$, $x^1+x^2+3x^3-10=0$;

2) $\frac{x^1+1}{2}=\frac{x^2-3}{-4}=\frac{x^3+1}{5}$, $x^1+2x^2-x^3+5=0$.

8. Найти координаты проекции точки M_0 на плоскость:

1) $M_0(0;-3;-2)$; $2x^1+10x^2+10x^3-1=0$;

2) $M_0(1;0;-1)$; $2x^2+4x^3-1=0$.

9. В пространстве R^3 найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3:

1) $M_1(0;7;-4)$, $M_2(4;8;-1)$, $M_3(-2;1;3)$, $M_0(-10;11;13)$;

2) $M_1(5;8;3)$, $M_2(10;5;6)$, $M_3(8;7;4)$, $M_0(7;17;14)$;

3) $M_1(1;3;5)$, $M_2(-5;5;2)$, $M_3(7;-1;8)$, $M_0(0;0;0)$.

Абстрактные векторные пространства

1. Пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X^n$ – некоторый базис в векторном пространстве X^n, и $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса, найти базу и размерность этой системы векторов.

1) $\dim X^n = 4$:

$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$,

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2) $\dim X^n = 5$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

2. Пусть $L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ и $L\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ – некоторые подпространства векторного пространства X^4, и пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый его базис. Найти базис суммы и пересечения этих подпространств.

1) $$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{cases}$$

3. Пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ – некоторый базис в евклидовом пространстве E^4, и $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортогональна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где $L_1^2 = L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$, а $L_2^2 = L_1^{2\perp}$.

1) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + = -6\vec{e}_3. \end{cases}$

Операторы, матрицы

1. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ – некоторый фиксированный вектор из R^3, а операторы $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$, действуют по правилам $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

1) $\hat{A}\vec{x} = \left(\vec{a}, \vec{x}\right)\vec{a}$, 2) $\hat{A}\vec{x} = \left[\vec{a}, \vec{x}\right]$.

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

2. Показать, что операторы

$$\hat{A}: R^3 \to R^3, \hat{B}: R^3 \to R^3, \hat{C}: R^3 \to R^3,$$

действие которых задано координатными соотношениями

1) $\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$,

2) $\hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix}$,

3) $\hat{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

являются линейными и записать их матрицы.

3. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \quad \hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

1) $\left(\hat{A}^2 + 2\hat{B}\right)\vec{x}$; 2) $\left(2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2\right)\vec{x}$; 3) $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$.

4. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

6. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$

7. Разложить вектор $\vec{x}$ по системе векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$:

1) $\vec{a}_1=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+4\vec{e}_3,$

$\vec{x}=-2\vec{e}_1+9\vec{e}_3.$

2) $\vec{a}_1=\vec{e}_1-3\vec{e}_2,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3,$

$\vec{x}=5\vec{e}_1-12\vec{e}_2-\vec{e}_3.$

3) $\vec{a}_1=3\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=-3\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,$

$\vec{x}=2\vec{e}_2+4\vec{e}_3.$

8. В каноническом базисе пространства R^3 дана линейно независимая система векторов

$\vec{x}_1=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2,$

$\vec{x}_2=2\vec{e}_2+2\vec{e}_3,$

$\vec{x}_3=2\vec{e}_1+2\vec{e}_3$

и матрица

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов $\hat{A}\vec{x}_1,\ 2\hat{A}\vec{x}_2,\ 3\hat{A}\vec{x}_3$?

9. Проверить, что $(AB)C = A(BC)$, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

10. Вычислить многочлен

$$P(X)=X^3-3X+2$$

от матрицы

$$X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

11. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

а) $5A+2X=0$, если $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 6\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$;

и) $(-1)A+3X=2B$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$.

12. Вычислить определители:

ф) $\begin{vmatrix}a & -a & a\\ a & a & -a\\ a & -a & -a\end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\ y^2 & y & 1\\ z^2 & z & 1\end{vmatrix}$.

13. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

14. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

15. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

16. Решить матричные уравнения:

а) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

17. Решить методом Гаусса СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$

18. Пространство R^3 подвергается деформации под действием линейного оператора $\hat{A}$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0;\,0;\,0);\ B(3;\,3;\,0);\ C(0;\,3;\,3);\ D(3;\,0;\,3)$$

до и после деформации пространства.

19. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T} : X^4 \to X^4$. Найти матрицу оператора в базисе $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4$, если:

а) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4,\ \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4,$

$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4,\ \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$

б) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4$, $\vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$,

$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$, $\vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$.

20. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$

21. При каких значениях параметра a СЛАУ является совместной:

а) $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$

22. Найти ядро оператора, заданного в пространстве R^3 своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

23. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора $\hat{A}: R^m \to R^n$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m, \right\} \subset R^m, \left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Часть 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n

Практическое занятие 1. Подпространства и специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

Собственные подпространства линейного оператора

Пример 2.1.1. В каноническом базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2$ оператор $\hat{T}$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det\left(T - \mu \cdot I\right) = 0;\ \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 5.$

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_1 = 2,$ для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1,\ x_1^2 = 1 \Rightarrow \left|x_1\right\rangle = c\left|a_1\right\rangle,\ c \in R^1 \Rightarrow \left|a_1\right\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = 5$, решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = c/2,\ x_2^2 = c,\ c \in R^1 \Rightarrow |x_2\rangle = c|a_2\rangle \Rightarrow |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\{\vec{a}_1\} = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1;\ t \in R^1\}$$

и

$$L\{\vec{a}_2\} = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2;\ t \in R^1\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2.\ \otimes$$

Пример 2.1.2. Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 в пространства R^3.

Р е ш е н и е. Оператор зеркального отражения в пространстве R^3 относительно координатной плоскости X^1OX^2, очевидно, действует по правилу (рисунок 7.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right) \vec{y} = \hat{R}\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 - x^3 \vec{e}_3.$$

Подействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R}\vec{e}_1 = \vec{e}_1;\ \hat{R}\vec{e}_2 = \vec{e}_2;\ \hat{R}\vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 получаем:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\hat{R}$ имеет вид:

$$R(\mu) = \det\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix} = (1-\mu)\cdot(1-\mu)\cdot(-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень $\mu_1 = -1$ и двукратный корень $\mu_2 = 1$.

1) Для собственного значения $\mu_2 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix},\ c \in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = -1$, есть линейная оболочка вида

$$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left\{\vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = c \cdot \vec{e}_3; c \in R^1\right\},$$

то есть ось OX^3.

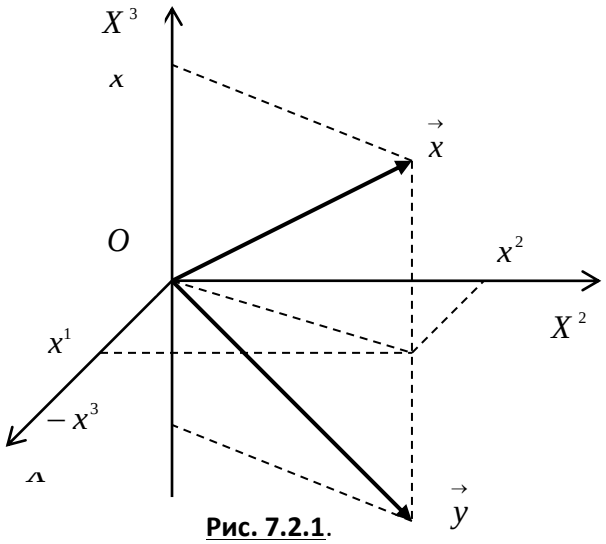


Рис. 7.2.1.

2) Для собственного значения $\mu_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\left|x\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R^1$ – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = 1$, являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\}=\left\{\vec{x}\in R^3:\vec{x}=a\cdot\vec{e}_1+b\cdot\vec{e}_2;\ a,b\in R^1\right\},$$

то есть координатной плоскостью X^1OX^2. Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств $OX^1\oplus OX^2$. $\otimes$

Пример 2.1.3. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}:E^3\to E^3$ задан матрицей

$$T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение:

$$T=\begin{pmatrix}3-\mu & 0 & 0\\ 1 & 2-\mu & -1\\ 1 & -1 & 2-\mu\end{pmatrix}\Rightarrow\left(3-\mu\right)\left(\mu^2-4\mu+3\right)=0.$$

Собственные значения $\mu_1=1,\ \mu_{2,3}=3.$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_1=1$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases}2x^1+0x^2+0x^3=0,\\ x^1+x^2-x^3=0,\\ x^1-x^2+x^3=0.\end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$\left|a_1\right\rangle=\begin{pmatrix}a_1^1\\ a_1^2\\ a_1^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_{2,3}=3$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 0x^1 + 0^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; |x_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1 \right\}; \; X_2 = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1 \right\}. \otimes$$

Пример 2.1.4. Линейный оператор $\hat{T} : E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Составим характеристический многочлен оператора $\hat{T}$:

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9,\ \mu_2 = 9,\ \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы оператора $\hat{T}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$.

1) Для собственного значения $\mu_1 = -9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L\left\{\vec{a}_1\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения $\mu_2 = 9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L\left\{\vec{a}_2\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения $\mu_3 = 18$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая $x^3 = a$, где a – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{\vec{a}_3\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{x}_1\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}\vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{x}_2\right\|} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{x}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}\vec{a}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A:\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}\to\left\{\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,\ \vec{h}_3\right\}$$

имеет вид:

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix};\ \det A=-1\neq 0;\ A^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}adgA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix};\left(A^{-1}\right)^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе $\left\{\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,\ \vec{h}_3\right\}$:

$$T_a=\left(A^{-1}\right)^T T_e A^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}.\otimes$$

Самосопряжённые и ортогональные операторы. Инвариантные подпространства

Пример 2.1.5. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}:E^3\to E^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix}t_1^1 & t_2^1 & t_3^1\\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2\\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\hat{T}^*$ в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2,\ A_2^1 = 0,\ A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2,\ A_2^2 = -1,\ A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0,\ A_2^3 = -1,\ A_3^3 = 1;$$

$$adgA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\hat{T}^*$ в новом базисе:

$$T_g^* = \left(A^{-1}\right)^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.1.6. Ранее показано, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1\right),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ и матрицу сопряжённого оператора $\hat{D}^*$.

2) Выяснить, является ли оператор $\hat{D}$ симметрическим.

Р е ш е н и е. Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\hat{D}\vec{e}_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos x - \sin x\right) =$$

$$= 0 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2;$$

$$\hat{D}\vec{e}_2 = \frac{d}{dx}(\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x = \sqrt{3}\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 .$$

Следовательно, матрица оператора $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора $\hat{D}^*$ равна транспонированной матрице оператора $\hat{D}$, то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ для матрицы оператора $\hat{D}$ имеем $d_2^1 \neq d_1^2$, оператор не является симметрическим. $\otimes$

Пример 2.1.7. В евклидовом пространстве E^3 линейный оператор $\hat{T}$ переводит систему векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ в систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$. Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По условию задачи имеем

$$\hat{T}\vec{a}_1 = \vec{g}_1, \hat{T}\vec{a}_2 = \vec{g}_2, \hat{T}\vec{a}_3 = \vec{g}_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_2^3 + t_3^3 = 1; \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3; \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1^1 + t_2^1 = -5, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{matrix}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $(\forall i \neq j = 1, 2, 3)\ t_i^j = t_j^i$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ является самосопряжённым. $\otimes$

Пример 2.1.8. Матрица линейного оператора $\hat{T}: E^3 \to E^3$ в базисе векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ имеет вид:

$$T'=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор $\hat{T}$ ортогональным, если в ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Р е ш е н и е. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n\right)\left(\hat{T}\vec{x}, \hat{T}\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$ в произвольном базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \; \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующий результат:

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j = 2x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^1 y^3 +$$

$$+ x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^2 y^3 + x^3 y^1 + x^3 y^2 + 2x^3 y^3.$$

Находим координаты образов векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при действии оператора $\hat{T}$:

$$\hat{T}\vec{x} = \vec{u} \Rightarrow T\left|x\right\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^1 + x^2 \\ -x^1 \\ \frac{2}{3}x^1 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$\hat{T}\vec{y}=\vec{v}\Rightarrow T|y\rangle=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&0\\-1&0&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}y^1+y^2\\-y^1\\\frac{2}{3}y^1+y^3\end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и метрических коэффициентов g_{ij} в формулу для скалярного произведения

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}u^iv^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения прообразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\left(\vec{x},\vec{y}\right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ к новому базису $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$ и обратная к ней матрица имеют, соответственно, вид:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T'=\left(A^{-1}\right)^TTA^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ получаем:

$$T = A^T T' \left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу T на транспонированную матрицу T^T, получим

$$TT^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство $T^T = T^{-1}$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ и, соответственно, его матрица являются ортогональными. $\otimes$

Пример 2.1.9. Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если $X_{inv}^{(1)}$, $X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, то $X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}$ и $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ также являются инвариантными подпространствами оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. Пусть $X_{inv}^{(1)}$, $X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$. Предположим, что вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}$. Но тогда вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$ и $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, следовательно, и его образ

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$

Теперь очевидно, что образ вектора $\vec{x}$ принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь

$$\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}.$$

Тогда, по определению суммы подпространств $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 \in X_{inv}^{(1)}$, $\vec{x}_2 \in X_{inv}^{(2)}$, откуда в силу того, что снова $\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, получаем

$$\hat{T}\vec{x} = \hat{T}\vec{x}_1 + \hat{T}\vec{x}_2 \in X_{ivn}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \otimes$$

Пример 2.1.10. Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если оператор $\hat{T}$ биективный, то его инвариантное подпространство X_{inv} является инвариантным подпространством и для обратного оператора $\hat{T}^{-1}$.

Р е ш е н и е. Известно, что линейный оператор $\hat{T} : X \to X$ взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\} \subset X_{inv}^m$$

– базис в X_{inv}^m, тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1\hat{T}\vec{a}_1 + \alpha_2\hat{T}\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\hat{T}\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\left(\alpha_1 \vec{a}_1+\alpha_2 \vec{a}_2+\ldots+\alpha_m \vec{a}_m\right)=\vec{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1+\alpha_2 \vec{a}_2+\ldots+\alpha_m \vec{a}_m=\vec{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь $\left(\forall \vec{x} \in X_{inv}^m\right)$. Разложим вектор $\vec{x}$ по базису из образов векторов исходного базиса подпространства X_{inv}^m, то есть представим вектор $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x}=x^1 \hat{T} \vec{a}_1+x^2 \hat{T} \vec{a}_2+\ldots+x^m \hat{T} \vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя на обе части оператором $\hat{T}^{-1}$, получаем

$$\hat{T}^{-1} \vec{x}=x^1 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_1+x^2 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_2+\ldots+x^m \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_m=$$

$$=x^1 \vec{a}_1+x^2 \vec{a}_2+\ldots+x^m \vec{a}_m,$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1+x^2 \vec{a}_2+\ldots+x^m \vec{a}_m \in X_{inv}^m,$$

так как он разложен по базису X_{inv}.

Итак, получили, что если $\vec{x} \in X_{inv}^m$, то $\hat{T}^{-1} \vec{x} \in X_{inv}^m$. $\otimes$

Напомним определение операторного многочлена: пусть $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$ и

$$F_m(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_m x^m \in C[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_m\hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора $\hat{T}$ или ***операторным многочленом***.

Пример 2.1.11. Показать, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}: X^n \to X^n$ является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_p\hat{T}^p.$$

Р е ш е н и е. Пусть операторы $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$ имеют одно и тоже инвариантное подпространство $Y^m \subset X^n$. Тогда

$$\left(\forall \vec{x} \in Y^m\right) \vec{y}_1 = \hat{A}\vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B}\vec{x} \in Y^m.$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства Y^m снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x} + \beta \cdot \hat{B}\vec{x} = \left(\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}\right)\vec{x} \in Y^m.$$

То есть подпространство $Y^m \subset X^n$, инвариантное относительно операторов $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$, инвариантно и относительно оператора $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$. Далее, из того, что подпространство $Y^m \subset X^n$ является инвариантным относительно оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$, следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора $\hat{A}^k \ (k = 0, 1, \ldots, p)$.

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}$ является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_p\hat{T}^p. \otimes$$

Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства

Наклонная, перпендикуляр, проекция, оператор проектирования

Пример 2.2.1. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3$, если имеют место разложения

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,\ \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14,\ \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33,\ \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47,\ \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111,\ \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствие с критерием Грама система векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\}$ является линейно зависимой. $\otimes$

Пример 2.2.2. Радиус-вектор $\vec{x}$ в пространстве R^3 имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость X^1OX^2 как L^2.

Представить вектор $\vec{x}$ в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где $\vec{g}_L \in L^2$, $\vec{h}^{\perp} \in L^{2^{\perp}}$.

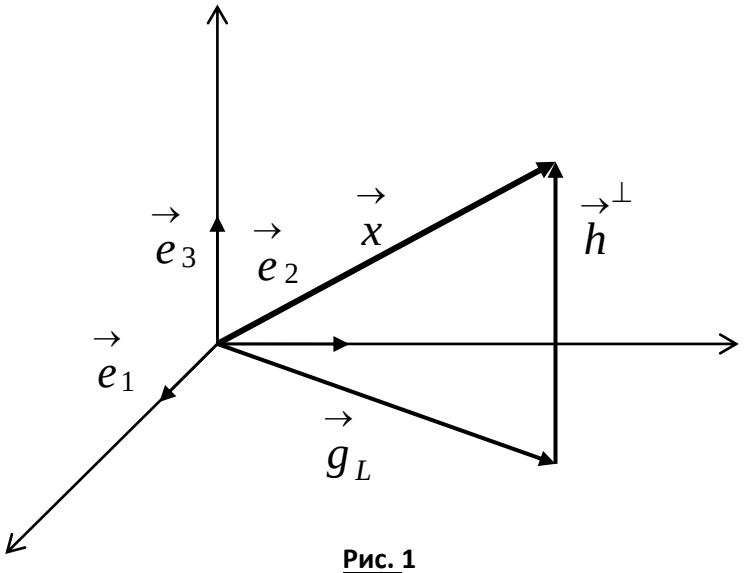


Рис. 1

Р е ш е н и е. Разложим вектор $\vec{g}_L$ по базису подпространства L^2:

$$\vec{g}_L = g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2^{\perp}}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства L^2. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству L^2, состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{e}_1 \right) = 0,$$

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{e}_2 \right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases} \left(\vec{x}-\vec{g}_L,\ \vec{e}_1\right)=0, \\ \left(\vec{x}-\vec{g}_L,\ \vec{e}_2\right)=0, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} \left(g^1\vec{e}_1+g^2\vec{e}_2,\ \vec{e}_1\right)=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{e}_1\right), \\ \left(g^1\vec{e}_1+g^2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2\right)=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{e}_2\right). \end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases} g^1=3, \\ g^2=4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^{\perp}=\vec{x}-\vec{g}_L=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3\right)-\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2\right)=5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x}=\vec{g}_L+\vec{h}^{\perp}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.2.3. В пространстве R^4 опустить перпендикуляр из точки $P(-1;5;3;2)$ на гиперплоскость H^3, проходящую через заданные точки

$$A_1(1;4;2;0),\ A_2(3;7;3;2),\ A_3(2;6;3;-1),\ A_4(1;4;5;2).$$

Р е ш е н и е. В пространстве R^4 все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right\}$. Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1-14x^2+2x^3-3x^4+29=0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\vec{a}_1=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3+2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2=\ \vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3-\ \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \quad 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

Проверим, что точка $P(-1;5;3;2)$ не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23\cdot(-1) - 14\cdot 5 + 2\cdot 3 - 3\cdot 2 + 29 = -64 \neq 0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке $P(-1;5;3;2)$ её радиус-вектор

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где вектор $\vec{g}_L \in H^3$, а вектор $\vec{h}^{\perp} \in H^{3\perp}$.

Вектор

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L \in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства H^3. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству H^3 (плоскость проходит через начало системы координат), состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_1\right) = 0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_2\right) = 0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_3\right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_1\right) = 0,$$

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_2\right) = 0,$$

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_3\right) = 0.$$

Представляя наклонную $\vec{g}_L$ разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_1\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_1\right),$$
$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_2\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_2\right),$$
$$\left(g^1\vec{a}_1+g^2\vec{a}_2+g^3\vec{a}_3,\vec{a}_3\right)=\left(\vec{x},\vec{a}_3\right),$$

или в виде

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_1\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_1\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_1\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_1\right),$$
$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_2\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_2\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_2\right),$$
$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_3\right)g^1+\left(\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)g^2+\left(\vec{a}_3,\vec{a}_3\right)g^3=\left(\vec{x},\vec{a}_3\right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T=\begin{pmatrix}\left(\vec{a}_1,\vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_2,\vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_3,\vec{a}_1\right)\\ \left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_2,\vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_3,\vec{a}_2\right)\\ \left(\vec{a}_1,\vec{a}_3\right) & \left(\vec{a}_2,\vec{a}_3\right) & \left(\vec{a}_3,\vec{a}_3\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 7 & 7\\ 7 & 7 & 1\\ 7 & 1 & 13\end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases}18g^1+7g^2+7g^3=20,\\ 7g^1+7g^2+g^3=10,\\ 7g^1+g^2+13g^3=13.\end{cases}$$

Решение Слау ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det\begin{pmatrix}18 & 7 & 7\\ 7 & 7 & 1\\ 7 & 1 & 13\end{pmatrix}=738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции $\vec{g}_L$ на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left(-\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3\right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по векторам ортонормированного базиса $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$, то получим вектор $\vec{h}$ – перпендикуляр, опущенный из конца наклонной $\vec{g}_L$ на плоскость H^3. $\otimes$

Пример 2.2.4. Записать матрицу оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1 o x^2}$ ортогонального проектирования на координатную плоскость X^1OX^2 в пространстве R^3.

Р е ш е н и е. Этот оператор любому вектору пространства R^3 ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость X^1OX^2 параллельно координатной оси OX^3. Согласно изложенной выше теории, оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1ox^2} : R^2_{x^1ox^2} \to R^2_{x^1ox^2}$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{ox^3} : R^1_{ox^3} \to R^1_{ox^3}.$$

На главной диагонали его матрицы расположены 2×2 клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 1×1 клетка вида (0). Остальные элементы равны нулю:

$$P^{\perp}_{x^1ox^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора $\vec{x}$ из предыдущей задачи на координатную плоскость X^1OX^2. Запишем для этого образ вектора

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

при действии оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ в координатной форме

$$P^{\perp}_{x^1ox^2}\left|x\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи. $\otimes$

Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

Квадратичные формы и поверхности второго порядка

Пример 2.3.1. Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве R^3 вид

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+4x^1x^3-2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Р е ш е н и е. Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}\subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=$$

$$=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+\left(2x^1x^2+2x^2x^1\right)+\left(2x^1x^3+2x^3x^1\right)-\left(x^2x^3+x^3x^2\right)=$$

$$=2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^1+3\left(x^2\right)^2-x^2x^3+2x^3x^1-x^3x^2+3\left(x^3\right)^2.$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}-\mu & 2 & 2\\ 2 & 3-\mu & -1\\ 2 & -1 & 3-\mu\end{vmatrix}=0\Rightarrow\ \mu^3-6\mu^2+32=0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1=-2,\ \mu_{2,3}=4.$

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай $\mu_1=-2$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases}2x^1+2x^2+2x^3=0,\\ 2x^1+5x^2-\ x^3=0,\\ 2x^1-\ x^2+5x^3=0.\end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай $\mu_{2,3} = 4$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ ортогональны вектору $\vec{x}_1$, но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_1,\ \vec{g}_2 = \vec{x}_2,\ \vec{g}_3 = \vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_2.$$

Так как должно быть $\left(\vec{g}_2, \vec{g}_3\right) = 0$, то

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_2\right) = 0,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) + \alpha\left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\alpha = 0,\ \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{g}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\left\|\vec{g}_1\right\| = \sqrt{6},\ \left\|\vec{g}_2\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \left\|\vec{g}_3\right\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \Rightarrow \left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$ как $\left\{y^1, y^2, y^3\right\}$, запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = -2\left(y^1\right)^2 + 4\left(y^2\right)^2 + 4\left(y^3\right)^2. \otimes$$

Пример 2.3.2. Найти значения параметра λ, при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4\left(x^1\right)^2 + 2x^1x^2 + \left(x^2\right)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda\left(x^3\right)^2.$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, $\lambda > \frac{52}{3}$. $\otimes$

Пример 2.3.3. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение перепишем в виде

$$\left(x_1 + 1\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_{1'} = x_1 + 1,\ x_{2'} = x_2 - 1.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку $O'(-1;\,2)$, в которой уравнение принимает вида

$$x_{1'}^2 + x_{2'}^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке $O'(-1;\,2)$ радиуса $R = \sqrt{5}$. $\otimes$

Пример 2.3.4. Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}\,.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке $O'(-2;1)$ радиуса $R = \sqrt{15}$, лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением $x_2 = 1$. $\otimes$

Пример 2.3.5. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение описывает точку $M(2;1)$. $\otimes$

Пример 2.3.6. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2 + 25x_2^2 + 200x_1 - 100x_2 - 200 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1 + 1)^2 + 25(x_2 - 2)^2 = 400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(-1;\,2)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 4$. $\otimes$

Пример 2.3.7. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1 = -2\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}\,.$$

Р е ш е н и е. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2 + 4(x_2 + 3)^2 = 16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{(x_2 + 3)^2}{4} = 1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке $O'(0; -3)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 2$, лежащую слева относительно оси OX_2. $\otimes$

Пример 2.3.8. Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2$ уравнением

$$11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 - 20x^1 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 =$$

$$= 11(x^1)^2 - 10x^1x^2 - 10x^2x^1 - 4(x^2)^2$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ ставим в соответствие симметрический оператор $\hat{T}$ с матрицей $T = \Phi$ и записываем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 - \mu & -10 \\ -10 & -4 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\mu^2 - 7 \cdot \mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$. Находим собственные векторы оператора $\hat{T}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$, для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_1\right\|}\vec{x}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_2\right\|}\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы A равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^T = A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы A^{-1}. Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1\left(y^1\right)^2+\mu_2\left(y^2\right)^2=-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1=-\frac{20}{\sqrt{5}}y^1+\frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}y^1-\frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2-\frac{36}{\sqrt{5}}y^1+\frac{32}{\sqrt{5}}y^2+1=0.$$

Выделяя полный квадрат по y^1, y^2 и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+16\left(y^2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5=0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1=y^1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ z^2=y^2+\frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{\left(z^1\right)^2}{5/9}-\frac{\left(z^2\right)^2}{5/16}=1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол φ, что $\cos\varphi=1/\sqrt{5}$ и $\sin\varphi=2/\sqrt{5}$. Далее, в соответствии с формулами

$$z^1=y^1+\frac{2}{\sqrt{5}},\ z^2=y^2+\frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $\otimes$

Пример 2.3.9. Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 - \\ -14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора $\mu_1 = -2,\ \mu_{2,3} = 4$. Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ($A^{-1} = A^T$).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'}.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2 - 40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'} + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4\left(x_{1'} - 5\sqrt{6}\right)^2 - 2\left(x_{2'} - 3\sqrt{5}\right)^2 + 4x_{3'}^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения $y_1 = x_{1'} - 5\sqrt{6}$, $y_2 = x_{2'} - 3\sqrt{5}$, $y_3 = x_{3'}$, получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

Собственные значения и собственные векторы

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \to R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ матрицу:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства: $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

1) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix}$;

2) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix}$;

3) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}$;

4) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$;

6) $A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}$.

3. Линейный оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ задан матрицей:

1) $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $T=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

3) $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $T=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Инвариантные подпространства

1. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$. Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{\vec{e}_1\right\}, L\left\{\vec{e}_2\right\}, L\left\{\vec{e}_3\right\}, L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}, L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_3\right\}, L\left\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора $\hat{A}$.

2. Пусть подпространства $L_1 \subset X^n$ и $L_2 \subset X^n$ инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n.$$

Показать, что подпространства $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$ также инвариантны относительно оператора $\hat{A}$.

3. Показать, что если $L \subset X^n$ – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n,$$

то L является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}\left(\hat{A}\right) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \ldots + a_m \hat{A}^m.$$

4. Пусть $\hat{A}: X^n \to X^n$ – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор $\hat{A}$ биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

5. Пусть $\hat{T}: R^2 \to R^2$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\hat{T}: R^3 \to R^3$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

1) $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Пусть $\hat{T}: R^4 \to R^4$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Показать, что линейная оболочка

$$L\left\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\right\}$$

является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}$.

Геометрия пространства E^n

Задание 1. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости $H^m \subset R^n$, проходящей через заданные точки

$A_1(0; 6; 3; 5; 1)$, $A_2(-3; 2; 4; 1; 0)$,

$A_3(5; 1; 4; 3; 2)$, $A_4(-1; 3; -4; 2; -1)$.

Задание 2. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3$:

1) $\vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$,

$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$\$

2) $\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$,

$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$,

$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$.

Задание 3. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\right\} \subset R^4$:

$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$,

$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$,

$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$,

$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$.

Задание 4. Пусть $L^3\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ – линейное многообразие в E^4, а $\vec{x}$ – наклонная к многообразию L^3. Найти наименьший угол между вектором $\vec{x}$ и многообразием L^3, если:

$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$,

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

Задание 5. В ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ пространства E^4 задана система векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$.

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе новый ортонормированный базис пространства R^4.

Задание 6. В пространстве R^5 найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

1) $\vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$

2) $\vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$

Задание 7. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

Задание 8. В пространстве R^4 даны две плоскости H_1 и H_2 с направляющими векторами

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\} \subset H_1$$

и

$$\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

1) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$
$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$

2) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$
$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$

Задание 9. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

1) $x_2 = -1 - \frac{3}{5}\sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2}$;

2) $x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1;$

3) $x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}$.

Задание 10. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

1) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0;$

2) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0.$

Задание 11. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

1) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0;$

2) $\alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0,$

где $\alpha = 5$ или $\alpha = 0.$

ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое занятие 1. Понятие предела

Определение предела последовательности

Пример 3.1.1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1.$

Р е ш е н и е. Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ имеем:

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|\frac{n+1-n}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперёд заданного $\varepsilon>0$ мы нашли номер $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, такой, что $\left(\forall\, n\ge n_0\right)\ \left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$, следовательно, 1 является пределом данной последовательности. $\otimes$

Пример 3.3.1.2. Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}\Rightarrow x_{n+1}>x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом x_1. При любом n, очевидно, $\dfrac{1}{2^n+1}<\dfrac{1}{2^n}$. Последовательность ограничена сверху:

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=$$

$$=\frac{1/2-1/2^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. ⊗

Пример 3.3.1.3. Доказать, что последовательность (x_n) есть бесконечно малая последовательность, если

1) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; 4) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0				

Р е ш е н и е. 1) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\colon (\forall n \ge n_0)\ \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда

$$n_0 = \left[\frac{1}{1/10}\right] + 1 = 11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε. Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0	11	1001	10001	…

2) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in N)\colon (\forall n \ge n_0)\ \left|\frac{2n}{n^3+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$n > \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] \Rightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{1/10}}\right] + 1 \approx [4{,}472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε. Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0	5	46	142	…

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения. $\otimes$

Вычисление предела последовательности

Пример 3.3.1.4. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1} = 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 2. \otimes$$

Пример 3.3.1.5. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n} = \left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 3 = 6. \otimes$$

Пример 3.3.1.6. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 3.3.1.7. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 3.3.1.8 (неперово число e). Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Р е ш е н и е. Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности: $e = 2{,}71828\ldots$

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что

$$(\forall b > -1) \wedge (\forall n \in N)\ (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по n:

1) при $n=1$ имеем $1+b \geq 1+b$, что всегда выполняется;

2) предположим, что $(\forall n = k)\ (1+b)^k \geq 1+kb$;

3) покажем, что $(\forall b > -1) \wedge (n = k+1)\ (1+b)^{k+1} \geq 1+(k+1)b$.

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k(1+b) \geq (1+b)(1+kb) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+(k+1)b,$$

так как $kb^2 > 0$.

Так как неравенство справедливо при $n=1$, оно справедливо и при любом $n \in N$. Итак, $(\forall b > -1)$ и $(\forall n \in N)$

$$(1+b)^n \geq 1+nb. \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+1/n-1\right)^n}{\left(1+1/n\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}\cdot(n-1)}{(n-1)^n\cdot(n+1)^{n+1}\cdot(n-1)} =$$

$$= \frac{\left(n^2\right)^{n+1}\cdot(n-1)}{\left(n^2-1\right)^{n+1}\cdot n} = \frac{\left(n^2-1+1\right)^{n+1}}{\left(n^2-1\right)^{n+1}}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} \geq \{\textit{используем}(1)\} \geq$$

$$\geq \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = 1.$$

Таким образом,

$$(\forall n \in N)\ \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно, $y_n \leq y_{n-1}$, то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + 1/n\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + 1/n\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+1/n\right)^{n+1}}{\left(1+1/n\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \otimes$$

Пример 3.3.1.9. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Р е ш е н и е. Неравенство справедливо при $n=1,\ 2$, что легко проверяется. Например, для $n=2$ имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2\geq 1+x_1+x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при $n=k$, то есть

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при $n=k+1$. Имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geq (1+x_1+x_2+\ldots+x_k)(1+x_{k+1})=$$
$$=1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+(1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_k)x_{k+1}\geq$$
$$\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}.$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом $k=n$. $\otimes$

Пример 3.3.1.10. Показать, что если $x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ (n>1),$$

причём знак равенства имеет место только при $x = 0$.

Р е ш е н и е. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство. $\otimes$

Пример 3.3.1.11. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n\left[\ln(n+3) - \ln n\right].$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n\left[\ln(n+3) - \ln n\right] = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3} = 3\cdot\ln e = 3. \otimes$$

Пример 3.3.1.12. Доказать, что последовательность $\left(a^n\right)$ является:

1) бесконечно большой последовательностью при $|a| > 1$;

2) бесконечно малой последовательностью при $|a| < 1$.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $|a| > 1$. Покажем, что последовательность $\left(a^n\right)$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть $(\forall A > 0)\ (\exists n_0 \in N)$: $(\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \qquad (1)$$

Зададимся произвольным числом $A > 0$. Для нахождения номера n_0 решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \left\lfloor \log_{|a|} A \right\rfloor.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \left\lfloor \log_{|a|} A \right\rfloor + 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $|a| < 1$. Если $a = 0$, то $(\forall n \in N)\ \ a^n = 0$ и, следовательно, последовательность $\left(a^n\right)$ бесконечно малая. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}. \qquad (2)$$

Так в этом случае $\frac{1}{|a|} > 1$, то последовательность $\left(\frac{1}{a^n} \right)$ является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при $|a| < 1$ последовательность $\left(a^n \right)$ – бесконечно малая последовательность. $\otimes$

Пример 3.3.1.13. Показать, что если $\left(x_n \right)$ – сходящаяся последовательность, а $\left(y_n \right)$ – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$\left(z_n \right) = \left(x_n + y_n \right)$$

– бесконечно большая последовательность.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$\left(\forall A > 0 \right) \left(\exists n_0 \in N \right) : \left(\forall n \ge n_0 \right) |x_n + y_n| > A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность $\left(x_n \right)$ ограничена, то есть

$$\left(\exists M > 0 \right) : \left(\forall n \in N \right) |x_n| < M. \qquad (1)$$

Пусть задано произвольное $A > 0$. Так как последовательность $\left(y_n \right)$ бесконечно большая, то для числа $A + M$

$$\left(\exists n_0 \in N \right) : \left(\forall n \ge n_0 \right) |y_n| > A + M. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем: $|x_n + y_n| \ge |y_n| - |x_n| > A + M - M = A.$

Что и требовалось доказать. $\otimes$

Пример 3.3.1.14. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Так как $\left(\forall x \in R^1 \right) |\cos x| < 1$, то последовательность $\left(\cos n \right)$ ограничена. Покажем, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$ – бесконечно малая последовательность. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cos n=0.\otimes$$

Непрерывность и предел функции

Пример 3.3.1.15. Вычислить предел функции в точке: $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+x+5\right)$.

Р е ш е н и е. Выбираем произвольную последовательность значений аргумента $\left(x_n\right)$, сходящуюся к 1, то есть такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Используем определение по Гейне:

$$\lim_{x\to1}\left(3x^2+x+5\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3x_n^2+x_n+5\right)=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}5=3+1+5=9.\otimes$$

Пример 3.3.1.16. Показать, что $\lim\limits_{x\to6}\left(2x-5\right)=7$.

Р е ш е н и е. Выбираем произвольное $\varepsilon>0$. Найдём для него такое $\delta>0$, что из неравенства

$$\left|x-6\right|<\delta\ \Rightarrow\ 6-\delta<x<6+\delta. \qquad (1)$$

будет следовать неравенство

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|2x-12\right|<\varepsilon\Rightarrow2\left|x-6\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|x-6\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow6-\frac{\varepsilon}{2}<x<6+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что $\lim\limits_{x\to6}\left(2x-5\right)=7.\otimes$

Пример 3.3.1.17. Показать, что

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.$$

Р е ш е н и е. По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0):\ \left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon.$$

Решаем неравенство

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow$$

$$|15x-5|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15}<x<\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x\in\left(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15},\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}\right),$$

так сразу

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon.$$

Из этого следует, что $\delta=\frac{\varepsilon}{15}$. Итак,

$$(\forall\varepsilon>0)\ \left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}\Rightarrow\ \left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon,$$

а значит $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.\ \otimes$

Пример 3.3.1.18. Найти предел функции в точке: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}$.

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то есть получаем так называемую ***неопределённость вида*** $\dfrac{0}{0}$. Для «раскрытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно приравняв их к нулю $\left(x^2-3x+2=0,\ 3x^2+x-4=0\right)$ и решив соответствующие квадратные уравнения. В результате получаем:

$$\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}.$$

Так как $x\to 1$, но $x\neq 1$, то на множитель $(x-1)$, дающий в пределе $x\to 1$ нуль, можно сократить. В результате получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{3\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x+\dfrac{4}{3}\right)}=-\frac{1}{7}.\ \otimes$$

Пример 3.3.1.19. Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция $f(x)=5x^2+5$ непрерывна в точке $x_0=8$.

Р е ш е н и е. Значение функции в точке $x_0=8$ равно $f(8)=325$. По определению функция будет в точке $x_0=8$ непрерывной, если

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0):\ |x-8|<\delta\ \Rightarrow\ |5x^2+5-325|<\varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси M такой, что как только $x\in M$, так сразу $|5x^2+5-325|<\varepsilon$. Имеем:

$$|5x^2+5-325|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |5x^2-320|<\varepsilon\ \Rightarrow\ 64-\frac{\varepsilon}{5}<x^2<64+\frac{\varepsilon}{5}\ \Rightarrow$$

$$\sqrt{64-\frac{\varepsilon}{5}}<x<\sqrt{64+\frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x\in\left(\sqrt{64-\frac{\varepsilon}{5}},\sqrt{64+\frac{\varepsilon}{5}}\right)\ \Rightarrow\ \left|\left(5x^2+5\right)-325\right|<\varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке $x_0=8$ непрерывна. $\otimes$

Пример 3.3.1.20. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty,\,0],\ \left(0,\,\frac{\pi}{2}\right),\ \left[\frac{\pi}{2},\,+\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках 0 и $\dfrac{\pi}{2}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(2-x)=2,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\cos x=1,$$

то $x=0$ является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)-\lim_{x\to 0+0} f(x)=2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\cos x=0,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} 0=0.$$

Так как $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, то

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси R, кроме точки $x=0$, которая является точкой разрыва первого рода. $\otimes$

Пример 3.3.1.21. Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2-9}, & x\ne 3,\\ 1, & x=3.\end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

Р е ш е н и е. Вычислим односторонние пределы при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{3x^2-9}=\frac{1}{18};$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{3x^2-9} = \frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = \frac{1}{18} \neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва. $\otimes$

Пример 3.3.1.22. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot \sin x}{1-\cos x}.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x\to 0}(2x\cdot \sin x) = 0,\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при $x \to 0$ являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 0$ функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то есть, $\sin x \approx x$ при $x \to 0$.

Далее, вспоминая, что $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ и заменяя $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$, получим, что

$$1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \approx 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot \sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot x}{x^2/2} = 4. \otimes$$

Практическое занятие 2. Дифференцируемость функции одного переменного

Производная функции одного переменного

Пример 3. 2.1. Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f(x) = 4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{17}}.$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную производную $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$:

$$f'(x)=\left(4x^5-25x^{1/5}-2\sqrt{x^3}+7\sqrt[4]{x^{16}}\right)'=$$

$$=\left(4x^5-25x^{1/5}-2x^{3/2}+7x^4\right)'=20x^4-5x^{-4/5}-3x^{1/2}+\frac{119}{4}x^{\frac{13}{4}}=$$

$$=20x^4-\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}-3\sqrt{x}+\frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке x) $df(x)=f'(x)dx$, то имеем:

$$df(x)=\left(20x^4+9x^2-\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}-3\sqrt{x}+\frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}\right)dx.\otimes$$

Пример 3. 2.2. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+5}.$$

Р е ш е н и е. В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x)=\left(\frac{g_1}{g_2}\right)'(x)=\frac{g_1'(x)\cdot g_2(x)-g_1(x)\cdot g_2'(x)}{\left[g_2(x)\right]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2,\ g'(x)=\left(x^2+2x+5\right)'=2x+2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$f'(x)=\left[\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right]'=\frac{g_1'(x)\cdot g_2(x)-g_1(x)\cdot g_2'(x)}{\left[g_2(x)\right]^2}=\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+5}\right]'=$$

$$= \frac{(2x-2)\left(x^2+2x+5\right)-\left(x^2-2x+3\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+4x-16}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = 4\frac{x^2+x-4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}. \otimes$$

Пример 3. 2.3. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x-a) \cdot \left(x^2+ax+a^2\right) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить $f'(5)$ при $a = 3,\ b = 10.$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f'(x) = \left[a^2 \cdot (x-a) \cdot \left(x^2+ax+a^2\right) + x^2 - 2bx + b^2\right]' =$$

$$= a^2\left(x^3-a^3\right)' + \left(x^2-2bx+b^2\right)' = 3a^2x^2 + 2(x-b).$$

Далее получаем при $a = 3,\ b = 10$:

$$f'(5) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot (5-10) = 675 - 10 = 665. \otimes$$

Пример 3. 2.4. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{x^2 + 2\cos x}{\sin x}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}\right] = \frac{(2x-2\sin x)\cdot \sin x - \left(x^2+2\cos x\right)\cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2x\sin x - x^2\cos x - 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = \frac{2x\sin x - x^2\cos x - 2}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2x}{\sin x} - x^2\frac{ctgx}{\sin x} - \frac{2}{\sin^2 x}. \otimes$$

Пример 3. 2.5. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(2x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'(2x-1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x(2x-1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2x^2+x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.\otimes$$

Пример 3. 2.6. Найти производную функцию для функции, действие которой определённо формулой

$$f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$f'(x)=\left[\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)'=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot 2\cdot(x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}=$$

$$=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\otimes$$

Пример 3. 2.7. Найти производную функцию для функции, определённой формулой $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, и вычислить производные $f'(e),\ f'\left(\dfrac{1}{e}\right),\ f'\left(e^2\right)$.

Р е ш е н и е. Сначала находим производную функцию:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e)=\frac{1-\ln e}{e^2}=0;\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)}{\left(\dfrac{1}{e}\right)^2}=\frac{1+1}{\dfrac{1}{e^2}}=2e^2;$$

$$f'\left(e^2\right)=\frac{1-2\ln e}{\left(e^2\right)^2}=\frac{1-2}{e^4}=-e^{-4}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.8. Найти производную функцию $f''(x)$ для функции f, если $f(x)=e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot(-1)\cdot 2x=-2x\cdot e^{-x^2},$$

$$f''(x)=\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)'=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}=$$

$$=2\cdot\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.9[*)]**.** Найти производную функцию $f'''(x)$ для функции f, если $f(x)=x^2\cdot\sin x$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sin x\right)'=2x\sin x+x^2\cos x;$$

$$f''(x)=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x;$$

$$f'''(x)=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x.\ \otimes$$

Логарифмическая производная

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде $(\forall x \in M)$

$$f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где $M \subset R^1$ – общее множество определения для функций $g_k^{\alpha_k}(x)$, а числа α_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – показатели степени. Предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M)\ f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции $f(x)$, очевидно, затруднительно даже для малых $(k = 1, 2, \ldots)$. Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right] =$$
$$= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \ldots + \alpha_m \ln g_m(x).$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow\ f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$f'(x) = f(x) \cdot u'(x) =$$
$$= g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x) \left[\alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}\right].$$

Выражение

$$u' = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется ***логарифмической производной функции*** $f(x)$.

Пример 3. 2.10. Найти производную функцию для функции

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$u = \ln f = \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{-\left(x^2-2\right)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$f'(x) = f(x)\cdot u'(x) =$$

$$= \frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot\frac{-\left(x^2-2\right)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{-\left(x^2-2\right)}{(x+1)^2\cdot(x+2)^2}. \otimes$$

Пример 3. 2.11[*)]**.** Найти производную функцию для функции

$$f(x) = x^2\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя имеем:

$$u(x) = \ln f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(2x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)},$$

$$f'(x) = x^2\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)} = \frac{x\cdot\left(8x^2+7x-4\right)}{2\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}. \otimes$$

Производные функции, заданной неявно

Если функция, определённая формулой $y = f(x)$, задана неявно, то есть посредством уравнения $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по x, помня, что $y = f(x)$, и разрешить уравнение относительно y'.

Пример 3. 2.12. Найти первую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Р е ш е н и е. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что $y = f(x)$, получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем $y' = \dfrac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$. $\otimes$

Пример 3. 2.13. Найти вторую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy' y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя y' полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1-y^2} = \frac{2y}{(1-y^2)^3}. \otimes$$

Производные функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt,\ dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{dx}\right)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 3. 2.14. Найти первую и вторую производную функцию для функции y, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t^2}\right)}{2t} = -\frac{2}{3t^2}.$$

Так как из второго уравнения для x имеем $t = \sqrt[3]{x-5}$, отсюда получаем:

$$y_x'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}}. \otimes$$

Пример 3. 2.15[*)]**.** Найти первую производную функцию для функции y, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{3\cos t}{3\sin t} = -ctgt.$ $\otimes$

Понятие дифференциала функции. Приближённые вычисления

Пример 3. 2.16. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = \frac{3\cdot\cos x}{2x+1}.$$

Р е ш е н и е. Находим дифференциал функции y, используя определение:

$$dy = y'(x)dx = -3\frac{2x\sin x + \sin x + 2\cos x}{(2x+1)^2}dx. \otimes$$

Пример 3. 2.17. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = e^{x^3}.$$

Р е ш е н и е. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy = y'(x)dx = \left(e^{x^3}\right)' = 3x^2e^{x^3}dx. \otimes$$

Пример 3. 2.18. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y = f(x) = \left(2x^2 - 3\right)^5.$$

Р е ш е н и е. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x) = 5\cdot\left(2x^2-3\right)^4\cdot 4x\cdot dx = 20x\left(2x^2-3\right)^4 dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$d^2df(x) = \left|20x\left(2x^2-3\right)^4\right|(dx)^2 = 60\cdot\left(2x^2-3\right)^3\left(6\cdot x^2-1\right)\cdot(dx)^2;$$

$$d^3df(x) = \left|12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(6x^2-1\right)+12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^3\right|\cdot(dx)^3 =$$

$$= 720x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(8x^2-4\right)\cdot(dx)^3 =$$

$$= 2880 \cdot x \cdot \left(2x^2 - 3\right)^2 \cdot \left(2x^2 - 1\right) \cdot (dx)^3. \otimes$$

Пример 3. 2.19. Вычислить приближённо $\sin 32^0$.

Р е ш е н и е. Используя приближённую формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

получаем:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + df(x_0).$$

Определяя функцию f формулой $f(x) = \sin x$, видим, что нам нужно вычислить значение $f(x)$ в точке $x = 32^0$ при $x_0 = 30^0$, или в радианах $x = \frac{\pi}{180} \cdot 32,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$. Учитывая, что $\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos x$, имеем:

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0),$$

или

$$\sin 32^0 \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{32}{180} \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0{,}5 + \frac{1{,}73 \cdot 3{,}14}{90} \approx 0{,}5 + 0{,}03 = 0{,}53.$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков $\sin 32^0 = 0{,}5299$.

$\otimes$

Пример 3. 2.20[*)]**.** Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию f, определив её формулой $f(x) = \sqrt{x}$. По приближённой формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x.$$

Полагая здесь $x_0=a^2$, $\Delta x=h$, получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2+h}\approx\sqrt{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2}}\cdot h=a+\frac{h}{2a}.$$

Вычислим $\sqrt{101}$ и $\sqrt{1{,}04}$:

$$\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}\approx 10+\frac{1}{20}=10{,}05;$$

$$\sqrt{1{,}04}=\sqrt{1+0{,}04}\approx 1+\frac{0{,}04}{2}=1{,}02.\ \otimes$$

Пример 3. 2.21[*)]**.** Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)$$

функции, определённой формулой $y=x^2$ при $x_0=2$, $\Delta x=x-x_0=0{,}01$.

Р е ш е н и е. Из приближённой формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

имеем

$$f(x)-f(x_0)\approx\frac{df}{dx}(x_0)\cdot(x-x_0)=df(x_0).$$

Подставляя в формулу $x_0=2$, $\Delta x=x-x_0=0{,}01$, получаем:

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=(2+0{,}01)^2-2^2\approx 2\cdot 2\cdot 0{,}01=0{,}04.\ \otimes$$

Практическое занятие 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

Пример 3.3.1. Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x)=3-x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке $(1,4)$.

Р е ш е н и е. Данная функция на промежутке $(1,4)$ монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке 1, а минимума в точке 4. Следовательно, в промежутке $(1,4)$ не существует точки x_0 локального экстремума, в которой $f'(x_0)=0$. Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет. $\otimes$

Пример 3.3.2. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=3+2x-x^2,$$

на промежутке $[0,4]$ условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (0,4)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. На промежутке $(0,4)$ функция дифференцируема, следовательно $(\exists x_0 \in (0,4))f'(x_0)=0$. Находим эту точку:

$$f'(x)=2-2x \Rightarrow 2-2x_0=0 \Rightarrow x_0=1. \otimes$$

Пример 3.3.3. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=x^2+6x-35,$$

на промежутке $[-5,-1]$ условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5)=f(-1)=-40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$, существует. Найдём её:

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0+6=0 \Rightarrow x_0=-3. \otimes$$

Пример 3.3.4. На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y=x^3-3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(3;18)$.

Р е ш е н и е. Функция определена на промежутке $[-1,3]$, непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке $(-1,3)$. Условия теоремы

Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка $x_0 \in (-1, 3)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 4.$$

Так как $f'(x) = (x^3 - 3x) = 3x^2 - 3$, то имеем $3x^2 - 3 = 4$. Из этого уравнения находим $x_{01} = +\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_{02} = -\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как из этих двух точек $x_{01} \in [-1, 3]$ а $x_{02} \notin [-1, 3]$, то $x_0 = x_{01} = \sqrt{\frac{7}{3}}$. $\otimes$

Пример 3.3.5. В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y = f(x) = x^2 - 8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1; 9)$, $B(5; -15)$.

Р е ш е н и е. На промежутке $[-1, 5]$ функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому имеем:

$$\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-24}{6} = -4 \Rightarrow f'(x_0) \equiv 2x_0 - 8 = -4 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Подставляя это значение x в формулу для функции, получаем

$$y = f(2) = -12.$$

Таким образом, искомой является точка $C(2; -12)$. $\otimes$

Пример 3.3.6. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^3,\ g(x) = x^2$$

на промежутке $[1, 2]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции непрерывны на промежутке $[1, 2]$ и дифференцируемы на промежутке $(a, b) = (1, 2)$, причём $(\forall x \in (a, b))g(x) \neq 0$. Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3x_0^2}{2x_0} = \frac{3}{2}x_0 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{14}{9}. \otimes$$

Пример 3.3.7. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

на промежутке $[1, 4]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x) = 2x - 2,\ g'(x) = 3x^2 - 14x + 20.$$

Кроме этого, производная функции g в точках промежутка $(1, 4)$ не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения $3x^2 - 14x + 20 = 0$ имеем $D = b^2 - 4ac = -44 < 0$ (график функции g не имеет точек пересечения с осью OX). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x_0 - 2}{3x_0^2 - 14x_0 + 20} = \frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_{01} = 4,\ x_{02} = 2$$

Так как из этих двух точек промежутку $(1, 4)$ принадлежит только точка $x_{02} = 2$, то она и является искомой точкой. $\otimes$

Правила Лопиталя

Пример 3.3.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + x^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(e^x + x^{-x}\right)\cdot(1+x)\right) = 2. \otimes$$

Пример 3.3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 4x + 1}{9x^2 - 2x - 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x + 4}{18x - 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.3.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3\cdot e^x\right) = \left[-\infty\cdot 0\right]$. Для раскрытия неопределённости заменим переменную:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^3\cdot e^x\right) = \{x = -t\} = \lim_{t\to\infty}\left(-t^3\cdot e^{-t}\right) = -\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{e^t}=-6\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0.\otimes$$

Пример 3.3.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\left[\infty-\infty\right]$. Для раскрытия неопределённости приводим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right).$$

Получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+1-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.\otimes$$

Формула Тейлора и формула Маклорена

Пример 3.3.12. Разложить многочлен

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$$

по степеням $x-1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+$$

$$+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

где $x_0=1$. Находим значение многочлена и его производных в точке $x_0=1$:

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1,\quad P(1)=0;$$
$$P^{(1)}(x)=5x^4-8x^3+3x^2-2x+2,\quad P^{(1)}(1)=0;$$
$$P^{(2)}(x)=20x^3-24x^2+6x-2,\qquad P^{(2)}(1)=0;$$
$$P^{(3)}(x)=60x^2-48x+6,\qquad P^{(3)}(1)=18;$$
$$P^{(4)}(x)=120x-48,\qquad P^{(4)}(1)=72;$$
$$P^{(5)}(x)=120,\qquad P^{(5)}(1)=120.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x)=3\cdot(x-1)^3+3\cdot(x-1)^4+(x-1)^5.\otimes$$

Пример 3.3.13. Разложить многочлен

$$P(x)=x^4+2x^3-8x^2+4x+4$$

по степеням $x+1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. Вычисляя значение многочлена и его производных в точке $x_0=-1$, получаем:

$$P(x)=x^4+2x^3-8x^2+4x+4,\qquad P(-1)=-9;$$
$$P^{(1)}(x)=4x^3+6x^2-16x+4,\qquad P^{(1)}(-1)=22;$$
$$P^{(2)}(x)=12x^2+12x-16,\qquad P^{(2)}(-1)=-16;$$
$$P^{(3)}(x)=24x+12,\qquad P^{(3)}(-1)=-12;$$
$$P^{(4)}(x)=24,\qquad P^{4}(-1)=24.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x)=-9+\frac{22}{1!}\cdot(x+1)+\frac{-16}{2!}\cdot(x+1)^2+\frac{-12}{3!}\cdot(x+1)^3+$$
$$+\frac{24}{4!}\cdot(x+1)^4=-9+22\cdot(x+1)-8\cdot(x+1)^2-$$
$$-2\cdot(x+1)^3+(x+1)^4.\quad\otimes$$

Пример 3.3.14. Представить функцию $f(x)=e^x$ в виде разложения по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x)= f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f}{dx^k}(0)\frac{x^k}{k!}+\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств: $(\forall n \in N)$

$$f(0)=\frac{df}{dx}(0)=\frac{d^2 f}{d^2 x}(0)=\ldots=\frac{d^n f}{d^n x}(0)=e^0=1.$$

Кроме этого, очевидно, что $\frac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x)=e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить $\xi=\theta\cdot x$, где $0<\theta<1$. $\otimes$

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$f(x)= f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\cdot\frac{x-x_0}{1!}+\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+$$
$$+\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь многочлен Тейлора

$$T_n(x_0, x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}= f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\frac{(x-x_0)^1}{1!}+$$
$$+\frac{d^2 f}{dx^k}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!},$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n)= f(x)-T_n(x_0, x)= f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

При условии $\Delta x\to 0$ выполняется

$$R_n(x, n)= f(x)-T_n(x_0, x)=o\left((x-x_0)^n\right)=o\left((\Delta x)^n\right).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}+o\left((\Delta x)^n\right).$$

Последняя форма записи называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***.

Пример 3.3.15. Разложить функцию $f(x)=\sin x$ по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Рассмотрим производные функции $f(x)=\sin x$ в точке x:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x=\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right);$$

……;

$$\frac{d^k}{dx^k}\sin x=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\sin(\theta x)=\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\cos\theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right)=\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\theta x\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta x\right)=(-1)^n\cos\theta x$$

.

Здесь мы положили $\xi=\theta x$, где $0<\theta<1,\ x\in(a,b)$.

Формула Маклорена принимает вид

$$\sin x=\sin 0+\frac{1}{1!}x+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\alpha^{(2n+1)}(x)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x.$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Пример 3.3.16. Найти предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Записываем для $\sin x$ разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x \to 0} \frac{o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

Пример 3.3.17. Найти предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x}$.

Р е ш е н и е. Используем разложение для e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3 \cdot \left(x + \alpha_{(2)}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^5\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1 + \frac{o\left(x^5\right)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes$$

Практическое занятие 4. Исследование функций одного переменного

Промежутки монотонности функции

Пример 3.4.1. Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-2.$$

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f'=3x^2+6x-9=3\left(x^2+2x-3\right)=3(x+1)^2-12.$$

Поэтому имеем:

$$f'>0\Rightarrow x^2+2x-3>0\Rightarrow 3\cdot(x+1)^2-12>0;$$

$$f'<0\Rightarrow x^2+2x-3<0\Rightarrow 3\cdot(x+1)^2-12<0.$$

Корни уравнения

$$x^2+2x-3=0$$

есть

$$x_1=-3,\ x_2=1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x_0=-1,\ y_0=-12$. Следовательно, неравенство $f'(x)>0$ выполняется при $x<-3$ и $x>1$, а неравенство $f'(x)<0$ при $-3<x<1$.

На множестве $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ функция строго монотонно возрастает, а на множестве $(-3,1)$ строго монотонно убывает. $\otimes$

Пример 3.4.2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi=-0{,}01\cdot x^3+300\cdot x-500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

Р е ш е н и е. Производная от Φ равна:

$$\Phi'=-0{,}03\cdot x^2+300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi' = -0{,}03 \cdot x^2 + 300 < 0,$$

откуда имеем $x^2 - 10000 > 0$. Из последнего неравенства получаем: $x_1 > 100$, $x_2 < -100$. Имеет экономический смысл только неравенство $x_1 > 100$. Следовательно, при $x > 100$ финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше 100 единиц становится экономически не выгодно. $\otimes$

Схема исследования функции на локальные экстремумы с помощью первой производной

Пример 3.4.3. Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции f есть

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}, x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной $f'(x)$ справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

x	$x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}} < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x > \sqrt{\frac{5}{3}}$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
f		Максимум $f(x_1) = 6{,}3$		Минимум $f(x_2) = -2{,}3$	

4. Вычисляем значения функции в точках x_1, x_2 и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум $f(x_1)=6{,}3$, а в точке

$$x_2=+\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимуму $f(x_2)=-2{,}3.\otimes$

Пример 3.4.4. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x+3.$$

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось R.

1) Находим производную функции:

$$f'(x)=x^2+5x+4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2+5x+4=0.$$

В результате решения имеем корни: $x_1=-1,\ x_2=-4$. Критические точки разбивают R^1 на промежутки

$$-\infty<x<-4,\ -4<x<-1,\ -1<x<\infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке $(-\infty,-4)$ имеем $y'>0$;

в промежутке $(-4,-1)$ имеем $y'<0$;

в промежутке $(-1,\infty)$ имеем $y'>0$.

Следовательно, в точке -4 имеем **максимум**; в точке -1 имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x)=f(-4)\approx 5{,}67;\ \min f(x)=f(-1)=1{,}17.\otimes$$

Пример 3.4.5. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x)=3x^5-5x^3+10.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим производную функции:

$$f'(x)=15x^4-15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0,\ x^4 - x^2 = 0,\ x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0;\ f''(1) = 30;\ f''(-1) = -30.$$

В точке $x_2 = 1$ функция имеет **минимум**, а в точке $x_3 = -1$ - **максимум**. В точке $x_1 = 0$ функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака. $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

Пример 3.4.6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \left(x^2 + 7x\right) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции $M = R$. Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка $x = -1$ является нулём второй производной $f''(x)$, а точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода второй производной $f''(x)$. Эти точки делят множество определения функции $f(x)$ на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

2) Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$(\forall x \in (-\infty, -1))\ f''(x) < 0;$

$(\forall x \in (-1, 0))\ f''(x) > 0;$

$(\forall x \in (0, +\infty))\ f''(x) > 0.$

Следовательно: на $(-\infty, -1)$ график функции ***выпуклый***; на $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ график функции ***вогнутый***.

3) Так как функция в точке $x_0 = -1$ определена, а $f''(-1) = 0$, то в точке $x_0 = -1$ график функции испытывает перегиб, а точка

$(x_0;\ f(x_0)) = (-1; 3)$

является точкой перегиба графика функции. $\otimes$

Пример 3.4.7. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Р е ш е н и е. 1) Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 3.$

2) По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем x, то есть

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением $y=-x+4$. $\otimes$

Пример 3.4.8. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x.$$

Р е ш е н и е. 1) Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

2) Из представления функции в виде

$$f(x)=(kx+b)+\alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_+=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx],$$

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_-=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx].$$

Правый предел:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2\right)=-1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y=-x.$$

Левый предел:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\{x=-z\}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}+2z}{-z}=$$

$$=-\lim_{z\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}+2\right)=-3;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -3x. \otimes$$

Полное исследование функции

Пример 3.4.9. Исследовать функцию, заданную формулой $y(x) = x \cdot e^{-x}$.

Р е ш е н и е. 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел R.

2) Нуль функции – точка $x = 0$, причём $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Следовательно, функция в точке $x = 0$ асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1-x) \Rightarrow x = 1.$$

4) Имеем два промежутка $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$. На этих промежутках

$$(\forall x \in (-\infty, 1))\ y'(x) > 0,$$

$$(\forall x \in (1, \infty))\ y'(x) < 0,$$

соответственно. Следовательно, при $x \in (-\infty, 1)$ функция строго монотонно возрастает, а при $x \in (1, \infty)$ функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x) = -e^{-x} \cdot (1-x) - e^{-x} = e^{-x} \cdot (x-2).$$

Так как в точке $x = 1$ вторая производная равна

$$y''(1) = \frac{1-2}{e} = -\frac{1}{e} < 0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный $\frac{1}{e}$.

6) Вторая производная функции в точке $x = 2$ обращается в нуль, а при переходе через это точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при $x = 2$ имеет

перегиб, причём при $x<2$ график функции выпуклый, а при $x>2$ – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2)=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}.\otimes$$

Практическое занятие 5. Интегрируемость функции одного переменного

Непосредственное интегрирование

Пример 3.5.1. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\sqrt[3]{x^2}dx.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно имеем:

$$\int\sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{2/3}dx=\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.\otimes$$

Пример 3.5.2. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx=6\int x^2dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int dx=$$

$$=2x^3-2x^{3/2}+5x+C=2x^3-2\sqrt{x^3}+5x+C,$$

где все постоянные интегрирования объедены в одну постоянную C. $\otimes$

Пример 3.5.3. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$= 5\int x^2 dx + 11\int dx - 3\int \sin x dx + 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 11x + 3\cos x + 2\ln|x| + ctgx + C. \otimes$$

Подведение под дифференциал

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int (\ln f(x))' dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется ***методом подведения под дифференциал***.

Пример 3.5.4. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+1}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx = d(x+1)$ и, используя табличную первообразную для функции $\frac{1}{x}$, в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C. \otimes$$

Пример 3.5.5. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, имеем:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C. \otimes$$

Пример 3.5.6. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Р е ш е н и е. Так как $xdx = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$, получаем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C. \otimes$$

Пример 3.5.7. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5}dx.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3\left(x+5\right)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\int \frac{3x+2}{x+5}dx = \int\left(3 - \frac{13}{x+5}\right)dx = 3\int dx - 13\int \frac{1}{x+5}dx =$$

$$= 3x - 13\ln\left|x+5\right| + C. \otimes$$

Методы подстановки (замены переменной интегрирования)

и интегрирования по частям

Пример 3.5.8. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3}dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную по формуле $t = x+3 \Rightarrow dx = dt$, получаем:

$$\int \sqrt{x+3}dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x+3\right)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.9. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\frac{dt}{x^2 + 1},$$

получаем:

$$\int \frac{x^2 + 1}{\left(x^3 + 3x + 1\right)^4} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9\left(x^3 + 3x + 1\right)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.10. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $\cos x dx = d\left(\sin x\right)$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int x \cdot \cos x dx = \begin{Bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d\left(\sin x\right), & v = \sin x \end{Bmatrix} =$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes$$

Пример 3.5.11. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int x \cdot \ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x dx + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes$$

Формула Ньютона-Лейбница, вычисление определённого интеграла методом замены переменной и интегрирования по частям

Пример 3.5.12. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

Р е ш е н и е. Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$. Полученное число $\frac{1}{3}$ имеет смысл площади криволинейного треугольника с вершинами в точках

$O(0,0),\ A(1,1),\ B(1,0)$. $\otimes$

Пример 3.5.13. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.14. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int\limits_1^2 2^{3x-4} dx.$$

Р е ш е н и е. Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx = \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-4) \right\} = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 2^{3x-4} d(3x-4) =$$

$$= \left\{ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot \left.\frac{2^{3x-4}}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}. \otimes$$

Пример 3.5.15. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx.$$

Р е ш е н и е. Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную $t = 2 - x^2$. Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d\left(2 - x^2\right) = -2xdx \Rightarrow\ xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x=0\Rightarrow t=2;\ x=1\Rightarrow t=1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx=\left\{\begin{array}{l} dt=d\left(2-x^2\right)=-2xdx;\ xdx=-\dfrac{1}{2}dt; \\ x=0\Rightarrow t=2;\ x=1\Rightarrow t=1. \end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_2^1 t^5dt=\frac{1}{2}\int_1^2 t^5dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot t^6\Big|_1^2=\frac{1}{12}\cdot(64-1)=\frac{63}{12}=\frac{21}{4}.\ \otimes$$

Пример 3.5.16. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx.$$

Р е ш е н и е. Используя замену переменной интегрирования $t=\ln x$, имеем:

$$\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left\{\begin{array}{l|l} t=\ln x, & x=1\Rightarrow t=0, \\ dt=\dfrac{dx}{x}, & x=e\Rightarrow t=1. \end{array}\right\}=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.\ \otimes$$

Пример 3.5.17. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx.$$

Р е ш е н и е. Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ dv=e^{-x}dx, & v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}. \end{array}\right\}=$$

$$=x\cdot e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}d(-x)=-x\cdot e^{-x}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1=$$

$$=-e^{-1}-e^{-1}+1=1-2\cdot e^{-1}=1-2/e=e-2/e.\ \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

Предел и дифференцируемость функций одного переменного

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

1) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$; 2) $\left(\frac{n}{5^n}\right)$; 3) $\left(\frac{n}{4n-3}\right)$; 4) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$; 5) $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

2. Используя определение, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, если:

1) $x_n = \frac{3n+1}{5n+2}$, $x_0 = \frac{3}{5}$;

2) $x_n = \frac{2n-2}{3n-1}$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

3) $x_n = \frac{4n-2}{2n+3}$, $x_0 = 2$;

4) $x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}$, $x_0 = 4$;

5) $x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}$, $x_0 = -1$;

6) $x_n = \frac{6n-2}{2n+1}$, $x_0 = 3$;

7) $x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}$, $x_0 = 2$;

8) $x_n = \frac{5n+2}{3n+1}$, $x_0 = \frac{5}{3}$.

3. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^3}{(n+2)^2-(n+1)^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n+5)^3}{(3-n)^3}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\dfrac{n}{2^n}}{n^2-1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn}-an\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n}\sin x\right)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^{n}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$.

23. Найти множество определения M и множество значений $f(M)$ функции $f(x)=\lg x$.

24. Найти множество определения M следующих функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+4}$; 3) $f(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$;

4) $f(x)=\lg(x-2)-\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$; 5) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$.

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

1) $f(x)=1-x$; 2) $f(x)=x^3+x$; 3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;

4) $f(x)=x^5-x^3+x$; 5) $f(x)=x^2+x-1$.

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1) $f(x)=5$; 2) $f(x)=\sin(5x+3)$; 3) $f(x)=\cos x^2$;

4) $f(x)=2[x]+1$, где $[x]$ – целая часть x.

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)=x^2+3x+3$ непрерывна в любой точке действительной числовой оси $(-\infty,+\infty)$.

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках x_0:

1) $f(x)=3x-5,\ x_0=2$; 2) $f(x)=4x^2-1,\ x_0=2$;

3) $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=4$; 4) $f(x)=4x^2+1,\ x_0=8$;

5) $f(x)=\sin x-\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

29. Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}<0$.

30. Найти предел данной функции при $x\to x_0$:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x2^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$.

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

1) $f(x)=\ln\dfrac{5-4x^2}{3+7x^2}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\ln\dfrac{(1+x^2)\cdot(1-2x)^3}{(x^2-5)^2}$;

3) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x=1$, $x=1x=e$, $x=\dfrac{1}{e}$, $x=\dfrac{1}{e^2}$;

4) $f(x)=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-7\cos x+tg(3x^2+2)+ctg6x$;

5) $f(x)=\ln^2(1-\cos x)$; 6) $f(x)=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\cdot\ln 3)}{1+\ln^2 3}$;

7) $f(x)=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$; 8) $f(x)=\ln(1+\sqrt{thx})$.

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}+(1+x^2)\cdot ctgx.$$

34. Найти $f'(0)$ и $df(0)$, если $f(x)=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

35. Найти $f'(x)$ и $df(x)$, если $f(x)=\ln(5e^x+7)$.

36. Пусть функции f и g, определённые на одном и том же множестве $M\subset R$, n-раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также n-раз дифференцируемы на M.

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1) $f(x)=\ln(2x-3)$, $f''(x)=?$;

2) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x,\ f'''(x)=?;$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3},\ f'''(x)=?;$

4) $f(x)=\ln(3x+1),\ f'''(x)=?;$

5) $f(x)=3^{2x+1},\ f'''(x)=?;$

6) $f(x)=x^2\cdot\sin x,\ f^{(3)}=?.$

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1) $f(x)=\cos^2 x,\ f''(x)=?,\ d^2 f(x)=?;$

2) $f(x)=e^x\cos x,\ f^{(3)}(x)=?,\ d^{(3)}f(x)=?.$

30. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции $f(x)=3x^2-1$ на промежутке $[1,2]$.

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)=x$ на промежутке $[0,1]$.

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции $f(x)=2x-x^2$ на промежутке $[1,3]$. Найти точку ξ, удовлетворяющую условию $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Интегрируемость функций одного переменного

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

1) $\int\left(x^6-6x^5+40x^3-24x^2\right)dx$; 2) $\int\sqrt[3]{x^2}\left(8\sqrt[3]{x}-1\right)dx$;

3) $\int\frac{\left(4-3\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$; 4) $\int\frac{x+2}{x+3}dx$; 5) $\int\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k\right)dx$;

6) $\int\left(2x^2+1\right)^3dx$; 7) $\int\left(1+\sqrt{x}\right)^4dx$; 8) $\int\frac{(x+1)\cdot\left(x^2-3\right)}{3x^2}dx$;

9) $\int\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$; 10) $\int\left(5^x-1\right)\left(5^{-x}+1\right)dx$;

11) $\int\frac{x^2+3}{x^2+1}dx$; 12) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$; 13) $\int\frac{\sin 3x-\sin 5x}{\cos 4x}dx$;

14) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 15) $\int\frac{dx}{2+3x^2}dx$.

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

1) $\int\frac{dx}{ax+b}$, где a,b – постоянные;

2) $I=\int\frac{xdx}{1+x^2}$;

3) $\int\sqrt{x+3}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x+3$);

4) $I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=e^x$);

5) $\int\frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx$; 6) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

7) $\int\frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}dx$; 8) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

9) $\int\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^3}dx$; 10) $\int\frac{\sin 2x-\cos x}{\left(\cos^2 x+\sin x\right)^2}dx$.

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

1) $\int x\cdot e^{x^2}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x^2$);

2) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; 3) $\int (12x-5)^7 dx$; 4) $\int e^{4-3x} dx$;

5) $\int 6^{5x+2} dx$; 6) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx$; 7) $\int \frac{e^x dx}{2e^x+7}$; 8) $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

9) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx$; 10) $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx$; 11) $\int \sin x \cos^2 x dx$;

12) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$; 13) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{5tgx}}{\cos^2 x} dx$; 15) $\int e^{4\cos x - 1} \sin x dx$.

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int x^2 \cdot \cos x dx$; 2) $\int x^2 \cdot \sin x dx$; 3) $\int x \cdot e^x dx$;

4) $\int (x^2+2x+3) \cdot \cos x dx$; 5) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; 6) $\int e^{2x} \cos x dx$;

7) $\int x^2 e^x dx$; 8) $\int x \ln x dx$.

47. Найти определённый интеграл:

1) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$;

2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t = \ln x$);

3) $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ (***Указание:*** использовать замену переменной интегрирования $x = r \cdot \sin t$ и формулу интегрирования по частям);

4) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx$; 5) $\int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x} dx$; 6) $\int_{-2}^5 \sqrt[3]{5x+2} dx$;

7) $\int_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x} dx$; 8) $\int_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx$; 9) $\int_0^1 x e^{-x} dx$;

10) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$; 11) $\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx$; 12) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x} dx$;

13) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 14) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\cos x} dx$; 15) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; 16) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$.

ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЯДЫ

Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Первые частные производные функций нескольких переменных

Пример 4.1.1. Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке $M_0(5; 1)$.

Р е ш е н и е. Для частной производной по переменной x имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение $y = y_0$, находим сужение функции $z(x, y)$ на прямую линию $y = y_0$, параллельную оси Ox. На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции $z(x, y)$ является функцией одной переменной x. Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения $z(x, y_0)$.

1) Придавая переменной x приращение Δx в точке $(x_0; y_0)$, получим:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) = x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 +$$
$$+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5.$$

2) Находим приращение функции $z(x, y_0)$ в точке $(x_0; y_0)$, придавая переменной x приращение Δx:

$$z(x_0+\Delta x,\, y_0)-z(x_0,\, y_0)=2x_0y_0\cdot\Delta x+y_0(\Delta x)^2+4\cdot\Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x_0+\Delta x,\, y_0)-z(x_0,\, y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0y_0\cdot\Delta x+y_0(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}=2x_0y_0+4.$$

4) Подставляя координаты точки $(x_0;\, y_0)=(5;1)$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5,1)=(2x_0y_0+4)\Big|_{\substack{x_0=5\\ y_0=1}}=14.$$

Аналогично находим частную производную в точке $(x_0;\, y_0)=(5;1)$ по второй переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5,1)=\left(x_0^2-2\right)\Big|_{\substack{x_0=5\\ y_0=1}}=23.\ \otimes$$

Пример 4.1.2. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y)=x^3+3x^2y-y^3.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y)=3x^2+6xy;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y)=3x^2-3y^2.\ \otimes$$

Пример 4.1.3. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y)=\frac{xy}{x+y}.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{y^2}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{x^2}{(x+y)^2}.\otimes$$

Пример 4.1.4. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=(1-x)^{y^2}.$$

Р е ш е н и е. Для вычисления частной производной по переменной x фиксируем переменную y и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y)=-y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем формулу $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)=2y\cdot(1-x)^{y^2}\cdot\ln(1-x).\otimes$$

Пример 4.1.5. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=x^3y^2+2x\ln y+x^y.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y)=3x^2y^2+2\ln y+yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)=2x^3y+\frac{2x}{y}+x^y\ln x.\otimes$$

Пример 4.1.6. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\,y)=(1+xy)^y.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменную y и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной x получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y)=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x,\, y) = y\ln(1+xy) \to z'_y = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \to$$

$$z' = \frac{u'}{u} \to \frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y) = (1+xy)^y \cdot \ln(1+xy) + (1+xy)^y \frac{xy}{1+xy} =$$

$$= (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{x \cdot y}{(1+xy)} \right]. \otimes$$

Пример 4.1.7. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

в точке $M_0(1; -1; -2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\frac{2x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\frac{2x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_2}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}\frac{2x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_3}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(1; -1; -2) = -\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(1; -1; -2) = \frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(1; -1; -2) = -\frac{2}{\sqrt{216}}. \otimes$$

Пример 4.1.8. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u(x_1,\, x_2,\, x_3) = \exp\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \equiv e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

в точке $M(0;\, 1;\, 2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

1) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = 0;$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = 2e^5;$$

3) $$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) =$$

$$= 2x_3 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M) = 4e^5. \otimes$$

Пример 4.1.9. Показать, что функция, заданная формулой

$$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции в произвольной точке $(x,\, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}=0.\ \otimes$$

Пример 4.1.10. Показать, что функция

$$u(x_1,\ x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\ x_2)=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=$$

$$=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x_1}\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{1}{x_2}\left[\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}\right]=$$

$$=\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}-\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)}{x_2}=\frac{u(x_1,\ x_2)}{x_2^2}.$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1,\ x_2)}{x_2^2}=\frac{u(x_1,\ x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция $u(x_1,\ x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}.\ \otimes$$

Частные производные функций нескольких переменных высших порядков

Пример 4.1.11. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \otimes$$

Пример 4.1.12. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \otimes$$

Пример 4.1.13. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных $u(x, y) = \sin(x + y)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x+y);\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x+y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x+y). \otimes$$

Пример 4.1.14. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2 - 1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2 - 2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2 - 1} + x_2 x_1^{x_2 - 1} \ln x_1 = x_1^{x_2 - 1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2 - 1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2 - 1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2. \otimes$$

Дифференцируемость функций нескольких переменных

Пример 4.1.15. Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M_0(1; -1)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}} = -\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4};$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4};$

3) $dz\left(1,-1\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}dx + \dfrac{\sqrt{2}}{4}dy.$ ⊗

Пример 4.1.16. Вычислить приближённо $\left(0{,}98\right)^{2{,}01}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $z = x^y$. В точке $\left(1;\,2\right)$ значение функции $z\left(1;\,2\right) = 1$. Вычислим значение функции в точке $\left(0{,}98;\,2{,}01\right)$. Имеем $\Delta x = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Находим частные производные функции $z = x^y$ в точке $\left(1;\,2\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$\left(0{,}98\right)^{2{,}01} = z\left(1;\,2\right) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$ ⊗

Пример 4.1.17. Найти дифференциал функции

$$f = f\left(x+y^2,\, y+x^2\right)$$

в точке $M\left(-1;\,1\right)$.

Р е ш е н и е. Обозначим, например,

$$u = x + y^2,\ v = y + x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0;\ 2) - \frac{\partial f}{\partial v}(0;\ 2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0;\ 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0;\ 2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(0;\ 2) - 2\frac{\partial f}{\partial v}(0;\ 2)\right]dx + \left[2\frac{\partial f}{\partial u}(0;\ 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0;\ 2)\right]dy. \otimes$$

Дифференциалы высших порядков

Пример 4.1.18. Найти дифференциал второго порядка функции

$$f = f(x + y,\ xy).$$

Р е ш е н и е. Обозначим $u = x + y$, $v = xy$. Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y,\ xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y,\ xy)\cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y,\ xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y,\ xy)\cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot xy + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x+y)\frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^{f\,2}}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes$$

Производные сложных и неявно заданных функций

Пусть функция $u = f(x, y)$ задана ***параметрическим способом***, то есть, с помощью формул

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Тогда функция u является функцией одного переменного t:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t, то есть, существуют производные

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}(t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt}(t).$$

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема, то придавая переменной t приращение Δt, видим, что все функции получат соответствующие приращения Δx, Δy и Δu, причём по определению дифференцируемости

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \beta = 0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Если $x=\varphi(t,\,s)$ и $y=\psi(t,\,s)$, то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Пример 4.1.19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z=x^3-x^2y,\ x=1-t^2,\ y=t^4.$$

Р е ш е н и е. Находим непосредственно:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(3x^2-2xy\right)2t+\left(-x^2\right)4t^3=$$

$$=4t^7+2t^6+8t^5+4t^4-4t^3-12t^2+2t.\otimes$$

Пример 4.1.20. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u=\ln\frac{x_1-x_2+x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\sin(x_1+x_2+x_3),$$

$$x_1=a\sin t,\ x_2=b\cos t,\ x_3=ce^{-kt},$$

где $a,\,b,\,c,\,k$ – некоторые постоянные.

Пример 4.1.21. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ для функции $z=x^3e^y$, если

$$x=ts,\ y=t^2-s^2.$$

Р е ш е н и е.

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=e^{t^2-s^2}t^2s^3\left(3+2t^2\right).$$

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=e^{t^2-s^2}t^3s^2\left(3-2s^2\right).\otimes$$

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ ***задана неявно посредством уравнения***

$$F\left(x,\,y\right)=0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,\,y\right)+\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

где учтено, что $\frac{dx}{dx}=1$. Если $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)\neq 0$, то получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,\,y\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\,y\right)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F\left(x,\,y,\,u\right)=0$$

задаёт функцию двух переменных $u=\varphi\left(x,\,y\right)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Пример 4.1.22. Найти частные производные функции $z=z\left(x,\,y\right)$, заданной неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1=0.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$F\left(x,\,y,\,z\right)=x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y;\frac{\partial F}{\partial y}=2x+2y-4;\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{x+y}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{2-x-y}{z}.\otimes$$

Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

Градиент функции и производная по направлению

Пример 4.2.1. Найти $\vec{grad}\ f$ и $\left\|\vec{grad}\ f\right\|$ для функции, определённой формулой

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$$

в точке $M_0(1;-1;2)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,2)=2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,2)=-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,2)=-4.$$

Теперь имеем:

$$\vec{grad}\ f\left(M_0\right)=2\vec{e}_1-2\vec{e}_2-4\vec{e}_3,$$

$$\left\|\vec{grad}\ f\right\|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}.\otimes$$

Пример 4.2.2. Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x,y,z)=x^2-2xz+y^2$$

в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, где $M(2;4;-3)$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\vec{M_0M}: \vec{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке $M_0(1;\ 2;\ -1)$:

$$\vec{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3 = (2x - 2z)\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 - 2x\vec{e}_3,$$

$$\vec{grad}\,u(M_0) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора $\vec{M_0M}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{M_0M}}(M_0) = \frac{\left(\vec{grad}\,u\Big|_M, \vec{M_0M}\right)}{\left\|\vec{M_0M}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}4 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+4}} =$$

$$= \frac{4+8+4}{\sqrt{9}} = \frac{16}{3}. \otimes$$

Экстремум функции двух переменных

Пример 4.2.3. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$z(x,\ y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0.$$

Точка $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)>0,$$

то точка $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{7}{3}.\otimes$$

Пример 4.2.4. Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x,\,y)=x^2+y^2+\frac{(x+2y-16)^2}{2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z_x'=0, \\ z_y'=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=16, \\ x+3y=16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=14>0.$$

Точка $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$ является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)>0,$$

то точка $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0)\approx 36{,}6.\ \otimes$$

Практическое занятие 3. Числовые ряды

Непосредственное вычисление суммы числового ряда

Пример 4.3.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Общий член ряда равен

$$a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ldots=1-\frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\ \otimes$$

Пример 4.3.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}.\ \otimes$$

Пример 4.3.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства $q=\frac{1}{2}<1$ сходится и имеет сумму

$$S=\frac{1}{1-q}=2.\ \otimes$$

Необходимый признак сходимости

Пример 4.3.4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.5. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. ⊗

Признак сравнения

Пример 4.3.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

Р е ш е н и е. Для почти всех n выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1+2^{2n}}<\frac{2^n}{2^{2n}}=\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ является минорантой ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ по признаку сравнения сходится. ⊗

Пример 4.3.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям: $(\forall n\in N)$

$$-1 \le \sin n \le 1;\ 1 < 2 + \sin n < 3;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} < \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$ является так называемым обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^{\alpha}}$, который при $0 < \alpha < 1$ расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \ge \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$ расходится, то и исходный ряд также расходится. $\otimes$

Признак Даламбера

Пример 4.3.8. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Поэтому ряд сходится по признаку Даламбера. ⊗

Пример 4.3.9. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера расходится. ⊗

Знакопеременные ряды

Пример 4.3.10. Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots.$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится. ⊗

Пример 4.3.11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена: $\Delta < 0{,}2$. ⊗

Пример 4.3.12. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Для всех n, очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно. ⊗

Пример 4.3.13. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Р е ш е н и е. Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех n (начиная с $n=2$) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно. ⊗

Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

Функциональные ряды

Пример 4.4.1. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n + \ldots$$

в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Р е ш е н и е. 1) В точке $x_1 = 0$ имеем

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot 2^n + \ldots.$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{2n-1};\ u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) > 1.$$

Поэтому в точке $x_1 = 0$ ряд расходится.

2) В точке $x_2 = 1$ имеем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{3^n \cdot (2n-1)};\ u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n+1-2}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<1.$$

Поэтому в точке $x_2=1$ ряд сходится. $\otimes$

Пример 4.4.2. Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. В точке $x=0$ не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки $(-\infty,\,0)$ и $(0,\,\infty)$.

1) На промежутке $(-\infty,\,0)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{-(n-1)x}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)\cdot(-x)}=\{-x=t\}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)t},$$

где $t\in(0,\infty)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n-1)t}\neq 0$. Снова не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд на промежутке $(-\infty,\,0)$ расходится.

2) На промежутке $(0,\,\infty)$ выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}}=\frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}.$$

На $(0,\,\infty)$ всегда $\dfrac{1}{e^x}<1$. Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1+\frac{1}{e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{e^x}\right)^n+\ldots.$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\dfrac{1}{e^x}<1$. Поэтому сумма ряда равна

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x-1}.\ \otimes$$

Пример 4.4.3. Исследовать сходимость степенного ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1<x<1.$

Если $x=1$, имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Если $x=-1$, то получаем ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots.$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $x\in[-1,1)$, который можно задать двойным неравенством $-1\le x<1.\otimes$

Пример 4.4.4. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n=\frac{1}{n^2};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3.$$

На левом конце промежутка сходимости $x=1$ имеем ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\ldots.$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости $x=3$ имеем ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.$$

Этот ряд сходится, так как при $p>1$ сходится ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений x, удовлетворяющих двойному неравенству $1\le x\le 3.\otimes$

Пример 4.4.5. Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots+n!(x-5)^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда

$$a_n=n!;\ a_{n+1}=(n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Ряд сходится только при $x-5=0$, то есть в точке $x=5.\otimes$

Пример 4.4.6. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty,\infty).$

Р е ш е н и е. Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}=-\frac{1}{x^4+1^2}+\frac{2}{x^4+2^2}-\frac{3}{x^4+3^2}+\ldots.$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1|=\frac{1}{x^4+1}>|u_2|=\frac{2}{x^4+4}>|u_3|=\frac{3}{x^4+9}>\ldots.$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x^2}{n}\right)^2+1} = 0.$$

Ряд сходится для любых $x\in(-\infty,\infty)$.

Для остатка ряда имеем

$$|r_n| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right| < |u_{m+1}| = \left|\frac{(-1)^{(m+1)}\cdot(m+1)}{x^4+(m+1)^2}\right| < \frac{1}{m+1},$$

так как $x^4>0$. Рассмотрим неравенство $\frac{1}{m+1}<\varepsilon$. Из этого неравенства получаем $m>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Если теперь мы выберем $m_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, то $(\forall m\ge m_0)$ получаем $|r_m|<\frac{1}{m+1}<\varepsilon$. Таким образом, ряд сходится на $(-\infty,\infty)$ независимо от x, то есть равномерно по $x\in(-\infty,\infty)$. $\otimes$

Ряд Тейлора (Маклорена)

Пример 4.4.7. Разложить функцию

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням x $(x_0=0)$ в ряд Тейлора.

Р е ш е н и е. Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ t\in(-1,1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}},\ x\in(-2,2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости:

$$M=(-1,1)\bigcap(-2,2)=(-1,1).\otimes$$

Пример 4.4.8. Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой $f(x)=\sin^2 x.$

Р е ш е н и е. Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x)=\sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x)=2\cdot\cos 2x=2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x)=-4\cdot\sin 2x=2^2\cdot\sin\left(2x+2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x)=-8\cdot\cos 2x=2^3\cdot\sin\left(2x+3\frac{\pi}{2}\right);$$

……;

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\cdot\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x)=2^n\cdot\sin\left[2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

……

Вычисляем производные в точке $x=0$:

$$f^{(0)}(0)=0;$$

$$f^{(1)}(0)=0;$$

$$f^{(2)}(0)=2;$$

$$f^{(3)}(0)=0;$$

$$f^{(4)}(0)=2^3;$$

$$f^{(5)}(0)=0;$$

$$f^{(6)}(0)=2^5;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=\frac{2^n\cdot\sin\left(2\cdot\xi+\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\sin\left(2\cdot\xi+\frac{n\cdot\pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}=0,\ \left|\sin\left(2\cdot\xi+\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right|\le 1,$$

получаем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. Поэтому функция $f(x)=\sin^2 x$ может быть разложена в ряд Маклорена

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}\cdot x^2-\frac{2^3}{4!}\cdot x^4+\frac{2^5}{6!}\cdot x^6-\frac{2^7}{8!}\cdot x^8+\ldots$$

на любом промежутке $[-b,b]$. $\otimes$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дифференцируемость функций нескольких переменных

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

1) $u(x,\ y)=x^3\sin y+y^4$; 2) $u(x,\ y)=x^2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

2. Найти частные производные в заданных точках:

1) $u(x,\ y)=\dfrac{1-xy}{1+xy},\ A(0;1)$;

2) $u(x,\ y)=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}},\ A(1;1)$;

3) $u(x,\ y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ A(\sqrt{2};1)$.

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $u=\ln\left(x_1+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$;

3) $u=\ln\sin(x_1-2x_2)$; 4) $u=x^2yz^4$; 5) $u=\ln\left(x^3-y^3+2z^3\right)$.

4. Пусть функция задана формулой $f(x,\ y)=x^2\sin^2 y$. Вычислить $df(x_0,\ y_0)$ в точке $(x_0,\ y_0)=\left(-1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

1) $u=\dfrac{x_2}{x_2-x_1},\ x_1=1,\ x_2=2,\ dx_1=\dfrac{1}{2},\ dx_2=-\dfrac{1}{3}$;

2) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$x=3,\ y=4,\ z=5,\ dx=-0{,}1,\ dy=0{,}3,\ dz=0{,}2$.

6. Вычислить приближённое значение выражения $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$.

7. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=e^{x-3y},\ x=\sin t,\ y=t^2$.

8. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial v}$, если $f=\ln\left(x^2+y^2\right),\ x=uv,\ y=\dfrac{u}{v}$.

9. Функция задана уравнением $e^u = \cos x \cos y$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{3},$$

в точке $M_0(1; 2; 3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$$

32*). Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$

33*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге $x^2 + y^2 \le 1.$

Числовые ряды

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$; 2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$;

3) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2-5n+6}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{25n^2+5n-6}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{90}{4n^2+8n-5}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2+3n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{16n^2-8n-3}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot(1+2^n)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{n^4+3}{n^4+2}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{3^n+n}{7^n+2n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{2n^3}}-1\right)$.

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n!)^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^5-1)}{n!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$.

Функциональные ряды

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

1) $\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3;$

2) $\frac{1!}{1}\left(x^2-4x+6\right)+\frac{2!}{2^2}\left(x^2-4x+6\right)^2+\ldots+\frac{n!}{n^2}\left(x^2-4x+6\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3.$

41. Найти область сходимости функционального ряда

1) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)^n}+\ldots;$

2) $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left(x^2-6x+10\right)^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\left(x^2-5x+9\right)^n};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2\left(x^2+3\right)^n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(x^2-4x+8\right)^n};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\left(x^2-2x+6\right)^n};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^x}.$

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$

2) $1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\ldots+\frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}}+\ldots;$

3) $2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+\ldots+\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}+\ldots;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n(n-1)/2}}{n!};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{4^n};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}.$

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

1) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}};$

2) $f(x)=\frac{x}{3+2x};$

3) $f(x)=\sqrt[4]{16+x};$

4) $f(x)=2^x;$

5) $f(x)=\cos^2 x;$

6) $f(x)=e^{-x^2};$

7) $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням $x-2$;

8) $f(x)=3^x$;

9) $f(x)=e^{-2x}$;

10) $f(x)=\sqrt{x+2}$.

ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие 1. Базисные векторные поля

Базисные векторные поля полярной, цилиндрической и сферической систем координат

Пример 5.1.1. Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2,\ \vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi. \qquad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = A^{i\cdot}_{\cdot j}\vec{e}_i. \qquad (4)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\big(r\cos\varphi\big)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}\big(r\sin\varphi\big)\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (5)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\varphi} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= -r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (6)$$

Так как

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

то базисное векторное поля $\vec{g}_r$ нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (7)$$

Векторное поле $\vec{g}_\varphi$ не нормировано, а его норма

$$\left\|\vec{g}_\varphi\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi\right)} = \sqrt{\left(-r\sin\varphi\right)^2 + \left(r\cos\varphi\right)^2} = r. \qquad (8)$$

Орт векторного поля $\vec{g}_\varphi$ равен

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\varphi\right\|}\vec{g}_\varphi = \frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2\right) =$$

$$= -\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + \cos\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (9)$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу. $\otimes$

Пример 5.1.2. В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^1(t) = r(t)\cdot\cos\varphi(t),\ x^2(t) = r(t)\cdot\sin\varphi(t), \qquad (1)$$

где t – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Р е ш е н и е. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (2)$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2 .$$

(3)

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$v_r \equiv \Pr_{\vec{e}_r}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle r\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\sin\varphi = \frac{dr}{dt},$$

(4)

$$v_\varphi \equiv \Pr_{\vec{e}_\varphi}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle\varphi\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\cos\varphi =$$

$$= r\frac{d\varphi}{dt}.$$

(5)

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{g}_{\langle r\rangle} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}.$$

(6)

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt} = -\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 - \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle} + \frac{dr}{dt}\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 + \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right) +$$

$$+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} +$$

$$+r\frac{d\varphi}{dt}\left(-\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1 - \sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right) =$$

$$=\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle} + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle} + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}. \otimes \qquad (7)$$

Пример 5.1.3. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r = t\cdot\sin 3t, \\ \varphi = t^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 1\,c$. Радиус дан в метрах.

Р е ш е н и е. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0{,}141;\ \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t\cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \qquad (2)$$

При $t = 1\,c$ имеем:

$$\dot{r}(1) = -2{,}829,\ \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2{,}829\,\frac{м}{c};\ v_\varphi(1) = r(1)\cdot\dot{\varphi}(1) = 0{,}423\,\frac{м}{c}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2{,}860\,\frac{м}{c}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r}\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r}\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1{,}883\,\frac{м}{c};\ v^2(1) = -2{,}148\,\frac{м}{c}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2} = 2{,}85\,\frac{м}{c}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6\cos 3t - 9t\sin 3t;\ \ddot{\varphi} = 6t.$$

При $t = 1$ имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9{,}74;\ \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1)=\ddot{r}(1)-r(1)\dot{\varphi}^2(1)=-11{,}01\ \frac{м}{c^2};$$

$$w_\varphi(1)=r(1)\ddot{\varphi}(1)+2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1)=-16{,}128\ \frac{м}{c^2}.$$

8) Норма ускорения

$$w=\sqrt{w_r^2+w_\varphi^2}=19{,}52\ \frac{м}{c^2}.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi-\left(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\equiv w_r\cos\varphi-w_\varphi\sin\varphi;$$

$$w^2=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi+\left(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\cos\varphi=w_r\sin\varphi+w_\varphi\cos\varphi.$$

При $t=1$ имеем:

$$w^1(1)=7{,}602;\ w^2(1)=-17{,}95.$$

Проверка:

$$w=\sqrt{\left(w^1\right)^2+\left(w^2\right)^2}=19{,}49.\ \otimes$$

Пример 5.1.4. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r=22\cdot\frac{1-\dfrac{t^2}{121}}{t};\ \varphi=\arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t=9\,c$. Радиус дан в метрах.

Ответ:

r	$\dot{r}$	φ	$\dot{\varphi}$	v_r	v_φ	v	v^1	v^2
м	м/с	рад	рад/сек			м/с		
0,81	-0,45	0,61	-0,16	-0,45	-0,13	0,47	-0,3	-0,37

Пример 5.1.5. Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \\ x^3 = h, \end{cases} \det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{\{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\right\}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\varphi\,\vec{e}_2 + h\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j}\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r}h\cdot\vec{e}_3 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_r$

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_{\varphi}$ имеем:

$$\vec{g}_{\varphi}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \varphi}\equiv\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x^{2}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{3}}\frac{\partial x^{3}}{\partial \varphi}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_{1}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_{2}+\frac{\partial}{\partial \varphi}h\cdot\vec{e}_{3}=$$

$$=-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_{\varphi}$

$$\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|=\sqrt{\left(\vec{g}_{\varphi},\vec{g}_{\varphi}\right)}=\sqrt{\left(-r\sin\varphi\right)^{2}+\left(r\cos\varphi\right)^{2}}=r,$$

то поле $\vec{g}_{\varphi}$ ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}=\frac{1}{\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|}\vec{g}_{\varphi}=\frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}\right)=$$

$$=-\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_{h}$ имеем:

$$\vec{g}_{h}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial h}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial h}\equiv\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial h}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x^{2}}{\partial h}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{3}}\frac{\partial x^{3}}{\partial h}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial h}\left(r\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_{1}+\frac{\partial}{\partial h}\left(r\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_{2}+\frac{\partial}{\partial h}h\cdot\vec{e}_{3}=\vec{e}_{3}.$$

Таким образом, базисное векторное поле $\vec{g}_{h}$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h\rangle}=\vec{e}_{3}.\otimes$$

Пример 5.1.6. Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ x^3 = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, \theta)}\right) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\sin\theta,$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{\{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta \le \pi\right\}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cdot\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\cdot\sin\varphi\,\vec{e}_2 + r\cos\theta\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\theta\right)\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin\theta\sin\varphi\right)^2 + \cos^2\theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_{\varphi}$ имеем:

$$\vec{g}_{\varphi}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \varphi}\equiv\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x^{2}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{3}}\frac{\partial x^{3}}{\partial \varphi}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_{1}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_{2}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\cos\theta\right)\cdot\vec{e}_{3}=$$

$$=-r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|=\sqrt{\left(-r\sin\theta\sin\varphi\right)^{2}+\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)^{2}}=\sqrt{r^{2}\sin^{2}\theta}=r\sin\theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}=\frac{1}{\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|}\vec{g}_{\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}\right)=$$

$$=-\sin\varphi\cdot\vec{e}_{1}+\cos\varphi\cdot\vec{e}_{2}.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_{\theta}$ имеем:

$$\vec{g}_{\theta}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \theta}\equiv\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial \theta}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x^{2}}{\partial \theta}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{3}}\frac{\partial x^{3}}{\partial \theta}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_{1}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\sin\varphi\right)\cdot\vec{e}_{2}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\right)\cdot\vec{e}_{3}=$$

$$=r\cos\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_{1}+r\cos\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_{2}-r\sin\theta\cdot\vec{e}_{3}.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_{\theta}\right\|=\sqrt{\left(r\cos\theta\cos\varphi\right)^{2}+\left(r\cos\theta\sin\varphi\right)^{2}+\left(-r\sin\theta\right)^{2}}=r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\theta\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\theta\right\|}\vec{g}_\theta = \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 - r\sin\theta\cdot\vec{e}_3 \right) =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 - \sin\theta\cdot\vec{e}_3 . \otimes$$

Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

Вычисление криволинейных интегралов

Пример 6.2.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x+y)dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками $A(0,\,0,\,R)$, $B\left(\frac{R}{2},\,\frac{R}{2},\,\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности:

$$x = t,\; y = t,\; z = \sqrt{R^2 - 2t^2}\;,\; 0 \le t \le \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x,\,y,\,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\,y(t),\,z(t))\cdot\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2}\,dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x+y)dl = \int_0^{R/2} 2t\,\frac{\sqrt{2}Rdt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2\left(\sqrt{2} - 1\right). \otimes$$

Пример 6.2.2. Найти массу $1/4$ окружности

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = R^2,$$

если $\rho(x_1, x_2) = x_2$ и $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t, \\ x_2 = R\sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$M = \int\limits_W \rho(x_1, x_2)dl =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin t dt = R^2. \otimes$$

Пример 6.2.3. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_W (x+y)dx - xdy,$$

где путь W – отрезок прямой, соединяющий точки $M_0(0;\,0)$ и $M_1(4;\,2)$.

Р е ш е н и е. Используем формулу (10.1.18) для случая плоского пути. Здесь

$$\vec{M_0M_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{M_0M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\vec{M_0M} = t\cdot\vec{M_0M_1},\ \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases}\ y = \frac{1}{2}x,\ x \in [0,\,4].$$

Имеем:

$$\int\limits_W (x+y)dx - xdy = \int\limits_0^4\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x\right)dx = \int\limits_0^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8. \otimes$$

Пример 6.2.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_W x^2ydx + y^2xdy$$

по пути с параметризацией $x = t,\ y = t^3,\ t \in [0,\,1].$

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\,\beta}} F_1\left(\vec{x}\right)dx_1 + F_2\left(\vec{x}\right)dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[F_1\left(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)\right)\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2\left(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)\right)\frac{dx_2(t)}{dt}\right]dt$$

Получаем:

$$\int\limits_{W} x^2 y dx + y^2 x dy = \int\limits_{0}^{1}\left(t^5 + 3t^9\right)dt = \left(\frac{t^6}{6} + 3\frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

Пример 6.2.5. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\hat{W}}\left(x_2{}^2 - x_3{}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - x_1{}^2dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, начальной и конечными точками $M_0(0;\,0;\,0)$, $M_1(1;\,1;\,1)$ соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$I_{W_{a,\,b}} = \int\limits_{W_{a,\,b}} F_1\left(\vec{x}\right)dx_1 + F_2\left(\vec{x}\right)dx_2 + F_3\left(\vec{x}\right)dx_3 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[F_1\left(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)\right)\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2\left(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)\right)\frac{dx_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3\left(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t)\right)\frac{dx_3}{dt}(t)\right]dt.$$

Пределы изменения параметра $t \in [0,\,1]$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Подстановка данных задачи даёт:

$$\int\limits_{\hat{W}}\left(x_2{}^2 - x_3{}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - x_1{}^2dx_3 = \int\limits_{0}^{1}\left[\left(t^4 - t^6\right) + 4t^6 - 3t^4\right]dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\left(3t^6 - 2t^4\right)dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{35}. \otimes$$

Пример 6.2.6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x+y)dx+(x-y)dy,$$

где W – окружность с уравнением $(x-1)^2+(y-1)^2=4.$

Р е ш е н и е. Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t)=(1+2\cos t)\vec{e}_1+(1+2\sin t)\vec{e}_2,$$
$$0\le t\le 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1\left(\vec{x}\right)dx+F_2\left(\vec{x}\right)dy=\int_\alpha^\beta\left[F_1\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}+F_2\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}\right]dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt}=-2\sin t,\ \frac{dy(t)}{dt}=2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x+y)dx+(x-y)dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)+(2\cos t-2\sin t)2\cos t\right]dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-4\sin t-8\sin t\cdot\cos t+4\cos 2t)dt=0.\ \otimes$$

Практическое занятие 3. Кратные интегралы

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пример 6.3.1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$$

Р е ш е н и е. Область интегрирования D ограничена линиями

$$x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x^2},\ y=1-x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке $(0;1)$, ветви параболы направлены вниз. Область D представим объединением двух областей: области D_1, ограниченной ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ и прямыми линиями $y=0,\ y=1$; области D_2, ограниченной линиями $x=\pm\sqrt{1-y^2}$, $y=-1,\ y=0$. Тогда имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,\,y)dy=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}}f(x,\,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}f(x,\,y)dx.\otimes$$

Пример 6.3.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D x\ln y\,dxdy,$$

где $D=\{(x,\,y):0\le x\le 4;1\le y\le e\}$.

Р е ш е н и е. Так как область D является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\,y)dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D x\ln y\,dxdy=\int\limits_0^4 xdx\int\limits_1^e\ln y\,dy=\left\{\begin{matrix}u=\ln y, & du=\dfrac{dy}{y},\\ dv=dy, & v=y.\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^4 xdx\left\{y\ln y\Big|_1^e-\int\limits_1^e dy\right\}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\cdot\left\{y\ln y\Big|_1^e-y\Big|_1^e\right\}=8\cdot(e-e+1)=8.\otimes$$

Пример 6.3.3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$.

Р е ш е н и е. Область D ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией $x=2$, справа – вертикальной прямой линией $x=3$, сверху – прямой линией $y=2x$, снизу – прямой линией $y=x$. Область простая относительно оси OY, следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,\,y)dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy = \int\limits_2^3 dx\left(xy+y^2\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= \int\limits_2^3 \left(2x^2+4x^2-x^2-x^2\right)dx = 4\int\limits_2^3 x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes$$

Пример 6.3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x^2.$

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint\limits_D (2x-y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy = \int\limits_1^2 dx\left(2xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(2x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{10}. \otimes$$

Вычисление площади, объёма и массы

Пример 6.3.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y-y^2,\ x+y=6.$$

Р е ш е н и е. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2-4y+x=0, \\ x+y=6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий: $A(4;\,2)$, $B(3;\,3)$. Поэтому площадь фигуры равна

$$S \equiv \mu(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int\limits_2^3 \left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\right)dy =$$

$$= \int_2^3 \left(-y^2 + 5y - 6\right) dy = \left(-\frac{1}{3} y^3 + \frac{5}{2} y^2 - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6}. \otimes$$

Пример 6.3.6. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью

$$\sigma(x, y) = 16x + \frac{9}{2} y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x = \frac{1}{4},\ y = 0,\ y^2 = 16x,\ y \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$x = \frac{1}{16} y^2,$$

то $x \geq 0$. Поэтому область D можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4},\ 0 \leq y \leq 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D) = \iint_D \sigma(x, y) dxdy = \iint_D \left(16x + \frac{9}{2} y^2 \right) dxdy =$$

$$= \int_0^{1/4} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2} y^2 \right) dy = \int_0^{1/4} \left(16xy + \frac{3}{2} y^3 \right) \Big|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160 \int_0^{1/4} x^{3/2} dx = 2. \otimes$$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Пример 6.3.7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

переходя к полярным координатам, где область D – 1-я четверть круга

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Р е ш е н и е. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r;\varphi) : 0 \le r \le a;\ 0 < \varphi \frac{\pi}{2} \right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_\Omega \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,r dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} r^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \otimes$$

Пример 6.3.8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, переходя к полярным координатам, если область D – кольцо, заключённое между окружностями $x^2+y^2=e^2$ и $x^2+y^2=e^4$.

Р е ш е н и е. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint\limits_\Omega \ln r^2 r dr d\varphi = 2\iint\limits_\Omega r\ln r dr d\varphi =$$

$$= \left\{\Omega : 0 \le \varphi \le 2\pi;\ e \le r \le e^2\right\} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_e^{e^2} r\ln r dr = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln r, & du = \dfrac{dr}{r}, \\ dv = r dr, & v = \dfrac{r^2}{2}. \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2}\ln r \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int\limits_e^{e^2} r dr \right\} = 2\int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}e^2\left(3e^2-1\right) \right] d\varphi = \pi e^2\left(3e^2-1\right). \otimes$$

Пример 6.3.9. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=4.$$

Р е ш е н и е. Тело ограничено кругом на плоскости XOY с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$V = \iint\limits_D f(x,\, y)dxdy = \iint\limits_\Omega f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)rdr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} (4 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)rdr = 16\int\limits_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= 16\left[\varphi - \frac{\sqrt{2}}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes$$

Пример 6.3.10. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D xdxdy,$$

где область D ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0;\; y^2 - 8y + x^2 = 0;\; y = \frac{1}{\sqrt{3}}x;\; x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область D неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2 + x^2 = 4;\; (y-4)^2 + x^2 = 16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты $(0;\, 2)$ и $(0;\, 4)$, а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область D лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2 + x^2 \geq 4;\; (y-4)^2 + x^2 \leq 16.$$

Кроме этого, область D лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси OX, то область D лежит над прямой линией $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и справа от прямой линии $x = 0$. Поэтому координаты точек области D удовлетворяют неравенствам

$$y \ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \ge 0.$$

Таким образом,

$$D = \begin{cases} (y-2)^2 + x^2 \ge 4, \\ (x;\ y): (y-4)^2 + x^2 \le 16, \\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x \ge 0. \end{cases}$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint\limits_D x dx dy = \iint\limits_\Omega r\cos\varphi r dr d\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, получаем

$$\Omega = \begin{cases} (r\sin\varphi - 2)^2 + r^2\cos^2\varphi \ge 4, \\ (r;\ \varphi): (r\sin\varphi - 4)^2 + r^2\cos^2\varphi \le 16, \\ r\sin\varphi \ge \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}},\ r\cos\varphi \ge 0. \end{cases}$$

Решение этих неравенств относительно r и φ имеет вид

$$\Omega = \begin{cases} (r;\ \varphi): \quad \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 4\sin\varphi \le r \le 8\sin\varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint\limits_D x dx dy = \iint\limits_\Omega r\cos\varphi r dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Пример 6.3.11. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z)dxdydz,$$

где область V – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 1.$$

Р е ш е н и е. Используя формулу (1.50)

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

получаем:

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z)dxdydz = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{1} (x - 2y + z)dz = -18. \otimes$$

Пример 6.3.12. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz,$$

где область V – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 2.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение плоскости

$$z = 2 - x - y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).

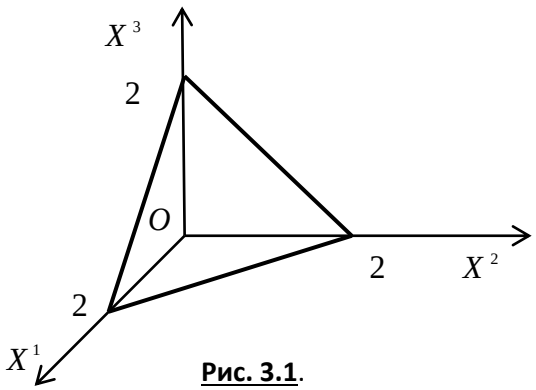


Рис. 3.1.

Применяем для решения формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left[x\cdot z + y\cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int\limits_0^2 \left[2y - x\cdot\frac{y^2}{2} - y\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[\frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2. \otimes$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических

и сферических координатах

Пример 6.3.13. Найти объём кругового цилиндра высоты H с радиусом основания R.

Р е ш е н и е. Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^H dz = \pi R^2 H . \otimes$$

Пример 6.3.14. Найти объём шара радиуса R.

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x,\, y,\, z) = f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 . \otimes$$

Пример 6.3.15. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz,$$

где область V ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$ (конус),

$$z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2$$ (эллиптический параболоид).

Р е ш е н и е. Область V – тело вращения вокруг оси OZ, поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \cos^2\varphi\, r\, dr d\varphi dz .$$

Задаём область Ω' неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2 \text{ и } \frac{11}{2} - r^2 \le z \le \frac{9}{2}r .$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение $r = 1$, следовательно, $0 \le r \le 1$. При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ \frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \cos^2\varphi\, r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \ldots = \pi\,. \otimes$$

Практическое занятие 4

Приложения криволинейных и кратных интегралов

Пример 6.4.1. Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = \int\limits_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{x}_0 - \vec{x}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3}\,dl\,, \qquad (1)$$

где $\vec{x}_0$ – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right)=\frac{dQ\left(\vec{x}\right)}{dl}.$$

Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной L, имеющей форму дуги окружности радиуса r, в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

Р е ш е н и е. Так как $\gamma\left(\vec{x}\right)=const$, то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_W\frac{\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl=$$

$$=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int_W\frac{x_0-x}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl\right)\vec{e}_1+\left(\int_W\frac{y_0-y}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl\right)\vec{e}_2\right]. \qquad (2)$$

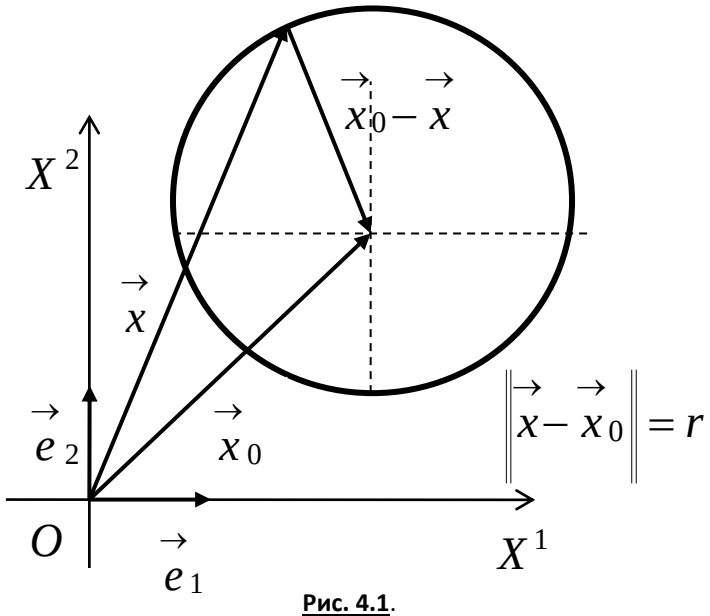


Рис. 4.1.

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\cos t \cdot \vec{e}_1 + r\sin t \cdot \vec{e}_2 \qquad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \qquad (4)$$

– скалярная форма.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int_W f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}(t)\right]^2}\,dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой $dl = \left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\|dt$. По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r\sin t \cdot \vec{e}_1 + r\cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\|dt = rdt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\| = \left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_W\frac{x_0-x}{\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|^3}dl\right)\vec{e}_1+\left(\int\limits_W\frac{y_0-y}{\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|^3}dl\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\frac{r\cos t}{r^3}rdt\right)\vec{e}_1+\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\frac{r\sin t}{r^3}rdt\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\frac{\cos t}{r}dt\right)\vec{e}_1+\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\frac{\sin t}{r}dt\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos t dt\right)\vec{e}_1+\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\sin t dt\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\sin t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_1+\left(-\cos t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1-\underbrace{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}_{=0}\vec{e}_2\right]=-\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1.$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=-\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\vec{e}_1. \qquad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E=\left\|\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)\right\|=\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (7)$$

из которой следует:

1) $E=\dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ при $\alpha=\pi$;

2) $E=0$ при $\alpha=2\pi$. $\otimes$

Пример 6.4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0.$$

Р е ш е н и е. Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x=r\cos\varphi\ ,\ y=r\sin\varphi.$$

При переходе к полярным координатам область D перейдёт в область D', ограниченную линиями

$$r=4\cos\varphi,\ r=8\cos\varphi,\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна $S=\iint\limits_{D'}r^2drd\varphi$. В полярных координатах область D' задаётся неравенствами

$$D'=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\\ 4\cos\varphi\le r\le 8\cos\varphi.\end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S=\iint\limits_{D'}r^2drd\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}rdr.$$

Результат получается интегрированием:

$$S=\iint\limits_{D'}r^2drd\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}rdr=24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi=\left\{\cos^2\varphi=\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right\}=$$

$$=12\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2\varphi d(2\varphi)=8\pi-\left(6+3\sqrt{3}\right).\otimes$$

Пример 6.4.3. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma}-x^2ydx+xy^2dy,\qquad(1)$$

где Γ – окружность с уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Формула Грина имеет вид:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y)dxdy = \oint\limits_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 ydx + xy^2 dy = \iint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2\right)dxdy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 ydx + xy^2 dy = \iint\limits_{\Omega} r^2 rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}R^4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \otimes$$

Пример 6.4.4. Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2,\ x = y^2,\ 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

Р е ш е н и е. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью OY и OX соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right),\ B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{OA} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{BO} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8}\int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int_{1/4}^{0} \sqrt{x}dx = \frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0{,}13. \otimes$$

Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого и второго рода

Пример 6.5.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F \left(x^2 + y^2\right) dS,$$

где F – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$.

Р е ш е н и е. Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\iint_F f(x, y, z) dS =$$

$$= \iint_{G^{12}} f\left(x, y, \varphi(x, y)\right) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy. \qquad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2} dxdy.$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint_F \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Так как область G^{12} – это круг, определённый неравенством $x^2+y^2\le 1$, то

$$\iint\limits_F \left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_{G^{12}}\sqrt{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)dxdy=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi\,.\otimes$$

Пример 6.5.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_F\left(\sqrt{a^2-x^2}+z\right)ydS,$$

где F – поверхность цилиндра

$$x^2+z^2=a^2,$$

заключённая между плоскостями $y=b$ и $y=c$.

Р е ш е н и е. Из уравнения

$$x^2+z^2=a^2$$

следует

$$z=\varphi^3(x,\,y)=\pm\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Поверхность F разбилась на две части: $F_1\ (z\ge 0)$ и $F_2\ (z\le 0)$. Определим элемент поверхности dS в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial\varphi(x,\,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\ \frac{\partial\varphi(x,\,y)}{\partial y}=0;$$

$$dS=\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\,y)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\,y)\right]^2}\,dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_F f(x,\,y,\,z)dS=\iint\limits_G f\left(x,\,y,\,\varphi(x,\,y)\right)\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\,y)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\,y)\right]^2}\,dxdy,$$

получим:

$$\iint\limits_F\left(\sqrt{a^2-x^2}+z\right)ydS=$$

$$= \iint\limits_{F_1} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS + \iint\limits_{F_2} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS =$$

$$= \iint\limits_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, y \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint\limits_{G_1} y dx dy =$$

$$= 2a \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{b}^{c} y dy = 2a^2 \left(c^2 - b^2\right). \otimes$$

Поверхностные интегралы второго рода

Пример 6.5.3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_F x^2 y^2 z dx dy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость XOY является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint\limits_F x^2 y^2 z dx dy = \iint\limits_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\iint\limits_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx dy = \iint\limits_{G^{12}} r^5 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \sqrt{R^2 - r^2}\, dr d\varphi =$$

$$= 4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \sqrt{R^2 - r^2} = t;\ R^2 - r^2 = t^2; \\ r dr = -t dt;\ r^4 = \left(R^2 - t^2\right)^2. \end{matrix} \right\} == \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - t^2\right)^2 t^2 dt$$

$$= \frac{2}{105}\pi R^7. \otimes$$

Пример 6.5.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_F x dydz + ydzdx + zdxdy,$$

где F – верхняя сторона части плоскости с уравнением $x + z - 1 = 0$, отсечённая плоскостями с уравнениями $y = 0$, $y = 4$ и лежащая в первом октанте.

Р е ш е н и е. Заданная поверхность изображена на рисунке5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_F P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z)dydz + \iint\limits_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z)dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y))dxdy.$$

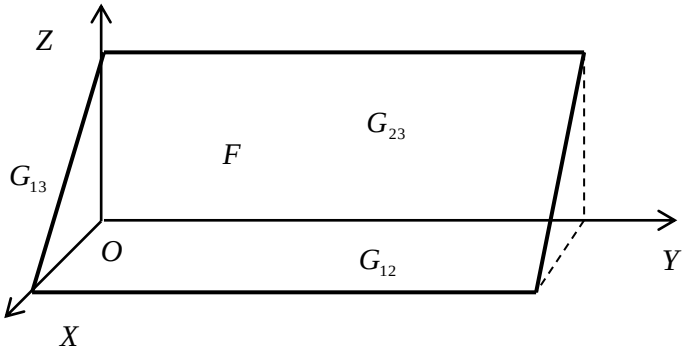


Рис. 5.1.

Так как плоскость параллельна оси OY, то

$$\iint\limits_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z)dxdz = 0.$$

Получаем:

$$\iint\limits_F x dydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{G_{23}} (1 - z)dydz + \iint\limits_{G_{12}} (1 - x)dxdy = 4. \otimes$$

Практическое занятие 6

Градиент скалярного поля. Дивергенция и ротор векторного поля

Пример 6.6.1. Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где $r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Р е ш е н и е. По определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r)\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r)\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}\vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y}{r}\vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z}{r}\vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \otimes$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$, называется ***потенциальным полем***, а скалярная функция φ называется ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}$. Само векторное поле $\vec{a} = \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ называется ***потенциальным*** полем. Иногда потенциальное поле определяют соотношением $\vec{a} = -\operatorname{grad}\varphi$.

Пример 6.6.2. Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$.

Р е ш е н и е. По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \varphi(r)\vec{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)x] + \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)y] + \frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\cdot r + 3\varphi(r). \otimes$$

Векторное поле называется ***соленоидальным***, если выполнено условие $div\vec{a} = 0. \otimes$

Пример 6.6.3. Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

Р е ш е н и е. Условие соленоидальности $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ для поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr}\cdot r+3\varphi(r)=0$$

С разделяющимися переменными. Разделяя переменные и учитывая, что в случае функций одного переменного производная $\frac{d\varphi}{dr}$ – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=-3\frac{dr}{r}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем $\ln|\varphi|=-3\ln r+C_1$. Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде $C_1=\ln C$, где C – произвольная положительная постоянная, получаем $\varphi=\frac{C}{r^3}$. Здесь C уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная. $\otimes$

Пример 6.6.4. Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a}=\varphi(r)\vec{r},$$

где $r=\left\|\vec{r}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Р е ш е н и е. Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a}=\varphi(r)\vec{r}=\varphi(r)x\,\vec{e}_1+\varphi(r)y\,\vec{e}_2+\varphi(r)z\,\vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)z]-\frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)y]\right\}\vec{e}_1+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)x]-\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)z]\right\}\vec{e}_2$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)y]-\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)x]\right\}\vec{e}_3=\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{yz}{r}-\frac{zy}{r}\right)\vec{e}_1+$$

$$+\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{zx}{r}-\frac{xz}{r}\right)\vec{e}_2+\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{xy}{r}-\frac{yx}{r}\right)\vec{e}_3=\vec{0}.\otimes$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение $rot\,\vec{a}=\vec{0}$, называется ***безвихревым*** полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

Пример 6.6.5. Доказать, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\right)-\left(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\right). \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Для решения применим правило действия оператора $\vec{\nabla}$ на произведение функций

$$\vec{\nabla}(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi)=$$
$$=\vec{\nabla}\left(\overset{\vee}{\varphi}\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi\right)+\vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\overset{\vee}{\omega}\cdot\ldots\cdot\psi\right)+\ldots+\vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\overset{\vee}{\psi}\right), \qquad (2)$$

где символ $\vee$ над функцией устанавливает порядок действия оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\vec{B}\right]\right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\vec{B}\right]\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{A}},\vec{B}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\overset{\vee}{\vec{B}}\right]\right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{A}},\vec{B}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right],\vec{B}\right)=\left(\vec{B},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=\left(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\right). \qquad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\overset{\vee}{\vec{B}}\right]\right)=-\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{B}},\vec{A}\right]\right)=-\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\right)=-\left(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\right). \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). $\otimes$

Пример 6.6.6. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\left(u\cdot\vec{A}\right)=\left[\operatorname{grad}u,\vec{A}\right]+u\cdot\operatorname{rot}\vec{A},$$

где $u(M)$ – скалярное, а $\vec{A}(M)$ – векторное поля.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть:

$$\operatorname{rot}\left(u\cdot\vec{A}\right)=\left[\vec{\nabla},u\cdot\vec{A}\right]=\left[\vec{\nabla},\overset{\vee}{u}\cdot\vec{A}\right]+\left[\vec{\nabla},u\cdot\overset{\vee}{\vec{A}}\right]=$$

$$=\left[\vec{\nabla}u,\vec{A}\right]+u\cdot\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=\left[\operatorname{grad}u,\vec{A}\right]+u\cdot\operatorname{rot}\vec{A}.\ \otimes$$

Пример 6.6.7. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A},$$

где Δ – ***оператор Лапласа*** $\Delta=\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)$.

Р е ш е н и е. Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right),$$

полагая $\vec{A}=\vec{B}=\nabla$, получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}.\ \otimes$$

Пример 6.6.8. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = x^3 \vec{e}_1 - y^2 \vec{e}_2 + y \vec{e}_3$$

по замкнутому контуру $(t \in [0, 2\pi])$, заданному уравнениями

$$x = \cos t,\ y = 3\sin t,\ z = \cos t - \sin t.$$

Р е ш е н и е. По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{A}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённому интегралу:

$$\oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dx^2 + y dx^3 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cos^3 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t - 3\sin^2 t - 3 \sin t \cos t \right) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) -$$

$$-\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) d(2t) - 3 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = -3\pi. \otimes$$

Пример 6.6.9. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = -\omega x_2 \vec{e}_1 + \omega x_1 \vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом R, в положительном направлении.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности

$$x_1 = R\cos t,\ x_2 = R\sin t,$$

где $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},\,d\,\vec{x}\right)=\oint\limits_{\Gamma}-\omega x_2dx_1+\omega x_1dx_2=$$

$$=\omega\int\limits_0^{2\pi}\left(R^2\sin^2t+R^2\cos^2t\right)dt=2\pi R^2\omega.\otimes$$

Пример 6.6.10. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=\left(x_1+3x_2+2x_3\right)\vec{e}_1+\left(2x_1+x_3\right)\vec{e}_2+\left(x_1-x_2\right)\vec{e}_3$$

по контуру треугольника ABC, если $A(2;\,0;\,0)$, $B(0;\,3;\,0)$, $C(0;\,0;\,1)$.

Р е ш е н и е. Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},\,d\,\vec{x}\right)=\iint\limits_{S}\left(\vec{n},\,rot\,\vec{F}\right)ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{1}=1,$$

или

$$3x_1+2x_2+6x_3=6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ x_1+3x_2+2x_3 & 2x_1+x_3 & x_1-x_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1-x_2\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(2x_1+x_3\right)\right]\vec{e}_1-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1-x_2\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1+3x_2+2x_3\right)\right]\vec{e}_2+$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1+x_3\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1+3x_2+2x_3\right)\right]\vec{e}_3=-2\,\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Теперь циркуляция

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\iint\limits_{S}\left(\vec{n},rot\vec{F}\right)ds=$$

$$=-2\iint\limits_{G^{23}}dx_2dx_3+\iint\limits_{G^{13}}dx_3dx_1-\iint\limits_{G^{12}}dx_1dx_2=$$

$$=-2\int\limits_0^3 dx_2\int\limits_0^{1-x_2/3}dx_3+\int\limits_0^1 dx_3\int\limits_0^{2-x_3}dx_1-\int\limits_0^2 dx_1\int\limits_0^{3-3x_1/2}dx_2=$$

$$=-2\left[x_2-\frac{1}{6}x_2^2\right]_0^3+\left[2x_3-x_3^2\right]_0^1-\left[3x_1-\frac{3}{4}x_1^2\right]_0^2=-5.\otimes$$

Пример 6.6.11. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=x_2\vec{e}_1-x_1\vec{e}_2+a\vec{e}_3\ (a=const)$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0$$

в положительном направлении двумя способами.

Р е ш е н и е. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид $(R=1)$:

$$x_1=\cos t,\ x_2=\sin t.$$

Теперь имеем:

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\oint\limits_{\Gamma}F_1dx_1+F_2dx_2+F_3dx_3=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\sin t(-\sin t)-\cos t\cos t\right]dt=-\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=-2\pi.$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ x_2 & -x_1 & a\end{vmatrix}=-2\vec{e}_3.$$

Нормаль плоскости треугольника $\vec{n}=\vec{e}_3$. Следовательно, имеем

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\iint\limits_{S}\left(\vec{n},rot\vec{F}\right)ds=-2\iint\limits_{S}\left(\vec{n},\vec{e}_3\right)ds=-2\iint\limits_{S}dx_1dx_2=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 rdr=-2\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}=-2\pi\,.\otimes$$

Пример 6.6.12. Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность F, ограничивающую область Ω, имеющую объём V.

Р е ш е н и е. Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\operatorname{div}\vec{r}=1+1+1=3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oiint\limits_{F}\left(\vec{r},d\vec{s}\right)=\iiint\limits_{V}\left(\vec{\nabla},\vec{r}\right)dV=3\iiint\limits_{V}dV=3V\,.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления объёма области Ω при помощи поверхностных интегралов

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{F}\left(\vec{r},\vec{n}\right)ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V=\frac{1}{3}\oiint\limits_{F}\left(xn_1+yn_2+zn_3\right)ds=\frac{1}{3}\oiint\limits_{F}\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – координаты орта нормали $\vec{n}$. $\otimes$

Пример 6.6.13. Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}\,,\ z=0\ \left(0\le z\le1\right).$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \oiint\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \iiint\limits_V div\vec{F}\, dv.$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1+1+1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке $(0; 0; 1)$, ограниченный плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\Phi = \oiint\limits_S \left(\vec{r}, \vec{n} \right) ds = \iiint\limits_V div\vec{r}\, dv = 3\iiint\limits_V dv = 3\iiint\limits_\Omega r d\varphi dr dz =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{1-r} dz = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(1-r) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \pi. \otimes$$

Пример 6.6.14. Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint\limits_S \left(\vec{F}, d\vec{s} \right) = \iint\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \iint\limits_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds.$$

Так как $r = R = const$ и скалярное произведение ортов

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) = 1,$$

получаем:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \iint\limits_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} \iint\limits_S ds = \frac{q 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{4\pi q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}. \otimes$$

Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 6.7.1. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$$

Р е ш е н и е. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y\left(x^2+3\right)dy=3x\left(2+y^2\right)dx.$$

2) Замечаем, что $x^2+3>0,\ 2+y^2>0.$ Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на $\left(x^2+3\right)\left(2+y^2\right)$:

$$\frac{2y}{2+y^2}dy=\frac{3x}{x^2+3}dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int\frac{2y}{2+y^2}dy+C_1=\int\frac{3x}{x^2+3}dx+C_2;$$

$$\ln\left(2+y^2\right)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C;$$

$$C=C_2-C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2\ln\left(2+y^2\right)-3\ln\left(x^2+3\right)=C;$$

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3}=C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3}=C$$

при всевозможных значениях параметра C. $\otimes$

Пример 6.7.2. Найти частное решение уравнения

$$\left(1+y^2\right)dx = xydy,$$

если $y=1$ при $x=2$.

Р е ш е н и е. 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy = \int\frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \ln|x| + \ln C;$$

$$\left(1+y^2\right) = Cx^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2 = Cx^2 - 1$$

3) Используем начальные условия:

$$4 = 2C;\ C = 2;\ x^2 = 2\left(1+y^2\right).$$

4) Частный интеграл:

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}.$$

Ответ: $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}.$ $\otimes$

Дифференциальные уравнения с однородной правой частью

Пример 6.7.3. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\frac{y}{x}-5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2-6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x)=\frac{y}{x},$$

где $u(x)-$ новая искомая функция. Так как

$$y'=u+xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u-5u^2}{2-6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{2-6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что $1+u^2\neq 0,\ x\neq 0$:

$$\frac{2-6u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2arctgu-3\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+C.$$

Заменяя $u(x)=\frac{y}{x}$, получаем:

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)-\ln|x|=C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)-\ln|x|=C.\otimes$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 6.7.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Здесь $p(x)=3,\ f(x)=e^{2x}$.

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx}=-3y;$$

$$\frac{dy}{y}=-3dx;$$

$$\ln|y|=-3x+\ln C_1;$$

$$|y|=C_1e^{-3x};$$

$$y=C_2e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде $z=C_2(x)e^{-3x}$. Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx}=e^{5x};$$

$$C_2(x)=\int e^{5x}dx+C;$$

$$C_2(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}. \otimes$$

Пример 6.7.5. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием $y(1) = 1.$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right) = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(-2\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right) = \frac{1}{x} + Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2} + C = 1,$$

откуда $C = 0$. Решение задачи Коши принимает вид:

$$z = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}. \otimes$

Неполные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Пример 6.7.6. Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1, \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0.$

Р е ш е н и е. Интегрируем уравнение последовательно:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \int xe^x dx + C_1 = \begin{Bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{Bmatrix} = xe^x - \int e^x dx + C_1 =$

$= (x-1)e^x + C_1;$

2) $y = \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \begin{Bmatrix} u = x-1, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{Bmatrix} =$

$= (x-2)e^x + C_1 x + C_2.$

Так как в силу первого начального условия $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$, получаем:

$(0-1)e^0 + C_1 = 0,\ C_1 = 1.$

Так как в силу второго начального условия $y\big|_{x=0} = 1$, получаем:

$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1,\ C_2 = 3.$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$y = (x-2)e^x + x + 3. \otimes$

Пример 6.7.7. Найти общее решение ОДУ

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Решаем уравнение относительно $z = \dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1,\ \dfrac{dy}{dx} = x + C_1,\ y = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2;$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2,\ \dfrac{dy}{dx} = 2x + C_3,\ y = x^2 + C_3 x + C_4.$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2-3z+2=(z-z_1)(z-z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y-\frac{1}{2}x^2-C_1x-C_2\right)\cdot\left(y-x^2-C_3x-C_4\right)=0.\otimes$$

Пример 6.7.8. Найти общее решение ОДУ

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3.$$

Р е ш е н и е. Положим $\frac{d^2y}{dx^2}=z$, тогда из уравнения получаем

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3.$$

Интегрируя получившееся уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3,\ \frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{2}dx,\ \frac{1}{z^2}=x+C_1,\ z^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

Заменяя $z=\frac{d^2y}{dx^2}$, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

Уравнение содержит только x и y. Разрешая его относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\pm1}{\sqrt{x+C_1}}.$$

Это уравнение интегрируем последовательно:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x+C_1}}+C_2=\left\{dx=d\left(x+C_1\right)\right\}=$$

$$= \pm\int \left(x + C_1\right)^{-1/2} d\left(x + C_1\right) + C_2 = \pm\left(x + C_1\right)^{1/2} + C_2$$

$$y_1 = \int \left(x + C_1\right)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = \left(x + C_1\right)^{3/2} + C_2 x + C^3,$$

$$y_2 = -\int \left(x + C_1\right)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = -\left(x + C_1\right)^{3/2} + C_2 x + C^3. \otimes$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Пример 6.7.9. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -2,\ k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-2x},\ e^{x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}. \otimes$$

Пример 6.7.10. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^x,\ xe^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x. \otimes$$

Пример 6.7.11. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2 + 3i,\ k_2 = 2 - 3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin x). \otimes$$

Пример 6.7.12. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$(k^2 - 1)(k - 2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\, e^{x},\, e^{2x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}. \otimes$$

Пример 6.7.13. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = (k-2)\left(k^2 - 2k + 2\right).$$

Уравнение принимает вид:

$$(k-2)\left(k^2 - 2k + 2\right) = 0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2,\; k_2 = 1+i,\; k_3 = 1-i.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{2x},\, e^{x}\cos x,\, e^{x}\sin x\right\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + e^{x}\left(C_2\cos x + C_3\sin x\right). \otimes$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод Лагранжа

Пример 6.7.14. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2 - x + 1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1,\ k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\ e^{x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x} \dfrac{dC_1}{dx} + e^{x} \dfrac{dC_2}{dx} = 0, \\ -e^{-x} \dfrac{dC_1}{dx} + e^{x} \dfrac{dC_2}{dx} = x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2}e^{x}\left(x^2 - x + 1\right);\ \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2 - x + 1\right).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int e^{x}\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_1 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\right)e^{x} + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int e^{-x}\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_2 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12\right)e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{x} - x^2 + x - 1. \otimes$$

Примеры из механики

Пример 6.7.15. С аэростата, падающего с высоты H со скоростью v_0, сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время t_0 аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна m, а сила сопротивления воздуха R и подъёмная сила аэростата T постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

Р е ш е н и е. Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось OZ направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m\ddot{z} = T + R - G, \qquad (1)$$

где $G = mg$ – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте H, поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H,\ \dot{z}(0) = -v_0. \qquad (2)$$

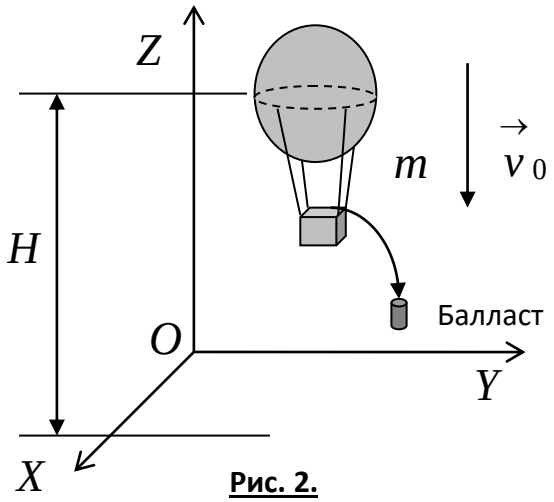


Рис. 2.

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m\dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \quad (3)$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Используя начальные условия (2), получаем для постоянных: $C_1 = -mv_0$, $C_2 = mH$. Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T + R - G}{m}t - v_0, \quad (5)$$

$$z = \frac{T + R - G}{2m}t^2 - v_0 t + H. \quad (6)$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m\ddot{z} = T - R - G, \quad (7)$$

$$z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m\dot{z} = (T - R - G)t + C_1, \quad (9)$$

$$mz = \frac{T - R - G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \quad (10)$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m}t^2. \quad (11)$$

Обозначим время падения аэростата t_1, а время подъёма t_2. Из условия задачи $t_0 = t_1 + t_2$. Подставляя $t = t_1$, $\dot{z}(t_1) = 0$, $z(t_1) = 0$ в (5) и (6) и $t = t_2$, $z(t_2) = H$ в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{T+R-G}{m}t_1 - v_0 = 0, \\ \dfrac{T+R-G}{2m}t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \dfrac{T-R-G}{2m}t_2^2 = H. \end{cases} \qquad (12)$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные H и v_0 с учётом того, что $t_2 = t_0 - t_1$, получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \dfrac{\sqrt{T+R-mg}}{T-R-mg}}. \otimes$$

Пример 6.7.16. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $v_{\max}$ и разгоняется с места до скорости v_* за время t_*. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

Р е ш е н и е. Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя $\vec{F}$ постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения $\vec{R} = k\vec{v}$, где коэффициент динамического трения $k > 0$ неизвестен; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (дороги); $\vec{G}$ – сила тяжести.

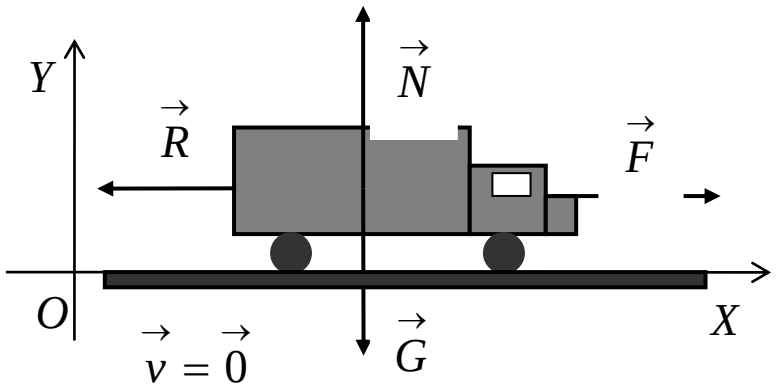


Рис. 2.

Обозначая $\dot{x}=v$, получаем:

$$m\dot{v}=F-kv \Rightarrow m\frac{dv}{dt}=F-kv \Rightarrow \frac{mdv}{F-kv}=dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k}\int\frac{d(F-kv)}{F-kv}=t+C \Rightarrow -\frac{m}{k}\ln(F-kv)=t+C.$$

Начальные условия $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=v(0)=0$. Из условия на скорость получаем, что $C=-\frac{m}{k}\ln F$. Подстановка даёт

$$t=-\frac{m}{k}\ln(F-kv)+\frac{m}{k}\ln F=-\frac{m}{k}\ln\frac{F-kv}{F} \Rightarrow t=-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv}{F}\right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость $v_{\max}$, то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt}=0 \Rightarrow m\ddot{x}=F-kv_{\max}=0 \Rightarrow k=\frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при $t=t_*$ и $v=v_*$, получаем:

$$t_*=-\frac{m}{F/v_{\max}}\ln\left(1-\frac{(F/v_{\max})v_*}{F}\right) \Rightarrow t_*=-\frac{mv_{\max}}{F}\ln\left(1-\frac{v_*}{v_{\max}}\right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}-v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}}{v_{\max}-v_*}. \otimes$$

Практическое занятие 8. Системы ОДУ

Линейные однородные системы ОДУ, метод Эйлера

Пример 6.8.1. Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \dfrac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

Р е ш е н и е. Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t},\ y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель $e^{-\mu t}$, получаем

$$\begin{cases} (1-\mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu+4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2,\ \mu_2 = -1.$$

1) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая $x^2 = a \in R^1$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая $x^2 = b \in R^1$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1e^{2t} - C_2e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 6.8.2. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1e^{-\mu t},\ y_2 = x_2e^{-\mu t},\ y_3 = x_3e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2,\ \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню $\mu_1 = -2$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$|y_1\rangle = a|a_1\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при $\mu_2 = \mu_3 = 1$ равен 1, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая $x_2 = a$, $x_3 = b$, получаем решение в виде

$$|x\rangle = a|a_2\rangle + b|a_3\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$|y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, |y_3\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix}. \otimes$$

Линейные неоднородные системы ОДУ, метод Лагранжа

Пример 6.8.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 = \dfrac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя $y_1 = x_1 e^{-\mu t}$ и $y_2 = x_2 e^{-\mu t}$, записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 1 = 0 : \mu_1 = -1;\ \mu_2 = 1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для $\mu_1 = -1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = a \Rightarrow x_1 = a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_2 = 1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1 |y_1\rangle + C_2 |y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},\ y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t)e^{t} + C_2(t)e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t)e^{t} - C_2(t)e^{-t}. \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирований и приведения подобных

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}(t)\cdot e^{t} + \dfrac{dC_2}{dt}(t)\cdot e^{-t} = 0, \\ \dfrac{dC_1}{dt}(t)\cdot e^{t} - \dfrac{dC_2}{dt}(t)\cdot e^{-t} = \dfrac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1-1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \dfrac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \dfrac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right) + A_1,\ C_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t} - \ln t\right) + A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1e^{t} + A_2e^{-t} - \ln t, \\ z_2(t) = A_1e^{t} - A_2e^{-t} - \dfrac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

Интегрирование и теория поля

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_W xy dl,$$

где путь W – контур треугольника с вершинами: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y)dx - xdy,$$

где путь W – отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0; 0), B(2; 0), C(4; 2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W xdy - ydx,$$

где W – путь, заданный неявным уравнением $y = x^3$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(2; 8)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x^2 dx + y^2 dy,$$

где W – путь, заданный неявным уравнением $y = \sqrt{x}$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$.

5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (5x^2 y - 2y^3)dxdy$$

по прямоугольнику $D = \{(x, y) \in R_2 : 2 \le x \le 5 \wedge 1 \le y \le 3\}$.

6. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y)dxdy$$

по области, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le 1$;

б) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2 \le 4$;

в) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2 \le 2x$;

г) $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, где D – первая четверть круга $x^2+y^2 \le 1$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а) $y=\ln x,\ x-y=1,\ y=-1$;

б) $y=x^2,\ 4y=x^2,\ x=2,\ x=-2$.

9. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$x=0,\ y=0, z=0,\ x+y+z=1$;

б) $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$x=0,\ y=0, z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$.

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями

$x^2+y^2=1,\ z=2$;

б) $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями

$x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=a\ (a>0)$.

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область V – это шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$;

б) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область V – это верхняя половина шара

$x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_F (x+18y+24z)ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x+2y+3z=1,$$

и неравенствами $x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$;

б) $\iint\limits_F (x^2+y^2)ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

и неравенствами $0 \leq z \leq 1.$

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint\limits_F zdxdy$, где поверхность F – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2+y^2+z^2=9;$$

б) $\iint\limits_F (x^2+y^2)dxdy$, где поверхность F – верхняя сторона части параболоида с уравнением

$$z=1-x^2-y^2,$$

отсечённая плоскостью $z=0$.

14. Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2-3x+2y$ по направлению радиуса-вектора точки $M(3;\ 4)$ в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля $u=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке $M(2;1)$.

16. Найти производную функции, определённой формулой $u=\dfrac{xyz}{3}$, в точке $M_0(1;\ 2;\ 3)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, если $M(4;1;6)$.

17. Доказать, что

а) $\operatorname{grad} r=\dfrac{\vec{r}}{r}$; б) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

19. Найти

а) $\operatorname{div}\vec{r}$; б) $\operatorname{div}\left(r^4\,\vec{r}\right)$; в) $\operatorname{div}\left(\left(\vec{A},\vec{r}\right)\vec{B}\right)$.

20. Найти $\operatorname{div}\vec{A}$, если:

а) $\vec{A}=(x-y)(y-z)\vec{e}_1+(y-z)(z-x)\vec{e}_2+(z-x)(x-y)\vec{e}_3$;

б) $\vec{A}=\left(x^2+y^2\right)(y-z)\vec{e}_1+\left(y^2+z^2\right)(z-x)\vec{e}_2+\left(z^2+x^2\right)(x-y)\vec{e}_3$.

21. Найти ротор векторного поля $\vec{A}(M)$:

а) $\vec{A}=\frac{y}{x}\vec{e}_1+\frac{z}{y}\vec{e}_2+\frac{x}{z}\vec{e}_3$;

б) $\vec{A}=yz\,\vec{e}_1+z(x+2y)\vec{e}_2+y(x+y)\vec{e}_3$.

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что для произвольного скалярного поля $\varphi(M)$ и для произвольных векторных полей $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$ справедливы следующие формулы:

а) $\left(\vec{A},\nabla\right)\varphi\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{A},\nabla\varphi\right)+\varphi\left(\vec{A},\nabla\right)\vec{B}$;

б) $\vec{C}\cdot\nabla\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\vec{A}\cdot\left(\left(\vec{C},\nabla\right),\vec{B}\right)+\vec{B}\cdot\left(\left(\vec{C},\nabla\right),\vec{A}\right)$;

в) $\left(\vec{C},\nabla\right)\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left[\vec{A},\left(\vec{C},\nabla\right)\vec{B}\right]-\left[\vec{B},\left(\vec{C},\nabla\right)\vec{A}\right]$.

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

а) $\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\varphi)$;

б) $\operatorname{rot}(\varphi\operatorname{grad}\psi)$;

в) $\operatorname{rot}\left[\vec{A},\operatorname{rot}\vec{\mathrm{B}}\right]$.

24. Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_1 + 6x\,\vec{e}_2$;

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2x\,\vec{e}_1 + 3y\,\vec{e}_2$;

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_2 + 6z\,\vec{e}_3$.

25. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = y\,\vec{e}_1 - z\,\vec{e}_2 + x^2 y\,\vec{e}_3$,

$x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ t \in [0,\ 2\pi]$;

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = z\,\vec{e}_1 - x\,\vec{e}_2 + yz\,\vec{e}_3$,

$x = 2\cos t,\ y = 6\sin t,\ z = 3,\ t \in [0,\ 2\pi]$;

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 4y\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 + y\,\vec{e}_3$,

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2 - \cos t - \sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1) Решить уравнение $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$.

Ответ: $(1+y)(1-x) = C$.

2) Решить уравнение $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$.

Ответ: $\dfrac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + C$.

3) Решить уравнение $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

Ответ: $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=C.$

2. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

1) Найти интегральные кривые уравнения $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=C.$

2) Найти интегральные кривые уравнения $y'=\frac{y}{x}-1.$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением $xe^{\frac{y}{x}}=C.$

3) Найти интегральные кривые уравнения

$$\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$$

3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

1) $(2x+1)\frac{dy}{dx}=4x+2y.$

2) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0,\ y(0)=0.$

3) $x\frac{dy}{dx}+y-e^x=0,\ y(a)=b.$

4) $\frac{dy}{dx}\cos^2 x+y=\operatorname{tg}x,\ y(0)=0.$

5) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ y(e)=\frac{e^2}{2}.$

6) $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\cos x,\ y(0)=0.$

7) $\frac{dy}{dx} + y\cos x = e^{\sin x},\ y(0) = 0.$

8) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2.$

9) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3.$

10) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y.$

11) $\frac{dy}{dx} - ay = e^{bx}.$

4. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

1) $\frac{d^3y}{dx^3} - 8y = 0.$

2) $\frac{d^4y}{dx^3} - y = 0.$

3) $\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$

4) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$

5) $\frac{d^5y}{dx^5} - 6\frac{d^4y}{dx^4} + 9\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

5. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -12x^2 + 6x - 4.$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 4e^x.$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = -4e^x + 3.$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=6\sin 2x.$

5) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=-13\sin 2x.$

6. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера и, если указано, выделить частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

1) $\begin{cases}\frac{dy^1}{dt}-2y^1+3y^2=0,\\ \frac{dy^2}{dt}-3y^1-2y^2=0.\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{dy^1}{dt}-2y^1+3y^2=0,\\ \frac{dy^2}{dt}-3y^1-2y^2=0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}-4y_1+y_2=0,\\ \frac{dy_2}{dt}-3y_1-y_2+y_3=0,\\ \frac{dy_3}{dt}-y_1-y_3=0.\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}+y_1-y_2-y_3=0,\\ \frac{dy_2}{dt}-y_1+y_2-y_3=0,\\ \frac{dy_3}{dt}-y_1-y_2+y_3=0.\end{cases}$

5) $\frac{d}{dt}|y\rangle=A|y\rangle,\ |y\rangle=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

6) $\dfrac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle,\ |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

7. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург

2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Учебно-методическим советом УГГУ

Председатель совета
_____Упоров С.А.

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург, 2021

Методические указания рассмотрены на заседании кафедры физики 5 октября 2020 года (протокол № 117) и рекомендованы для издания в УГГУ

ФИЗИКА. Методические указания для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки/Садырева О.В., Коршунов И.Г.; Урал.гос. горный ун-т.–Екатеринбург, 2019.– 29 стр.

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.
- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S= 800 + 8t – 0,5 t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/^{2} , при спуске с ускорением 9,8 м/с^2.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 м/^{2}, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин$^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8с$^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМРОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом C_2 H_2 при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 $см^3$ воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, γ=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 $см^3$ при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода СО, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°С до 100° С надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° С, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° С до 2000° С. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° С. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° С. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 $см^2$?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 $см^2$. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора 1, 5 $\cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30^0 С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 мм^2, ρ = 0,017(Ом· мм^2 /м), α = 0,0044 град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную
индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ² находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 $см^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 $см^2$, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с

амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин$^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин$^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин$^{-1.}$ Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с$^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний y =0,1sin0,5πt (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4 \pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см^2 и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см^2.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5 \cdot^{10\text{-}6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см^2 каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 $м^2$ и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 $см^2$
имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 $см^2$ каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 $см^2$ каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете (λ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт.
Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое
тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно 2,2·10-7Н/$м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна 1,097·107$м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.
136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона 9,1·10^{-31}кг, масса протона 1,67·$10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью 6·10^6м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda_{мин}$ =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной *l* находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_Z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *l*
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_{7}N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. (m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_{6}C^{12}$, если известно, что m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^{6}$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_{8}O^{16}$, если m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_{0}n^{1}$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{8}O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если $m\ _{11}Na^{23}$ = 22,98977а.е.м.; $m\ _1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ _0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что $m\ _3Li^7$ =7,01601 а.е.м.; $m\ _1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ _0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: $m\ _5B^{11}$ = 11,00931 а.е.м.; $m\ _1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ _0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: $m\ _0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; $m\ _{11}Na^{23}$ = 22,98977 а.е.м.; $m\ _{11}Na^{22}$ = 21,99444 а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: $m\ _0n^1$= 1,00867 а.е.м.; $m\ _2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; $m\ _2He^3$ = 3,01603 а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). $m\ _1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ _8O^{16}$ = 15,99491 а.е.м.; $m\ _7N^{15}$ = 15,00011 а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если $m\ _{13}Al^{27}$ =2 6,98154 а.е.м.; $m\ _2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; $m\ _{15}P^{30}$= 29,97263 а.е.м.; $m\ _0n^1$= 1,00867 а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если
$m\ _1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; $m\ _1H^3$ =3,01605 а.е.м.; $m\ _0n^1$ =1,00867 а.е.м.; $m\ _2He^4$ = 4,00260 а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. ($m\ _2He^3$ = 3,01603 а.е.м.; $m\ _1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; $m\ _2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; $m\ _1H^1$ = 1,00783 а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. ($m\ _7N^{1\ 4}$= 14,00307а.е.м.; $m\ _0n^1$ =1,00867 а.е.м ; $m\ _6C^{14}$= 14,00324 а.е.м.; $m\ _1H^1$= 1,00783 а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H^2$= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.(m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{19}K^{41} + 2He^4$. (m $_{20}Ca^{4\ 4}$= 43,95549 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

.

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И..Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	*1а.е.м.*	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с $1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Множитель	Приставка			Множитель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^{9}	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^{6}	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^{3}	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^{2}	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^{1}	атто	а	a	10^{-18}
П р и м е ч а н и е: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)							

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Приложение 4

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^3 кг $1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86400 с
Плоский угол	градус минута секунда град	…• …′ …″ град	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад $2.91 \cdot 10^{-4}$ рад $4.85 \cdot 10^{-6}$ рад $(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1.50 \cdot 10^{11}$ м $9.46 \cdot 10^{15}$ м $3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	гектар	Га	10^4 м^2
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
П р и м е ч а н и е: Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Приложение 5

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см^3	Твердое тело	Плотность, г/см^3
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8·
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г·/см^3	Газ (при нормальных условиях	Плотность, кг/м^3
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2{,}53\cdot10^{-8}$	Ртуть	$9{,}6\cdot10^{-7}$
Алюминий провод	$2{,}87\cdot10^{-8}$	Свинец	$2{,}08\cdot10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$
Вода дистиллированная	10^{4}	Сталь литая	$1{,}3\cdot10^{-7}$
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1{,}01\cdot10^{-7}$
Вольфрам	$5{,}5\cdot10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3{,}9\cdot10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9{,}8\cdot10^{-8}$	Угольные щётки	$4\cdot10^{-5}$
Железо	$8{,}7\cdot10^{-8}$	Цинк	$5{,}9\cdot10^{-8}$
Золото	$2{,}2\cdot10^{-8}$	Чугун серый	$1\cdot10^{-6}$
Константан	$5\cdot10^{-7}$	Никель	$8{,}7\cdot10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1{,}12\cdot10^{-6}$
Магний	$4{,}4\cdot10^{-8}$	Олово	$1{,}2\cdot10^{-7}$
Манганин	$4{,}3\cdot10^{-7}$	Платина	$1{,}07\cdot10^{-7}$
Медь	$1{,}72\cdot10^{-8}$	Медь провод	$1{,}78\cdot10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
A, α	Альфа	N, ν	ню
B, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
E, ε	Эпсилон	P, ρ	ро
Z, ς	Дзета	Σ, σ	сигма
H, η	Эта	T, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Y, υ	ипсилон
J, i	Иота	Φ, φ	фи
K, κ	Каппа	X, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	9
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	11
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	20
Список литературы	23
Приложения	24

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

Н. А. Зайцева

КЛАССЫ НЕОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы
по курсу «Общая химия»»
для студентов всех специальностей

Екатеринбург

2021

Министерство образования и науки РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горномеханического факультета
УГГУ
« 12 » октября 2021 г.
Председатель комиссии
_____ Осипов П.А.

Н. А. Зайцева

КЛАССЫ НЕОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы
по курсам «Общая химия»
для студентов всех специальностей

Издание УГГУ Екатеринбург, 2021

Рецензент: М. А. Мелкозерова, кандидат химических наук, старший научный сотрудник ИХТТ УрО РАН.

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры химии 16 сентября 2021 г. (протокол № 1) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Зайцева Н.А.

КЛАССЫ НЕОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ: учебно-методическое пособие / Н.А. Зайцева – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 44 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о классификации неорганических соединений и основных приемах решения задач по химии. Пособие содержит 25 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы по решению расчетных химических задач в каждой теме.

Для студентов всех специальностей.

© Зайцева Н.А. 2016

© Уральский государственный горный университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема1. Классификация неорганических соединений……...….5
Тема 2. Кислоты. Химические свойства кислот……..9
Тема 3. Основания. Химические свойства оснований..……..……...……16
Тема 4. Оксиды. Химические свойства оксидов ……..…23
Тема 5. Соли. Кристаллогидраты…….…....31
Тема 6. Генетическая связь неорганических веществ…….40
Список литературы……..44

Тема 1. Классификация неорганических соединений

Сложные неорганические вещества делят на классы либо по составу (двухэлементные, или бинарные, соединения и многоэлементные соединения), либо по функциональным признакам (кислотно-основным, окислительно-восстановительным), которые эти вещества осуществляют в химических реакциях. По кислотно-основным функциям минеральные вещества делятся на оксиды, кислоты, основания (или основания + амфотерные гидроксиды) и соли.

Количества любых химические вещества принято измерять в молях. Расчётные задачи по химии решаются через расчёт количества вещества. Необходимо помнить основную формулу для определения числа молей:

$$\nu = m/M = V/V_m = N/N_A,$$

где m – масса вещества, V – объем газообразного вещества,

M – молярная масса вещества -масса одного моля вещества

V_m – молярный объем газа, то есть объём одного моля любого газа; при нормальных условиях (температура 0°C, давление 1 атмосфера) V_m=22,4 л/моль

N – число частиц (молекул, ионов, атомов),

N_A – постоянная Авогадро – количество частиц вещества в одном моле, N_A= $6{,}023 \cdot 10^{23}$шт/моль

Задачи для самостоятельной работы
по теме «Классификация неорганических соединений»

Вариант 1.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде лития массой 460 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт сероводород массой 40 г?
3. Определите количество атомов натрия в карбонате натрия Na_2CO_3 массой 10 г.

Вариант 2.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде бария массой 160 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт хлороводород массой 20 г?
3. Определите количество атомов кислорода в карбонате натрия массой 30 г.

Вариант 3.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде калия массой 120 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт аммиак массой 40 г?

3. Определите количество атомов углерода в карбонате натрия Na_2CO_3 массой 20 г.

Вариант 4.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде бария массой 60 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт метан массой 20 г?

3. Определите количество атомов кислорода в сульфате натрия массой 10 г.

Вариант 5.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде лития массой 46 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт водород массой 40 г?

3. Определите количество атомов натрия в сульфате натрия массой 30 г.

Вариант 6.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в нитрате бария массой 10 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт кислород массой 20 г?

3. Определите количество атомов водорода в аммиаке массой 30 г.

Вариант 7.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в аммиаке массой 170 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт хлор массой 142 г?

3. Определите количество атомов углерода в карбонате калия массой 20 г.

Вариант 8.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде натрия массой 60 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт фтор массой 20 г?

3. Определите количество атомов кислорода в сульфате алюминия массой 100 г.

Вариант 9.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде кальция массой 40 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт азот массой 56 г?

3. Определите количество атомов водорода в серной кислоте массой 10 г.

Вариант 10.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде калия массой 160 г?

2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт гелий массой 20 г?

3. Определите количество атомов кислорода нитрате натрия массой 30 г.

Вариант 11.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в сульфиде калия массой 68 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт NO массой 40 г?
3. Определите количество атомов кислорода в серной кислоте массой 20 г.

Вариант 12.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде цинка массой 60 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт N_2O массой 20 г?
3. Определите количество атомов хлора в хлориде алюминия массой 10 г.

Вариант 13.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде магния массой 4 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт CO_2 массой 88 г?
3. Определите количество атомов азота в нитрате алюминия массой 30 г.

Вариант 14.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в сульфате бария массой 90 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт углекислый газ массой 9 г?
3. Определите количество атомов кислорода в нитрате алюминия массой 50 г.

Вариант 15.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде цинка массой 10 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт CO массой 56 г?
3. Определите количество атомов углерода в карбонате магния массой 20 г.

Вариант 16.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде цезия массой 60 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт NO_2 массой 92 г?
3. Определите количество атомов кислорода в сульфате стронция массой 100 г.

Вариант 17.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде кремния массой 40 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт озон массой 96 г?
3. Определите количество атомов натрия в гидроксиде натрия массой 80 г.

Вариант 18.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде бериллия массой 6 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт арсин AsH_3 массой 20 г?

3. Определите количество атомов кислорода в сульфате цинка массой 30 г.

Вариант 19.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде Fe_2O_3 массой 120 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт силан SiH_4 массой 40 г?
3. Определите количество атомов углерода в карбонате меди (II) массой 20 г.

Вариант 20.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде Fe_3O_4 массой 60 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт аргон массой 20 г?
3. Определите количество атомов кислорода в азотной кислоте массой 10 г.

Вариант 21.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в сульфиде цинка массой 46 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт газ SO_2 массой 40 г?
3. Определите количество атомов натрия в ортофосфате натрия массой 30 г.

Вариант 22.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в оксиде FeO массой 10 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт неон массой 20 г?
3. Определите количество атомов водорода в аммиаке массой 30 г.

Вариант 23.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в бромиде калия массой 17 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт газ SO_3 массой 40 г?
3. Определите количество атомов углерода в карбонате кальция массой 20 г.

Вариант 24.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в хлориде рубидия массой 1 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт фтороводород массой 20 г?
3. Определите количество атомов кислорода в сульфате железа(II) массой 100 г.

Вариант 25.

1. Какое количество вещества (в молях) содержится в сульфате кальция массой 4 г?
2. Какой объём при нормальных условиях (н.у.) займёт аммиак массой 56 г?
3. Определите количество атомов кислорода в серной кислоте массой 10 г.

Тема 2. Кислоты. Химические свойства кислот.

Кислоты – сложные вещества, молекулы которых состоят из атомов водорода и кислотного остатка. С позиций теории электролитической диссоциации кислотами называются вещества, диссоциирующие в растворах с образованием ионов водорода. С точки зрения протонной теории кислот и оснований к кислотам относятся вещества, способные отдавать ион водорода H^+, то есть быть донорами протонов. Кислоты классифицируют по их силе (сильные и слабые), по основности (одноосновные, двухосновные, трёхосновные) и по наличию или отсутствию кислорода в составе кислоты (кислородсодержащие или бескислородные).

Таблица 1. Сильные и слабые кислоты

	Сильные кислоты	Слабые кислоты
Бескислородные	HCl-хлороводородная (соляная) HBr- бромоводородная HI- йодоводородная	HF- фтороводородная (плавиковая) HCN – циановодородная (синильная) H_2S – сероводородная H_2Se - селеноводородная
Кислород-содержащие	H_2SO_4 - серная HNO_3 -азотная $HMnO_4$ - марганцевая $HClO_4$ - хлорная $HClO_3$ - хлорноватая H_2CrO_4 - хромовая	H_2SO_3 - сернистая HNO_2 - азотистая H_3PO_4 – ортофосфорная HPO_3 – метафосфорная H_3PO_3 - фосфористая H_2SiO_3 - кремниевая H_2CO_3-угольная CH_3COOH -уксусная

Химические свойства кислот:

1. Диссоциация в водных растворах на протоны и кислотный остаток с образованием кислой среды, изменяющей окраску индикаторов:

$$HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$$

2. Взаимодействие с основаниями с образованием солей (нейтрализация)^

$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$$

3. Взаимодействие с основными оксидами с образованием солей:

$$2\ HCl + CaO \rightarrow CaCl_2 + H_2O$$

4. Взаимодействие с металлами, стоящими в ряду напряжения до водорода (кроме азотной и концентрированной серной кислот):

$$2\ HCl + Zn \rightarrow ZnCl_2 + H_2$$

5. Взаимодействие сильных кислот с солями более слабых кислот:

$$2\ HCl + CaCO_3 \rightarrow CaCl_2 + H_2CO_3$$

Пример решения задачи на расчёт по уравнению реакции:

Задача: В избытке соляной кислоты растворили магний массой 6 г. Какой объем водорода, измеренный при нормальных условиях, выделится при этом?

Решение:

Записываем исходные данные: Дано: m(Mg)=6 г; н.у. Найти: V(H2) =?

Составляем уравнение реакции взаимодействия магния с соляной кислотой и расставляем стехиометрические коэффициенты

$$Mg + 2\ HCl = MgCl_2 + H_2\uparrow$$

I действие: Определяем количество вещества магния, вступившего в реакцию с соляной кислотой. ν(Mg) = m(Mg)/ M(Mg) = 6/24 = 0,25 моль

II действие: Из уравнения реакции видно, что количества вещества магния и водорода равны (1:1), т.е. ν(Mg) = ν(H2) = 0,25 моль.

III действие: Рассчитываем объем водорода, выделившегося в результате реакции: $V(H_2) = Vm \cdot \nu(H_2) = 22,4 \cdot 0,35 = 7,84$ л.

Ответ: $V(H_2) = 7,84$ л.

Задачи для самостоятельной работы по теме «Кислоты»

Вариант 1.

1. Какая масса серной кислоты требуется для нейтрализации NaOH массой 4 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте цинка массой 1,3 г?

3. Определите массу соды Na_2CO_3, растворённой в избытке ортофосфорной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 4,48 л (н.у.).

Вариант 2.

1. Какая масса кремниевой кислоты требуется для реакции с KOH массой 5,6г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте алюминия массой 2,7 г?

3. Определите массу мела $CaCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 2,24 л (н.у.).

Вариант 3.

1. Какая масса сернистой кислоты требуется для нейтрализации LiOH массой 14 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте магния массой 2,4 г?

3. Определите массу карбоната калия, растворённого в избытке уксусной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 1,12 л (н.у.).

Вариант 4.

1. Какая масса азотной кислоты требуется для нейтрализации NaOH массой 8 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте железа массой 2,8 г?

3. Определите массу соды Na_2CO_3, растворённой в избытке марганцевой кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 3,36 л (н.у.).

Вариант 5.

1. Какая масса серной кислоты требуется для нейтрализации LiOH массой 4,8 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте никеля массой 5,9 г?

3. Определите массу карбоната бария, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 11,2 л (н.у.).

Вариант 6.

1. Какая масса сероводородной кислоты требуется для нейтрализации гидроксида натрия массой 5 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте цинка массой 6,5 г?

3. Определите массу K_2CO_3, растворённого в избытке ортофосфорной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 448 мл (н.у.).

Вариант 7.

1. Какая масса плавиковой кислоты требуется для нейтрализации гидроксида калия массой 7 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте алюминия массой 10,8 г?

3. Определите массу $CuCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 224 мл (н.у.).

Вариант 8.

1. Какая масса серной кислоты требуется для нейтрализации 3,42 г $Ba(OH)_2$?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте цинка массой 13 г?

3. Определите массу карбоната цезия, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 8,96 л (н.у.).

Вариант 9.

1. Какая масса азотистой кислоты требуется для нейтрализации KOH массой 2,8 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте алюминия массой 5,4 г?

3. Определите массу $MgCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 22,4 л (н.у.).

Вариант 10.

1. Какая масса азотной кислоты требуется для нейтрализации гидроксида кальция массой 3,7 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в хлороводородной кислоте магния массой 4,8 г?

3. Определите массу карбоната аммония, растворённого в избытке соляной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 15,68 л (н.у.).

Вариант 11.

1. Какая масса хлорной кислоты требуется для нейтрализации NaOH массой 16 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в йодоводородной кислоте цинка массой 10,4 г?

3. Определите массу карбоната натрия, растворённого в избытке серной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 33,6 л (н.у.).

Вариант 12.

1. Какая масса марганцевой кислоты требуется для нейтрализации гидроксида лития массой 12 г?

2. Какой объём газа (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте 8 г железа?

3. Определите массу $PbCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 1,568 л (н.у.).

Вариант 13.

1. Какая масса H_2Se требуется для нейтрализации натриевой щёлочи массой 16 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте цинка массой 19,5 г?

3. Определите массу $FeCO_3$, растворённого в избытке хлороводородной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 44,8 л (н.у.).

Вариант 14.

1. Какая масса фтороводородной кислоты требуется для нейтрализации гидроксида рубидия массой 10,2 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте алюминия массой 2,16 г?

3. Определите массу $SrCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 2,24 л (н.у.).

Вариант 15.

1. Какая масса хромовой кислоты требуется для нейтрализации гидроксида стронция массой 12,2 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте кобальта массой 5,9 г?

3. Определите массу $ZnCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 2,24 л (н.у.).

Вариант 16.

1. Какая масса серной кислоты требуется для растворения $Cu(OH)_2$ массой 40 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в хлорной кислоте цинка массой 26 г?

3. Определите массу Na_2CO_3, растворённого в избытке соляной кислоты, если объём выделившегося газа составил 4,48 л (н.у.).

Вариант 17.

1. Какая масса соляной кислоты требуется для растворения $Fe(OH)_2$ массой 56 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при взаимодействии с серной кислотой алюминия массой 54 г?

3. Определите массу $CaCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 224 л (н.у.).

Вариант 18.

1. Какая масса синильной кислоты требуется для нейтрализации LiOH массой 49 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте магния массой 36 г?

3. Определите массу карбоната магния, растворённого в избытке азотистой кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 1,12 л (н.у.).

Вариант 19.

1. Какая масса азотной кислоты требуется для растворения 8 г оксида алюминия?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте железа массой 14 г?

3. Определите массу $BaCO_3$, растворённого в избытке марганцевой кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 3,36 л (н.у.).

Вариант 20.

1. Какая масса сернистой кислоты требуется для растворения Li_2O массой 48 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте никеля массой 10,8 г?

3. Определите массу карбоната цинка, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 11,2 л (н.у.).

Вариант 21.

1. Какая масса сероводородной кислоты требуется для нейтрализации гидроксида натрия массой 50 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в бромоводородной цинка массой 26 г?

3. Определите массу K_2CO_3, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 448 мл (н.у.).

Вариант 22.

1. Какая масса азотистой кислоты требуется для нейтрализации гидроксида калия массой 21 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в соляной кислоте алюминия массой 5,4 г?

3. Определите массу $CuCO_3$, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 0,224 л (н.у.).

Вариант 23.

1. Какая масса селеноводородной кислоты требуется для нейтрализации 3,42 г щёлочи $Ba(OH)_2$?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в йодоводородной кислоте цинка массой 13 г?

3. Определите массу карбоната цезия, растворённого в избытке азотной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 2,24 л (н.у.).

Вариант 24.

1. Какая масса азотистой кислоты требуется для нейтрализации KOH массой 28 г?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в серной кислоте алюминия массой 1,08 г?

3. Определите массу $MnCO_3$, растворённого в избытке соляной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 8,96 л (н.у.).

Вариант 25.

1. Какая масса хлорной кислоты требуется для растворения 10 г оксида цинка?

2. Какой объём водорода (н.у.) выделится при растворении в хлороводородной кислоте магния массой 48 г?

3. Определите массу карбоната кальция, растворённого в избытке соляной кислоты, если объём выделившегося углекислого газа составил 15,68 л (н.у.).

Тема 2. Основания. Химические свойства оснований.

Основания – сложные вещества, молекулы которых состоят из атомов металла (или иона аммония) и гидроксогрупп OH^-. С позиций теории электролитической диссоциации основаниями называются вещества, диссоциирующие в растворах с образованием ионов OH^-. С точки зрения протонной теории кислот и оснований к основаниям относятся вещества, способные принимать ион водорода, то есть быть акцепторами протонов. Основания классифицируют по их силе (сильные и слабые), по растворимости (растворимые и нерастворимые), по кислотности (количеству гидроксогрупп).

Сильные растворимые основания называются щелочами, к щелочам относят гидроксиды лития, натрия, калия, рубидия, цезия, бария и стронция, а также малорастворимый гидроксид кальция. К слабым основаниям относятся нерастворимые гидроксиды металлов и водный раствор аммиака, иногда обозначаемый как гидроксид аммония NH_4OH.

Амфотерными называются гидроксиды, способные проявлять свойства слабых кислот или слабых оснований в зависимости от партнёра по реакции ($Al(OH)_3$, $Cr(OH)_3$, $Zn(OH)_2$, $Be(OH)_2$, $Sn(OH)_2$, $Pb(OH)_2$).

Химические свойства оснований:

1. Растворимые основания диссоциируют в водных растворах с образованием щелочной среды, изменяющей окраску индикаторов:

$$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$$

2. Взаимодействуют с кислотами с образованием солей (нейтрализация):

$$Ca(OH)_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + 2\ H_2O$$

3. Взаимодействуют с кислотными оксидами с образованием солей:

$$MgO + CO_2 \rightarrow MgCO_3$$

4. Взаимодействуют с солями более слабых оснований:

$$2\ NaOH + CuSO_4 \rightarrow Cu(OH)_2 + Na_2SO_4$$

$$NaOH + NH_4Cl \rightarrow NaCl + NH_3 + H_2O$$

5. Нерастворимые основания разлагаются при нагревании на оксид и воду:

$$Cu(OH)_2 \rightarrow CuO + H_2O$$

Пример решения задачи на расчёт по уравнению реакции (избыток-недостаток):

Задача: Какая масса хлорида аммония образуется при взаимодействии хлороводорода массой 7,3 г с аммиаком массой 5,1 г?

Решение:

Дано: m(HCl)=7,3 г; $m(NH_3)$=5,1 г. Найти: $m(NH_4Cl)$ =?

Составляем уравнение реакции: $HCl + NH_3 = NH_4Cl$

I действие: Определяем количество обоих веществ, чтобы определить какое из них расходуется полностью, а какое остаётся в избытке:

$\nu(HCl) = m(HCl)/ M(HCl) = 7,3/36,5 = 0,2$ моль

$\nu(NH_3) = m(NH_3)/ M(NH_3) = 5,1/ 17 = 0,3$ моль

По уравнению аммиак и хлороводород взаимодействуют в соотношении 1:1, следовательно, 0,3 моль аммиака – избыток, расчёт проводим по хлороводороду, который полностью вступает в реакцию.

II действие: Из уравнения реакции: $\nu(NH_4Cl)= \nu(HCl) = 0,2$ моль.

III действие: Рассчитываем массу полученной соли: $m(NH_4Cl) = \nu(NH_4Cl) \cdot M(NH_4Cl) = 0,2 \cdot 53,5 = 10,7$ г.

Ответ: $m(NH_4Cl) = 10,7$ г.

Задачи для самостоятельной работы по теме «Основания».

Вариант 1.

1. Какая масса оксида кальция образуется при прокаливании $Ca(OH)_2$ массой 37 г?
2. Определите массу хлорида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 4,48 л (н.у.).
3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г соляной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Вариант 2.

1. Какая масса оксида алюминия образуется при прокаливании $Al(OH)_3$ массой 4 г?
2. Определите массу фторида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 2,24 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г бромоводородной кислоты и 10 г гидроксида лития.

Вариант 3.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Ca(OH)_2$ массой 18,5 г?

2. Определите массу нитрата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 44,8 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г азотистой кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 4.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Al(OH)_3$ массой 39 г?

2. Определите массу сульфата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 3,36 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г хлороводородной кислоты и 10 г гидроксида цезия.

Вариант 5.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Cu(OH)_2$ массой 49 г?

2. Определите массу бромида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 1,12 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г азотной кислоты и 10 г гидроксида рубидия.

Вариант 6.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Fe(OH)_3$ массой 5,35 г?

2. Определите массу сульфида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 11,2 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г йодоводородной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Вариант 7.

1. Какая масса оксида меди образуется при прокаливании $Cu(OH)_2$ массой 9,8 г?

2. Определите массу сульфита аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 4,48 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г марганцевой кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 8.

1. Какая масса оксида железа образуется при прокаливании $Fe(OH)_3$ массой 10,7 г?

2. Определите массу карбоната аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 2,8 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г хлорной кислоты и 10 г гидроксида лития.

Вариант 9.

1. Какая масса оксида хрома образуется при прокаливании $Cr(OH)_3$ массой 5,15 г?

2. Определите массу ацетата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 1,4 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г синильной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Вариант 10.

1. Какая масса оксида бериллия образуется при прокаливании $Be(OH)_2$ массой 43 г?

2. Определите массу фторида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 14 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г хлорной кислоты и 10 г гидроксида лития.

Вариант 11.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Be(OH)_2$ массой 8,6 г?

2. Определите массу хлората аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 7 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г соляной кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 12.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Cr(OH)_3$ массой 10,3 г?

2. Определите массу сульфата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 0,7 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г хлороводородной кислоты и 10 г гидроксида цезия.

Вариант 13.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Fe(OH)_2$ массой 9 г?

2. Определите массу бромида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 21 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г азотной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Вариант 14.

1. Какая масса оксида железа образуется при прокаливании $Fe(OH)_2$ массой 4,5 г?

2. Определите массу сульфита аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 2,1 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г йодоводородной кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 15.

1. Какая масса оксида меди образуется при прокаливании CuOH массой 8,1 г?

2. Определите массу сульфита аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 4,48 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г марганцевой кислоты и 10 г гидроксида рубидия.

Вариант 16.

1. Какая масса оксида магния образуется при прокаливании $Mg(OH)_2$ массой 29 г?

2. Определите массу хлорида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 44,8 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г синильной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Вариант 17.

1. Какая масса оксида свинца образуется при прокаливании $Pb(OH)_2$ массой 24,1 г?

2. Определите массу фторида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 1,12 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 20 г бромоводородной кислоты и 10 г гидроксида лития.

Вариант 18.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Mg(OH)_2$ массой 5,8 г?

2. Определите массу нитрата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 4,48 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г азотистой кислоты и 20 г гидроксида калия.

Вариант 19.

1. Какая масса оксида никеля образуется при прокаливании $Ni(OH)_2$ массой 9,3 г?

2. Определите массу сульфида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 1,4 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 20 г хлорной кислоты и 10 г гидроксида таллия (I).

Вариант 20.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Ni(OH)_2$ массой 18,6 г?

2. Определите массу хлорида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 7 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г азотной кислоты и 10 г гидроксида серебра (I).

Вариант 21.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Co(OH)_2$ массой 62 г?

2. Определите массу сульфата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 22,4 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 10 г хлороводородной кислоты и 10 г гидроксида таллия (I).

Вариант 22.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Co(OH)_3$ массой 11 г?

2. Определите массу бромида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 3,36 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 30 г азотной кислоты и 10 г гидроксида лития.

Вариант 23.

1. Какая масса оксида кобальта образуется при прокаливании $Co(OH)_2$ массой 31 г?

2. Определите массу сульфита аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 2,24 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 20 г йодоводородной кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 24.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании CuOH массой 16,2 г?

2. Определите массу сульфата аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 33,6 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 20 г марганцевой кислоты и 10 г гидроксида калия.

Вариант 25.

1. Какая масса воды образуется при прокаливании $Co(OH)_3$ массой 22 г?

2. Определите массу сульфида аммония, растворённого в избытке щёлочи, если объём выделившегося аммиака составил 2,24 л (н.у.).

3. Рассчитайте массу соли, полученной взаимодействием 20 г бромоводородной кислоты и 10 г гидроксида натрия.

Дополнительные задачи:

1. Цинк массой 45,5 г нагрели с 35,68 г NaOH. Рассчитайте объем выделившегося водорода (н.у.), по уравнению реакции:

$$Zn + 2NaOH \rightarrow Na_2ZnO_2 + H_2\uparrow.$$

2. Аммиак, выделившийся при взаимодействии 107 г 20% раствора хлорида аммония с 150 г 18% раствора гидроксида натрия полностью прореагировал с 60% фосфорной кислотой с образованием дигидрофосфата аммония. Определить массовую долю хлорида натрия в полученном растворе.

Тема 4. Оксиды. Классификация и химические свойства оксидов.

Оксидами называются бинарные соединения, содержащие кислород в степени окисления -2. Оксиды делятся на солеобразующие и несолеобразующие (CO, NO, N_2O).

Солеобразующие оксиды подразделяются на основные (соответствующие основаниям), кислотные (соответствующие кислотам или реагирующие с водой с образованием кислоты) и амфотерные (Al_2O_3, Cr_2O_3, ZnO, BeO, SnO, PbO).

Как правило, оксиды можно получить прямой реакцией простых веществ с кислородом.

Химические свойства основных оксидов

1. Растворимые в воде основные оксиды вступают в реакцию с водой, образуя основания:

$$Na_2O + H_2O \rightarrow 2NaOH$$

2. Взаимодействуют с кислотными оксидами, образуя соли:

$$Na_2O + SO_3 \rightarrow Na_2SO_4$$

3. Реагируют с кислотами, образуя соль и воду:

$$CuO + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O$$

4. Реагируют с амфотерными оксидами:

$$Li_2O + Al_2O_3 \rightarrow 2LiAlO_2$$

Химические свойства кислотных оксидов

1. Растворимые в воде кислотные оксиды взаимодействуют с водой, образуя кислоту:

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$$

2. Реагируют с основными оксидами с образованием соли:

$$CO_2 + CaO \rightarrow CaCO_3$$

3. Взаимодействуют со щелочами:

$$CO_2 + Ba(OH)_2 \rightarrow BaCO_3 + H_2O$$

Химические свойства амфотерных оксидов

1. Взаимодействуют с кислотами, образуя соль и воду:

$$ZnO + 2HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2O$$

2. Реагируют с твёрдыми щелочами (при сплавлении), образуя в результате реакции соль и воду:

$$ZnO + 2NaOH \rightarrow Na_2ZnO_2 + H_2O$$

При взаимодействии оксида цинка с раствором щелочи) протекает другая реакция:

$$ZnO + 2\ NaOH + H_2O \rightarrow Na_2[Zn(OH)_4]$$

Амфотерные оксиды обычно не растворяются в воде и не реагируют с ней.

Пример решения задачи на расчет массовой доли вещества

Массовая доля вещества – отношение массы данного вещества в системе к массе всей системы: $\omega(X) = m(X)/m$,

где $\omega(X)$– массовая доля вещества X, выражается в долях от единицы или в процентах,

m(X) – масса вещества X,

m – масса всей системы.

Задача: Какая масса 10% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения CuO массой 20 г?

Решение:

Дано: m(CuO)=20 г; ω (HCl)=0,1. Найти: m(р-раHCl) =?

Составляем уравнение реакции:

$$2HCl + CuO = CuCl_2 + H_2O$$

I действие: Определяем количество вещества оксида меди:

$\nu(CuO) = m(CuO)/ M(CuO) = 20/(64+16) = 0,25$ моль

II действие: Из уравнения реакции: $\nu(HCl) = ½\ \nu(HCl) = 0,125$ моль.

III действие: $m(HCl) = \nu(HCl) \cdot M(HCl) = 0,125 \cdot 36,5 = 4,5625$ г.

Массу раствора соляной кислоты можно найти из формулы массовой доли:

$m(р\text{-}раHCl) = m(HCl) / \omega (HCl) = 4,5625 / 0,1 = 45,625$ г

Ответ: m(р-раHCl) = 45,625 г

Задачи для самостоятельной работы по теме «Оксиды»

Вариант 1.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ углекислого газа объёмом 28 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения CuO массой 10 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 40 г триоксида серы.

Вариант 2.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ углекислого газа объёмом 14 л (н.у.)?

2. Какая масса 15% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения ZnO массой 20 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 20 г оксида серы (VI).

Вариант 3.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ сернистого газа объёмом 28 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора серной кислоты требуется для растворения 10 г CuO?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 30 г оксида SO_3.

Вариант 4.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ углекислого газа объёмом 22,4 л (н.у.)?

2. Какая масса 15% раствора серной кислоты требуется для полного растворения ZnO массой 20 г?

3. Определите массовую долю ортофосфорной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 20 г оксида фосфора (V).

Вариант 5.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ углекислого газа объёмом 2,8 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения CuO массой 16 г?

3. Определите массовую долю сернистой кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 32 г диоксида серы.

Вариант 6.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ сернистого газа объёмом 4,48 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения FeO массой 36 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 20 г оксида азота (V).

Вариант 7.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ серного газа объёмом 28 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора серной кислоты требуется для полного растворения Fe_2O_3 массой 20 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 30 г оксида P_2O_3.

Вариант 8.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ серного газа объёмом 11,2 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения Al_2O_3 массой 23 г?

3. Определите массовую долю метафосфорной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 20 г оксида фосфора (V).

Вариант 9.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ серного газа объёмом 5,6 л (н.у.)?

2. Какая масса 15% раствора хлороводородной кислоты требуется для полного растворения MgO массой 10 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 40 г триоксида серы.

Вариант 10.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ углекислого газа объёмом 3,36 л (н.у.)?

2. Какая масса 15% раствора натриевой щёлочи требуется для полного растворения SiO_2 массой 30 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 10 г оксида серы (VI).

Вариант 11.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ сернистого газа объёмом 33,6 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения оксида BeO массой 10 г?

3. Определите массовую долю щёлочи в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды 15,3 г оксида BaO.

Вариант 12.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ оксида углерода (IV) объёмом 2,24 л (н.у.)?

2. Какая масса 15% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения PbO массой 22,3 г?

3. Определите массовую долю щёлочи в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 13 г оксида натрия.

Вариант 13.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ диоксида серы объёмом 8,96 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора гидроксида натрия требуется для полного растворения SiO_2 массой 10 г?

3. Определите массовую долю щёлочи в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 7,77 г оксида бария.

Вариант 14.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ триоксида серы объёмом 448 мл (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора бромоводородной кислоты требуется для полного растворения оксида SnO массой 13,5 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 40 г оксида азота (V).

Вариант 15.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ серного газа объёмом 33,6 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора уксусной кислоты требуется для полного растворения Fe_2O_3 массой 10 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 15 г оксида фосфора (III).

Вариант 16.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ триоксида серы объёмом 2,24 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения Cr_2O_3 массой 10 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 11,2 л (н.у.) диоксида серы.

Вариант 17.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора $Sr(OH)_2$ с оксидом азота (V) объёмом 5,6 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения MnO массой 10 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 100 г воды и 22,4 л (н.у.) триоксида серы.

Вариант 18.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора NaOH с оксидом азота (V) объёмом 11,2 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора серной кислоты требуется для растворения 10 г CoO?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 300 г воды и 5,6 л (н.у.) оксида SO_3.

Вариант 19.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора KOH с оксидом азота (III) объёмом 11,2 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора NaOH для полного растворения ZnO массой 20 г?

3. Определите массовую долю фосфористой кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 200 г воды и 10 г оксида фосфора (III).

Вариант 20.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора $Ba(OH)_2$ и оксида азота (V) объёмом 5,6 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения MgO массой 10 г?

3. Определите массовую долю сернистой кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 300 г воды и 8,96 л (н.у.) диоксида серы.

Вариант 21.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ba(OH)_2$ углекислого газа объёмом 4,48 л (н.у.)?

2. Какая масса 5% раствора соляной кислоты требуется для полного растворения оксида NiO массой 36 г?

3. Определите массовую долю щёлочи в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и 20 г оксида натрия.

Вариант 22.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Ca(OH)_2$ серного газа объёмом 22,4 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора серной кислоты требуется для полного растворения Cr_2O_3 массой 20 г?

3. Определите массовую долю фосфористой кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 300 г воды и 10 г оксида P_2O_3.

Вариант 23.

1. Какая масса осадка выпадет при пропускании через раствор $Sr(OH)_2$ триоксида серы объёмом 1,12 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора азотной кислоты требуется для полного растворения Al_2O_3 массой 6,9 г?

3. Определите массовую долю метафосфорной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 300 г воды и 10 г оксида фосфора (V).

Вариант 24.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора NH_4OH и оксида азота (III) объёмом 4,48 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора бромоводородной кислоты требуется для полного растворения MgO массой 10 г?

3. Определите массовую долю серной кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 500 г воды и триоксида серы объёмом 3,36 л (н.у.).

Вариант 25.

1. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора NH_4OH и оксида азота (V) объёмом 2,24 л (н.у.)?

2. Какая масса 10% раствора калиевой щёлочи требуется для полного растворения SiO_2 массой 20 г?

3. Определите массовую долю кислоты в растворе, полученном при взаимодействии 300 г воды и оксида серы (VI) объёмом 3,36 л (н.у.).

Дополнительные задачи

1. Через 0,0464 л 18% раствора NaOH плотностью 1,197 г/мл пропустили 8,5 г сероводорода. Вычислить массовую долю соли в полученном растворе.

2. Рассчитайте массовую долю серной кислоты в растворе, полученном после сливания 14,7 г. 10% раствора серной кислоты и 200 г 1,04% раствора $BaCl_2$.

3. К раствору NaOH массой 1200 г прибавили 490 г 40% раствора H_2SO_4. Для нейтрализации полученного раствора потребовалось 143 г кристаллической соды $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$. Вычислить массовую долю NaOH в исходном растворе.

Тема 5. Соли. Кристаллогидраты.

Соли - сложные вещества, состоящие из атомов металла (или более сложных катионных групп) и кислотных остатков. С точки зрения теории электролитической диссоциации это электролиты, диссоциирующие в водных растворах на катионы металла (или аммония NH^{4+}) и анионы кислотного остатка.

По составу соли подразделяют на средние (нормальные), кислые (гидросоли), основные (гидроксосоли), двойные, смешанные и комплексные (см. таблицу).

Многие соли выделяются из водных растворов в виде кристаллогидратов - веществ, в кристаллы которых входят молекулы воды, такая вода называется кристаллизационной. Состав кристаллогидратов принято изображать формулами, показывающими, какое количество кристаллизационной воды содержит кристаллогидрат. Например, кристаллогидрат сульфата меди (медный купорос), содержащий на один моль $CuSO_4$ пять молей воды, изображается формулой $CuSO_4 \cdot 5H_2O$, кристаллогидрат сульфата натрия (глауберова соль) - формулой $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$.

Таблица. Классификация солей по составу

Средние (нормальные)	Кислые (гидросоли)	Основные (гидроксосоли)	Двойные	Комплексные
продукт полного замещения атомов водорода в кислоте на металл $AlCl_3$	продукт неполного замещения атомов водорода в кислоте на металл $KHSO_4$ $CaHPO_4$ NaH_2PO_4	продукт неполного замещения OH^--групп основания на кислотный остаток $FeOHCl$	содержат два разных металла и один кислотный остаток $KNaSO_4$	содержат комплексный катион и/или комплексный анион $[Cu(NH_3)_4]SO_4$ $K_3[Fe_3(CN)_6]$

Химические свойства солей

1. Диссоциация: средние и двойные соли, растворимые в воде, диссоциируют полностью, у кислых и основных солей диссоциация происходит ступенчато. Растворимые соли, образованные хотя бы одним слабым электролитом, подвергаются гидролизу. Растворы таких солей могут иметь щелочную или кислую среду и взаимодействовать с индикаторами:

$$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$$

$$KNaSO_4 \rightarrow K^+ + Na^+ + SO_4^{2-}$$

$$KHSO_4 \rightleftharpoons K^+ + HSO_4^- \qquad HSO4^- \rightleftharpoons H^+ + SO_4^{2-}$$

$$FeOHCl \rightleftharpoons FeOH^+ + Cl^- \qquad FeOH^+ \rightleftharpoons Fe^{2+} + OH^-$$

$$AlCl_3 + H_2O \rightleftharpoons AlOHCl_2 + HCl$$

2. Разложение при нагревании.

Кристаллогидраты солей при нагревании теряют кристаллизационную воду:

$$CuSO_4 \cdot 5H_2O \xrightarrow{t^o} CuSO_4 + 5H_2O$$

Гидрокарбонаты при нагревании (кальцинировании) переходят в карбонаты:

$$Mg(HCO_3)_2 \xrightarrow{t^o} MgCO_3 + H_2O + CO_2$$

Карбонаты, сульфиты, сульфаты при нагревании могут разлагаться на оксид металла и кислотный оксид:

$$CaCO_3 \xrightarrow{t^o} CaO + CO_2$$

Нитраты от щелочных металлов (кроме лития) до магния и нитрат никеля (II) разлагаются при нагревании на нитрит металла и кислород:

$$Ni(NO_3)_2 \xrightarrow{t^o} Ni(NO_2)_2 + O_2$$

Нитраты металлов после меди ($Hg(NO_3)_2$, $AgNO_3$) разлагаются до свободного металла, диоксида азота и кислорода:

$$Hg(NO_3)_2 \xrightarrow{t^o} Hg + 2NO_2 + O_2$$

Нитраты остальных металлов (в том числе лития, магния и меди) разлагаются на оксид металла, диоксида азота и кислород:

$$2Cu(NO_3)_2 \xrightarrow{t^o} 2CuO + 4NO_2 + O_2$$

Нитрат и нитрит аммония:

$$NH_4NO_3 \xrightarrow{t^o} N_2O + 2H_2O$$

$$NH_4NO_2 \xrightarrow{t^o} N_2 + 2H_2O$$

3. Взаимодействие с кислотами: если соль образована более слабой (летучей) кислотой, или в результате реакции выпадает осадок, соли вступают с кислотами в реакции обмена:

$$2HCl + Na_2CO_3 \rightarrow 2NaCl + CO_2 + H_2O$$

$$CaCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + 2HCl\uparrow$$

Основные соли при действии кислот переходят в средние:

$$FeOHCl + HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2O$$

Средние соли, образованные многоосновными кислотами, при взаимодействии с ними образуют кислые соли:

$$Na_2SO_4 + H_2SO_4 \rightarrow 2NaHSO_4.$$

4. Взаимодействие со щелочами. Со щелочами реагируют соли, катионам которых соответствуют нерастворимые гидроксосоли или основания.

$$CuSO_4 + 2NaOH \rightarrow Cu(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4$$

$$2CuSO_4 + 2NaOH \rightarrow (CuOH)_2SO_4\downarrow + Na_2SO_4$$

5. Взаимодействие с металлами: каждый предыдущий (более активный) металл в ряду напряжений вытесняет последующий за ним из раствора его соли:

$$Fe + CuSO_4 \rightarrow Cu\downarrow + FeSO_4$$

Пример решения задачи на расчет массовой доли вещества

Массовая доля вещества – отношение массы данного вещества в системе к массе всей системы: $\omega(X) = m(X)/m$,

где $\omega(X)$– массовая доля вещества X, выражается в долях от единицы или в процентах

m(X) – масса вещества X,

m – масса всей системы.

Задача: Выведите формулу кристаллогидрата сульфата железа (II) , если при прокаливании 3,5 г кристаллогидрата остаётся 1,91 г безводной соли.

Решение:

Дано: $m(FeSO_4 \cdot nH_2O)=3,5$ г; $m(FeSO_4)=1,91$ г. Найти: n-?

Составляем уравнение реакции: $FeSO_4 \cdot nH_2O \rightarrow FeSO_4 + nH_2O$

1 действие: Определяем количество вещества сульфата железа:

$\nu(FeSO_4) = m(FeSO_4)/ M(FeSO_4) = 1,91/152 = 0,0126$ моль

2 действие: Из уравнения реакции: $\nu(FeSO_4 \cdot nH_2O) = \nu(FeSO_4) = 0,01256$ моль.

3 действие: Рассчитываем молярную массу кристаллогидрата:

$M(FeSO_4 \cdot nH_2O) = m(FeSO_4 \cdot nH_2O)/ \nu(FeSO4 \bullet 7H2O) = 3,5 /0,0126 = 278$ г.

Количество моль кристаллизационной воды можно найти из формулы молярной массы: $M(FeSO_4 \cdot nH_2O) = M(FeSO_4) + n\ M(H_2O)$

$278 = 152 + 18\ n \qquad n = 7$

Ответ: $FeSO_4 \cdot 7H_2O$

Задачи для самостоятельной работы по теме «Соли» .

Вариант 1.

1. Какая масса карбоната кальция образуется при кипячении раствора, содержащего 10 г гидрокабоната кальция?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 36,5 г соляной кислоты и гидроксида меди (II) массой 49 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата натрия, если при прокаливании 2,1110 г кристаллогидрата остаётся 0,9470 г безводной соли.

Вариант 2.

1. Какая масса карбоната магния образуется при кипячении раствора, содержащего 10 г гидрокабоната магния?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 7,3 г соляной кислоты и гидроксида железа (III) массой 10,7 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида марганца (II), если при прокаливании 2,55 г кристаллогидрата остаётся 1,6226 г безводной соли.

Вариант 3.

1. Какая масса средней соли образуется при прокаливании 10 г $NaHCO_3$?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 36,5 г соляной кислоты и гидроксида меди массой 49 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата $Na_2RuO_4 \cdot nH_2O$ если при прокаливании 1,1450 г кристаллогидрата остаётся 1,0550 г безводной соли.

Вариант 4.

1. Какая масса кальцинированной соды образуется при прокаливании 10 г гидрокабоната натрия?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г серной кислоты и гидроксида калия массой 5,6 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата кальция, если при прокаливании 4,3044 г кристаллогидрата выделяется 0,9006 г воды.

Вариант 5.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата калия массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 4,9 г серной кислоты и гидроксида калия массой 5,6 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата фосфата железа (III), если при прокаливании 1,6700 г кристаллогидрата остаётся 1,1921 г безводной соли

Вариант 6.

1. Какая масса карбоната кальция подверглась термическому разложению, если объём выделившегося углекислого газа составил 3,36 л (н.у.)?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 4,9 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 4 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата $Na_2B_4O_7 \cdot nH_2O$ если при прокаливании 1,9071 г кристаллогидрата остаётся 1,0063 г безводной соли

Вариант 7.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата меди (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 4 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида магния, если при прокаливании 6,099 г кристаллогидрата выделяется 3,243 г воды

Вариант 8.

1. Какой объём диоксида азота (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата меди (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 12 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата $K_2OsO_4 \cdot nH_2O$ если при прокаливании 1,8440 г кристаллогидрата остаётся 1,6620 г безводной соли

Вариант 9.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата натрия массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 14,6 г соляной кислоты и гидроксида меди (II) массой 19,6 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида кальция, если при прокаливании 3,65 г кристаллогидрата выделяется 1,8 г воды

Вариант 10.

1. Какая масса карбоната бария образуется при кипячении раствора, содержащего 10 гидрокабоната бария?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора, содержащего 16 г гидроксида натрия, и углекислого газа объёмом 4,48 л (н.у.)?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата кальция, если при прокаливании 2,1522 г кристаллогидрата остаётся 1,7019 г безводной соли.

Вариант 11.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении $Pb(NO_3)_2$ массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 3,3 г сероводородной кислоты и гидроксида калия массой 5,6 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата натрия, если при прокаливании 4,222 г кристаллогидрата выделяется 2,328 г воды.

Вариант 12.

1. Какая масса карбоната цинка подверглась термическому разложению, если объём выделившегося углекислого газа составил 2,24 л (н.у.)?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 24,5 г ортофосфорной кислоты и гидроксида кальция массой 18,5 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида магния, если при прокаливании 2,0333 г кристаллогидрата остаётся 0,9523 г безводной соли.

Вариант 13.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата железа (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г ортофосфорной кислоты и гидроксида магния массой 5,8 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата $Fe_3(PO_4)_2 \cdot nH_2O$, если при прокаливании 3,34 г кристаллогидрата выделяется 0,9558 г воды.

Вариант 14.

1. Какой объём диоксида азота (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата ртути (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 22,4 л (н.у.) сероводорода и такого же объёма аммиака?

3. Выведите формулу кристаллогидрата карбоната натрия, если при прокаливании 7,15 г кристаллогидрата остаётся 2,65 г безводной соли.

Вариант 15.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата серебра массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 8,96 л хлороводорода (н.у.) и гидроксида меди (II) массой 19,6 г?

3. Выведите формулу кристаллической соды $Na_2CO_3 \cdot nH_2O$, если при прокаливании 4,29 г кристаллогидрата выделяется 2,7 г воды.

Вариант 16.

1. Какая масса нитрата никеля подверглась термическому разложению, если в результате реакции выделился газ объёмом 2,24 л?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 36,5 г соляной кислоты и гидроксида меди (II) массой 98 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата магния, если при прокаливании 45,6 г кристаллогидрата остаётся 24 г безводной соли.

Вариант 17.

1. Какой объём углекислого газа выделяется при кипячении раствора, содержащего 10 г гидрокабоната магния?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 14,6 г соляной кислоты и гидроксида железа (III) массой 10,7 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата магния, если при прокаливании 22,8 г кристаллогидрата выделяется 10,8 г воды.

Вариант 18.

1. Какой объём газа выделяется при прокаливании 10 г карбоната кальция?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 36,5 г соляной кислоты и гидроксида меди массой 9,8 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата карбоната магния, если при прокаливании 2,07 г кристаллогидрата остаётся 1,26 г безводной соли.

Вариант 19.

1. Какой объём газа выделяется при прокаливании 10 г нитрата лития?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г серной кислоты и гидроксида рубидия массой 50 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата карбоната магния, если 41,7 г кристаллогидрата теряют при обезвоживании 16,2 г воды.

Вариант 20.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата серебра массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 40 г сернистой кислоты и гидроксида калия массой 56 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида марганца (II), если при прокаливании 10 г кристаллогидрата остаётся 6,363 г безводной соли.

Вариант 21.

1. Какая масса карбоната бария подверглась термическому разложению, если объём выделившегося углекислого газа составил 3,36 л (н.у.)?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 4,9 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 8 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида марганца (II), если при прокаливании 20 г кристаллогидрата выделяется 7,274 г воды.

Вариант 22.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата железа (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 16 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата натрия, если при прокаливании 10 г кристаллогидрата выделяется 4,7 г воды.

Вариант 23.

1. Какой объём диоксида азота (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата магния (II) массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 9,8 г ортофосфорной кислоты и гидроксида натрия массой 24 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата сульфата натрия, если при прокаливании 20 г кристаллогидрата остается 10,6 г воды безводной соли.

Вариант 24.

1. Какой объём газа образуется при термическом разложении 10 г хлорида аммония?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии 14,6 г соляной кислоты и гидроксида меди (II) массой 19,6 г?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида бария, если при прокаливании 10 г кристаллогидрата выделяется 1,475 г воды.

Вариант 25.

1. Какой объём кислорода (н.у.) выделится при термическом разложении нитрата лития массой 10 г?

2. Какая масса соли образуется при взаимодействии раствора, содержащего 16 г гидроксида натрия, и углекислого газа объёмом 2,24 л (н.у.)?

3. Выведите формулу кристаллогидрата хлорида бария, если при прокаливании 5 г кристаллогидрата образуется 4,2625 г сухого остатка.

Тема 6. Генетическая связь неорганических веществ

Генетическая связь — это связь между веществами разных классов, основанная на их взаимопревращениях и отражающая единство их происхождения.

Генетический ряд - ряд веществ–представителей разных классов неорганических соединений, являющихся соединениями одного химического элемента, связанных взаимопревращениями и отражающих общность происхождения этих веществ.

Основные признаки генетических рядов:

1. Все вещества одного ряда должны быть образованы одним химическим элементом: $Cl_2 \rightarrow HCl \rightarrow NaCl \rightarrow AgCl$ – генетический ряд хлора.

2. Вещества, образованные одним и тем же элементом, должны принадлежать к различным классам химических веществ.

3. Вещества, образующие генетический ряд элемента, должны быть связаны между собой взаимопревращениями. Ряд называется полным, если он начинается и заканчивается простым веществом, и неполным, если заканчивается другим веществом.

Выделяют следующие генетические ряды:

1. Генетический ряд металлов, гидроксиды которых являются основаниями (щелочами): металл → основный оксид → основание (щелочь) → соль

Например: $Ca \rightarrow CaO \rightarrow Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2$

2. Генетический ряд металлов, которые образуют амфотерные гидроксиды:

металл → амфотерный оксид → соль → амфотерный гидроксид → соль

Например: $Zn \rightarrow ZnO \rightarrow ZnSO_4 \rightarrow Zn(OH)_2 \rightarrow Na_2ZnO_2$

Оксид цинка с водой не взаимодействует, поэтому из него сначала получают соль, а затем гидроксид цинка. Так же поступают, если металлу соответствует нерастворимое основание.

3. Генетический ряд неметаллов (неметаллы образуют только кислотные оксиды):

неметалл → кислотный оксид → кислота → соль

Например: $P \rightarrow P_2O_5 \rightarrow H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4$

Переход от одного вещества к другому осуществляется с помощью химических реакций

Задачи для самостоятельной работы по теме «Генетическая связь»

1. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидроксида никеля (II), полученного из 15 г никеля:

$$Ni \rightarrow NiO \rightarrow NiSO_4 \rightarrow Ni(OH)_2$$

2. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидроксида меди (II), полученного из 13 г меди:

$$Cu \rightarrow CuO \rightarrow Cu(NO_3)_2 \rightarrow Cu(OH)_2$$

3.Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу висмута, полученного из 10 г исходной соли:

$$Bi(NO_3)_3 \rightarrow Bi(OH)_3 \rightarrow Bi_2O_3 \rightarrow Bi$$

4. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидроксида кобальта (II), необходимого для получения 20 г металлического кобальта:

$$Co(OH)_2 \rightarrow CoO \rightarrow Co \rightarrow CoCl_2$$

5. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу плюмбита натрия, полученного из 10 г металлического свинца:

$$Pb \rightarrow Pb(NO_3)_2 \rightarrow PbO \rightarrow K_2PbO_2$$

6. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу фосфора, необходимого для получения 100 г ортофосфата калия:

$$P \rightarrow P_2O_5 \rightarrow H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4$$

7. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу хлорида серебра, полученного из 44,8 л хлора (н.у.):

$$Cl_2 \rightarrow HCl \rightarrow NaCl \rightarrow AgCl$$

8. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу хрома, необходимого для получения 10 г гидроксида хрома (III):

$$Cr \rightarrow Cr_2O_3 \rightarrow CrCl_3 \rightarrow Cr(OH)_3$$

9. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу оксида олова (II), необходимого для получения 10 г станнита натрия:

$$SnO \rightarrow SnSO_4 \rightarrow Sn(OH)_2 \rightarrow Na_2SnO_2$$

10. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу оксида железа (III), полученного из 10 г металлического железа

$$Fe \rightarrow Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow Fe(OH)_3 \rightarrow Fe_2O_3$$

11. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу хлорида кальция, полученного из 10 г металлического кальция:

$$Ca \rightarrow CaO \rightarrow Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2$$

12. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидроксида цинка, полученного из 10 г металлического цинка:

$$Zn \rightarrow ZnO \rightarrow ZnSO_4 \rightarrow Zn(OH)_2$$

13. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу алюминия, необходимого для получения 10 г гидроксида алюминия:

$$Al \rightarrow Al_2O_3 \rightarrow AlCl_3 \rightarrow Al(OH)_3;$$

14. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу сульфита натрия, полученного из 32 г серы:

$$S \rightarrow SO_2 \rightarrow H_2SO_3 \rightarrow Na_2SO_3$$

15. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу серы, необходимой для получения 3,36 л триоксида серы (н.у.):

$$S \rightarrow H_2S \rightarrow SO_2 \rightarrow SO_3$$

16. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу азотной кислоты, полученной из азота объёмом 8,96 л (н.у.):

$$N_2 \rightarrow NO \rightarrow NO_2 \rightarrow HNO_3$$

17. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидрофосфита калия, полученного из 10 г фосфора:

$$P \rightarrow P_2O_3 \rightarrow H_3PO_3 \rightarrow K_2HPO_3$$

18. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу бромида натрия, полученного из 10 г брома:

$$Br_2 \rightarrow HBr \rightarrow NaBr \rightarrow Br_2$$

19. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу карбоната кальция, полученного из углекислого газа объёмом 2,24 л (н.у.):

$$C \rightarrow CO_2 \rightarrow H_2CO_3 \rightarrow CaCO_3$$

20. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу нитрита натрия, полученного из 10 г металлического натрия:

$$Na \rightarrow NaOH \rightarrow NaNO_3 \rightarrow NaNO_2$$

21. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу магния, необходимого для получения 10 г гидроксида магния:

$$Mg \rightarrow MgO \rightarrow MgCl_2 \rightarrow Mg(OH)_2$$

22. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу гидроксида бериллия, полученного из 10 г бериллия:

$$Be \rightarrow BeO \rightarrow BeCl_2 \rightarrow Be(OH)_2$$

23. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу кремниевой кислоты, полученной из 10 г кремния:

$$Si \rightarrow SiO_2 \rightarrow Na_2SiO_3 \rightarrow H_2SiO_3$$

24. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу нитрита аммония, полученного из азота объёмом 8,96 л (н.у.):

$$N_2 \rightarrow NH_3 \rightarrow NH_4NO_2 \rightarrow N_2$$

25. Напишите уравнения реакций для следующих превращений, рассчитайте массу лития, необходимого для получения сульфата лития массой 10 г:

$$Li \rightarrow Li_2O \rightarrow LiOH \rightarrow Li_2SO_4$$

Дополнительные задачи:

1. В 250 мл воды растворили 4,2 г лития, затем добавили 200 г 20% раствора сульфата меди (II). Определите массовую долю соли в полученном растворе.

2. К 100 г 8% раствора гидроксида натрия прилили раствор, содержащий 24 г сульфата меди. Осадок отфильтровали, высушили, прокалили и взвесили. Масса твердого остатка составила 7,6 г. Вычислить выход реакции в процентах от теоретически возможного.

3. В 500 г 10% раствора гидроксида натрия растворили 3,22 г. металлического натрия. Найти массовую долю гидроксида натрия в образовавшемся растворе.

Список литературы

Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО«Уральский государственный горный университет»

Р. А. Апакашев, В. В. Павлов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ХИМИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом
Уральского государственного горного университета
в качестве учебного пособия

Екатеринбург – 2021

УДК 546
А76

Рецензенты: кафедра «Технология сварочного производства» механико-машиностроительного факультета УГТУ - УПИ, зав. кафедрой Шалимов М.П., профессор, д-р техн.наук; Фетисов А.В., ведущий научный сотрудник лаборатории статики и кинетики процессов Института металлургии УрО РАН, д-р хим. наук, Красиков С.А., ведущий научный сотрудник лаборатории пирометаллургии цветных металлов Института металлургии УрО РАН, д-р техн. наук.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета

Апакашев Р.А., Павлов В.В.

А76 Теоретические основы общей химии: учебное пособие / Р.А. Апакашев, В.В. Павлов; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд - во УГГУ, 2008. - 240 с.

Пособие соответствует дисциплине «Химия» направления 150400 «Технологические машины и оборудование» высшего профессионального образования для подготовки инженеров.

Рассмотрены энергетика и кинетика химических реакций, химическое равновесие, химия растворов, современные представления о строении атомов и различных типах химической связи, комплексные соединения, а также окислительно-восстановительные процессы, коррозия и защита металлов. Изложение теоретического материала сопровождается примерами решения прикладных задач, учитывающих специфику вуза горного профиля. Приведены контрольные вопросы и задания для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса, обучающихся по специальности «Горные машины и оборудование».

Рис. 23. Табл. 11. Библиогр. 7 назв.

УДК 546

© Уральский государственный горный университет, 2008
© Апакашев Р. А., Павлов В. В., 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для студентов высших технических учебных заведений изучение химии составляет часть учебной программы по избранной специальности. Причем такими специальностями в горном университете являются практически все, имеющие отношение к поиску, разведке, добыче и обогащению полезных ископаемых.

Дело в том, что химия, также как математика, физика является фундаментальной наукой. Практически в любой отрасли горного дела приходится сталкиваться с технологическими свойствами различных веществ, например, с их твердостью, прочностью, активностью при взаимодействии с другими веществами или устойчивостью к внешним условиям. В отечественной и зарубежной практике ведения горных работ все более широкое применение находит высокопроизводительная разработка месторождений полезных ископаемых, обеспечивающая полное извлечение и охрану недр с меньшими затратами на добычу минерального сырья и снижение отрицательного влияния на окружающую природную среду. Поэтому химия, как наука, имеет важное значение в образовательном процессе студентов специальности «Горные машины и оборудование», будущая профессиональная деятельность которых связана с решением вопросов технологии и техники экологически безопасной разработки месторождений в условиях высокопроизводительной механизированной добычи полезных ископаемых.

Успешный поиск и разведка месторождений полезных ископаемых, оценка пригодности водного бассейна к практическому использованию, идентификация вещества, определение возраста горных пород, проектирование и создание высокотехнологичного горного оборудования тесно связаны с химической наукой. Уровень компетентности горного инженера будет несомненно выше, если он освоит в вузе и сумеет использовать в своей производственной деятельности базовые знания в области химии.

Глава 1
КЛАССИФИКАЦИЯ И НОМЕНКЛАТУРА НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

1.1. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ НЕОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ. ГОРНЫЕ ПОРОДЫ И МИНЕРАЛЫ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Вещества, окружающие нас в природе и представленные в земной коре, принято делить на простые и сложные. Простые вещества состоят из атомов одного химического элемента, сложные – из атомов различных элементов.

Традиционно простые вещества по физическим и химическим свойствам подразделяют на две группы: металлы и неметаллы. Для металлов обычно характерны металлический блеск, ковкость, тягучесть – свойства, как правило, отсутствующие у неметаллов. Однако основным критерием принадлежности простого вещества к той или иной группе является химический характер соединений, образующихся в результате взаимодействия этого вещества с кислородом и водой.

Среди сложных веществ, состоящих из атомов различных элементов, выделяют химические соединения неорганического и органического происхождения. В свою очередь, например, неорганические соединения могут классифицироваться по составу или по свойствам (функциональным признакам). Так, по составу возможно деление на бинарные, состоящие из атомов двух элементов, и многоэлементные соединения. К бинарным соединениям относятся оксиды, образующиеся при взаимодействии атомов химического элемента с кислородом:

$$2Cu + O_2 = 2CuO,$$

$$4Fe + 3O_2 = 2Fe_2O_3.$$

Важную группу сложных по составу соединений образуют гидроксиды. Гидроксиды можно рассматривать как соединения оксидов с водой. При этом

оксиды металлов обычно образуют основания, а оксиды неметаллов – кислоты:

$$CaO + H_2O = Ca(OH)_2 ,$$
$$SO_3 + H_2O = H_2SO_4 .$$

В состав молекулы основания входят ион металла и соответствующее его заряду число групп OH^-. Многие основания мало растворимы в воде. Хорошо растворимые основания, такие как NaOH, KOH, называют щелочами.

Молекулы кислот содержат один или несколько ионов водорода и кислотный остаток.

Между собой кислоты и основания реагируют с образованием солей, например:

$$3Ca(OH)_2 + 2H_3PO_4 = Ca_3(PO_4)_2 + 6H_2O.$$

Соль, молекула которой содержит основной остаток без ионов OH^- (ион металла) и кислотный остаток без ионов H^+ является средней. С учетом зарядов остатков составляют формулу соли, помня, что молекула любого вещества электрически нейтральна. Так, основной остаток Ca^{2+} образует с кислотным остатком PO_4^{3-} среднюю соль $Ca_3(PO_4)_2$.

В тех случаях, когда для нейтрализации кислоты взято недостаточно основания, часть ионов водорода кислоты остается незамещенной на ионы металла. Образующиеся при этом соли, содержащие незамещенные ионы водорода исходной кислоты, называют кислыми. Например, кислые соли $NaHSO_4$ и $Ca(H_2PO_4)_2$ могут быть получены следующим образом:

$$H_2SO_4 + NaOH = NaHSO_4 + H_2O,$$
$$2H_3PO_4 + Ca(OH)_2 = Ca(H_2PO_4)_2 + 2H_2O.$$

В противоположном случае, при недостатке кислоты, образуются основные соли, содержащие гидроксильные группы исходного основания, не

замещенные на кислотные остатки. Например:

$$Al(OH)_3 + H_2SO_4 = AlOHSO_4 + 2H_2O,$$
$$Mg(OH)_2 + HCl = MgOHCl + H_2O.$$

Очевидно, что основные соли образуются основаниями, в состав молекулы которых входит несколько групп OH^-. Соответственно, образование кислых солей возможно для тех кислот, в молекуле которых более одного иона водорода.

Кроме средних, кислых и основных известны двойные соли, примерами которых могут служить $CaMg(CO_3)_2$ и $Ca_5(F,Cl)(PO_4)_3$. Как видно из приведенных формул, двойная соль содержит одновременно либо разные металлы при одном и том же кислотном остатке, либо разные кислотные остатки при одном и том же ионе металла.

Помимо основных и кислотных оксидов с соответствующими им гидроксидами известны амфотерные оксиды и гидроксиды, способные проявлять как кислотные, так и основные свойства.

Амфотерные гидроксиды, например, $Zn(OH)_2$, $Sn(OH)_2$, $Pb(OH)_2$, $Al(OH)_3$, $Sb(OH)_3$, $Cr(OH)_3$, образуют соли при взаимодействии как с кислотами, так и с основаниями. При взаимодействии с кислотами амфотерные гидроксиды проявляют свойства оснований, а при взаимодействии с основаниями - свойства кислот:

$$Zn(OH)_2 + H_2SO_4 = ZnSO_4 + 2H_2O,$$
$$Zn(OH)_2 + 2NaOH = Na_2ZnO_2 + 2H_2O \text{ (при спекании)},$$
$$Zn(OH)_2 + 2NaOH = Na_2[Zn(OH)]_4 \text{ (в растворе)}.$$

Большинство рассмотренных выше типов неорганических соединений встречается в земной коре в виде минералов. Агрегаты из различных минералов представляют собой горные породы. Известно, что в земной коре со-

держится около 3000 минералов. В таблице 1.1 приведены наиболее распространенные из них.

Таблица 1.1

Распространенные минералы земной коры

Название минерала	Химическая формула	Название минерала	Химическая формула
Кальцит	$CaCO_3$	Гематит	Fe_2O_3
Халькопирит	$CuFeS_2$	Малахит	$(CuOH)_2CO_3$
Киноварь	HgS	Пирит	FeS_2
Корунд	$A1_2O_3$	Перовскит	$CaTiO_3$
Флюорит	CaF_2	Кварц	SiO_2
Галенит	PbS	Тальк	$Mg_3(Si_2O_5)_2(OH)_2$
Гипс	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	Бирюза	$CuAl_6(PO_4)_4(OH)_8 \cdot 5H_2O$
Галит	$NaCl$	Вульфенит	$PbMoO_4$
Доломит	$CaCO_3 \cdot MgCO_3$	Апатит	$Ca_5(F,Cl)(PO_4)_3$

Каждый минерал обладает определенным химическим составом, исходя из которого он может быть отнесен к конкретному классу химических соединений. Так, состав минерала галенита PbS отвечает средней соли, доломита $CaMg(CO_3)_2$ и апатита $Ca_5(F,Cl)(PO_4)_3$ - двойной соли, а состав малахита $(CuOH)_2CO_3$ – основной соли. Есть минералы, являющиеся по своему составу гидроксидами: сассолин H_3BO_3 - кислотный гидроксид, брусит $Mg(OH)_2$ - основной гидроксид. Любой минерал характеризуется вполне определенными химическими свойствами, соответствующими свойствам того класса соединений, к которому он может быть отнесен. Поэтому, например, ориентируясь в химических свойствах солей, как класса соединений, можно охарактеризовать типичные химические свойства всех тех минералов, состав которых выражается формулой соли.

1.2. НОМЕНКЛАТУРА НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

Номенклатура неорганических соединений – важная часть знаний в области химии. Название химического соединения может отражать его состав, т.е. эмпирическую формулу. Такое название относят к систематическим. В настоящее время общепринятой является систематическая номенклатура Международного союза теоретической и прикладной химии (ИЮПАК). Кроме систематических на практике применяются устоявшиеся традиционные или тривиальные (условные) названия.

Рассмотрим примеры систематической номенклатуры различных соединений, сопровождая их традиционными названиями.

Оксиды. В номенклатуре ИЮПАК оксидам придают характерный суффикс «ид». Для отражения стехиометрии возможны два варианта: либо указывать степень окисления римскими цифрами, либо использовать префиксы, образованные от греческих числительных. Например:

NO – оксид азота (II) (монооксид азота); NO_2 – оксид азота (IV) (диоксид азота); N_2O_5 – оксид азота (V) (пентаоксид диазота);

Fe_3O_4 – оксид железа (III) (тетраоксид трижелеза);

CO – оксид углерода (II) (монооксид углерода); CO_2 – оксид углерода (IV) (диоксид углерода).

Термин «смешанные оксиды» не рекомендуется, следует использовать название «двойные оксиды». Названия двойных оксидов можно образовать следующим образом: Cr_2CuO_4 – оксид меди (II) – дихрома (III) или тетраоксид меди – дихрома.

Основания. Названия основных гидроксидов образуются из слова «гидроксид» и названия элемента в родительном падеже. После названия элемента, способного проявлять в химических соединениях различную степень окисления, в скобках римскими цифрами указывается ее значение. Например:

LiOH – гидроксид лития, $Ba(OH)_2$ – гидроксид бария, $Fe(OH)_2$ – гид-

роксид железа (II), $Fe(OH)_3$ - гидроксид железа (III), $Mn(OH)_4$ – гидроксид марганца (IV).

Кислоты. Названия кислот, не содержащих в своем составе кислород, образуют как для соединений водорода, придавая анионам суффикс «ид»: HCl – хлорид водорода, H_2S – сульфид водорода, HCN – цианид водорода, HN_3 – азид водорода. Наряду с систематическими названиями в современной номенклатуре сохраняются и традиционные названия. Так, водные растворы галогенидов водорода называют: HF – фтороводородная кислота (плавиковая кислота), HCl – хлороводородная кислота (соляная кислота), HJ – иодоводородная кислота.

Кислоты, образованные из многоатомных анионов, чаще всего являются кислородсодержащими кислотами. Для этих кислот обычно применяются традиционные несистематические названия. В табл. 1.2 приведены названия наиболее известных кислот и их солей.

Названия солей составляют из названия аниона кислоты в именительном падеже и названия катиона в родительном падеже (хлорид натрия, сульфат меди и т. п.). При этом название аниона производят от корня латинского наименования образующего кислоту элемента. Степень окисления иона металла указывают, если необходимо, римскими цифрами в скобках.

В случае бескислородных кислот название аниона имеет окончание «ид». Например, соли NaBr, FeS, KCN соответственно называются бромид натрия, сульфид железа (II), цианид калия.

Названия анионов кислородсодержащих кислот получают окончания и приставки в соответствии со степенью окисления образующего кислоту элемента. Высшей степени окисления («... ная» или «... овая» кислота) отвечает окончание «ат». Так, соли серной кислоты H_2SO_4 называются сульфатами, хромовой H_2CrO_4 - хроматами и т. д. Более низкой степени окисления («... истая» кислота) соответствует окончание «ит». Например, соли сернистой кислоты H_2SO_3 - сульфиты, азотистой HNO_2 - нитриты и т. д.

Таблица 1.2

Распространенные кислоты и их соли

Кислота		Названия соответствующих средних солей
формула	название	
HNO_3	Азотная	Нитраты
HNO_2	Азотистая	Нитриты
H_3BO_3	Борная	Бораты
H_2SiO_3	Кремниевая	Силикаты
$HMnO_4$	Марганцовая	Перманганаты
H_3PO_3	Фосфористая	Фосфиты
HPO_3	Метафосфорная	Метафосфаты
H_3PO_4	Ортофосфорная	Ортофосфаты (фосфаты)
$H_4P_2O_7$	Пирофосфорная	Пирофосфаты
H_3AsO_3	Мышьяковистая	Арсениты
H_3AsO_4	Мышьяковая	Арсенаты
H_2SO_3	Сернистая	Сульфиты
H_2SO_4	Серная	Сульфаты
H_2CO_3	Угольная	Карбонаты
HF	Плавиковая	Фториды
$HC1O_4$	Хлорная	Перхлораты
$HClO_3$	Хлорноватая	Хлораты
HClO	Хлорноватистая	Гипохлориты
HCl	Соляная	Хлориды
H_2CrO_4	Хромовая	Хроматы

В том случае, если существует кислота с еще более низкой степенью окисления кислотообразующего элемента («... оватистая» кислота), ее анион получает приставку «гипо» и окончание «ит». Так, соли хлорноватистой кислоты HC1O называют гипохлоритами.

Соли некоторых кислот в соответствии с исторически сложившейся

традицией сохранили названия, отличающиеся от систематических. Например, соли марганцовой ($HMnO_4$), хлорной ($HClO_4$), йодной (HIO_4) кислот называют соответственно перманганатами, перхлоратами и перйодатами. В связи с этим соли марганцовистой (H_2MnO_4), хлорноватой ($HClO_3$) и йодноватой (HIO_3) кислот носят названия манганатов, хлоратов и йодатов.

Названия кислых солей образуют так же, как и средних, но при этом добавляют приставку «гидро», указывающую на наличие незамещенных атомов водорода, число которых обозначают греческими числительными (ди, три и т. д.). Например, $Ba(HCO_3)_2$ - гидрокарбонат бария, NaH_2PO_4 дигидроортофосфат натрия, KHS - гидросульфид калия.

Названия основных солей тоже образуют подобно названиям средних солей, но при этом добавляют приставку «гидроксо», указывающую на наличие незамещенных гидроксогрупп. Так, FeOHCl - хлорид гидроксожелеза (II), $(NiOH)_2SO_4$ сульфат гидроксоникеля (II), $A1(OH)_2NO_3$ - нитрат дигидроксоалюминия.

1.3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Напишите химические формулы следующих соединений:

а) хлорид железа (III), фосфат натрия, хлорид бария, хромат калия, сульфат железа (II), гидроксид калия, хлорид стронция, серная кислота, нитрат кобальта (II), гидроксид бария, бромид марганца (II), сульфид аммония;

б) нитрат свинца (II), сероводород, сульфат натрия, нитрат серебра, хлорид титана (IV), нитрат серебра, хлорид висмута (III), сульфид натрия, сульфат никеля (II), нитрит свинца, хлорид натрия, хлорид алюминия, сульфат серебра, фосфат цезия, сульфат алюминия, нитрат железа (II), фосфат кальция;

в) соляная кислота, сульфид сурьмы (III), силицид магния, серная кислота, фосфид кальция, азотная кислота, карбид кальция, нитрид магния, арсенид цинка, карбид алюминия, фосфорная кислота, гидросульфат натрия,

сернистая кислота, гидрокарбонат кальция, бромистоводородная кислота, цианид натрия, оксалат калия;

г) хлорид аммония, гидроксид лития, диоксид углерода, сульфид рубидия, ортофосфат натрия, сульфат меди, нитрат алюминия, нитрат цинка, хлорид магния, сульфид хрома (III), оксалат железа (II).

2. Назовите следующие химические соединения:

а) $NaClO_3$, K_3PO_4, $TiBr_3$, $Ba(HSO_3)_2$, $Zn(CN)_2$, CaO, NaBr, $H_2C_2O_4$, MnO_2, H_2SO_4, Na_2S, $Na_2Cr_2O_7$, KCO_4, $Sb_2(SO_4)_3$, MgI_2, $NaNO_2$, NH_4OH;

б) H_2S, MnS, HNO_3, $Mn(NO_3)_2$, NO, Cu_2O, NO_2 , $Mn(NO_3)_2$, PbO_2, $HMnO_4$, H_2SeO_3, $SnCl_2$, Na_2WO_4, $SnCl_4$, Na_2CrO_4, $C1O_2$, Hg_2SO_4, AsH_3, Na_2SO_3.

Глава 2
НАПРАВЛЕННОСТЬ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Горение угля – пример одной из многих реакций, протекающих с выделением энергии. Согласно закону сохранения, энергия не исчезает бесследно и не возникает из ничего. Поэтому тепловая энергия, выделяемая при горении, поступает в окружающую среду. Такие химические реакции, сопровождающиеся выделением теплоты в окружающую среду, называются **экзотермическими**. Противоположные им в этом отношении процессы, протекающие с поглощением теплоты, являются **эндотермическими.**

Многие химические реакции, в частности реакции, протекающие на поверхности земной коры, идут при практически постоянном атмосферном давлении. Для химических реакций, происходящих при постоянном давлении, пользуются специальной термодинамической функцией, называемой **"энтальпия"** (обозначается латинской буквой Н). Дело в том, что **изменение энтальпии (ΔН) в ходе процесса, протекающего при постоянном давлении, равно количеству тепловой энергии, выделяемой или поглощаемой системой в ходе этого процесса.**

Рассмотрим такой пример. Один моль каменного угля при 20 °С и атмосферном давлении имеет определенное значение энтальпии. Если удвоить количество угля, взяв 2 моля, энтальпия также удвоится. Энтальпия является экстенсивным свойством системы, то есть свойством, зависящим от количества вещества. Поэтому можно говорить об энтальпии, приходящейся на один моль вещества.

Заметим, что энтальпия зависит от физического состояния вещества. Например, энтальпия угля при 50 °С отличается от его энтальпии при 20 °С.

Если же оговорить конкретные условия, энтальпия оказывается вполне определенной величиной. При этом нет необходимости указывать, каким образом вещество приведено к данным условиям, имеет значение лишь конкретное рассматриваемое состояние.

Свойства системы, зависящие только от конкретных условий состояния, но не зависящие от пути достижения этого состояния, называются **функциями состояния.** Энтальпия и является такой функцией, также как, например, механическая потенциальная энергия. Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью земли, является функцией состояния, зависящей от высоты подъема. Величина потенциальной энергии не зависит от того, по какому пути (траектории) поднимали тело до занимаемого конечного положения. Изменение потенциальной энергии зависит только от начального и конечного положения тела.

При протекании химической реакции энтальпии продуктов отличаются от энтальпий исходных реагентов. Изменение энтальпии в произвольной реакции ($\Delta H_{реакции}$) представляет собой разность между суммарной энтальпией продуктов и суммарной энтальпией исходных реагентов:

$$\Delta H_{реакции} = \Sigma H_{продукты\ реакции} - \Sigma H_{исходные\ реагенты}.$$

Если суммарная энтальпия продуктов меньше, чем суммарная энтальпия исходных реагентов, величина ΔH отрицательна ($\Delta H < 0$). При отрицательном изменении энтальпии переход от исходных веществ к продуктам сопровождается выделением теплоты, то есть реакция является экзотермической. В том случае, когда $\Delta H > 0$, реакция является эндотермической (рис. 2.1).

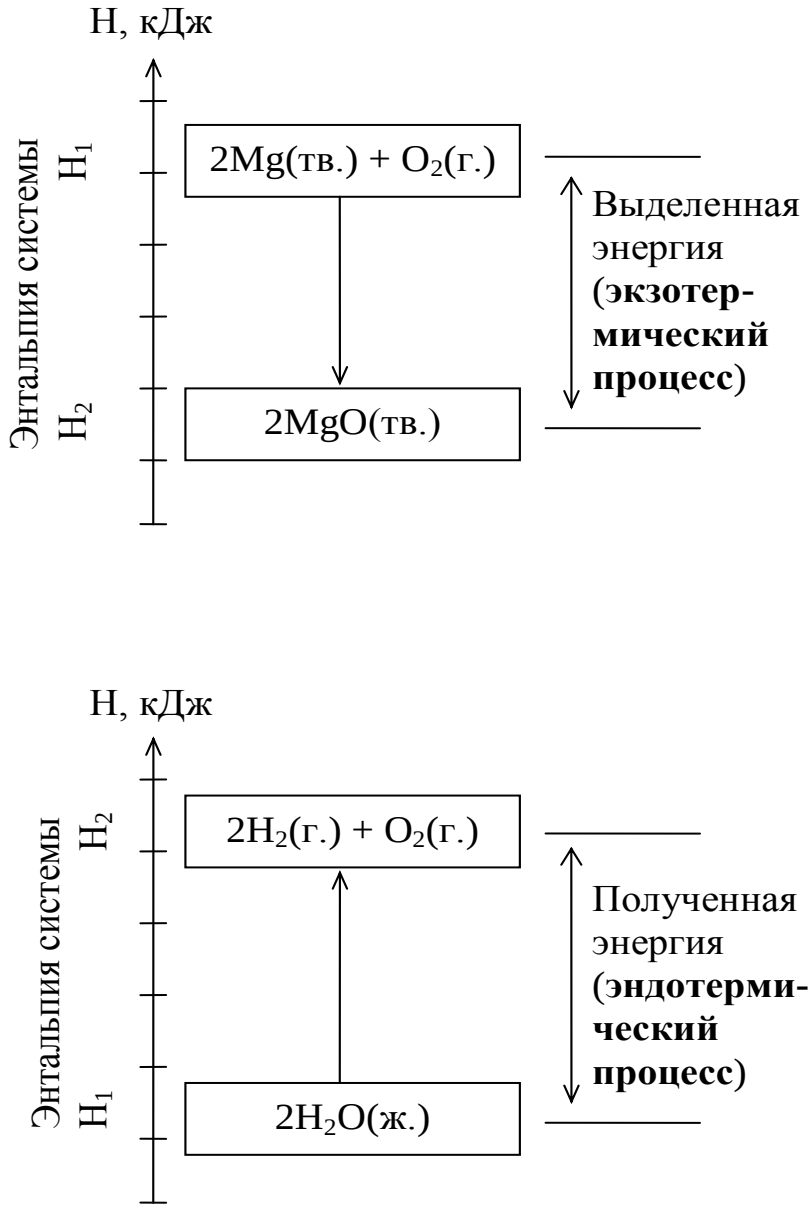


Рис. 2.1. Энергетическая схема теплового эффекта химической реакции

Изменение энтальпии в ходе процесса проявляется выделением тепла, световым излучением или другими способами. Так, экспериментально установлено, что сгорание 1 моля метана при постоянном давлении сопровождается выделением 802 кДж тепловой энергии. Это может быть записано следующим образом:

$$CH_4(г) + 2O_2(г) = CO_2(г) + 2H_2O(г) \quad \Delta H = -\ 802\ кДж/моль. \qquad (2.1)$$

Отрицательное значение ΔH указывает на то, что процесс является экзотермическим. Отметим, что изменение энтальпии прямой реакции равно по величине, но противоположно по знаку изменению энтальпии обратной реакции.

ΔH реакции зависит от состояния исходных веществ и продуктов их взаимодействия. Так, если в реакции горения метана (уравнение 2.1) вода была бы жидким, а не газообразным продуктом, то изменение энтальпии составило бы - 890 кДж/моль вместо - 802 кДж/моль. В случае конденсации во внешнюю среду передается большее количество теплоты, потому что при конденсации 2 молей воды из пара в жидкое состояние дополнительно выделяется еще 2·44 = 88 кДж:

$$H_2O(г) = H_2O(ж) \quad \Delta H = - 44 \text{ кДж/моль.}$$

Следовательно, в уравнениях химических реакций для учета изменений энергии необходимо указывать состояния исходных реагентов и продуктов реакции. Обычно предполагается, что исходные реагенты и продукты находятся при одинаковой температуре, как правило, равной 25 °С.

Значения ΔH реакций образования (теплот образования) различных веществ приводятся в специальных справочных таблицах. Причем соответствующие величины указываются для **стандартных условий** (Т = 298 К, Р = = 1 атм.). Дело в том, что абсолютное значение энтальпии определить невозможно, опытным путем определяется только изменение этой величины (ΔH). Поэтому для удобства соответствующие величины приводятся к одной шкале, началом отсчета в которой и служит стандартное состояние.

Стандартная теплота образования простых веществ считается равной нулю. При этом простые вещества рассматриваются в том агрегатном состоянии и в той модификации, в какой они устойчивы при стандартных условиях. Так, нулевой является стандартная теплота образования простых веществ -

кислорода O_2, железа Fe, водорода H_2 и т.д. Однако стандартное изменение энтальпии реакции образования озона O_3 не равно нулю, потому что для его образования из устойчивых в стандартном состоянии молекул кислорода O_2 требуются энергетические затраты. По этой же причине не равно нулю и стандартное изменение энтальпии реакции образования алмаза из графита:

$$C(\text{графит}) = C(\text{алмаз}) \quad \Delta H = 1{,}89 \text{ кДж/моль}.$$

В случае химических соединений стандартной теплотой образования называют тепловой эффект химической реакции образования одного моля соединения из простых веществ.

Например, стандартная теплота образования кальцита $CaCO_3$ в кристаллическом состоянии представляет собой тепловой эффект следующей реакции (в стандартных условиях):

$$Ca(к) + C(\text{графит}) + 1{,}5O_2(г) = CaCO_3(к) \quad \Delta H = -1206 \text{ кДж/моль}.$$

По справочным данным о стандартной теплоте образования веществ можно вычислять стандартные изменения энтальпии практически любых реакций. Для этого необходимо просуммировать теплоты образования всех продуктов реакции, умножив теплоту образования каждого вещества на соответствующий стехиометрический коэффициент в уравнении реакции, и затем вычесть из этой суммы аналогичную сумму теплот образования всех исходных реагентов.

Например, пользуясь справочными данными о теплоте образования, определим стандартное изменение энтальпии ΔH^0 для реакции горения этана:

$$C_2H_6(г) + 3{,}5O_2(г) = 2CO_2(г) + 3H_2O(г).$$

Вещество	C_2H_6(г)	CO_2(г)	H_2O(г)
$\Delta H^0_{обр.}$, кДж/моль	- 88,6	- 393,5	- 241,8

$\Delta H^0_{реакции} = [2\Delta H^0_{обр.}(CO_2(г)) + 3\Delta H^0_{обр.}(H_2O(г))] - [\Delta H^0_{обр.}(C_2H_6(г)) + 3{,}5\Delta H^0_{обр.}(O_2(г))] = [2(-393{,}5) + 3(-241{,}8)] - [-88{,}6 + 3{,}5\cdot 0] = -1512{,}4 + 88{,}6 = -1423{,}8$ кДж/моль.

Добавим, что по известному тепловому эффекту реакции образования вещества в одном агрегатном состоянии, можно вычислить тепловой эффект реакции его образования в другом агрегатном состоянии, например:

$$\Delta H°(г) = \Delta H°(к) + \Delta H°(возг.) = \Delta H°(ж) + \Delta H°(исп.);$$

$$\Delta H°(ж) = \Delta H°(т) + \Delta H°(пл);\ \Delta H°(возг.) = \Delta H°(пл.) + \Delta H°(исп.),$$

где $\Delta H°$(пл), $\Delta H°$(возг), $\Delta H°$(исп) - теплоты плавления, возгонки и испарения в расчете на один моль вещества.

2.2. САМОПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Таблица Менделеева содержит более ста химических элементов. В настоящее время 109 из них получили международное название. Большинство элементов встречается в земной коре в виде химических соединений – различных минералов. Количество известных минералов составляет только около трех тысяч. Это намного меньше, чем число теоретически возможных комбинаций атомов различных элементов в виде химических соединений. Подобное несоответствие объясняется тем, что не все химические элементы реагируют друг с другом или, то же самое, не все химические реакции протекают в реальных условиях.

Фундаментальный закон сохранения энергии свидетельствует, что при любых процессах энергия не возникает из ничего и не исчезает бесследно. Все известные виды энергии взаимно превращаются в строго эквивалентных количествах. Это означает, что в таких процессах, как дробление руды, плавление металла или в химической реакции, энергия не создается и не уничтожается, а только передается от одного тела к другому или превращается из одной формы в другую, в сумме оставаясь постоянной.

Однако закон сохранения энергии не отвечает на вопрос, почему процесс, связанный с превращением энергии из одного вида в другой, протекает именно в данном направлении? Реальные процессы протекают только в определенном направлении и, не изменив условий, нельзя реализовать обратное протекание процесса.

Например, такие процессы как переход теплоты от тела с более высокой температурой к контактирующему с ним менее нагретому телу, превращение работы в теплоту при трении, смешение газов и другие процессы протекают с конечной скоростью. С наступлением равновесия (например, при выравнивании температуры тел, обменивавшихся энергией в форме теплоты, при образовании однородной смеси газов и т. д.) процесс заканчивается.

Процессы, протекающие без воздействия внешних сил и приближающие систему к состоянию равновесия, называются **самопроизвольными**. Очевидно, что обратные по направлению процессы, удаляющие систему от равновесия, без внешнего побуждающего воздействия пойти не могут. Такие процессы являются **несамопроизвольными.** Природные явления свидетельствуют, что процессы, самопроизвольно протекающие в одном направлении, не являются самопроизвольными в обратном направлении.

Так, выпущенные из рук предметы падают на землю, нагретые тела остывают до температуры окружающей среды, сжатая пружина стремится принять исходную форму. Эти и многие другие явления, например, выветривание и изменение состава горных пород, характеризуются тем, что соответствующие системы самопроизвольно стремятся достичь состояния, в котором

они обладают минимумом энергии.

Тенденция к достижению минимума потенциальной энергии является одной из движущих сил, определяющих протекание химических реакций. Аналогично тому, как физическое тело обладает потенциальной энергией благодаря своему положению относительно поверхности земли, так и химические вещества обладают запасом потенциальной энергии, определяемым взаимным расположением ядер и электронов. При изменениях этого расположения в результате химической реакции может высвобождаться энергия. Например, самопроизвольный процесс горения природного газа сопровождается значительным экзотермическим эффектом, так как атомы углерода и водорода, образующие углеводороды, в результате реакции горения переходят в кислородные соединения (CO_2 и H_2O).

Добавим, что, тем не менее, известно достаточно большое количество процессов, являющихся самопроизвольными, но не относящихся к экзотермическим. Так, самопроизвольно происходит плавление льда при комнатной температуре, несмотря на то, что данный процесс является эндотермическим. К подобным самопроизвольным процессам относится и эндотермическое растворение многих солей (NaCl, $Ba(ClO_3)_2$ и т. д.) в воде. Расширение идеального газа в вакуум также происходит самопроизвольно, причем в изотермических условиях протекания данного процесса энергия системы не меняется.

Приведенные выше примеры процессов плавления льда, растворения солей и расширения идеального газа имеют общую причину самопроизвольного протекания. Эта причина не связана с характером изменения энтальпии системы в ходе процесса. Дело в том, что во всех трех рассмотренных случаях конечное состояние системы отличается большей хаотичностью или неупорядоченностью, чем исходное состояние. Например, молекулы воды, образующие лед, расположены в узлах кристаллической решетки. При плавлении происходит разрушение кристаллической структуры и молекулы получают возможность свободного перемещения относительно друг друга. Поэтому

распределение отдельных молекул в жидкой воде имеет б**о**льшую неупорядоченность, чем в ее твердом состоянии. Аналогичная ситуация возникает при растворении солей или при расширении газа. Следовательно, уменьшение внутренней энергии системы не является единственным фактором, определяющим возможность самопроизвольного протекания процесса. Самопроизвольное протекание процесса также может быть связано с повышением неупорядоченности системы.

Для характеристики степени неупорядоченности системы используется термодинамическая функция, называемая **энтропией** (обозначается символом S). Чем выше хаотичность системы и меньше степень порядка в ней, тем больше значение ее энтропии. Как и энтальпия, энтропия является функцией состояния. Размерность энтропии [Дж/(моль·град)]. Изменение энтропии в ходе процесса зависит только от исходного и конечного состояний системы, но не зависит от пути, по которому система переходит из одного состояния в другое: $\Delta S = S_{кон.} - S_{нач.}$.

Энтропия относится к экстенсивным величинам. Ее значение зависит от количества вещества в системе. Энтропия подчиняется закону аддитивности, то есть энтропия равновесной системы равна сумме энтропий ее отдельных частей, а изменение энтропии всей системы равно сумме изменений энтропии ее частей. Изменение энтропии в сложном процессе равно сумме изменений энтропии в отдельных стадиях процесса (рис. 2.2).

2.3. ЭНТАЛЬПИЙНЫЙ И ЭНТРОПИЙНЫЙ ФАКТОРЫ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ. ЭНЕРГИЯ ГИББСА

Вернемся к обсуждению двух основных факторов, определяющих направление самопроизвольно протекающих реакций. Один из этих факторов - стремление к достижению минимума энергии системы. Мерой данного

стремления в химических процессах, реализуемых в условиях постоянного давления, является изменение энтальпии ΔH. Второй фактор - стремление изолированной системы (нет обмена с внешней средой веществом и энергией) к достижению в ходе процесса наиболее вероятного неупорядоченного и хаотического состояния. При химическом взаимодействии данная тенденция проявляется в стремлении к распаду веществ на более простые, к образованию молекул меньшего размера и к равномерному их распределению по всему

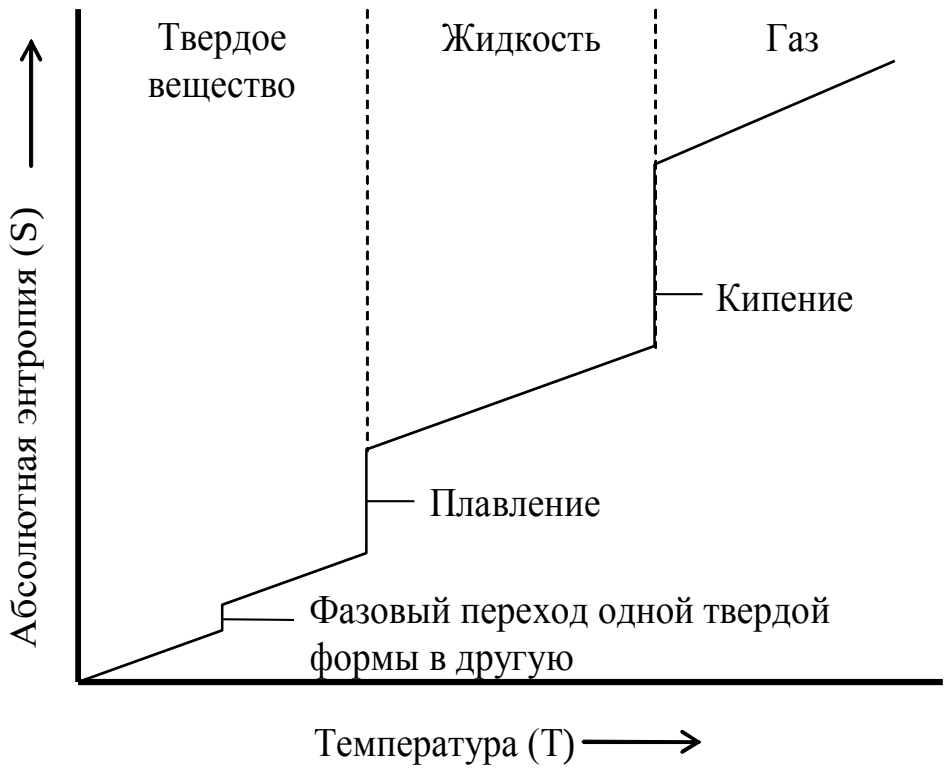


Рис. 2.2. Схема изменения энтропии при повышении температуры вещества

объему системы. Мерой этого стремления является изменение энтропии ΔS, которое происходит в результате таких процессов.

Многие природные процессы протекают в открытых системах, способных обмениваться с окружающей средой веществом и энергией. При протекании химических реакций в открытой системе энтропийному фактору,

действующему в направлении "распыления" частиц и рассеяния вещества, противостоит энтальпийный фактор. Последний действует в направлении агрегации частиц, перераспределения энергии химических связей и межмолекулярного взаимодействия для уменьшения общего запаса энергии системы.

Заключение о возможности самопроизвольного протекания химического процесса в определенном направлении можно получить, рассматривая разность между энтальпийным и энтропийным факторами в виде изменения новой функции ΔG:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S.$$

Если величина ΔG имеет отрицательный знак ($\Delta G < 0$), то в этом случае соответствующий процесс принципиально осуществим и абсолютное значение разности $\Delta H - T\Delta S$ характеризует движущую силу этого процесса.

В том случае, когда величина ΔG положительна ($\Delta G > 0$), химическая реакция самопроизвольно протекать не может. Осуществимой будет обратная реакция, для которой ΔG имеет отрицательное значение.

Подобно тому, как электрический ток течет в направлении от более высокого электрического потенциала к более низкому, так и химическая реакция самопроизвольно протекает только в таком направлении, при котором величина G_1 в исходном состоянии системы больше, чем соответствующая величина G_2 в конечном состоянии, то есть $\Delta G < 0$.

Величину $G = H - TS$ называют **свободной энергией Гиббса** в честь физика Д. Гиббса, показавшего возможность нахождения критерия направленности самопроизвольных процессов в открытых системах.

Энергия Гиббса является таким же свойством вещества или системы в целом, как и энтальпия H, и энтропия S. Для химических реакций, протекающих при P = const и T = const, изменение энергии Гиббса ΔG не зависит от пути, по которому протекает процесс, а полностью определяется составом и

состоянием исходных веществ и продуктов реакции, т. е. энергия Гиббса является функцией состояния системы.

2.4. РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЙ ЭНЕРГИИ ГИББСА В СТАНДАРТНЫХ УСЛОВИЯХ

Для определения направления протекания реакции или для предсказания возможности ее протекания в стандартных условиях используют изменение стандартной энергии Гиббса ΔG^o. Численное значение величины ΔG^o реакции позволяет судить, будут ли в стандартных условиях исходные реагенты самопроизвольно реагировать с образованием продуктов (если $\Delta G^o < 0$) или нет (если $\Delta G^o > 0$).

Значения изменений стандартной энергии Гиббса реакций образования ($\Delta G^o_{обр.}$) определены для большого числа веществ и занесены в справочники. Причем точно так же, как и для стандартных теплот образования, изменения энергии Гиббса для реакций образования простых веществ в их стандартных состояниях полагают равными нулю. Этот выбор точки отсчета не влияет на величину разности энергий продуктов реакции и исходных веществ.

С помощью значений $\Delta G^o_{обр.}$ можно вычислять изменение стандартной энергии Гиббса для произвольного химического процесса. Так, если записать уравнение химической реакции в общем виде:

$$aA + bB + \ ... \ \rightarrow \ cC + dD + ...,$$

то изменение стандартной энергии Гиббса с учетом стехиометрических коэффициентов a, b, c, d будет определяться выражением:

$$\Delta G^o = [c\Delta G^o_{обр.}(C) + d\Delta G^o_{обр.}(D) + \ldots] - [a\Delta G^o_{обр.}(A) + b\Delta G^o_{обр.}(B) + \ldots].$$

В качестве примера, используя табличные данные, определим, может ли тонкодисперсный порошок сидерита в процессе длительного хранения на воздухе самопроизвольно переходить в магнетит:

$$3FeCO_3(к) + 0{,}5O_2(г) \rightarrow Fe_3O_4(к) + 3CO_2(г).$$

сидерит магнетит

Вещество	$FeCO_3$ (к)	O_2(г)	Fe_3O_4(к)	CO_2(г)
$\Delta G^o_{обр.}$, кДж/моль	-674,6	0,0	-1014,2	-394,4

Стандартное изменение энергии Гиббса для рассматриваемой реакции определяется выражением:

$$\Delta G^o = [\Delta G^o_{обр.}(Fe_3O_4) + 3\Delta G^o_{обр.}(CO_2)] - [3\Delta G^o_{обр.}(FeCO_3) + 0{,}5\Delta G^o_{обр.}(O_2)] =$$

$$= [-1014{,}2 + 3(-394{,}4)] - [3(-674{,}6) + 0{,}5(0{,}0)] = -173{,}6 \text{ кДж/моль}.$$

Поскольку расчетное значение ΔG^o реакции отрицательно, сидерит в стандартных условиях (Т = 298 К, Р = 1 атм.) может самопроизвольно реагировать с кислородом, образуя магнетит. Однако полученное заключение ничего не говорит о скорости протекания реакции.

Если сделать упрощение и допустить, что $\Delta H°$ и $\Delta S°$ реакции не зависят от температуры, можно определить изменение стандартной энергии Гиббса при различных температурах:

$$\Delta G^o_T = \Delta H°_T - T\Delta S°_T.$$

Например, вычислим изменение стандартной энергии Гиббса реакции термического разложения минерала смитсонита ($ZnCO_3$) при температурах

400 К и 600 К:

$$ZnCO_3(к) \rightarrow ZnO(к) + CO_2(г),$$

Вещество	$ZnCO_3$(к)	ZnO(к)	CO_2(г)
$\Delta H°$, кДж/моль	-810,7	-350,6	-393,5
S°, Дж/(моль·К)	92,4	43,6	213,7

$$\Delta G^o_T = [\Delta H°(ZnO) + \Delta H°(CO_2) - \Delta H°(ZnCO_3)] -$$
$$- T[S°(ZnO) + S^o(CO_2) - S°(ZnCO_3)].$$

$$\Delta G^o_T = (- 350,6 - 393,5 + 810,7) - T(43,6 + 213,7 - 92,4)10^{-3} = 66,6 - 0,165T.$$

$$\Delta G^o_{400} = 66,6 - 0,165 \cdot 400 = 0,6 \text{ кДж/моль.}$$

$$\Delta G^o_{600} = 66,6 - 0,165 \cdot 600 = - 32,4 \text{ кДж/моль.}$$

При 400 К значение ΔG^o положительно, разложение смитсонита на оксид металла и углекислый газ не происходит. При 600 К значение ΔG^o отрицательно, следовательно, рассматриваемая реакция будет протекать самопроизвольно.

2.5. ПОДЗЕМНАЯ ГАЗИФИКАЦИЯ УГЛЯ – НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИКИ

Технология подземной газификации угля - перспективный способ разработки угольных месторождений. Данный способ применим для угольных пластов со сложными горно-геологическими условиями залегания, и позволяет совместить добычу, обогащение и переработку угля.

Все технологические операции по газификации угольного пласта осуществляют с земной поверхности, без применения подземного труда работающих. Суть технологии подземной газификации угля заключается в бурении с поверхности земли скважин до угольного пласта с последующей сбойкой. Затем инициируют управляемый очаг горения угольного пласта и создают условия для превращения угля в горючий газ, который поступает по скважинам на земную поверхность (рис. 2.3).

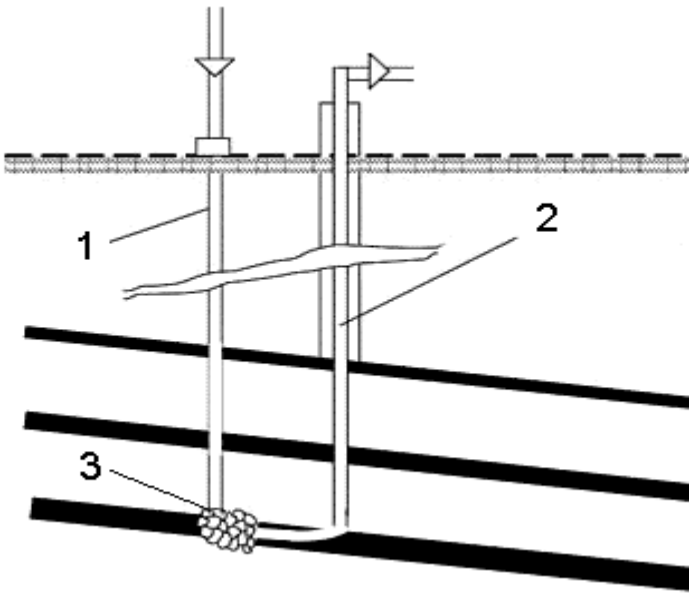


Рис. 2.3. Схема подземной газификации угля:
1 – скважина для воздушного или парокислородного дутья; 2- скважина для отвода продуктов газификации угля; 3 – очаг горения

Расчетный состав газа, производимого на предприятии подземной газификации угля, характеризуется следующими диапазонами изменения содержания отдельных компонентов газа:

а) при использовании воздушного дутья: CO_2 - 12,0-15,3 %; C_mH_n - 0,1-0,7 %; O_2 - 0,2 %; CO - 10,0-14,0 %; H_2 - 12,1-16,2 %; CH_4 - 2,0-4,0 %; N_2 - 55,0-60,0 %; H_2S - 0,01-0,06 %.

В случае применения для нагнетания в газифицируемый угольный пласт воздушного дутья получается низкокалорийный газ с теплотворной способ-

ностью порядка 4 МДж/м^3. Данный горючий газ пригоден для применения в газотурбинных установках, котельных и ТЭЦ;

б) при использовании парокислородного дутья: CO - 35,0 %; H_2 - 50,0 %; CH_4 - 7,5 %; C_mH_n - 1,2 %; O_2 - 0,3 %; N_2 - 5,0 %. В случае применения в технологии газификации угля парокислородного дутья получается среднекалорийный газ с теплотворной способностью 10-13 МДж/м^3.

Сегодня практически во всех крупных угледобывающих странах мира интерес к подземной газификации угля возрастает. Данная технология является весьма эффективной и ее реализация рассматривается как возможность получения недорогого газообразного топлива.

Для энергетики тех регионов, в которых имеются запасы каменного или бурого угля открываются новые возможности, связанные со строительством энергетических предприятий, работающих на собственном энергетическом сырье - газе подземной газификации угля.

2.6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сульфат железа (III) – химический растворитель сульфидных минералов – особенно активен в присутствии тионовых бактерий, ускоряющих и окисление, и растворение во много раз:

$$CuS_{(к)} + Fe_2(SO_4)_{3(р\text{-}р)} = CuSO_{4(р\text{-}р)} + 2FeSO_{4(р\text{-}р)} + S_{(к)}.$$

Тионовые бактерии не только непосредственно окисляют и растворяют сульфиды, но и окисляют продукт их разложения Fe^{2+}, регенерируя сульфат железа (III), продолжающий окисление и растворение:

$$2FeSO_{4(р\text{-}р)} + 0{,}5O_{2(г)} + H_2SO_{4(р\text{-}р)} = Fe_2(SO_4)_{3(р\text{-}р)} + H_2O_{(ж)}.$$

Вычислите тепловой эффект суммарной реакции процесса окисления ковеллина (CuS) в кислой среде, используя стандартные энтальпии образования веществ.

Соединение	$H_2O_{(ж)}$	$CuSO_{4(р\text{-}р)}$	$CuS_{(к)}$	$H_2SO_{4(р\text{-}р)}$
ΔH^0_{298}, кДж/моль	-285,8	-843,9	-53,1	-841,2

2. Для размораживания мерзлых грунтов, для вторичного дробления руды возможно применение термита – смеси алюминиевого порошка и оксида металла, способную к экзотермической реакции:

$$2Al_{(к)} + Me_2O_{3(к)} = 2Me_{(к)} + Al_2O_{3(к)}.$$

Какой оксид Cr_2O_3 или Fe_2O_3 является наиболее теплопроизводительным в смеси с алюминиевым порошком?

Соединение	Cr_2O_3	Fe_2O_3	$Al_2O_{3(к)}$
ΔH^0_{298}, кДж/моль	-1140	-822	-1676

3. В качестве компонента горючей смеси топлив можно использовать метан и этан. Определить, какой из двух этих газов в расчете на 1 г наиболее эффективен, если использовать кислород, запасенный вместе с топливом:

$$CH_{4(г)} + 2O_{2(г)} = CO_{2(г)} + 2H_2O_{(г)}.$$

$$C_2H_{6(г)} + 3{,}5O_{2(г)} = 2CO_{2(г)} + 3H_2O_{(г)}.$$

Соединение	$CH_{4(г)}$	$C_2H_{6(г)}$	$CO_{2(г)}$	$H_2O_{(г)}$
ΔH^0_{298}, кДж/моль	-74,9	-88,6	-393,5	-241,8

4. Покажите расчетом, может ли в стандартных условиях протекать процесс серпентинизации форстерита:

$$2Mg_2SiO_{4(к)} + 3H_2O_{(ж)} = Mg_3(Si_2O_5)(OH)_{4(к)} + Mg(OH)_{2(к)}.$$

форстерит серпентин брусит

Соединение	$Mg_2SiO_{4(к)}$	$H_2O_{(ж)}$	$Mg_3(Si_2O_5)(OH)_{4(к)}$	$Mg(OH)_{2(к)}$
ΔG^0_{298}, кДж/моль	-63,2	-237,2	-171,4	-735,7

5. Охарактеризуйте кислотно-основные свойства гидроксида цинка, вычислив изменение энергии Гиббса для реакций:

$$Zn(OH)_{2(к)} + 2H^+_{(р\text{-}р)} = Zn^{2+}_{(р\text{-}р)} + 2H_2O_{(ж)}.$$

$$Zn(OH)_{2(к)} + 2OH^-_{(р\text{-}р)} = [Zn(OH)_4]^{2-}_{(р\text{-}р)}.$$

Соединение	$Zn(OH)_{2(к)}$	$Zn^{2+}_{(р\text{-}р)}$	$OH^-_{(р\text{-}р)}$	$H_2O_{(ж)}$	$[Zn(OH)_4]^{2-}_{(р\text{-}р)}$
ΔG^0_{298}, кДж/моль	-556,0	-147,3	-157,4	-237,2	-905,4

6. Атмосферный озоновый слой на высоте 20 - 30 км играет большую роль в обеспечении условий жизни на земле. Озон задерживает вредное для жизни ультрафиолетовое излучение солнца. С другой стороны, он поглощает инфракрасное излучение земли, препятствуя ее охлаждению. Предполагают, что выделяющийся с выхлопными газами автотранспорта оксид азота реагирует с озоном:

$$NO_{(г)} + O_{3(г)} = NO_{2(г)} + O_{2(г)},$$

$$2NO_{2(г)} + O_{3(г)} = N_2O_{5(г)} + O_{2(г)}.$$

Установите, разрушают ли оксиды азота озоновый слой в стандартных условиях.

Соединение	$NO_{(г)}$	$O_{3(г)}$	$NO_{2(г)}$	$N_2O_{5(г)}$
ΔG^0_{298}, кДж/моль	86,6	162,7	51,5	114,2

Может ли в стандартных условиях образовываться озон из O_2?

Глава 3

ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Химия как наука связана с превращениями веществ, происходящими в результате различных химических реакций. Анализ стандартного изменения энергии Гиббса для той или иной предполагаемой реакции позволяет теоретически оценить возможность ее протекания. Однако кроме оценки принципиальной возможности протекания процесса важно знать, насколько быстро могут протекать реакции, а также понимать, какими факторами определяется их скорость. Так, для завершения реакций, происходящих при взрыве тротила или метана достаточно ничтожных долей секунды, многие же геохимические процессы, например, формирование или выветривание горных пород, реализуются за миллионы лет. Раздел химии, посвященный скорости химических реакций, называется химической кинетикой.

3.1. СКОРОСТЬ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Скорость какого - либо процесса, как правило, определяют по тем изменениям, которые происходят в ходе процесса за фиксированный промежуток времени. Так, скорость движения материальной точки характеризуют изменением ее координат (перемещением) за определенный промежуток времени, например, в таких единицах, как метры в секунду (м/с).

В ходе химической реакции меняется количество каждого из реагентов: исходные вещества расходуются, а продукты – накапливаются. Следовательно, протекание реакции сопровождается изменением концентраций как исходных веществ, так и продуктов взаимодействия. Поэтому скорость реакции может быть рассчитана через изменение концентрации какого – либо исходного вещества или продукта за определенное время в таких единицах, как моль/(л·с).

В качестве примера рассмотрим реакцию, происходящую при смешивании раствора щелочи NaOH с кислотой HCl. В результате данной реакции

образуются соль NaCl и вода:

$$NaOH + HCl = NaCl + H_2O.$$

Допустим, что начальная концентрация раствора NaOH составляет 0,1 моль/л и мы имеем возможность измерять концентрацию щелочи в различные моменты времени после смешивания с кислотой. По этим данным среднюю скорость реакции $\overline{V}$ определяют как изменение концентрации $\Delta C(NaOH)$ за соответствующий промежуток времени Δt:

$$\overline{V} = - \Delta C(NaOH)/\Delta t.$$

Отрицательный знак в правой части уравнения для средней скорости реакции указывает, что концентрация NaOH уменьшается со временем. По мере протекания реакции реагенты расходуются, средняя скорость снижается; в некоторый момент времени реакция прекращается.

Изменение концентрации реагента, например, HCl в ходе реакции можно представить в графическом виде C(HCl) = f(t) (рис. 3.1). Подобная графическая зависимость позволяет определить мгновенную скорость реакции, т. е. скорость в конкретный момент времени:

$$V = \lim \left[\frac{\Delta C}{\Delta t} \right]_{\Delta t \to 0} = \frac{dC}{dt}.$$

Исходя из графического смысла производной ($dC/dt = tg\alpha$), получается, что мгновенная скорость определяется угловым коэффициентом ($tg\alpha$) касательной к кривой C = f(t) в точке, отвечающей интересующему моменту времени t′ (см. рис. 3.1).

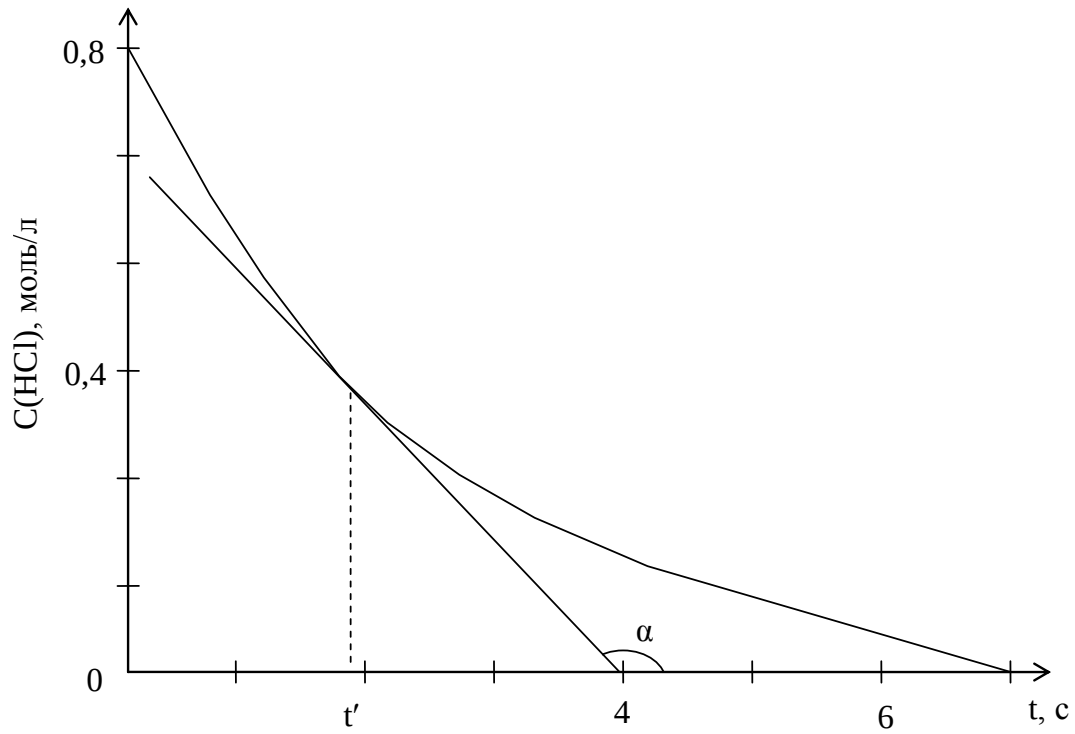


Рис. 3.1. Изменение концентрации раствора соляной кислоты в ходе реакции нейтрализации:
α – угол наклона касательной к кривой в момент времени t′

3.2. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РЕАКЦИИ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ РЕАГЕНТОВ

Молекулы различных веществ взаимодействуют друг с другом при столкновениях. Чем чаще столкновения будут происходить, тем быстрее пойдет реакция. Для реакций типично уменьшение их скорости с течением времени, что объясняется уменьшением концентраций реагентов, и, соответственно, снижением частоты столкновений. Наглядным примером, поясняющим влияние концентрации реагента, может служить резко различная скорость горения веществ в чистом кислороде и в воздухе. Содержание кислорода в воздухе – около 20 %, что и определяет меньшую скорость процесса горения.

Общую формулировку влияния концентрации на скорость химических

реакций выражает основной закон химической кинетики – закон действия масс: **при постоянной температуре скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ. Причем концентрация каждого реагента берется в степени равной соответствующему стехиометрическому коэффициенту в уравнении реакции.**

В общем случае для скорости реакции, протекающей по уравнению

$$aA + bB = cC + dD,$$

можно написать следующее выражение:

$$V = k \cdot C^a(A) \cdot C^b(B).$$

В этом выражении коэффициент пропорциональности k называют **константой скорости химической реакции.** Его значение не меняется при изменениях концентрации, но зависит от температуры.

Определим физический смысл константы k. Для этого рассмотрим случай, когда концентрации реагирующих веществ составляют 1 моль/л, т.е. C(A) = C(B) = 1 моль/л. Тогда $V = k \cdot 1 \cdot 1 = k$. Таким образом, численное значение константы соответствует скорости реакции при условии равенства концентрации каждого реагирующего вещества 1 моль/л. Поэтому константу k еще называют **удельной скоростью химической реакции.**

Скорость химической реакции во многом зависит от того, находятся ли реагирующие вещества в одной или разных фазах, т. е. осуществляются гомогенные или гетерогенные реакции.

Если реакционная система однородна и не заключает в себе поверхностей раздела между частями системы, отличающимися по физико-химическим свойствам, то ее называют гомогенной. Систему, состоящую из отдельных частей (фаз), отличающихся по свойствам и имеющих поверхности раздела, называют гетерогенной.

Например, горение этана соответствует протеканию реакции в гомогенной системе:

$$C_2H_6(г) + 3{,}5O_2(г) = 2CO_2(г) + 3H_2O(г).$$

Скорость этого процесса по закону действия масс определяется выражением:

$$V = k \cdot C(C_2H_6) \cdot C^{3,5}(O_2).$$

Гомогенной реакцией также является взаимодействие оксида углерода (II) с водяным паром при подземной газификации угля:

$$CO(г) + H_2O(г) = CO_2(г) + H_2(г).$$

Скорость данной реакции зависит от концентрации оксида углерода (II) и паров воды:

$$V = k \cdot C(CO) \cdot C(H_2O).$$

В отличие от рассмотренных примеров гомогенных процессов, в случае гетерогенных реакций в уравнение закона действия масс входят концентрации только тех веществ, которые находятся в газовой фазе или в растворе. Концентрация твердого вещества (не растворенного в воде) представляет собой постоянную величину и поэтому входит в константу скорости. Например, при подземной обработке (газификации) угля в зоне окисления канала газификации происходит гетерогенная реакция:

$$C(уголь) + O_2(г) = CO_2(г).$$

Закон действующих масс для этой реакции запишется так:

$$V = k' \cdot const \cdot C(O_2) = k \cdot C(O_2).$$

Рассмотрим решение типовой задачи.

Определить изменение скорости реакции после упаривания растворов исходных реагентов в три раза:

$$CaCl_2 + Na_2SO_4 = CaSO_4 + 2NaCl.$$

Решение.

При решении задач, связанных с изменением скорости реакции при варьировании концентрации реагентов, необходимо исходить из основного закона химической кинетики – закона действующих масс. Для реакции, рассматриваемой в данной задаче, в общем виде этот закон выражается следующим образом:

$$V = k \cdot C(CaCl_2) \cdot C(Na_2SO_4).$$

Исходя из закона действующих масс, запишем отношение скорости реакции до упаривания к скорости реакции после упаривания растворов реагентов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{k \cdot C_1(CaCl_2) \cdot C_1(Na_2SO_4)}{k \cdot C_2(CaCl_2) \cdot C_2(Na_2SO_4)}.$$

Примем во внимание, что после упаривания растворов исходных реагентов в три раза, их концентрация увеличивается также в три раза ($C_2 = 3C_1$):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_1(CaCl_2) \cdot C_1(Na_2SO_4)}{3C_1(CaCl_2) \cdot 3C_1(Na_2SO_4)} = \frac{1}{9}.$$

Получаем: $V_2 = 9V_1$.

Ответ: после упаривания растворов исходных реагентов в три раза скорость рассматриваемой реакции увеличится в 9 раз.

3.3. МОЛЕКУЛЯРНОСТЬ И ПОРЯДОК РЕАКЦИИ

На практике закон действующих масс выполняется только для одностадийных реакций, т. е. для реакций, в которых исходные вещества без каких - либо промежуточных превращений образуют продукты. При этом **молекулярностью реакции** называют число молекул, взаимодействие которых ведет к одностадийному образованию продуктов химической реакции. Молекулярность реакции может характеризоваться только целыми числам.

Если в элементарном акте реакции принимает участие одна молекула, превращающаяся в одну или несколько молекул других веществ, то такая реакция называется мономолекулярной. Примерами таких реакций могут служить термический распад карбоната кальция или хлорида аммония:

$$CaCO_3(к) = CaO(к) + CO_2(г),$$
$$NH_4Cl(к) = NH_3(г) + HCl(г).$$

Одновременное участие в элементарном акте химической реакции двух молекул характерно для бимолекулярных реакций, примером которых может быть взаимодействие иода и водорода с образованием иодида водорода:

$$I_2(г) + H_2(г) = 2HI(г).$$

Реакции, элементарный акт которых сводится к столкновению трех молекул, называют тримолекулярными. Статистически подобное столкновение молекул мало вероятно. Тримолекулярные реакции крайне редки. Реакции же с молекулярностью выше трех в химической практике неизвестны.

Поэтому представленные ниже химические реакции

$$4HC1 + O_2 = 2Cl_2 + 2H_2O,$$

$$6FeC1_2 + KClO_3 + 6HC1 = 6FeCl_3 + KCl + 3H_2O$$

нельзя назвать пяти- или тринадцатимолекулярными реакциями. Эти уравнения следует рассматривать лишь как записи суммарных процессов, каждый из которых в действительности может включать довольно длинную цепочку последовательно протекающих моно-, би- или тримолекулярных реакций. В этой цепочке взаимосвязанных превращений одни промежуточные реакции могут протекать быстро и не задерживать ход всего процесса, другие настолько медленны, что именно они будут ограничивать скорость протекания суммарного процесса.

В химической кинетике также пользуются понятием **«порядок реакции»** - это число, равное сумме показателей степеней при концентрациях реагирующих веществ в уравнении для скорости реакции. Если уравнение

$$aA + bB + cC = dD + eE + fF$$

выражает действительный механизм реакции, а зависимость

$$V = k \cdot C^a(A) \cdot C^b(B) \cdot C^c(C)$$

достаточно точно характеризует скорость этой реакции, то порядок реакции n можно представить как n = a + b + c. В этом случае значения величин, определяющих порядок и молекулярность реакции, численно совпадают. Для многостадийного взаимодействия уравнение химической реакции символизирует суммарный итог всех превращений и порядок реакции всегда ниже, чем кажущаяся молекулярность реакции.

Так, применим закон действия масс к реакции окисления азота до оксида азота (II):

$$N_2(г) + O_2(г) = 2NO(г).$$

Считая, что данное уравнение выражает действительный механизм процесса,

напишем выражение для скорости реакции:

$$V = k \cdot C(N_2) \cdot C(O_2).$$

Однако эксперимент показывает, что данная реакция не является реакцией второго порядка, т. к. ее скорость на самом деле пропорциональна концентрации кислорода в степени ½:

$$V = k \cdot C(N_2) \cdot C^{1/2}(O_2).$$

Таким образом, порядок обсуждаемой реакции соответствует не 2, а только 1,5, т. е. в отличие от молекулярности порядок реакции не всегда бывает целочисленным.

Приведем примеры реакций различного порядка:

а) реакция первого порядка: $2H_2O_2 = 2H_2O + O_2$,

б) реакция второго порядка: $CO + C1_2 = COC1_2$,

г) реакция третьего порядка: $3HCNO = (HCNO)_3$.

Известны реакции дробного и нулевого порядка. Нулевой порядок означает, что скорость реакции при T = const постоянна и не зависит от концентрации реагента. Например, реакция разложения аммиака NH_3 на водород H_2 и азот N_2, протекающая на поверхности вольфрама, является реакцией нулевого порядка, т. е. скорость ее не зависит от концентрации аммиака:

$$2NH_3(г) = N_2(г) + 3H_2(г),$$

$$V = k \cdot C^0(NH_3) = k \cdot 1 = \text{const}.$$

3.4. ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА СКОРОСТЬ

РЕАКЦИИ

Из уравнения Менделеева - Клапейрона $p = CRT$ следует, что изменение давления каждого из компонентов газовой смеси должно оказывать на скорость реакции то же влияние, что и пропорциональное ему изменение концентрации этого компонента. Например, для реакции с участием газов

$$2CO(г) + O_2(г) = 2CO_2(г)$$

можно написать:

$$V = k \cdot p^2(CO) \cdot p(O_2),$$

где $p(CO)$, $p(O_2)$ - парциальные давления CO и O_2 соответственно.

Скорость большинства химических реакций повышается с ростом температуры. Более того, возрастание скорости происходит нелинейно. Голландский ученый Вант - Гофф в 1884 г. на основании многочисленных наблюдений и экспериментов установил, что **при повышении температуры на каждые десять градусов скорость гомогенной химической реакции увеличивается в 2 – 4 раза.**

Это приближенное обобщение известно под названием правила Вант - Гоффа. Математически оно может быть выражено с помощью уравнения:

$$\frac{V_{t_2}}{V_{t_1}} = \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}} = \gamma^{\Delta t/10},$$

где V_{t_2}, V_{t_1} - скорость реакции при температуре t_2 и t_1 соответственно; γ - температурный коэффициент ($\gamma = 2 \div 4$).

Правило Вант - Гоффа носит приближенный характер и служит лишь для ориентировочной оценки влияния температуры на скорость реакции.

Значение коэффициента γ часто выходит за указанные Вант - Гоффом пределы, а для конкретной реакции оно не остается неизменным в различных интервалах температуры.

3.5. ЭНЕРГИЯ АКТИВАЦИИ

Не всякое столкновение молекул реагирующих веществ приводит к химической реакции, т. е. к образованию продуктов реакции. Во взаимодействие вступает только небольшая часть всех молекул, обладающая некоторым повышенным запасом кинетической энергии. Эти молекулы, обладающие достаточно высокой кинетической энергией для того, чтобы их столкновение с другими молекулами привело к элементарному акту реакции, называют активными (реакционноспособными).

Разность между кинетической энергией, которой должны обладать молекулы, чтобы стать реакционноспособными, и средней кинетической энергией молекул определяет значение энергии активации E_a.

Энергию активации можно определить как ту минимальную дополнительную энергию, которую необходимо сообщить молекуле (двум или трем молекулам для реакций второго или третьего порядка) сверх среднего ее значения для того, чтобы стало возможным химическое взаимодействие. На пути к осуществлению любой химической реакции стоит энергетический барьер, для преодоления которого молекулы реагентов должны приобрести некоторое значение энергии, превосходящее среднюю энергию. Вот этот избыток энергии над ее средним значением, характерным для молекул реагентов в их данном состоянии теплового движения, и представляет собой энергию активации. Чаще всего в обычных условиях лишь небольшая доля от общего числа молекул реагирующих веществ имеет достаточную энергию для преодоления энергетического барьера, отделяющего исходные реагенты от продуктов взаимодействия.

Высокое значение энергии активации реакции означает, что на пути к ее осуществлению стоит высокий энергетический барьер. Преодолеть этот барьер может только небольшая доля от общего числа молекул, и если с помощью соответствующих мер не повысить эту долю, скорость реакции будет небольшой.

Аррениус предложил уравнение, связывающее константу скорости химической реакции с температурой:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}},$$

где k - константа скорости химической реакции, моль/(л·сек); A - предэкспоненциальный множитель, численно равный тому предельно большому значению константы k, которое она имела бы, если бы все без исключения молекулы были активными; e - основание натурального логарифма; E_a - энергия активации, Дж/моль; R - универсальная газовая постоянная, 8,314 Дж/(моль·К); T - абсолютная температура, К.

Логарифмируя уравнение Аррениуса и деля обе его части на коэффициент перехода от натуральных логарифмов к десятичным (2,303), получим:

$$\lg k = \lg A - \frac{E_a}{2{,}303RT}.$$

Обозначив $-\frac{E_a}{2{,}303R} = a$, $\lg A = b$, запишем видоизмененное уравнение Аррениуса, устанавливающее для каждой конкретной реакции линейную связь между логарифмом константы скорости реакции и обратной величиной абсолютной температуры:

$$\lg k = \frac{a}{T} + b.$$

Казалось бы, что высота энергетического активационного барьера E_a определяется энергией, затрачиваемой на разрыв химических связей в моле-

кулах исходных веществ, после чего становится возможным формирование новых химических связей и образование молекул продуктов реакции. Причем энергия, выделяющаяся в ходе создания новых химических связей, частично или полностью компенсирует энергию, затраченную на инициирование реакции. Однако при достоверности данного подхода энергии активации для подавляющего большинства реакций должны были бы быть значительно выше, чем это наблюдается на практике.

Так, представляется, что для начала реакции

$$2N_2(г) + O_2(г) = 2N_2O(г) \quad \Delta H = 166{,}6 \text{ кДж}$$

необходимо затратить энергию не менее 1194,6 кДж, поскольку на разрыв связей в молекулах N_2 и O_2 должно быть затрачено соответственно $472{,}7 \cdot 2 =$ = 945,4 и 249,2 кДж. Экспериментально найденное значение энергии активации для этой реакции равно 411,4 кДж, т. е. почти в три раза меньше.

Очевидно, разрыв химических связей в молекулах исходных веществ и образование новых химических связей необходимо рассматривать не обособленно, а в их взаимном влиянии. Первой стадией практически любого химического процесса является образование промежуточного соединения - активированного (активного) комплекса.

Активированный комплекс представляет собой образование, в котором еще не исчезли первоначально существовавшие связи между атомами и еще не полностью сформировались новые химические связи. Однако электронные оболочки атомов во взаимодействующих молекулах уже деформированы в направлении образования новых химических связей, и исходные химические связи ослаблены. Образование такого промежуточного соединения требует меньших затрат энергии, чем разрыв связей в молекулах исходных веществ, ибо теперь этому разрыву содействует наметившееся наведение новых связей. При этом и энергетический эффект образования молекул ко-

нечного продукта путем распада активированного комплекса будет тоже меньше. Таким образом, образование активированного комплекса приводит к уменьшению высоты энергетического активационного барьера E_a.

Добавим, для того чтобы началась перестройка связей, сталкивающиеся молекулы должны иметь не только достаточную энергию, но и определенную взаимную ориентацию. От взаимной ориентации молекул в момент столкновения зависит, возможно или нет образование между атомами новых связей. Поэтому в действительности лишь некоторая часть столкновений, обладающих энергией, достаточной для протекания реакции, приводит к образованию продуктов.

3.6. ЯВЛЕНИЕ КАТАЛИЗА. ГОМОГЕННЫЙ И ГЕТЕРОГЕННЫЙ КАТАЛИЗ

Катализатор представляет собой вещество, которое изменяет скорость химической реакции, но само не расходуется в ходе этой реакции. Реакции с участием таких веществ называют каталитическими.

Известны катализаторы, как ускоряющие протекание реакции, так и замедляющие ее. Соответственно в первом случае катализатор является положительным, а во втором – отрицательным.

Так, при умеренном нагревании разложение хлората калия происходит спокойно. Это позволяет использовать соль $KClO_3$ в качестве аварийного источника кислорода для дыхания:

$$2KClO_3(к) = 2KCl(к) + 3O_2(г).$$

Добавка к хлорату калия диоксида марганца MnO_2 резко меняет скорость процесса, придавая ему взрывной характер.

Катализатором, замедляющим скорость реакции, например, взаимо-

действия металлического железа с раствором соляной кислоты

$$Fe(к) + 2HCl(р\text{-}р) = FeCl_2(р\text{-}р) + H_2(г)$$

может служить органическое вещество анилин. Катализаторы, позволяющие уменьшить скорость коррозионного разрушения металлов в агрессивных средах, обычно называют ингибиторами коррозии.

Важно, что **действие катализаторов отличается селективностью**, т.е. катализатор, изменяющий скорость какой - либо определенной реакции, обычно не влияет на скорость другой.

Катализатор, находящийся в реакционной системе в том же фазовом состоянии, что и основные участники химической реакции, называется **гомогенным катализатором.** Например, гомогенный катализатор реакции взаимодействия газообразных веществ должен сам находиться в газообразном состоянии.

Рассмотрим случай гомогенного катализа на примере разложения озона O_3 верхних слоев атмосферы под действием оксида азота NO. В этой реакции оксид азота (II) играет роль катализатора. Первоначально NO реагирует с O_3, в результате чего образуются NO_2 и O_2. Затем образующийся NO_2 реагирует с атомарным кислородом, присутствующим в стратосфере, и в результате снова получается NO и в качестве второго продукта – O_2. Последовательность этих реакций и их окончательный результат описываются уравнениями:

$$NO + O_3 = NO_2 + O_2, \quad NO_2 + O = NO + O_2, \quad O_3 + O = 2O_2.$$

В рассматриваемом примере NO играет роль катализатора реакции разложения O_3, потому что он повышает скорость полной реакции, но сам в результате не подвергается окончательному химическому превращению, а лишь расходуется в одной стадии реакции и вновь образуется на следующей стадии.

Если исходить из уравнения Аррениуса для скорости химической реакции, константа скорости k определяется энергией активации E_a и параметром *A*. Влияние катализатора на скорость реакции может заключаться в том, что он изменяет или E_a, или *A*. Катализатор оказывает наиболее существенное влияние на энергию активации E_a. Как правило, положительный катализатор понижает энергию активации химической реакции (рис. 3.2).

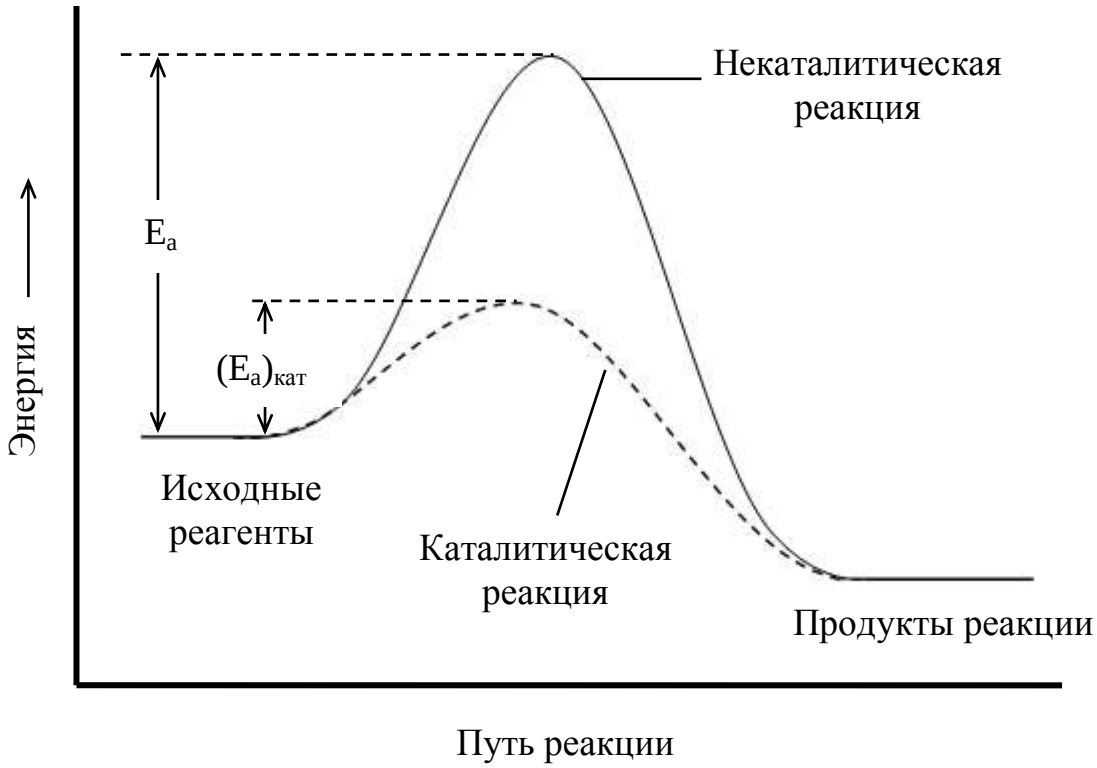


Рис. 3.2. Энергетическая диаграмма химической реакции с использованием катализатора. Действие катализатора заключается в снижении энергии активации реакции E_a

Гетерогенный катализатор находится в реакционной системе в ином по сравнению с реагирующими веществами фазовом состоянии. Например, реакция между молекулами в газовой фазе может катализироваться тонко измельченным оксидом какого - либо металла. В отсутствие катализатора реакция в газовой фазе протекает медленно. Однако при внесении катализа-

тора реакция на поверхности твердого вещества значительно ускоряется.

Многие промышленно важные реакции, протекающие в газовой фазе, катализируются поверхностью твердых веществ, например, реакция окисления SO_2 в SO_3 при производстве серной кислоты:

$$2SO_2(г) + O_2(г) = 2SO_3(г).$$

Реакции в растворах также могут катализироваться твердыми веществами. Гетерогенные катализаторы часто изготовляют из тонко измельченных металлов или оксидов металлов. Поскольку каталитические реакции протекают на поверхности, часто прибегают к специальным методам получения катализаторов с очень большой площадью поверхности.

Исходной стадией гетерогенного катализа обычно является адсорбция реагентов. Адсорбция – это связывание молекул с поверхностью вещества. Не все атомы или ионы поверхности обладают реакционной способностью, так как на поверхности могут быть адсорбированы различные примеси (загрязнения), которые занимают многие потенциально реакционноспособные центры и блокируют дальнейшую реакцию. Места поверхности, на которых могут адсорбироваться реагирующие молекулы, называются **активными центрами.** Число активных центров, приходящееся на единицу массы катализатора, зависит от природы катализатора, от способа его приготовления и обработки непосредственно перед использованием.

В качестве примера гетерогенного катализа рассмотрим реакцию гидрирования этилена с образованием этана:

$$C_2H_2(г) + 2H_2(г) = C_2H_6(г).$$

В отсутствие катализатора эта реакция практически не протекает. Однако в присутствии тонко измельченного металла, например, никеля, палладия или платины, реакция идет легко уже при комнатной температуре при

давлении водорода в несколько сотен атмосфер. Механизм этой реакции заключается в следующем. Сначала молекулы этилена и водорода адсорбируются на поверхности металла. Адсорбция водорода приводит к разрыву связи H-H и образованию двух связей M-H, где M - активный центр на поверхности металла. Атомы водорода могут относительно свободно мигрировать по поверхности металла. При столкновении с адсорбированной молекулой этилена атомы водорода связываются с атомами углерода. Последние образуют по четыре химических связи, что уменьшает энергию взаимодействия с поверхностью металла. В результате образовавшаяся молекула этана отделяется от поверхности. Освободившийся активный центр снова адсорбирует следующую молекулу этилена, и весь цикл повторяется сначала.

3.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Как изменится скорость реакции при охлаждении с 70 °C до 20 °C, если температурный коэффициент γ равен 3?

2. Как изменится скорость реакции после упаривания в 2 раза исходных растворов хлорида кальция и фосфата натрия:

$$3CaCl_2 + 2Na_3PO_4 = Ca_3(PO_4)_2 + 6NaCl.$$

3. Чему равен температурный коэффициент скорости реакции, если при уменьшении температуры на 30 °C скорость реакции падает в 64 раза?

4. Температурный коэффициент скорости реакции равен 2,5. Во сколько раз увеличится скорость, если температуру повысить на 40 °C?

5. Как изменится скорость реакции после повышения общего давления в системе в 2 раза:

$$2NO_2 + O_2 = 2NO_2.$$

6. Как изменится скорость химической реакции при понижении температуры со 170 °С до 120 °С при температурном коэффициенте скорости реакции равном 2?

7. Чему равен температурный коэффициент скорости реакции, если при понижении температуры на 40 °С скорость реакции падает в 16 раз?

8. Как изменится скорость реакции после разбавления растворов исходных реагентов в 4 раза:

$$Ca(OH)_2 + 2HCl = CaCl_2 + 2H_2O.$$

9. Чему равен температурный коэффициент скорости реакции, если при повышении температуры на 40 °С скорость возрастает в 16 раз?

10. Температурный коэффициент скорости реакции 2,5. Во сколько раз изменится скорость при охлаждении от 45 до 15 °С?

Глава 4

ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Часто в ходе химических реакций исходные реагенты не полностью превращаются в продукты, несмотря на высокую скорость взаимодействия. Это обусловлено тем, что многие реакции в определенных условиях являются обратимыми. Для таких реакций наряду с химическим взаимодействием исходных веществ (прямая реакция) характерно протекание взаимодействия между продуктами (обратная реакция).

С началом реакции концентрации исходных веществ начинают уменьшаться, а концентрации продуктов - расти. Поэтому первоначально скорость прямой реакции также уменьшается, а скорость обратной реакции - растет. Затем, когда обе скорости сравняются, наступает состояние химического равновесия. В этом состоянии система представляет собой смесь как исходных реагентов, так и продуктов реакции, причем концентрации всех компонентов перестают изменяться при сохранении неизменными внешних условий.

Аналогичное состояние достигается, например, в закрытом сосуде с жидкостью, когда в процессе испарения устанавливается равновесие между парами жидкости и самой жидкостью. В состоянии равновесия скорость перехода молекул жидкости в газовую фазу (испарение) становится равной скорости обратного перехода молекул из пара в жидкую фазу (конденсация).

Химическое равновесие является подвижным, так как при изменении внешних условий равновесие сдвигается в сторону протекания прямой или обратной реакции. Важно, что в состояние равновесия система может придти как со стороны исходных веществ, так и со стороны продуктов.

4.1. ГОМОГЕННОЕ ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Рассмотрим реакцию взаимодействия водорода с кислородом. Если смешать газообразные исходные реагенты, то заметные количества паров воды начинают очень медленно образовываться лишь примерно с 400 °С. Дальнейшее нагревание гомогенной смеси ускоряет процесс и выше 600 °С реакция протекает со взрывом.

При температурах выше 600 °С водород и кислород соединяются со взрывом, но при температурах около 5000 °С уже сама вода полностью распадается на водород и кислород:

$$2H_2 + O_2 \xrightarrow{800^0\,C} 2H_2O,$$

$$2H_2O \xrightarrow{5000^0\,C} 2H_2 + O_2.$$

При промежуточных температурах возможны обе реакции. Данная ситуация имеет место в температурном интервале от 2000 до 4000 °С, когда одновременно происходит образование молекул воды из водорода и кислорода и обратный распад молекул H_2O на водород и кислород. При этих условиях реакция взаимодействия водорода с кислородом становится обратимой, т. е. протекающей в противоположных направлениях:

$$2H_2(г) + O_2(г) \underset{\leftarrow}{\rightarrow} 2H_2O(г).$$

Для скоростей этих взаимно противоположных реакций можно составить следующие выражения:

$$\vec{V} = \vec{k} \cdot C^2(H_2) \cdot C(O_2),\ \overleftarrow{V} = \overleftarrow{k} \cdot C^2(H_2O).$$

Если $\vec{V} > \overleftarrow{V}$, то за единицу времени молекул воды будет образовываться

больше, чем распадаться; если $\vec{V} < \overleftarrow{V}$, то распадаться будет больше, чем образовываться. Наконец, если $\vec{V} = \overleftarrow{V}$, число распадающихся и образующихся за единицу времени молекул воды будет одинаково; система достигнет состояния равновесия.

Нагреем водяной пар до 2000 °С. В первый момент времени в соответствующей системе молекулы водорода и кислорода отсутствуют и $\vec{V} = 0$. Скорость же реакции разложения молекул воды $\overleftarrow{V}$ при достигнутой температуре является отличной от нуля. По мере разложения молекул воды скорость $\vec{V}$ станет нарастать, а скорость $\overleftarrow{V}$ - уменьшаться. В результате протекания двух противоположных по направлению реакций наступит такой момент, когда обе скорости станут равными по величине.

Если первоначально исходить не из водяного пара, а из водорода и кислорода, то результат будет тем же. И в первом и во втором случае при равенстве скоростей обеих реакций устанавливается **химическое равновесие.** Равновесие **характеризуется тем, что концентрации всех компонентов достигают постоянных значений и в реакционной системе в неизменном количестве присутствуют как исходные реагенты, так и продукты их взаимодействия.**

В состоянии равновесия видимых изменений в системе не происходит. Это обусловлено тем, что взаимно противоположные реакции протекают с одинаковыми скоростями. Причем к одним и тем же равновесным условиям можно подойти с двух различных направлений – либо со стороны исходных веществ, либо со стороны продуктов. Подобное химическое равновесие является **равновесием динамическим**: постоянно идет и образование молекул и их распад, но число образующихся за единицу времени молекул равно числу распадающихся.

Динамическое равновесие очень важно отличать от другого состояния, которое называют **метастабильным равновесием**. Например, можно поме-

стить в реакционный сосуд смесь O_2, H_2 и H_2O, но не повышать температуру. Из-за низкой температуры химическая реакция развиваться не будет. Соответственно концентрации компонентов смеси не будут меняться со временем, что формально соответствует установлению равновесия, т. е. достижению равенства скоростей прямой и обратной реакций. Однако скорости реакций одинаковы, потому что равны нулю. Истинное (динамическое) состояние равновесия установится в системе лишь при повышении температуры, стимулирующей протекание как прямой, так и обратной реакции.

4.2. КОНСТАНТА ХИМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Пользуясь выражениями для скорости прямой и обратной реакции, можно получить количественную характеристику равновесного состояния системы. При равновесии $\vec{V} = \overleftarrow{V}$, следовательно:

$$\vec{k} \cdot C^2(H_2) \cdot C(O_2) = \overleftarrow{k} \cdot C^2(H_2O_{пар}).$$

Перенесем константы скоростей в одну сторону уравнения, а концентрации реагентов – в другую:

$$\frac{\vec{k}}{\overleftarrow{k}} = \frac{C^2(H_2O_{пар})}{C^2(H_2) \cdot C(O_2)}.$$

Частное от деления двух постоянных величин $\vec{k}$ и $\overleftarrow{k}$ есть также величина постоянная. Она называется константой равновесия и обозначается K_c. Таким образом:

$$K_c = \frac{C^2(H_2O_{пар})}{C^2(H_2) \cdot C(O_2)}.$$

Константа равновесия K_c представляет собой отношение произведения концентраций продуктов взаимодействия к произведению концентраций исходных веществ. При этом концентрация каждого вещества берется в степени, равной соответствующему стехиометрическому коэффициенту в уравнении реакции. Численное значение константы равновесия зависит от температуры, но не зависит от концентрации реагентов. Если происходит изменение концентрации одного из веществ, участвующих в реакции, это вызывает изменение концентраций всех остальных компонентов, причем таким образом, что K_c сохраняет свое значение.

Для реакций с участием газообразных веществ константа равновесия также может быть выражена через парциальные давления реагентов. В этом случае константу обозначают K_p. Например, для равновесной системы, содержащей пары воды можно записать:

$$K_p = \frac{p^2(H_2O_{пар})}{p^2(H_2) \cdot p(O_2)}.$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p_i = n_iRT/V = C_iRT$, можно установить связь значений K_p и K_c:

$$K_p = K_c(RT)^{\Delta n}. \qquad (4.1)$$

Параметр Δn в уравнении (4.1) соответствует изменению числа молей газообразных веществ при переходе от исходных реагентов к продуктам взаимодействия.

K_p и K_c имеют различные значения, когда в химической реакции число молей исходных газообразных реагентов и число молей газообразных продуктов не совпадают, то есть $\Delta n \neq 0$. Когда эти числа совпадают, K_p и K_c будут равны, как, например, для следующей реакции, протекающей без изменения

числа молей газообразных веществ:

$$N_2(г) + O_2(г) \rightleftarrows 2NO(г).$$

По величине константы равновесия можно судить о степени протекания реакции. При большом значении $К_с$ или $К_р$ равновесие сильно сдвинуто вправо, т. е. большая часть исходных веществ превращается в продукты. При очень малых значениях константы равновесия прямая реакция протекает в незначительной степени, и равновесная смесь содержит преимущественно исходные реагенты. Также по константе равновесия можно предсказывать направление, в котором будет протекать реакция по мере приближения к равновесию, и вычислять концентрации компонентов в состоянии равновесия.

Например, рассмотрим смесь из 2,00 моль H_2, 1,00 моль N_2 и 2,00 моль NH_3, помещенную в сосуд объемом 1 л при температуре 472 К. Будет ли реакция между H_2 и N_2 давать дополнительное количество NH_3, если при заданной температуре константа равновесия $К_с$ составляет величину 0,105?

Подставим начальные концентрации H_2, N_2 и NH_3 в выражение для константы равновесия реакции:

$$N_2(г) + 3H_2(г) \rightleftarrows 2NH_3(г).$$

$$К_С = \frac{C^2(NH_3)}{C(N_2)\cdot C^3(H_2)}. \quad К'_С = \frac{2{,}00^2}{1{,}00\cdot 2{,}00^3} = 0{,}500.$$

По условию задачи известно, что при заданной температуре $К_с$ = 0,105. Следовательно, для того чтобы система приблизилась к равновесию, отношение $\frac{C^2(NH_3)}{C(N_2)\cdot C^3(H_2)}$ должно уменьшиться с 0,500 до 0,105. Это произойдет при

уменьшении $C(NH_3)$ и увеличении $C(N_2)$ и $C(H_2)$. Следовательно, равновесие будет смещаться справа налево.

4.3. ГЕТЕРОГЕННОЕ ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Реакции с участием веществ, находящихся в различных фазовых состояниях называют гетерогенными. Примером такой реакции может служить термическое разложение кальцита в замкнутом объеме:

$$CaCO_3\,(к) \rightleftarrows CaO(к) + CO_2(г). \qquad (4.2)$$

Общий вид константы равновесия справедлив и для гетерогенных реакций. Только в этом случае концентрации твердых веществ не входят в выражение константы равновесия. Дело в том, что парциальные давления (или концентрации) твердых веществ постоянны (условно можно принять их равными единице) и поэтому включаются в константу $К_р$. Например, для реакции (4.2):

$$К_р^{/} = \frac{p(CO_2)p(CaO)}{p(CaCO_3)} = \frac{p(CO_2)const_1}{const_2};\ \frac{К_р^{/}}{const_{1,2}} = К_р = p(CO_2).$$

В качестве примера практического анализа состояния гетерогенного равновесия рассмотрим следующую задачу.

При 573 К для реакции

$$C(уголь) + 2H_2(г) \rightleftarrows CH_4(г)$$

константа равновесия $К_р$ составляет $1{,}53\cdot10^{-3}$. Определить, будет ли взрывоопасной метановоздушная смесь в замкнутом объеме (помещении) равном 50

м^3, в котором при 573 К и атмосферном давлении контактировали уголь и молекулярный водород. Масса водорода составила 200 г.

Решение.

1. Для рассматриваемой гетерогенной реакции: $K_p = p(CH_4)/p^2(H_2)$.

2. Определим исходное количество водорода в системе: $n(H_2) = m(H_2)/M(H_2) = 200/2 = 100$ моль.

3. Определим состав равновесной смеси газов (H_2 и CH_4). Обозначим через x число молей образовавшегося метана. Так как на его образование (согласно стехиометрическим коэффициентам уравнения реакции) должно израсходоваться 2x моль водорода, то в равновесной смеси останется (100 - 2x) моль H_2. Запишем:

	$C + 2H_2 \rightleftarrows CH_4$	
исходная смесь	100 моль	0
равновесная смесь	(100 - 2x) моль	x моль

Общее количество водорода и метана в равновесной смеси составляет суммарную величину: $\Sigma n = 100 - 2x + x = (100 - x)$ моль.

Для парциальных давлений компонентов получим следующие выражения (P - атмосферное давление):

$$p(H_2) = \frac{(100-2x)P}{100-x}; \quad p(CH_4) = \frac{xP}{100-x}.$$

Подставим эти выражения в уравнение для константы равновесия:

$$K_p = \frac{p(CH_4)}{p^2(H_2)} = \frac{x \cdot P(100-x)^2}{P^2(100-x)(100-2x)^2} = \frac{x(100-x)}{P(100-2x)^2}.$$

После преобразований и подстановки численных значений величин получим:

$$K_p \cdot P(100 - 2x)^2 = x(100 - x);\ \ 1{,}53 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 (100 - 2x)^2 = x(100 - x).$$

$$6{,}2x^2 - 620x + 15499 = 0.\ \ x_1 = 50{,}4 \text{ моль},\ \ x_2 = 49{,}6 \text{ моль}.$$

Первый корень квадратного уравнения (x_1) - посторонний, так как из условия задачи следует: $100 - 2x \geq 0,\ x \leq 50$.

4. Оценим взрывоопасность газовоздушной смеси, образующейся при доступе воздуха к 49,6 моль CH_4 в объеме 50 м^3. Учтем, что нижний предел взрываемости (в объемных процентах) при 293 К и атмосферном давлении для метана в смеси с воздухом составляет 5,0 %, а верхний - 14,9 %.

$$V(CH_4) = n(CH_4) \cdot V_m = 49{,}6 \text{ моль} \cdot 22{,}4 \text{ моль/л} = 1111 \text{ л}.$$
$$\varphi(CH_4) = V(CH_4)/50 \text{ м}^3 = 1111 \cdot 10^{-3}/50 = 0{,}022 = 2{,}2\ \%.$$

Полученный результат свидетельствует, что образующаяся газовоздушная смесь в указанном объеме (помещении) не будет взрывоопасной по метану. Не достигается нижний предел взрываемости (составляет 4 % по объему) и для водородовоздушной смеси, образуемой остатком водорода.

4.4. СМЕЩЕНИЕ ХИМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В системе, находящейся в состоянии динамического равновесия, прямой и обратный процессы протекают с одинаковыми скоростями. Изменение условий, в которых находится система, может нарушить состояние равновесия. В результате равновесие будет смещаться до тех пор, пока не установится новое равновесие.

Для определения направления смещения равновесия может быть использован **принцип Ле Шателье - Брауна**:

если на систему, находящуюся в состоянии равновесия, оказывают внешнее воздействие (например, изменяют давление, концентрацию реагентов или температуру), то в системе будут развиваться процессы, смещающие равновесие в том направлении, которое ослабляет внешнее воздействие.

Так, повышение давления сдвигает равновесие в сторону уменьшения количества газообразных веществ. Добавление в равновесную систему какого - либо компонента реакции сдвигает равновесие в сторону уменьшения количества этого компонента. Повышение (понижение) температуры сдвигает равновесие в сторону протекания реакции, являющейся эндотермической (экзотермической). Знание условий для проведения химической реакции в нужном направлении часто важно в практическом значении. Поэтому рассмотрим влияние различных факторов на смещение химического равновесия более подробно.

Пусть в равновесную систему

$$2H_2(г) + O_2(г) \rightleftarrows 2H_2O(г) \qquad (4.3)$$

вводится избыток водорода. Постоянство значения константы равновесия $K_p = \frac{p^2(H_2O)}{p^2(H_2)p(O_2)}$ может быть при этом сохранено только в том случае, если соответственно уменьшится концентрация кислорода и увеличится концентрация водяного пара. Практически это означает, что, желая при данных внешних условиях полнее использовать кислород, следует увеличивать концентрацию водорода. С другой стороны, чтобы полнее использовать водород, нужно вводить в систему избыток кислорода.

Того же эффекта - более полного использования одного из реагирующих веществ - можно добиться и путем уменьшения концентрации другого участника реакции. Допустим, что система (4.3) заключена в реакционном

сосуде, непроницаемом для водяного пара и кислорода, но пропускающем водород. Тогда последний будет покидать систему, уменьшая тем самым знаменатель выражения для константы равновесия. В силу постоянства K_p, неизбежным результатом этого явится дальнейшее разложение водяного пара и накопление свободного кислорода.

Соединение водорода с кислородом сопровождается выделением тепла, а распад водяного пара - его поглощением. Поэтому, чем больше тепла сообщается системе извне, тем более это благоприятствует распаду водяного пара, т. е. эндотермической реакции. Наоборот, отвод тепла от системы путем ее охлаждения затрудняет распад водяного пара и тем самым благоприятствует более полному соединению водорода с кислородом, т. е. экзотермической реакции. Следовательно, при нагревании равновесной системы равновесие смещается в сторону эндотермической реакции, при охлаждении - в сторону экзотермической.

Для газообразной системы (4.3) имеем в левой части уравнения 3 моля газов, в правой - 2 моля. Применяя закон Авогадро, найдем, что если бы весь водяной пар разложился на водород и кислород, то система занимала бы объем $V = V_m \cdot n = 22{,}4 \cdot 3 = 67{,}2$ л, а если бы распада совсем не было - $V = V_m \cdot n = 22{,}4 \cdot 2 = 44{,}8$ л.

Изменение оказываемого на газообразную систему внешнего давления должно вызывать соответствующее изменение объема. При повышении давления он будет уменьшаться, при понижении – увеличиваться. Допустим, что оказываемое на систему внешнее давление повышается. Равновесие (4.3) при этом будет смещаться в сторону образования водяного пара, т. е. его относительная концентрация возрастет. Но по закону действия масс соответственно ускоряется идущее с увеличением объема разложение водяного пара на водород и кислород: $\overleftarrow{V} = kC^2(H_2O)$. Новое состояние равновесия установится при такой концентрации водяного пара, когда создаваемое самой системой давление станет равно производимому на нее извне.

Таким образом, при увеличении внешнего давления на систему (4.3) равновесие сместится в сторону образования паров воды, при уменьшении - в сторону распада ее молекул. Следует обратить внимание, что речь идет об изменении общего, а не парциального давления газов. Внешнее воздействие на равновесную систему, заключающееся в изменении парциального давления какого - либо газообразного реагента идентично ситуации, когда меняется концентрация этого реагента. В общем случае, для реакций с участием газов повышение внешнего давления смещает равновесие в сторону меньшего числа молей газообразных веществ. Отсюда вытекает формулировка принципа смещения равновесий применительно к влиянию давления на равновесие обратимых газовых реакций: **при увеличении давления равновесие смещается в сторону образования меньшего числа молекул газообразных веществ, а при уменьшении давления - в сторону большего.**

В том случае, когда общее число молекул газообразных веществ в левой и правой частях уравнения реакции одинаково, изменение давления не влияет на положение химического равновесия.

Занимаемые твердыми и жидкими веществами объемы мало меняются в процессе изменения внешнего давления. Поэтому данный параметр почти не влияет на равновесия конденсированных систем. В смешанных случаях, когда одновременно имеются вещества в различных агрегатных состояниях, для учета влияния давления на равновесие практическое значение обычно имеет только число молекул газообразных веществ.

В качестве примера рассмотрим гетерогенную равновесную систему:

$$CO_2(г) + C(уголь) \rightleftarrows 2CO(г).$$

Подходя к подсчету количества частиц формально (2 моля - слева и 2 моля - справа), можно было бы сделать вывод, что давление не влияет на равновесие данной системы. Однако газами являются только CO_2 и CO. По-

этому повышение давления будет смещать рассматриваемое равновесие влево (в сторону меньшего числа молей газообразных веществ), а понижение давления - вправо (в сторону большего числа молей газов).

В соответствии с принципом Ле Шателье - Брауна происходят смещения всех фазовых равновесий. Так, если повышать давление в системе, то сдвиг равновесия будет происходить в сторону той фазы, которая имеет меньший удельный объем и большую плотность. Например, с увеличением давления сместится в сторону продукта следующее равновесие (под химическими формулами веществ указаны их удельные объемы при соответствующих температуре и давлении):

$$\underset{0{,}442\ см^3/г\ (при\ 20\ °C)}{C(графит)} \rightleftarrows \underset{0{,}284\ см^3/г\ (при\ 20\ °C)}{C(алмаз)}.$$

Изменение внешнего давления мало влияет на химическое равновесие фазового перехода, когда все участвующие в нем вещества находятся в конденсированном состоянии. Заметно влияют лишь давления порядка $1 \cdot 10^9$ Па. В соответствии с этим, существенно зависят от давления температуры кипения веществ и мало зависят температуры плавления.

Разбавление газообразных реагентов инертным газом приводит к смещению равновесия в том же направлении, что и уменьшение общего давления в системе.

Повышение температуры ведет к смещению фазового равновесия в том направлении, которое характеризуется поглощением теплоты. Так, диссоциация одного моля паров воды на водород H_2 и кислород O_2 требует затрат 241,98 кДж (эндотермический процесс). При обычной температуре вода - вполне термически устойчивое соединение, но с ростом температуры происходит постепенный сдвиг вправо соответствующего равновесия (4.3).

Сдвиг равновесия приводит к тому, что степень разложения воды на

водород и кислород, составляющая, например, 0,03 % при 1273 К достигает 11,2 % при 2773 К.

4.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$$C(\text{уголь}) + 2N_2O(г) \rightleftarrows CO_2(г) + 2N_2(г).$$

2. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$$CO_2(г) + 2N_2(г) \rightleftarrows C(\text{уголь}) + 2N_2O(г).$$

3. Рассчитайте исходную концентрацию O_2, если равновесные концентрации составляют $C(O_2) = 0{,}1$ моль/л, $C(SO_2) = 0{,}15$ моль/л:

$$2CuS(к) + 3O_2(г) \rightleftarrows 2CuO(к) + 2SO_2(г).$$

4. Рассчитайте исходную концентрацию водорода, если равновесные концентрации составляют $C(H_2) = 0{,}15$ моль/л, $C(H_2O) = 0{,}3$ моль/л:

$$3Fe_2O_3(к) + H_2(г) \rightleftarrows 2Fe_3O_4(к) + H_2O(г).$$

5. Как сдвинется равновесие, если объём системы уменьшится:

$$2H_2(г) + O_2(г) \rightleftarrows 2H_2O(г).$$

6. В какую сторону сдвинется равновесие при уменьшении объёма системы:

$$H_2(г) + Br_2(г) \rightleftarrows 2HBr(г).$$

7. В каком направлении сдвинется равновесие при повышении температуры:

$$C_2H_4 + 3O_2 \rightleftarrows 2CO_2 + 2H_2O \quad \Delta H^o = -1323 \text{ кДж/моль}.$$

8. Как сдвинется равновесие в системе, если уменьшить температуру:

$$2CO_2 \rightleftarrows 2CO + O_2 \quad \Delta H^o = 655 \text{ кДж /моль}.$$

9. Как повлияет на равновесие падение температуры в системе:

$$FeO + CO \rightleftarrows Fe + CO_2 \quad \Delta H^o = -86 \text{ кДж/моль}.$$

Глава 5
ОБРАЗОВАНИЕ РАСТВОРОВ

5.1. РАСТВОРЫ

Среди различных веществ, окружающих нас в природе, лишь очень немногие не содержат примесей. Большинство природных и техногенных веществ содержат несколько компонентов и представляют собой смеси. Многие такие смеси являются гомогенными (однородными), т. е. составляющие их компоненты равномерно на молекулярном уровне распределены относительно друг друга. Подобные гомогенные системы переменного состава, образованные двумя и более веществами, называют **растворами.**

Примерами растворов служат природные водные системы, многие технические растворы, применяемые при обогащении полезных ископаемых, различные фракции перегонки нефти.

Если при образовании раствора равномерное распределение индивидуальных веществ приводит к образованию твердой однофазной системы, то такую систему называют твердым раствором. Твердые растворы составляют основу большинства применяемых в технике сплавов металлов. Эти растворы также распространены среди природных минералов.

Кроме жидких и твердых растворов существуют газовые растворы. Воздух, которым мы дышим, представляет собой гомогенную смесь газообразных веществ. В окружающем нас мире можно найти много примеров растворов. Так, воды Мирового океана представляют собой водный раствор большого числа различных веществ.

Природные водные растворы являются сложными физико - химическими системами, образующимися при взаимодействии воды с горными породами и минералами. К природным растворам относятся как поверхностные воды (воды рек, озер, морей, океанов), так и подземные воды (почвенные и грунтовые воды, межпластовые, жильные, карстовые воды и т. п.).

Среднее содержание солей в речных водах составляет около 0,01 % (по массе). Несмотря на относительно малое содержание растворенных солей, их

ежегодно выносится реками в океан более двух миллиардов тонн. Содержание солей в морской воде несравненно больше, чем в речной. Для Мирового океана оно составляет в среднем 3,5 %. Среди солей океана значительно преобладают хлориды и сульфаты натрия и магния. Среднее содержание важнейших ионов океанской воды (в массовых процентах) представлено в таблице 5.1.

Основное количество ионов металлов накапливалось в морской воде в результате разрушения горных пород земной поверхности. Кроме отмеченных выше, океан содержит практически и все остальные известные химические элементы, но в еще меньших количествах.

Для характеристики составных частей растворов используют понятия «растворитель» и «растворенное вещество». Обычно растворителем называют компонент, сохраняющий свое фазовое состояние при образовании раствора.

Таблица 5.1

Процентное содержание ионов, присутствующих в морской воде в наибольшем количестве

Ион	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	HCO_3^-, CO_3^{2-}
ω, %	1,9	1,1	0,27	0,13	0,041	0,040	0,011

Например, при образовании раствора из NaCl и H_2O растворителем является вода, т. к. именно она переходит в раствор, не меняя своего агрегатного состояния. Если все компоненты раствора до перемешивания находятся в одинаковой фазе, растворителем называют тот компонент, который содер-

жится в наибольшем количестве. Например, в окружающем нас газообразном по агрегатному состоянию растворе - атмосферном воздухе растворителем является азот. Остальные газы, присутствующие в атмосфере в меньшем количестве (кислород, углекислый газ, водород и т. д.), являются растворенными веществами. Количество растворенного компонента принято характеризовать концентрацией раствора.

5.2. СПОСОБЫ ВЫРАЖЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРОВ

Концентрация является одной из важных характеристик раствора. Для качественного описания концентрации используются такие понятия как разбавленный и концентрированный раствор. Растворы, содержащие очень много растворенного вещества, называют **концентрированными**, содержащие его немного - **разбавленными**. Концентрированный раствор может быть насыщенным и ненасыщенным.

Для водных растворов веществ при фиксированном значении температуры обычно существует предел насыщения. Например, сколько бы ни находился хлорид натрия в воде при 20 °С, больше 36 г NaCl в 100 г H_2O не растворится, избыточное количество соли останется в твердой фазе.

В насыщенном жидком растворе осадок твердого вещества существует в динамическом равновесии с тем же веществом, находящимся в растворенном состоянии: скорость отрыва частиц с поверхности кристаллов равна скорости их обратного оседания.

Раствор, в котором растворенного вещества меньше, чем в насыщенном растворе, называется ненасыщенным. При внесении в него новых количеств данного вещества, последнее растворяется и концентрация раствора возрастает. Раствор называется пересыщенным, если его концентрация больше, чем у насыщенного раствора. Пересыщенный раствор может образоваться, например, в результате осторожного охлаждения раствора, насыщенного при

более высокой температуре. Если внести в него частицу того вещества, которое в нем растворено, весь избыток последнего сразу выкристаллизовывается. Пересыщенные растворы в отличие от насыщенных - неустойчивые системы и способны существовать только в отсутствии контактирующей с ними твердой фазы растворенного вещества (затравки).

Следует принимать во внимание, что насыщенный раствор может содержать очень мало растворенного вещества, если оно плохо растворимо. Например, насыщенный раствор $CaSO_4$ при 18 °С содержит в 100 г раствора всего 0,2 г соли, тогда как раствор, содержащий 25 г KNO_3 в 100 г воды при 20 °С, - ненасыщенный.

Для количественного выражения концентрации растворов на практике используют несколько способов. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

1. **ω(X) - массовая доля растворенного вещества**. Определяется отношением массы растворенного вещества X к общей массе раствора. Выражается в процентах или долях единицы:

$$\omega(X) = \frac{m(X)}{m(\text{раствора})} 100\,\%.$$

Например, ω(NaCl) = 2,5 % - массовая доля хлорида натрия в растворе составляет 2,5 %.

2. **C(X) – молярная концентрация** (концентрация количества растворенного вещества X). Определяется числом молей ν(X) данного компонента, приходящимся на единицу объема раствора (1 л); размерность моль/л или второе возможное обозначение – М:

$$C(X) = \frac{\nu(X)}{V} = \frac{m(X)}{M(X)V} \quad [\frac{\text{моль}}{\text{л}}].$$

Например, C(HCl) = 0,1 моль/л или C(HCl) = 0,1 М - молярная концентрация раствора соляной кислоты составляет 0,1 моль/л.

3. **χ(X) – молярная доля компонента X**. Определяется отношением числа молей этого компонента к сумме чисел молей всех компонентов раствора. Молярная доля может быть выражена как в долях единицы, так и в процентах:

$$\chi(X) = \frac{\nu(X)}{\sum \nu_i}.$$

Молярные доли являются наиболее удобными характеристиками состава при теоретическом анализе свойств растворов, поскольку показывают, какую часть от общего числа молекул (атомов) в системе составляют молекулы (атомы) определенного компонента.

4. **b(X) – моляльная концентрация** раствора или моляльность. Определяется отношением количества растворенного вещества ν(X) к массе растворителя m(Y); размерность моль/кг:

$$b(X) = \frac{\nu(X)}{m(Y)} \ [\frac{\text{моль}}{\text{кг}}].$$

Следует обратить внимание на различие между молярной концентрацией и моляльностью: при определении моляльности используется масса растворителя, при определении молярности – объем раствора.

5. **C_f(Э(X))** или **$C_н$(Э(X)) – молярная концентрация эквивалента (эквивалентная концентрация)**. Определяется отношением числа молей эквивалента вещества ν_f(X) к объему раствора; размерность моль (экв)/л или второе возможное обозначение – н.:

$$C_f(Э(X)) = \frac{\nu_f(X)}{V} = \frac{m(X)}{M(Э(X))} \quad [\frac{моль}{л}].$$

Например, молярная концентрация эквивалента соляной кислоты составляет 0,1 моль/л: $C_f(HCl)$ = 0,1 моль/л или $C_f(HCl)$ = 0,1 н.; молярная концентрация эквивалента фосфорной кислоты составляет 0,2 моль/л: $C_f(1/3\ H_3PO_4)$ = 0,2 моль/л или $C_f(1/3\ H_3PO_4)$ = 0,2 н.

Напомним, что **эквивалент Э(Х)** - это реальная либо условная частица (атом, молекула либо какая-то часть молекулы) вещества Х, которая эквивалентна одному иону водорода в реакции ионного обмена или одному электрону в окислительно - восстановительной реакции.

Необходимо особо подчеркнуть, что эквивалент для данного вещества не является неизменной величиной, а зависит от того, в какой конкретной реакции участвует это вещество.

Поскольку для кислот и оснований эквивалент представляет собой частицу вещества, которая в данной реакции высвобождает один ион водорода или соединяется с ним (или каким-либо другим образом эквивалентна ему), то, например, в реакции:

$$KOH + H_3PO_4 = KH_2PO_4 + H_2O$$

эквивалент фосфорной кислоты равен молекуле H_3PO_4 ($Э(H_3PO_4) = H_3PO_4$), поскольку в рассматриваемой реакции одна молекула кислоты высвобождает только один ион водорода.

В другой реакции:

$$2KOH + H_3PO_4 = K_2HPO_4 + 2H_2O$$

эквивалент кислоты равен половине молекулы ($Э(H_3PO_4) = ½\ H_3PO_4$), т. к. в рассматриваемой реакции одна молекула кислоты высвобождает два иона

водорода.

В случае реакции восстановления $KMnO_4$ в кислой среде

$$2KMnO_4 + 10FeSO_4 + 8H_2SO_4 = 2MnSO_4 + 5Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 8H_2O$$

эквивалент $KMnO_4$ составляет 1/5 часть молекулы, т. к. в данной реакции один перманганат – ион (одна молекула перманганата калия) присоединяет пять электронов:

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O.$$

Следовательно, $Э(KMnO_4) = 1/5\ KMnO_4$.

Для реакции восстановления $KMnO_4$ в нейтральной среде

$$2KMnO_4 + 3Na_2SO_3 + H_2O = 2MnO_2 + 3Na_2SO_4 + 2KOH$$

эквивалент $KMnO_4$ будет равен 1/3 части молекулы, т. к. в данной реакции одна молекула перманганата калия присоединяет три электрона:

$$MnO_4^- + 2H_2O + 3e^- \rightarrow MnO_2 + 4OH^-.$$

Следовательно, $Э(KMnO_4) = 1/3\ KMnO_4$.

Молярной массой эквивалента вещества X называют массу одного моля эквивалентов этого вещества.

Например, если $Э(H_3PO_4) = 1/2\ H_3PO_4$, то $M(Э(H_3PO_4)) = 1/2\ M(H_3PO_4) =$ $= 98/2 = 49$ г/моль.

5.2.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить молярную массу эквивалента основания, исходя из уравнения реакции:

$$Cr(OH)_3 + HCl = Cr(OH)_2Cl + H_2O.$$

2. Вычислить молярную массу эквивалента кислоты, исходя из уравнения реакции:

$$H_3AsO_4 + 2NaOH = Na_2HAsO_4 + 2H_2O.$$

3. Вычислить молярную массу эквивалента основания, исходя из уравнения реакции:

$$Cu(OH)_2 + HCl = CuOHCl + H_2O.$$

4. Рассчитать массовую долю вещества в растворе, полученного при растворении 4 г этого вещества в 30 мл воды.

5. Сколько граммов вещества нужно растворить в 460 г воды, чтобы получить 20 %-ный раствор?

6. Сколько граммов соли и воды содержится в 700 г 11 %-ного раствора ?

7. К 1 л 6 %-ного раствора фосфорной кислоты (ρ = 1,031 г/мл) прилили 1 л воды. Какова молярная концентрация полученного раствора?

8. Сколько граммов Na_2CO_3 содержится в 1 л 0,5 н. раствора?

9. Вычислить молярность 12 %-ного раствора KOH (ρ = 1,1 г/мл).

10. В 250 мл раствора KCNS содержится 30 г соли. Вычислить эквивалентную концентрацию раствора.

11. Вычислить молярную концентрацию 20 %-ного раствора сульфата железа (II) (ρ = 1,21 г/мл).

12. Сколько граммов $AgNO_3$ и воды надо взять для приготовления 200 мл 0,1 н. раствора?

13. Сколько граммов хлорида железа (III) содержится в 20 мл 0,15 н.

раствора?

14. По известной молярной концентрации выразить концентрацию водного раствора через массовую долю растворенного вещества, моляльность, молярную долю и эквивалентную концентрацию:

Номер задачи	Растворенное вещество	Концентрация C(X), моль/л	Плотность раствора, г/мл	Температура T, K
1	$AgNO_3$	1,405	1,194	293
2	$AlCl_3$	1,185	1,129	291
3	$BaCl_2$	1,444	1,253	293
4	$CaCl_2$	1,190	1,101	293
5	$Ca(NO_3)_2$	1,100	1,128	291
6	$CdSO_4$	1,034	1,198	291
7	$FeCl_3$	1,900	1,234	293

Ответы. **1**. 20 %; 1,468 моль/1000 г; 0,026; 1,405 моль(экв)/л. **2.** 14 %; 1,22 моль/1000 г; 0,022; 3,555 моль(экв)/л. **3**. 24 %; 1,52 моль/1000 г; 0,027; 2,89 моль(экв)/л. **4.** 12 %; 1,23 моль/1000 г; 0,022; 2,38 моль(экв)/л. **5.** 16 %; 1,161 моль/1000 г; 0,021; 2,2 моль(экв)/л. **6**. 18 %; 1,053 моль/1000 г; 0,019; 2,068 моль(экв)/л. **7**. 25 %; 2,055 моль/1000 г; 0,036; 5,7 моль(экв)/л.

5.3. РАСТВОРИМОСТЬ ВЕЩЕСТВА И ЕЕ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ

Растворимостью называют способность вещества растворяться в том или ином растворителе. Количественно растворимость характеризуется концентрацией насыщенного раствора при определенных температуре и давлении. Растворимость зависит от природы растворенного вещества и растворителя, температуры, внешнего давления. Растворимость твердых, жидких и

газообразных веществ в жидкостях во многом зависит от того, являются ли растворенное вещество и растворитель оба полярными или неполярными веществами (взаимная растворимость относительно велика), или одно из них полярно, а другое неполярно (взаимная растворимость незначительна).

Молекула называется **полярной** (дипольной), если в ней центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают и находятся на некотором расстоянии r друг от друга. Мерой полярности молекулы служит **дипольный момент μ** - произведение абсолютной величины заряда e одного из полюсов диполя на расстояние r между центрами зарядов: $\mu = e \cdot r$.

Жидкости, используемые в качестве растворителей, считают малополярными, если дипольный момент образующих их молекул менее $5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. При отнесении растворителей к числу мало- или сильнополярных можно руководствоваться табличными величинами диэлектрической проницаемости для этих жидкостей. Низким значениям дипольного момента ($\mu < 5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м), как правило, отвечают низкие значения диэлектрической проницаемости ($\varepsilon < 10$); жидкости же, отличающиеся большой полярностью и высокими значениями дипольного момента молекул, характеризуются также и выраженными диэлектрическими свойствами ($\varepsilon > 10$).

В табл. 5.2 приведены значения дипольных моментов молекул и диэлектрической проницаемости для наиболее часто применяемых растворителей.

Полярные растворители обычно смешиваются в любых пропорциях и могут также служить хорошими растворителями для других (твердых и газообразных) веществ полярного характера. Точно так же неполярные растворители, обнаруживая неограниченную растворимость друг в друге, могут служить хорошими растворителями для большинства веществ неполярного или малополярного характера. Поэтому задача подбора подходящего растворителя для того или иного вещества может быть упрощена, если известна его полярность.

Таблица 5.2

Значения дипольного момента и диэлектрической проницаемости для распространенных растворителей (Т = 298 К)

Растворитель	$\mu \cdot 10^{-30}$ Кл·м	ε
Ацетон CH_3COCH_3	9,8	20,7
Бензол C_6H_6	0	2,28
Вода H_2O	6,1	80,08
Метанол CH_3OH	5,6	32,63
Нитробензол $C_6H_5NO_2$	13,3	34,75
Сероуглерод CS_2	0	2,64
Тетрахлорид углерода CCl_4	0	2,24
Толуол $C_6H_5CH_3$	1,3	2,38
Хлороформ $CHCl_3$	3,8	4,72
Этанол C_2H_5OH	5,7	25,2

Растворимость различных веществ в одном и том же растворителе, например, в воде, может изменяться в значительных пределах. Принято считать легкорастворимым вещество, растворимость которого при комнатной температуре (293 К) превышает 10 г на 100 г растворителя. Если растворимость находится в пределах 0,01 – 1,00 г на 100 г растворителя, то вещество считают труднорастворимым. При растворимости менее 0,01 г на 100 г растворителя вещество считают практически нерастворимым.

Образование раствора двумя веществами, каждое из которых находится в конденсированном состоянии (твердом или жидком), обычно сопровождается сравнительно небольшими изменениями объема (чаше всего в сторону сокращения). При этом давление незначительно влияет на величину их

взаимной растворимости. Лишь при давлениях порядка 10^9 Па удается отметить существенное изменение взаимной растворимости такого рода веществ, причем характер этого изменения можно предсказать, исходя из принципа Ле Шателье – Брауна.

Так, если при образовании раствора из двух твердых или жидких веществ А и В происходит сокращение объема, то увеличение давления оказывает положительное влияние на их взаимную растворимость. Если же при растворении имеет место увеличение объема системы, то давление оказывает отрицательное влияние на растворимость. Например, растворение нитрата аммония NH_4NO_3 в воде сопровождается увеличением объема и при давлениях порядка 10^9 Па растворимость этого вещества в воде уменьшается примерно вдвое в сравнении с растворимостью при атмосферном давлении. Если растворяемое вещество газ, а растворителем является жидкость (или твердое вещество), то образование раствора сопровождается значительным сокращением объема системы. В соответствии с этим растворимость газов в жидкостях заметно возрастает по мере увеличения давления.

Согласно устоявшимся представлениям, растворяемое вещество взаимодействует с молекулами растворителя. В результате в растворе образуются соединения, состоящие из растворенного вещества и растворителя. Такие соединения получили название сольватов (от латинского solvere – растворять), а если растворитель – вода, то гидратов. Состав сольватов в растворе непостоянен: он меняется с изменением концентрации и температуры раствора. Наряду с сольватами (гидратами) в растворе имеются и свободные молекулы растворителя. Поэтому состав раствора в отличие от химических соединений может меняться в широких пределах. Гидраты часто удается выделить, охлаждая или выпаривая раствор, например, получены гидраты $CuSO_4 \cdot 5H_2O$, $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$, $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. Некоторые гидраты оказываются нестойкими, легко разлагаются при выпаривании раствора. Их существование в растворе удается доказать лишь косвенными методами, например, исследуя спектры поглощения.

5.4. ОСМОС. ОСМОТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Растворы различных веществ обладают способностью к диффузии. Это явление заключается в том, что сольватированные молекулы (ионы) растворенного вещества самопроизвольно перемещаются в среде растворителя из локальных областей большей концентрации в локальные области меньшей концентрации. В результате с течением времени концентрация раствора становится одинаковой во всем объеме жидкости. Самопроизвольное выравнивание концентрации происходит и тогда, когда два раствора различной концентрации (или раствор и растворитель) отделены друг от друга полупроницаемой перегородкой (мембраной). Такие перегородки легко пропускают через себя молекулы растворителя (например, воды), но задерживают частицы растворенного вещества. Этим свойством обладают пергамент, оболочки клеток и др. Выравнивание концентрации через полупроницаемую мембрану идет односторонне – путем поглощения растворителя из раствора с меньшей концентрацией в раствор с большей концентрацией. Процесс односторонней диффузии растворителя через полупроницаемую мембрану называется **осмосом.**

Механизм осмоса можно представить следующим образом. Так как концентрация молекул воды в разбавленном растворе больше, чем в концентрированном, а система стремится к равновесному состоянию, то из первого раствора во второй проникает через полупроницаемую мембрану больше молекул воды, чем уходит в обратном направлении. Давление, которое надо приложить к раствору, чтобы привести его в равновесие с чистым растворителем, отделенным от раствора полупроницаемой мембраной, называется осмотическим.

Немецкий ученый Пфеффер в 1887 году установил следующие **закономерности осмоса:**

1) осмотическое давление при постоянной температуре прямо пропорционально концентрации раствора:

2) осмотическое давление при постоянной концентрации пропорционально абсолютной температуре.

В том же 1887 году голландский ученый Вант - Гофф открыл закон:

осмотическое давление раствора равно тому давлению, которое производило бы растворенное вещество, если бы оно в виде газа занимало при той же температуре объем, равный объему раствора:

$$p = CRT, \qquad (5.1)$$

где p - осмотическое давление раствора; C - моляльная концентрация раствора; R - константа, численно равная универсальной газовой постоянной; T - абсолютная температура.

Закон Вант - Гоффа применим лишь к разбавленным растворам неэлектролитов, т. е. к тем системам, в которых можно пренебречь взаимодействием молекул растворенного вещества друг с другом и с молекулами растворителя. Растворы неэлектролитов высокой концентрации и электролитов любой концентрации обнаруживают значительные отклонения от этого закона.

Осмотическое давление проявляется лишь в том случае, если на пути к равномерному распределению растворенного вещества во всем объеме раствора встает полупроницаемая мембрана. При этом стремление растворенного вещества к диффузии в направлении меньших концентраций проявляется в виде одностороннего давления на полупроницаемую перегородку, поскольку давление по другую сторону этой перегородки, проистекающее от тех же самых тенденций, меньше. Таким образом, осмотическое давление не означает какое-то дополнительное механическое давление в растворителе, возникающее из-за наличия в нем растворенного вещества, а является лишь мерой стремления растворенного вещества к равномерному распределению во всем объеме растворителя, находящегося по обе стороны полупроницаемой мембраны.

Растворы, имеющие одинаковое осмотическое давление, называют **изотоническими**. Исходя из уравнения (5.1), можно было бы ожидать, что растворы самых разнообразных веществ, имеющие одну и ту же молярную концентрацию, должны быть изотоническими. В действительности из-за того, что одни вещества при растворении распадаются на ионы (более подробно о диссоциации – раздел 6) или же в результате ассоциации образуют более сложные агрегаты молекул, а другие при этом не претерпевают изменений, растворы равной молярной концентрации не всегда оказываются изотоническими.

Если учесть, что из n_0 молекул растворенного вещества образуется n_i дочерних частиц, то в уравнение (5.1) для расчета осмотического давления необходимо ввести дополнительный множитель i, называемый изотоническим коэффициентом Вант - Гоффа:

$$p_{осм.} = i \cdot C \cdot R \cdot T.$$

Коэффициент i равен отношению числа отдельных частиц (молекул, ионов, ассоциированных молекул) n_i к общему числу молекул растворенного вещества n_o в объеме раствора: $i = n_i / n_o$. Он показывает, во сколько раз число частиц в растворе электролита больше, чем в растворе неэлектролита с такой же концентрацией.

Если из общего числа молекул растворенного вещества какая то часть α их первоначального количества распалась на ν дочерних частиц, а остальная часть молекул $(1 - \alpha)$ остается в неизменном виде, то изотонический коэффициент будет равен:

$$i = \alpha\nu + (1 - \alpha) = \alpha(\nu - 1) + 1.$$

Для электролита, распадающегося на 2 иона ($\nu = 2$), например, для NaCl, $i = 1 + \alpha$; для $CaCl_2$ (распадается на три иона) $i = 1 + 2\alpha$ и т. д. Для ассоциата,

например, H_2F_2 ($\nu = 1/2$) $i = 1 - 1/2\alpha$. Во всех случаях α - это степень диссоциации или степень ассоциации растворенного вещества, выраженная в долях единицы.

5.4.1. Примеры решения задач

Задача 1. Давление паров воды при 293 К составляет 2332,82 Па, а давление пара раствора, содержащего нелетучее растворенное вещество – 2290,26 Па.

Определите осмотическое давление раствора при 313 К, если его плотность при этой температуре 1,01 г/см^3, а молярная масса растворенного вещества равна 60 г/моль.

Решение.

1) Определим молярную долю растворенного вещества в растворе:

$$N_2 = \frac{p^0_{H_2O} - p_{H_2O}}{p^0_{H_2O}} = \frac{2332,82 - 2290,26}{2332,82} = 0,0182.$$

2) Пересчитаем концентрацию, выраженную в молярных долях, на молярную концентрацию:

$$C_2 = \frac{1000\rho N_2}{N_2M_2 + N_1M_1} = \frac{1000 \cdot 1,01 \cdot 0,0182}{0,0182 \cdot 60 + 0,9818 \cdot 18,016} = 0,98 \text{ моль/л.}$$

3) Определим осмотическое давление:

$$p_{осм.} = CRT = 0,98 \cdot 8,314 \cdot 10^3 \cdot 313 = 2,573 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Ответ: осмотическое давление раствора составляет $2,573 \cdot 10^6$ Па.

Задача 2. В каком растворе осмотическое давление будет максимальным,

если $C(NaCl) = C(K_2SO_4) = C(C_6H_{12}O_6) = 0{,}2$ моль/л?

Решение.

1) Осмотическое давление растворов электролитов (NaCl и K_2SO_4) будет выше, чем осмотическое давление раствора неэлектролита – глюкозы ($C_6H_{12}O_6$), так как:

$p_{осм.}(NaCl) = iCRT$; $p_{осм.}(K_2SO_4) = iCRT$; $p_{осм.}(C_6H_{12}O_6) = CRT$, где $i > 1$.

2) Из двух растворов электролитов максимальное осмотическое давление будет в растворе с наибольшим изотоническим коэффициентом i.

Для сильных электролитов степень элетролитической диссоциации α можно принять за 1, тогда: $i(NaCl) = 1 + 1(2-1) = 2$; $i(K_2SO_4) = 1 + 1(3-1) = 3$.

Ответ: наибольшим осмотическим давлением в ряду рассмотренных растворов обладает раствор сульфата калия.

5.4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. При 290 К осмотическое давление раствора, содержащего 0,125 г органического вещества в 25 мл воды, равно $2{,}006 \cdot 10^5$ Па. Вычислить молярную массу растворенного вещества. Ответ: 60 г/моль.

2. Сколько граммов глицерина следует растворить в 0,001 $м^3$ воды, чтобы осмотическое давление полученного раствора при 290 К было $2{,}026 \cdot 10^5$ Па? Ответ: 7,73 г.

3. При температуре 300 К осмотическое давление раствора сахара составляет $1{,}064 \cdot 10^5$ Па. Определите осмотическое давление этого раствора при 273 К. Ответ: $9{,}682 \cdot 10^4$ Па.

4. При 298 К давление паров воды равно 23,76 мм рт. ст., а давление паров раствора глицерина - 23,68 мм рт. ст. Вычислите осмотическое давление этого раствора при 310 К. Плотность раствора составляет величину

1,0017 г/см^3. Ответ: 4,585·10^5 Па.

5.5. ДАВЛЕНИЕ ПАРА РАСТВОРИТЕЛЯ НАД РАСТВОРОМ. ЗАМЕРЗАНИЕ И КИПЕНИЕ РАСТВОРА

Жидкость, помещенная в замкнутый объем, испаряется и молекулы ее пара, ударяясь о стенки сосуда, создают определенное давление. Это давление растет с повышением температуры. Если в этой жидкости растворить нелетучее вещество (например, сахар), то при той же температуре давление пара над раствором будет ниже, чем над чистым растворителем. Это можно пояснить так. У раствора часть поверхности, с которой происходит испарение, занята молекулами растворенного вещества. Поэтому в единицу времени с этой поверхности испаряется меньше молекул растворителя, следовательно, падает и создаваемое ими давление.

Французский ученый **Рауль установил закон** (1887 г.):

в разбавленных растворах нелетучих неэлектролитов понижение давления пара пропорционально количеству вещества, растворенного в данном количестве растворителя:

$$\Delta p = p\frac{n}{N}\ , \qquad (5.2)$$

где Δp – понижение давления пара над раствором; p – давление пара чистого растворителя; n – число молей растворенного вещества; N – число молей растворителя.

Из уравнения (5.2) следует, что понижение давления пара растворителя над раствором не зависит от природы растворенного вещества и определяется только его концентрацией: чем выше концентрация раствора, тем сильнее уменьшается давление пара над ним.

Жидкость кипит при той температуре, при которой давление насы-

щенного пара становится равным внешнему давлению. С другой стороны, температура замерзания – это та температура, при которой давление пара над жидкостью равно давлению пара над тем же веществом в твердом состоянии. Например, температура кипения воды при нормальном давлении равна 100 °С, а замерзания – 0 °С. При 0 °С давление пара льда и жидкой воды 4,6 мм рт. ст. (613 Н/м^2). Так как давление пара раствора ниже давления пара чистого растворителя, то раствор кипит при более высокой, а замерзает при более низкой температуре, чем чистый растворитель (рис. 5.1).

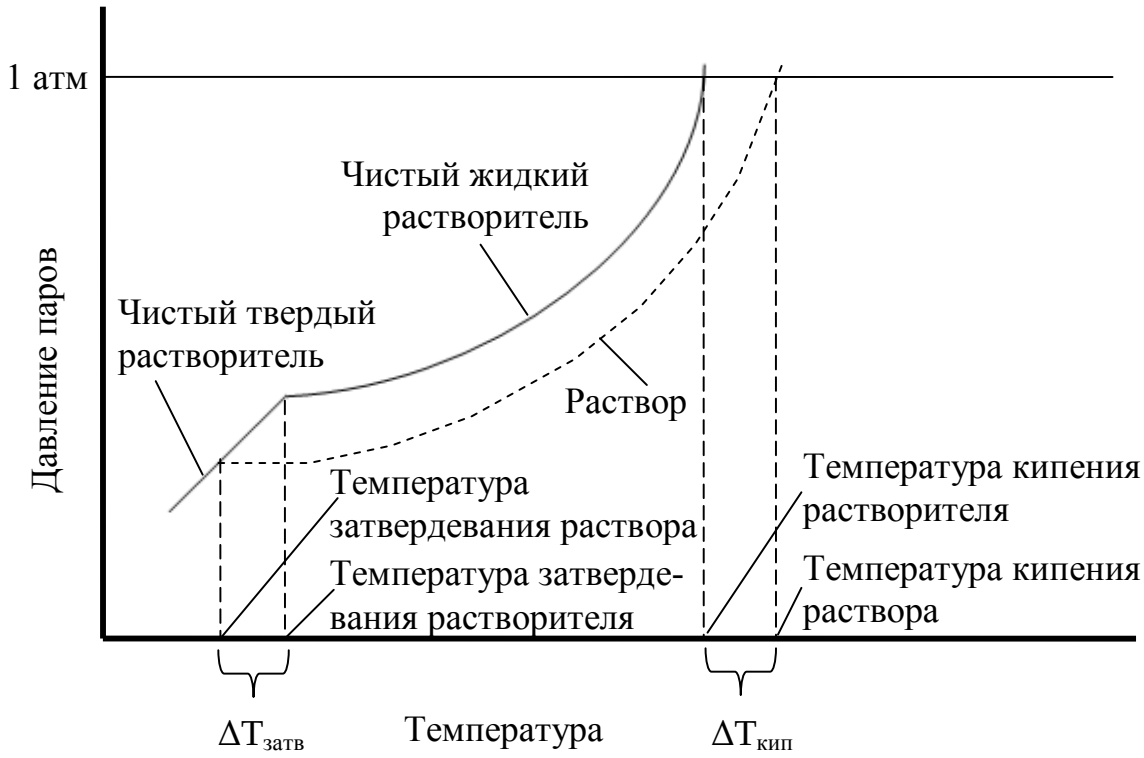


Рис. 5.1. Температурная зависимость парциального давления паров чистого растворителя и паров раствора нелетучего вещества при постоянном атмосферном давлении

Степень повышения температуры кипения и понижения температуры замерзания разбавленного раствора не зависит от природы растворенного вещества, а обусловлена только числом растворенных частиц в определенном количестве растворителя, что подчиняется закону Рауля: **понижение темпе-**

ратуры замерзания и повышение температуры кипения пропорциональны моляльной концентрации раствора:

$$\Delta T = K \cdot b,$$

где ΔT - понижение температуры замерзания или повышение температуры кипения раствора; К - коэффициент пропорциональности; b - моляльная концентрация.

Из формулы видно, что если для неэлектролита b = 1 моль/1000 г растворителя, то К = ΔT.

В случае замерзания раствора коэффициент К называется **криоскопической константой,** в случае кипения - **эбуллиоскопической константой.** Эти величины постоянны для конкретного растворителя. Например, для воды $К_{криоск.}$ = 1,86, $К_{эбулл.}$ = 0,52.

5.5.1. Примеры решения задач

Задача 1. Определите моляльную концентрацию примесей в технической уксусной кислоте, если она замерзает при 289,4 К, а ее криоскопическая константа равна 3,9. Температура замерзания чистой уксусной кислоты составляет 289,7 К.

Решение.

1) Определим понижение температуры замерзания уксусной кислоты в присутствии примесей:

$$\Delta T_{крист.} = T^0_{крист.} - T_{крист.} = 289{,}7 - 289{,}4 = 0{,}3 \text{ К}.$$

2) Рассчитаем содержание примесей в 1000 г технической уксусной кислоты:

$$m = \frac{\Delta T_{крист.}}{К_{крист.}} = \frac{0,3}{3,9} \approx 0,08 \text{ моль}.$$

Ответ: моляльная концентрация примесей в уксусной кислоте составляет величину 0,08 моль/кг.

Задача 2. При растворении 0,6 г вещества - неэлектролита в 25 г воды температура кипения раствора повышается на 0,204 К. При растворении 0,3 г этого же вещества в 20 г бензола температура кипения раствора повышается на 0,668 К. Определить эбуллиоскопическую постоянную бензола, если эбуллиоскопическая постоянная воды равна 0,512.

Решение.

1) Определим молярную массу растворенного в воде вещества:

$$M_2 = \frac{К_{эбулл.} \cdot m_2 \cdot 1000}{\Delta T_{кип.} \cdot m_1} = \frac{0,512 \cdot 0,6 \cdot 1000}{0,204 \cdot 25} = 60 \text{ г/моль}.$$

2) Рассчитаем эбуллиоскопическую постоянную бензола:

$$К_{эбулл.} = \frac{\Delta T_{кип.} \cdot M_2 \cdot m_1}{m_2 \cdot 1000} = \frac{0,668 \cdot 60 \cdot 20}{0,3 \cdot 1000} = 2,67.$$

Ответ: эбуллиоскопическая постоянная бензола равна 2,67.

Задача 3. Определить степень электролитической диссоциации хлорида натрия и хлорида кальция в 2,5 % - ных водных растворах. Температуры кристаллизации растворов составляют 271,61 К и 271,95 К соответственно. Криоскопическая постоянная для воды равна 1,85.

Решение.

1) Определим моляльные концентрации растворов:

$$m(NaCl) = \frac{\omega(NaCl)1000}{M(NaCl)\omega(N_2O)} = \frac{2,5 \cdot 1000}{58,5 \cdot 97,5} = 0,438 \text{ моль/кг.}$$

$$m(CaCl_2) = \frac{\omega(CaCl_2)1000}{M(CaCl_2)\omega(H_2O)} = \frac{2,5 \cdot 1000}{111 \cdot 97,5} = 0,231 \text{ моль/кг.}$$

2) Рассчитаем изотонические коэффициенты для этих растворов:

$$i = \frac{\Delta T_{крист.}}{К_{криоск.} \cdot m}; i(NaCl) = \frac{273,15 - 271,61}{1,85 \cdot 0,438} = 1,901; i(CaCl_2) = \frac{273,15 - 271,95}{1,85 \cdot 0,231} = 2,808.$$

3) Рассчитаем степень электролитической диссоциации веществ, принимая во внимание, что молекула NaCl диссоциирует на два иона ($\nu = 2$), а молекула $CaCl_2$ – на три ($\nu = 3$):

$$i = \alpha(\nu - 1) + 1; \quad \alpha(NaCl) = \frac{1,901 - 1}{2 - 1} = 0,901 \ (90,1\%); \ \alpha(CaCl_2) = \frac{2,808 - 1}{3 - 1} = 0,904.$$

Ответ: $\alpha(NaCl) = 90,1$ %, $\alpha(CaCl_2) = 90,4$ %.

5.5.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Температура кипения бензола равна 80,1 °С. Его молярная теплота испарения составляет 30,77 кДж/моль. Определить температуру кипения раствора, содержащего 0,01 молярную долю нелетучего вещества в бензоле. Ответ: 80,44 °С.

2. Температура кипения сероуглерода 46,20 °С. Его эбуллиоскопическая постоянная составляет 2,3. В 50 г сероуглерода растворено 0,9373 г бензойной кислоты. Полученный раствор имеет температуру кипения 46,39 °С. Опре-

делить молярную массу бензойной кислоты в сероуглероде. Ответ: 226,9 г/моль.

3. Раствор, содержащий в 42 г бензола 0,5 г нелетучего растворенного вещества с молярной массой 182 г/моль, кипит при 80,27 °С. Температура кипения чистого бензола 80,1 °С. Определить молярную теплоту испарения бензола. Ответ: 31,19 кДж/моль.

4. Сколько граммов глицерина необходимо добавить к 1,0 кг воды, чтобы раствор не замерзал до минус 0,5 °С? Криоскопическая постоянная воды равна 1,86. Ответ: 24,75 г.

5. Раствор, содержащий 1,5 г КС1 в 100 г воды, замерзает при - 0,684 °С. Определить изотонический коэффициент и давление паров воды над этим раствором при 25 °С. Давление паров чистой воды при 25 °С равно 23,76 мм рт. ст. Ответ: i = 1,83; $p(H_2O)$ = 23,60 мм рт. ст.

6. Технический диметиламин замерзает на 0,10 градуса ниже температуры плавления (180,97 °С) чистого вещества. Вычислить молярный процент примесей, считая, что твердых растворов не образуется. Теплота плавления чистого диметиламина 5941,28 Дж/моль. Ответ: 0,22 мол. %.

7. Температура замерзания водного раствора сахара равна - 0,216 °С. Вычислить осмотическое давление раствора при этой температуре, если $К_{зам}$ = 1,86, а плотность равна 1,01 г/см^3. Ответ: 2,54·10^5 Па.

5.6. ЗАВИСИМОСТЬ РАСТВОРИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

Растворимость веществ в воде имеет особое значение в связи с той

большой ролью, которую вода играет в природе. Рассмотрим влияние, которое оказывают на растворимость температура и давление.

Растворимость газа в любом растворителе повышается при возрастании давления газа над поверхностью растворителя. В то же время растворимость, твердых и жидких веществ мало зависит от давления. Чтобы разобраться в причине влияния давления на растворимость газов, рассмотрим равновесие, устанавливающееся при их растворении.

Рассмотрим систему, представляющую собой цилиндр с поршнем. В цилиндре находится конденсированное жидкое вещество и его пары. С установлением равновесия скорость перехода молекул пара (газа) в жидкость и скорость перехода молекул из жидкости в газовую фазу уравниваются.

Допустим, что на поршень оказывают дополнительное давление и в результате происходит сжатие газа над раствором. Если объем газа над раствором уменьшится вдвое по сравнению с исходным объемом, давление газа должно возрасти приблизительно вдвое по сравнению с исходным давлением. Но это означает, что частота столкновений молекул газа с поверхностью раствора и, следовательно, скорость их перехода в раствор также возрастают в два раза. В результате растворимость газа должна увеличиваться до тех пор, пока вновь не установится равновесие, другими словами, до тех пор, пока скорость перехода молекул газа в раствор не уравняется со скоростью перехода растворенных молекул из раствора в газовую фазу. Таким образом, растворимость газа должна возрастать пропорционально его давлению. Соотношение между давлением газа и его растворимостью выражается простым уравнением, которое носит название «**закон Генри**»:

$$C(X) = k \cdot p(X),$$

где C(X) - концентрация газа в жидкой фазе; p(X) - давление газа над раствором; k - коэффициент пропорциональности (постоянная Генри).

В качестве примера укажем, что растворимость чистого газообразного азота в воде при 25 °С и давлении $7{,}9 \cdot 10^4$ Па равна $5{,}3 \cdot 10^{-4}$ моль/л. Если удвоить парциальное давление газа, то, согласно закону Генри, растворимость азота в воде также удвоится и составит $1{,}06 \cdot 10^{-3}$ моль/л.

Закономерное уменьшение растворимости газов с повышением температуры имеет место в природе. Так, уменьшение растворимости O_2 в воде с повышением температуры - один из нежелательных эффектов, вызываемых «тепловым загрязнением» водоемов. Этот эффект имеет особенно серьезное значение для глубоких озер. Плотность теплой воды меньше плотности холодной воды, поэтому теплая вода остается на поверхности и не перемешивается с холодной. Это затрудняет растворение кислорода в глубоких слоях воды и, таким образом, отрицательно влияет на все формы жизни в воде.

Отметим, что растворимость большинства твердых веществ повышается с ростом температуры. Влияние температуры на растворимость зависит от изменения энтальпии, которым сопровождается процесс растворения. Если растворение веществ представляет собой эндотермический процесс, то растворимость этих веществ повышается с ростом температуры. Это можно понять, если воспользоваться принципом Ле Шателье - Брауна: если равновесие в системе нарушается в результате изменения температуры, положение равновесия системы смещается таким образом, чтобы противодействовать этому изменению.

Рассмотрим раствор, который находится в равновесии с не полностью растворившимся твердым веществом. Допустим, что процесс растворения протекает эндотермически, т. е. сопровождается поглощением теплоты из окружающей среды. В условиях равновесия справедливо следующее уравнение: растворенное вещество + растворитель + теплота $\leftrightarrow$ раствор.

Если в рассматриваемую систему поступает теплота, то, согласно принципу Ле Шателье - Брауна, равновесие сместится в таком направлении, чтобы уменьшить влияние поступления теплоты. Следовательно, оно сме-

стится в направлении, которое соответствует поглощению теплоты, т. е. вправо. Таким образом, повышение температуры системы, означающее поступление в нее теплоты, приводит к возрастанию растворимости. Если же растворение сопровождается выделением теплоты (экзотермический процесс), повышение температуры должно вызывать уменьшение растворимости.

5.7. ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАСТВОРИМОСТИ ТРУДНОРАСТВОРИМОГО ВЕЩЕСТВА

Рассмотрим гетерогенное химическое равновесие, возникающее в растворах при частичном растворении труднорастворимых веществ.

Для того чтобы между твердым веществом и его раствором установилось равновесие, раствор должен быть насыщенным и находиться в соприкосновении с не полностью растворившимся веществом. В качестве примера рассмотрим насыщенный раствор магнезита, находящийся в контакте с твердым $MgCO_3$. Химическое уравнение этого равновесия имеет вид:

$$MgCO_3\downarrow \leftrightarrow Mg^{2+} + CO_3^{2-}.$$

Следовательно, в насыщенном растворе труднорастворимого электролита протекают два взаимно противоположных процесса: растворение, т. е. переход ионов из осадка в раствор, и кристаллизация – переход ионов из раствора в осадок.

Выражение для константы равновесия при растворении $MgCO_3$ имеет вид:

$$K_c = \frac{C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-})}{C(MgCO_3)}. \qquad (5.3)$$

Так как концентрация твердого вещества есть величина постоянная, можно домножить обе части выражения (5.3) на концентрацию $MgCO_3$. Тогда получим:

$$K_c \cdot C(MgCO_3) = const = C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-}). \qquad (5.4)$$

Постоянная в полученном выражении (5.4) называется **произведением растворимости** и обозначается ПР:

$$ПР(MgCO_3) = C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-}).$$

При диссоциации труднорастворимого вещества не на два, а на большее число ионов, последнее необходимо учитывать. В подобном случае произведение растворимости равно произведению молярных концентраций ионов, на которые диссоциирует вещество, каждая из которых возведена в степень, равную стехиометрическому коэффициенту при соответствующем ионе в уравнении равновесия.

Если произведение концентраций ионов в растворе труднорастворимого вещества достигает величины его произведения растворимости при данной температуре, то раствор становится насыщенным относительно этого электролита. Наоборот, если произведение концентраций ионов в растворе меньше произведения растворимости, раствор будет ненасыщенным и вещество перейдет в раствор. Понятно, что, если произведение концентраций ионов в растворе по какой - либо причине окажется больше произведения растворимости, раствор станет пересыщенным и из него выделится осадок.

Следовательно, в случае $MgCO_3$ имеем:

в ненасыщенном растворе $C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-}) < ПР(MgCO_3)$,

в насыщенном растворе $C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-}) = ПР(MgCO_3)$,

в пересыщенном растворе $C(Mg^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-}) > ПР(MgCO_3)$.

Поскольку произведение концентраций ионов в насыщенном растворе труднорастворимого вещества величина постоянная, то при увеличении концентрации одного из ионов концентрация другого иона должна уменьшаться за счет выпадения части вещества из раствора в осадок. Образование осадка будет продолжаться до тех пор, пока произведение концентраций ионов в растворе не станет равным произведению растворимости.

Рассмотрим вопрос о влиянии избытка реактива на количество осаждающихся ионов. С этой целью проанализируем ситуацию, когда к раствору $CaC1_2$ добавляют эквивалентное количество Na_2SO_4. Часть ионов Ca^{2+} и SO_4^{2-}, соответствующая произведению растворимости $C(Ca^{2+})\cdot C(SO_4^{2-}) = ПР(CaSO_4)$ останется в растворе. Прибавим к раствору еще небольшое количество Na_2SO_4. Концентрация SO_4^{2-} над осадком $CaSO_4$ увеличится, но так как произведение концентрации ионов должно оставаться постоянным, то часть ионов $Ca^{2+,}$ соответствующая избытку SO_4^{2-}, из раствора вновь выпадет в осадок. Чем больше мы прибавим Na_2SO_4, тем больше станет концентрация SO_4^{2-} в растворе и тем меньше в нем останется неосажденных ионов Ca^{2+}.

Таким образом, **дополнительное введение в раствор труднорастворимого вещества ионов, образующихся при его диссоциации, понижает растворимость труднорастворимого вещества, и, следовательно, повышает полноту его осаждения.**

Теперь рассмотрим другой важный вопрос: как повысить растворимость труднорастворимых соединений?

Допустим, требуется перевести в раствор осадок $Be(OH)_2$. Напомним, что раствор, находящийся в соприкосновении с осадком, является насыщенным. В таком растворе:

$$C(Be^{2+})\cdot C^2(OH^-) = ПР(Be(OH)_2).$$

Прибавим к раствору соляную кислоту. При диссоциации $HC1$ образуются ионы H^+. Эти ионы, взаимодействуя в растворе с ионами OH^- раство-

рившейся части $Be(OH)_2$, будут связывать их в недиссоциированные молекулы H_2O. Поэтому произведение $C(Be^{2+})\cdot C^2(OH^-)$ станет меньше $ПР(Be(OH)_2)$, т. е. раствор окажется ненасыщенным относительно $Be(OH)_2$. Согласно принципу Ле Шателье - Брауна, для восстановления нарушенного равновесия часть осадка $Be(OH)_2$ перейдет в раствор. При этом произведение $C(Be^{2+})\cdot C^2(OH^-)$ вновь станет равным $ПР(Be(OH)_2)$. Если прибавление кислоты продолжать, то равновесие между осадком и ионами в растворе будет все время нарушаться, и все новые и новые порции осадка будут переходить в раствор. Это будет продолжаться до тех пор, пока весь осадок не растворится.

Таким образом, **чтобы растворить осадок, нужно уменьшить концентрацию хотя бы одного из ионов, образующихся при диссоциации труднорастворимого вещества.** Этого можно достичь, связывая один из ионов, на которые диссоциирует труднорастворимое вещество, либо в слабодиссоциирующее соединение, либо в еще менее растворимое или в газообразное вещество.

С величиной произведения растворимости связано решение многих практических задач, касающихся образования или растворения осадков. По величине произведения растворимости электролита можно вычислить его растворимость и, наоборот, зная растворимость вещества, можно подсчитать величину его произведения растворимости. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Выяснить, образуется ли осадок AgC1, если к 5 мл 0,1 М раствора $AgNO_3$ прибавить 5 мл 0,1 М раствора HC1? $ПР(AgCl) = 1{,}56\cdot10^{-10}$.

Решение.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо предварительно подсчитать $C(Ag^+)$ и $C(Cl^-)$. Если произведение $C(Ag^+)\cdot C(Cl^-)$ будет больше, чем ПР(AgCl), осаждение произойдет.

При смешивании исходных растворов происходит удвоение объема, поэтому концентрация каждого иона уменьшается до половины первоначальной величины, т. е. $C(Ag^+)$ и $C(Cl^-)$ станут по 0,1/2 = 0,05 моль/л. Следо-

вательно, $C(Ag^+)\cdot C(Cl^-) = 0{,}05\cdot 0{,}05 = 2{,}5\cdot 10^{-3}$. $2{,}5\cdot 10^{-3} > 1{,}56\cdot 10^{-10}$.

Поскольку произведение концентраций ионов оказалось больше ПР, то раствор пересыщен в отношении растворенной соли, и часть ее выпадает в осадок.

Ответ: Осадок AgC1 в указанных условиях образуется.

Задача 2. Растворимость сульфата серебра при комнатной температуре составляет $2{,}68\cdot 10^{-2}$ моль/л. Определить ПР(Ag_2SO_4).

Решение.

$$Ag_2SO_4\downarrow \leftrightarrow 2Ag^+ + SO_4^{2-}.$$

$$ПР(Ag_2SO_4) = C^2(Ag^+)\cdot C(SO_4^{2-}).$$

1) Определим молярные концентрации ионов:

$C(Ag^+) = 2C(Ag_2SO_4)$, $C(SO_4^{2-}) = C(Ag_2SO_4)$.

2) Рассчитаем произведение растворимости соли:

$ПР(Ag_2SO_4) = C^2(Ag^+)\cdot C(SO_4^{2-}) = 4\cdot C^3(Ag_2SO_4) = 4\cdot(2{,}68\cdot 10^{-2})^3 = 7{,}70\cdot 10^{-5}$.

Ответ: $ПР(Ag_2SO_4) = 7{,}70\cdot 10^{-5}$.

Ввиду того, что абсолютно не растворимых в воде веществ нет, ни один из ионов никогда не может быть осажден из раствора полностью; часть осаждаемых ионов остается в растворе. Поэтому при осаждении того или иного иона надо подбирать такой реактив, который давал бы с осаждаемым ионом осадок с наименьшим произведением растворимости.

Задача 3. Какой ион, CrO_4^{2-} или SO_4^{2-}, полнее осаждает ионы Pb^{2+} из раствора? $ПР(PbCrO_4) = 1{,}8\cdot 10^{-14}$, $ПР(PbSO_4) = 1{,}6\cdot 10^{-8}$.

Решение.

$ПР(PbCrO_4) < ПР(PbSO_4)$, следовательно, ион CrO_4^{2-} более полно осаждает ион Pb^{2+}. Подтвердим это соответствующими расчетами.

1) Определим молярную концентрацию ионов свинца в насыщенном растворе $PbCrO_4$:

$$PbCrO_4 \leftrightarrow Pb^{2+} + CrO_4^{2-},$$

$$ПР(PbCrO_4) = C(Pb^{2+})\cdot C(CrO_4^{2-}) = C^2(Pb^{2+}),$$

$$C(Pb^{2+}) = \sqrt{ПР(PbCrO_4)} = \sqrt{1{,}8\cdot 10^{-14}} = 1{,}34\cdot 10^{-7} \text{ моль/л.}$$

2) Определим молярную концентрацию ионов свинца в насыщенном растворе $PbSO_4$:

$$PbSO_4 \leftrightarrow Pb^{2+} + SO_4^{2-},$$

$$ПР(PbSO_4) = C(Pb^{2+})\cdot C(SO_4^{2-}) = C^2(Pb^{2+}),$$

$$C(Pb^{2+}) = \sqrt{ПР(PbSO_4)} = \sqrt{1{,}6\cdot 10^{-8}} = 1{,}26\cdot 10^{-4} \text{ моль/л.}$$

3) Таким образом, концентрация ионов Pb^{2+} в насыщенном растворе $PbCrO_4$ в $1{,}26\cdot 10^{-4}/1{,}34\cdot 10^{-7} = 940$ раз меньше, чем в насыщенном растворе $PbSO_4$.

Ответ: ион CrO_4^{2-} более полно осаждает ион Pb^{2+}.

5.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить растворимость Ag_2S в г/л, если $ПР(Ag_2S) = 1{,}1\cdot 10^{-49}$.
2. Растворимость $BaCO_3$ в воде составляет $8{,}4\cdot 10^{-5}$ моль/л. Вычислить $ПР(BaCO_3)$.
3. Концентрация Fe^{2+} в насыщенном растворе FeS равна $6{,}0\cdot 10^{-10}$ моль/л. Вычислить ПР(FeS).
4. Определить $ПР(Ag_2CrO_4)$, если растворимость данной соли равна

$2{,}6 \cdot 10^{-2}$ г/л.

5. ПР(MgC_2O_4) = $8{,}1 \cdot 10^{-5}$. Определить концентрацию ионов Mg^{2+} (г/л) в насыщенном растворе соли.

6. Растворимость Ag_2SO_4 равна $2{,}7 \cdot 10^{-2}$ М. Найти ПР(Ag_2SO_4).

7. Определить концентрацию ионов Ba^{2+} (г/л) в насыщенном растворе $Ba(BrO_3)_2$. ПР($Ba(BrO_3)_2$) = $3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

8. ПР(SrC_2O_4) = $6{,}25 \cdot 10^{-8}$. Найти растворимость соли в г/л.

9. Концентрация ионов F^- в насыщенном растворе CaF_2 равна $2 \cdot 10^{-4}$ моль/л. Найти ПР(CaF_2).

10. ПР($CaCO_3$) = $4{,}9 \cdot 10^{-9}$. Найти растворимость $CaCO_3$ в г/л.

11. К 20 мл 0,02 н. раствора $BaCl_2$ прибавили 20 мл 0,001 М раствора $Na_2C_2O_4$. Выпадет ли осадок, если ПР(BaC_2O_4) = $4{,}1 \cdot 10^{-6}$?

12. Выпадет ли осадок, если к 20 мл 0,01 н. раствора $AgNO_3$ прибавить 20 мл 0,01 М раствора NaCl? ПР(AgCl)=$1{,}7 \cdot 10^{-10}$.

13. Выпадет ли осадок при смешивании равных объёмов 0,01 н. растворов $AgNO_3$ и $K_2Cr_2O_7$? ПР($Ag_2Cr_2O_7$) = $2{,}0 \cdot 10^{-7}$.

14. ПР(Tl_2CrO_4) = $1{,}0 \cdot 10^{-12}$. Образуется ли осадок, если к 0,001 н. раствору $TlNO_3$ прилить равный объём 0,04 н. раствора K_2CrO_4?

15. Выпадет ли осадок TlCl, если к 15 мл 0,01 М раствора $TlNO_3$ прибавить 15 мл 0,01 н. раствора KCl? ПР(TlCl) = $1{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Глава 6
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ДИССОЦИАЦИЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ

6.1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ДИССОЦИАЦИИ

Растворы (расплавы) веществ, проводящие электрический ток, называют **электролитами**. Важно, что законам Вант - Гоффа и Рауля подчиняются только растворы неэлектролитов (водные растворы таких органических соединений как сахар, спирты, глицерин, мочевина). Растворы электролитов в равных молярных концентрациях с растворами неэлектролитов показывают большее осмотическое давление, большее понижение давления пара и температуры замерзания, большее повышение температуры кипения.

Подобное поведение электролитов объяснил шведский физико-химик **Аррениус**. Он **предложил теорию электролитической диссоциации**, согласно которой молекулы растворенных веществ в водных растворах электролитов в большей или меньшей степени диссоциируют (распадаются) на самостоятельные заряженные частицы - ионы. Каждый электролит образует при диссоциации два рода ионов: положительно заряженные - **катионы** и отрицательно заряженные - **анионы**. Заряд иона соответствует его валентности. Во всех случаях диссоциации электролита сумма зарядов катионов равна сумме зарядов анионов. Поэтому раствор в целом электронейтрален. Электролитическая диссоциация - обратимый процесс. Следовательно, в растворе электролита, наряду с ионами, имеются и нераспавшиеся молекулы.

Из изложенного следует, что диссоциация электролита увеличивает общее число частиц в растворе в сравнении с неэлектролитом. Поэтому, если учитывать как самостоятельные частицы не только молекулы, но и ионы, то становится понятным, почему повышение осмотического давления, понижение температуры замерзания и повышение температуры кипения раствора электролита оказываются значительно больше, чем у раствора неэлектролита

с такой же молярной концентрацией.

Согласно современным представлениям, электролитическая диссоциация происходит в результате взаимодействия ионов или полярных молекул вещества с полярными молекулами растворителя (рис. 6.1). При этом образуются сольваты (в водных растворах - гидраты) ионов (рис. 6.2). Соответствующий процесс сопровождается выделением энергии. Образование сольватов (гидратов) является основной причиной диссоциации электролитов на ионы.

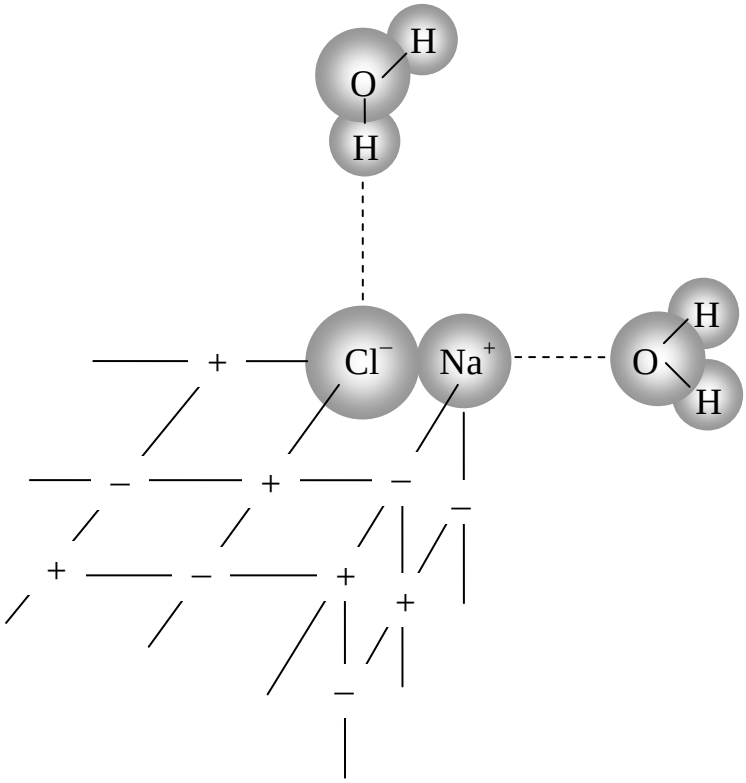


Рис. 6.1. Взаимодействие ионов NaCl с полярными молекулами H_2O

Природа превращений растворенного вещества в растворе самым тесным образом зависит от химических свойств этого вещества и растворителя. Растворитель, принимая непосредственное участие в химических превращениях растворенного вещества, оказывает влияние на механизм и глубину превращения последнего. Так, для того, чтобы разорвать связь между

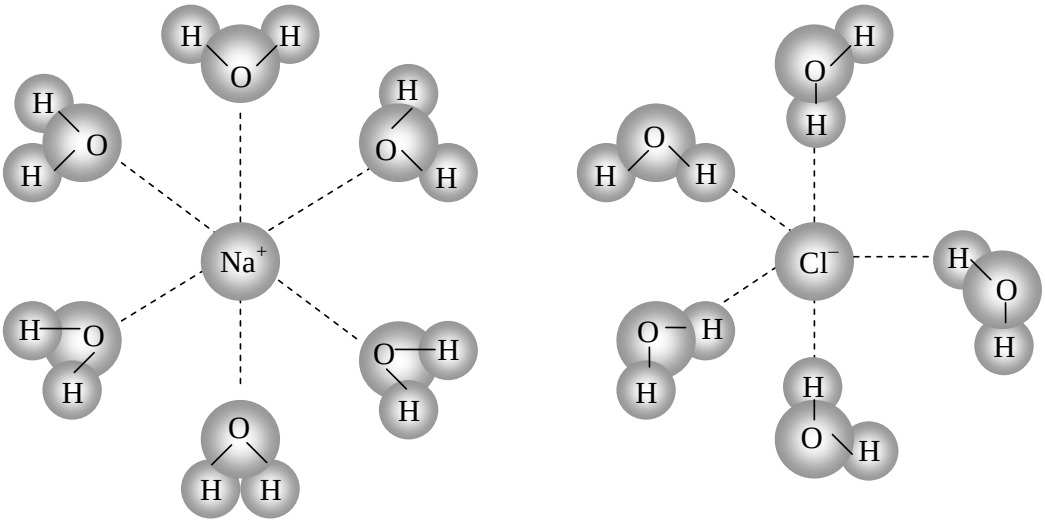


Рис. 6.2. Гидратированные ионы в растворе NaCl

катионами и анионами в 1 моле, например, NaCl, надо затратить 800 кДж. Откуда же берутся эти 800 кДж при растворении NaCl в воде?

Теплота гидратации иона Na^+ равна приблизительно 425 кДж/ моль, а иона Cl^- - приблизительно 350 кДж/моль. В сумме это составляет 775 кДж/моль - немногим меньше энергии кристаллической решетки NaCl (800 кДж/моль). Поэтому при растворении хлористого натрия в воде происходит охлаждение на 5 - 6 градусов по сравнению с ее исходной температурой.

Есть вещества, образование водных растворов которых наоборот, сопровождается выделением тепла. Например, растворение хлористого водорода в воде сопровождается довольно сильным разогреванием образующегося раствора. Действительно, энергия связи водорода и хлора в молекуле HCl равна 1360 кДж/моль. Теплота гидратации протона равна 1100 кДж/моль, что в сумме с теплотой гидратации иона Cl^- дает общую теплоту гидратации HC1 1450 кДж/моль, а это заметно больше энергии связи H - Cl. Вот почему при образовании раствора соляной кислоты и происходит заметное разогревание.

Для процесса растворения в воде соединений с ионной связью, в узлах кристаллической решетки которых находятся ионы, в общем виде можно за-

писать:

$$K^+A^- + xH_2O = K^+\cdot(H_2O)_y + A^-\cdot(H_2O)_{(x-y)},$$

где $K^+\cdot(H_2O)_y$ и $A^-\cdot(H_2O)_{(x-y)}$ - гидратированные катионы и анионы.

Распаду на ионы подвергаются также и вещества, состоящие из молекул с полярной ковалентной связью. В этом случае под действием полярных молекул воды происходит гетеролитический разрыв ковалентной связи: электронная пара, осуществляющая связь, целиком остается у одного из атомов. Таким образом полярная связь превращается в ионную, и молекула диссоциирует на гидратированные ионы.

На практике уравнения электролитической диссоциации обычно записывают без гидратирующих молекул воды, например:

$$Ca(OH)_2 = Ca^{2+} + 2OH^-,$$
$$Cr_2(SO_4)_3 = 2Cr^{3+} + 3SO_4^{2-},$$
$$HNO_3 = H^+ + NO_3^-.$$

6.2. СТЕПЕНЬ И КОНСТАНТА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ДИССОЦИАЦИИ

Согласно теории электролитической диссоциации, в растворах распадается на ионы только часть молекул электролита. Отношение числа молекул, распавшихся на ионы, к общему числу растворенных молекул называется **степенью электролитической диссоциации** α. Например, если в 1 л раствора содержится 0,05 моль азотистой кислоты и из них 0,001 моль диссоциирует на ионы, то степень диссоциации при этом составит: $\alpha = 0{,}001/0{,}05 = = 0{,}02$ или 2 %.

Степень электролитической диссоциации электролита может быть

определена различными методами: по электропроводности раствора, по понижению температуры замерзания раствора и т. д. При одинаковых условиях (одни и те же растворитель, концентрация раствора, температура, присутствие или отсутствие электролита с одноименным ионом) разные электролиты имеют различную степень диссоциации, зависящую от природы самого электролита.

По способности к диссоциации все электролиты делят на слабые и сильные. **Слабые электролиты** в растворах содержатся как в виде ионов, так и в виде недиссоциированных молекул. **Сильные электролиты** в растворе диссоциируют практически полностью. Принимают, что для слабых электролитов $\alpha < 2$ %, для сильных электролитов $\alpha > 30$ %.

С разбавлением раствора степень электролитической диссоциации слабого электролита увеличивается и, наоборот, при повышении концентрации - уменьшается. Степень диссоциации электролита зависит от температуры: с повышением температуры она увеличивается для электролитов, диссоциация которых сопровождается поглощением теплоты, и уменьшается для электролитов, процесс диссоциации которых сопровождается выделением теплоты.

На степень диссоциации электролита существенное влияние оказывает прибавление к его раствору сильного электролита с одноименным ионом. Например, к водному раствору плавиковой кислоты, в незначительной степени диссоциирующей по уравнению $HF \leftrightarrow H^+ + F^-$, прильем соляную кислоту HCl. Концентрация ионов водорода, являющихся одним из продуктов диссоциации HCl, сильно увеличится. Вследствие этого равновесие обратимого процесса диссоциации плавиковой кислоты сместится в сторону образования недиссоциированных молекул HF, степень ее диссоциации при этом понизится. Подобным же образом будут действовать и растворимые в воде соли плавиковой кислоты. При добавлении последних в растворе значительно возрастает концентрация анионов F^-, что также уменьшает степень диссоци-

ации HF.

Таким образом, **степень электролитической диссоциации слабого электролита значительно понижается при добавлении к его раствору сильного электролита с одноименным ионом.**

Диссоциация молекул слабых электролитов на ионы в растворах протекает как обратимый процесс. Например, диссоциация уксусной кислоты выражается уравнением: $CH_3COOH \leftrightarrow CH_3COO^- + H^+$.

Как и во всяком обратимом процессе, в данном случае устанавливается равновесие между недиссоциированными молекулами кислоты CH_3COOH и ионами H^+, CH_3COO^-. Выразим в общем виде константу данного химического равновесия, обозначив ее $К_д$:

$$К_д = \frac{C(H^+) \cdot C(CH_3COO^-)}{C(CH_3COOH)} \ . \qquad (6.1)$$

$К_д$ в выражении (6.1) называется константой электролитической диссоциации.

Величина константы характеризует силу кислот и оснований. Чем она больше, тем сильнее электролит. Например, азотистая кислота ($К_д = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$) сильнее уксусной ($К_д = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$).

6.2.1. Закон разбавления Оствальда

Основываясь на законе действия масс, можно вывести уравнение, связывающее константу диссоциации слабого электролита со степенью его диссоциации.

Так, если молярная концентрация уксусной кислоты равна С, а степень диссоциации составляет величину α, то концентрация каждого из ионов, об-

разующихся при диссоциации, будет равна αC, а концентрация недиссоциированных молекул CH_3COOH – (1 - α)C. Тогда выражение для константы диссоциации можно записать в следующем виде:

$$K_д = \frac{\alpha C \cdot \alpha C}{(1-\alpha)C} = \frac{\alpha^2 C}{1-\alpha} \ . \qquad (6.2)$$

Уравнение (6.2) выражает **закон разбавления Оствальда**, справедливый для растворов слабых бинарных электролитов, из одной молекулы которых при диссоциации образуется два иона. Это уравнение связывает между собой константу диссоциации электролита, степень диссоциации и концентрацию электролита. В несильно разбавленных растворах слабых электролитов степень диссоциации очень мала, поэтому величину (1 - α) можно принять равной единице. В этом случае предыдущая формула принимает более простой вид:

$$K_д = C\alpha^2, \text{ откуда } \alpha = \sqrt{\frac{K_д}{C}} . \qquad (6.3)$$

В соответствии с полученным выражением (6.3) закон разбавления Оствальда формулируется так: **степень электролитической диссоциации слабых бинарных электролитов обратно пропорциональна корню квадратному из их концентрации**. Закон разбавления позволяет вычислять степень диссоциации при различных концентрациях, если известна константа диссоциации электролита. Наоборот, определив степень диссоциации при какой - нибудь концентрации, несложно рассчитать константу диссоциации.

Константа диссоциации слабого электролита - величина постоянная и практически не зависит от концентрации раствора, а зависит только от температуры. Степень же диссоциации зависит от концентрации. С разбавлением раствора слабого электролита степень диссоциации увеличивается. Константа

электролитической диссоциации дает более общую характеристику электролита, чем степень диссоциации. Сильные электролиты не подчиняются этому закону. Для них $К_д$ с увеличением концентрации непрерывно возрастает.

6.3. АКТИВНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ ИОНОВ

Даже в умеренно концентрированном растворе сильного электролита ионы находятся на таких достаточно близких расстояниях, что электростатическое взаимодействие оказывает заметное влияние на характер их движения. Одноименно заряженные ионы взаимно отталкиваются, а разноименно заряженные - взаимно притягиваются. В результате в растворе вокруг ионов создается определенное распределение ионов – «атмосфера» из частиц с противоположным зарядом. Эта атмосфера замедляет движение ионов в растворе, что ведет к уменьшению электропроводности раствора и создает впечатление неполной диссоциации электролита. Чем больше концентрация раствора, тем сильнее электростатическое взаимодействие ионов, тем меньше скорость передвижения их в электрическом поле и тем меньше будет электропроводность раствора.

Аналогичным образом межионные силы влияют и на другие свойства раствора электролита, зависящие от концентрации ионов. Повышение концентрации раствора приводит к изменению свойств раствора в том же направлении, как действовало бы частичное соединение ионов в молекулы, т. е. уменьшает степень диссоциации. Поэтому, измеряя электропроводность, определяют лишь кажущуюся степень диссоциации. Так, например, степень диссоциации в 0,1 н. растворе HC1, вычисленная по электропроводности, составляет 84 % от действительной, которая наблюдалась бы в этом растворе при отсутствии взаимодействия ионов друг с другом.

Для учета влияния электростатического взаимодействия ионов на химические и физические свойства растворов сильных электролитов, истинную

концентрацию ионов С заменяют активностью **а** – условной эффективной концентрацией. **Активность выражает концентрацию ионов в растворе данного электролита с учетом влияния взаимодействия ионов, гидратации и других эффектов.** Между активностью и действительной концентрацией ионов существует зависимость:

$$a = f \cdot C,$$

где f – коэффициент активности, учитывающий взаимодействие ионов в растворе электролита.

Коэффициент активности обычно меньше единицы. В очень разбавленных растворах сильных электролитов ($C < 1 \cdot 10^{-4}$ моль/л) коэффициент активности принимают равным единице. В этом случае $a = C$.

Коэффициент активности данного иона в растворе, содержащем несколько различных видов ионов, зависит от концентраций и зарядов всех ионов. Мерой межионного взаимодействия между всеми ионами является **ионная сила раствора**. Ионной силой раствора называется величина μ, численно равная полусумме произведений концентрации каждого иона на квадрат его заряда:

$$\mu = ½(z_1^2C_1 + z_2^2C_2 + z_3^2C_3 + \ldots),$$

где z - заряд иона.

Например, для раствора, содержащего в 1 л 0,01 моль $CaCl_2$ и 0,1 моль Na_2SO_4, ионная сила равна: $\mu = 1/2(0{,}01 \cdot 2^2 + 0{,}02 \cdot 1^2 + 0{,}2 \cdot 1^2 + 0{,}1 \cdot 2^2) = 0{,}33$.

По величине ионной силы раствора можно рассчитать коэффициент активности иона: $\lg f = -0{,}5z^2\sqrt{\mu}$. Коэффициент активности с увеличением ионной силы раствора уменьшается. В растворах с одинаковой ионной силой коэффициенты активности ионов равны между собой.

6.4. СОЛЕВОЙ ЭФФЕКТ

Выше отмечено, если в растворе электролита коэффициент активности $f < 1$, то на движение ионов оказывает влияние их электростатическое взаимодействие. В этом случае во все уравнения на основе закона действующих масс, включая выражение произведения растворимости, вместо концентрации надо подставлять меньшую по величине активность.

Произведем соответствующую замену на примере минерала кальцита, состав которого соответствует химической формуле малорастворимого карбоната кальция $CaCO_3$:

$$CaCO_3\downarrow \leftrightarrow Ca^{2+} + CO_3^{2-}.$$

$$ПР(CaCO_3) = a(Ca^{2+})\cdot a(CO_3^{2-}) = f(Ca^{2+})\cdot C(Ca^{2+})\cdot f(CO_3^{2-})\cdot C(CO_3^{2-}).$$

Преобразуем полученное выражение произведения растворимости кальцита:

$$C(Ca^{2+})\cdot C(CO_3^{2-}) = \frac{ПР(CaCO_3)}{f(Ca^{2+})\cdot f(CO_3^{2-})}. \qquad (6.4)$$

Числитель дроби в правой части выражения (6.4) является постоянной величиной, зависящей только от температуры. Знаменатель же этого отношения уменьшается с ростом ионной силы раствора. В свою очередь, ионная сила раствора растет при добавлении любого сильного электролита. С уменьшением знаменателя будет расти правая часть анализируемого выражения, и, соответственно, вырастет произведение молярных концентраций ионов, образующихся при дисссоциации кальцита в насыщенном растворе. Последнее означает рост растворимости труднорастворимого вещества при введении в его раствор каких - либо сильных электролитов. Явление носит название «**солевой эффект**».

Одним из наиболее важных природных равновесий с участием кальцита является образование твердого $CaCO_3$ в морской воде. Равновесие между твердым $CaCO_3$ и ионами Ca^{2+} и CO_3^{2-} , находящимися в океанической воде, имеет важное значение для развития многих морских организмов и формирования отложений на морском дне. Произведение растворимости $CaCO_3$ в морской воде при 20 °С имеет величину $6{,}0 \cdot 10^{-7}$, тогда как в пресной воде при этой температуре оно составляет $2{,}8 \cdot 10^{-9}$. Равновесие растворения $CaCO_3$ в морской воде смещено в сторону большей растворимости из-за влияния других ионов (солевой эффект), присутствующих в воде. Более чем 100-кратное увеличение растворимости $CaCO_3$ в морской воде обусловлено межионным взаимодействием в водной среде с высокой концентрацией ионов.

На глубинах, не превышающих 1 км, океан пересыщен карбонатом кальция $CaCO_3$. Это означает, что ионное произведение $C(Ca^{2+}) \cdot C(CO_3^{2-})$ больше произведения растворимости $CaCO_3$. Однако скорость удаления

$CaCO_3$ в результате осаждения или образования раковин моллюсков и скелетных тканей морских организмов очень невелика. На больших глубинах, где концентрация Ca^{2+} снижается, океаническая вода оказывается ненасыщенной в отношении $CaCO_3$. После гибели морских организмов их карбонатные скелеты, образовавшиеся вблизи поверхности, опускаются на большую глубину и растворяются там. На глубинах, превышающих 3 - 4 км, в отложениях морского дна содержится очень мало $CaCO_3$.

6.5. ЖЕСТКОСТЬ ПРИРОДНОЙ ВОДЫ

В земной коре распространены минералы, содержащие кальций и магний. Поэтому соответствующие ионы Ca^{2+} и Mg^{2+} практически всегда присутствуют в природной воде.

Отметим, что минералы отмеченных металлов, как правило, малорастворимы. Однако вода содержит диоксид углерода, поглощенный из атмо-

сферного воздуха. Это служит причиной образования хорошо растворимых кислых солей (преимущественно гидрокарбонатов) кальция и магния: $Ca(HCO_3)_2$, $Mg(HCO_3)_2$.

Природная вода, содержащая растворенные соли, называется жесткой водой, в противоположность мягкой воде, не содержащей этих солей или содержащей их мало.

Количественной мерой содержания в воде солей является жесткость воды (Ж). Различают карбонатную, некарбонатную и общую жесткость.

Карбонатная жесткость $Ж_к$ обусловлена содержанием гидрокарбонатов кальция и магния.

Некарбонатная жесткость $Ж_н$ связана с содержанием в воде хлоридов, сульфатов и других (кроме гидрокарбонатов) солей кальция и магния.

Общая жесткость $Ж_{общ.}$ определяется общим содержанием солей:

$$Ж_{общ.} = Ж_к + Ж_н.$$

При длительном кипячении воды выделяется диоксид углерода и выпадает осадок, включающий ионы Ca^{2+} и Mg^{2+}, вследствие чего жесткость уменьшается:

$$Ca(HCO_3)_2 = CaCO_3\downarrow + CO_2\uparrow + H_2O,$$
$$Mg(HCO_3)_2 = MgCO_3\downarrow + CO_2\uparrow + H_2O,$$
$$2Mg(HCO_3)_2 = (MgOH)_2CO_3\downarrow + 3CO_2\uparrow + H_2O.$$

Карбонатную жесткость полностью устранить кипячением нельзя, т. к. растворимость $CaCO_3$ составляет 0,01 г/л, а $(MgOH)_2CO_3$ - 0,04 г/л. Поэтому дополнительно употребляют термин **«устранимая или временная жесткость»**. Временная жесткость определяется количеством гидрокарбонатов, удаляемых из воды при кипячении в течение 1 ч. Оставшаяся после кипячения

воды жесткость называется постоянной жесткостью.

Жесткость воды выражают суммарным количеством эквивалентов ионов кальция и магния, содержащихся в 1 л воды (размерность миллимоль эквивалентов/литр [ммоль экв./л]). Например, один миллимоль эквивалентов жесткости отвечает содержанию в 1 л воды 20,04 мг ионов Ca^{2+}:

$$m(Ca^{2+}) = M(Э(Ca^{2+}))\cdot n(Ca^{2+})\cdot 10^{-3} = M(Ca^{2+})\cdot f_э(Ca^{2+})\cdot n(Ca^{2+})\cdot 10^{-3} =$$
$$= 40{,}08\cdot 1/2\cdot 1\cdot 10^{-3} = 20{,}04 \text{ мг}$$

или 12,16 мг ионов Mg^{2+} :

$$m(Mg^{2+}) = M(Э(Mg^{2+}))\cdot n(Mg^{2+})\cdot 10^{-3} = M(Mg^{2+})\cdot f_э(Mg^{2+})\cdot n(Mg^{2+})\cdot 10^{-3} =$$
$$= 24{,}31\cdot 1/2\cdot 1\cdot 10^{-3} = 12{,}16 \text{ мг.}$$

Вода с жесткостью менее 4 ммоль экв./л характеризуется как мягкая, от 4 ммоль экв./л до 8 ммоль экв./л - средней жесткости, от 8 ммоль экв./л до 12 ммоль экв./л - жесткая и выше 12 ммоль экв./л - очень жесткая.

6.6. УМЯГЧЕНИЕ ВОДЫ

Часто воду приходится подвергать дополнительной обработке, чтобы снизить в ней концентрацию ионов Ca^{2+} и Mg^{2+}, вызывающих жесткость воды. Обычно это необходимо для воды из подземных источников, где она достаточно долго соприкасается с известняком $CaCO_3$, доломитом $CaCO_3\cdot MgCO_3$ и другими минералами.

При нагревании воды, содержащей Ca^{2+} и HCO_3^- - ионы, из нее выделяется часть диоксида углерода. В результате этого происходит образование нерастворимого карбоната кальция и в водонагревательных устройствах накапливаются его отложения (накипь). Твердый $CaCO_3$ покрывает поверх-

ность водонагревательных систем, что снижает их теплопроводность. Особенно много накипи откладывается на стенках бойлеров, где вода нагревается под давлением в трубках, обвивающих печь. Образование накипи снижает эффективность теплопередачи и может привести к плавлению трубок.

Также ионы Ca^{2+} реагируют с мылами, образуя нерастворимые вещества. Хотя при их взаимодействии с синтетическими моющими средствами не образуется нерастворимых осадков, указанные ионы неблагоприятно влияют на эффективность действия синтетических моющих средств.

Для умягчения воды применяют методы осаждения и ионного обмена. Путем осаждения катионы Ca^{2+} и Mg^{2+} переводят в малорастворимые соединения, выпадающие в осадок. Это достигается либо кипячением воды, либо химическим путем - введением в воду соответствующих реагентов. При кипячении гидрокарбонаты кальция и магния превращаются в нерастворимые карбонаты, в результате чего устраняется только карбонатная жесткость.

При химическом методе осаждения чаще всего в качестве осадителя пользуются известью или содой. При этом в осадок переводятся все соли кальция и магния.

Для устранения жесткости используют специальные ионнообменные материалы - неорганические и органические вещества, способные к обмену ионов и называемые ионитами. Эти вещества делят на катиониты и аниониты, предназначенные для обмена катионов и анионов. Иониты не растворимы в воде. Их пространственная структура представляет собой трехмерный каркас, содержащий потенциалопределяющие ионы. С ними электростатическими силами связаны противоионы, способные к обмену на другие ионы.

Для обработки воду пропускают через слой катионита. При этом катионы кальция и магния, находящиеся в воде, обмениваются на катионы натрия, содержащиеся в применяемом катионите. В некоторых случаях требуется удалить из воды не только катионы Ca^{2+}, Mg^{2+}, но и другие катионы и анионы. В таких случаях воду пропускают последовательно через катионит, содержащий в обменной форме водородные ионы, и анионит, содержащий гид-

роксид - ионы. В итоге вода освобождается как от катионов, так и от анионов солей. Такая обработка воды называется обессоливанием.

6.6.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Чему равна жесткость 1 % - ного раствора сульфата магния? (ρ = 1 г/см^3). Ответ: 166,2 ммоль экв./л.

2. При упаривании одного литра воды из подземного источника было получено 13,6 мг гипса ($CaSO_4$). Чему равна жесткость этой воды? Ответ: 0,2 ммоль экв./л.

3. Чему равна жесткость раствора, содержащего в 10 л 200 мг сульфата кальция и 100 мг сульфата магния? Ответ: 0,46 ммоль экв./л.

4. Сколько граммов $MgCl_2$ содержится в 5 л раствора, имеющего жесткость 7,14 ммоль экв./л. Какова эквивалентная концентрация (нормальность) этого раствора? Ответ: 1,7 г ; 0,00714 н.

5. Чему равна жесткость природной воды, содержащей Ca^{2+} - 41,65 мг/л; Mg^{2+}- 23,60 мг/л; Na^+ - 2,2 мг/л? Ответ: 4,02 ммоль экв./л.

6. Чему равна жесткость 0,1 н. раствора хлористого кальция? Ответ: 100 ммоль экв./л.

7. Какова постоянная и карбонатная жесткость воды, если в ней содержится: Ca^{2+} - 0,112 г/л; Mg^{2+} - 0,0632 г/л; SO_4^{2-} - 0,236 г/л; Cl^- - 0,1653 г/л и ионы HCO_3^- ? Ответ: 9,57 ммольэкв/л; 1,23 ммоль экв./л.

8. Какова общая и карбонатная жесткость воды, если при анализе одного литра данной воды установлено следующее содержание ионов: Ca^{2+} - 0,1111 г; Mg^{2+} - 0,0605 г; SO_4^{2-} - 0,0985 г; Cl^- - 0,1418 г? Ответ: 10,52 ммоль экв./л; 4,48 ммоль экв./л.

Глава 7
РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Протекающие в растворах электролитов реакции ионного обмена подчиняются общему правилу, сформулированному ниже:

реакции ионного обмена в растворах электролитов протекают в направлении образования наименее диссоциирующих соединений, труднорастворимых и газообразных веществ, т. е. в направлении образования:

- слабых кислот,
- слабых оснований,
- воды,
- осадков,
- газообразных (летучих) веществ.

Молекулы этих веществ в реакциях ионного обмена на ионы не расписывают

Рассмотрим соответствующие реакции более подробно с учетом классификации электролитов (таблица 7.1).

7.1. РЕАКЦИЯ СОЛИ С СОЛЬЮ

Реакция соли с солью протекает, когда исходные соли растворимы, а одна из вновь образующихся выпадает в осадок. Реакция возможна и в том случае, если одна из исходных солей является труднорастворимой, но при этом вновь образующаяся соль характеризуется еще меньшей растворимостью.

Методика составления уравнений реакций ионного обмена может быть следующей. Например, рассмотрим взаимодействие растворов двух солей – хлорида натрия и бромида калия. Учитывая, что на первом месте в формулах

Таблица 7.1

Классификация электролитов

Электролиты			
сильные		слабые	
Кислоты	Основания	Кислоты	Основания
H_2SO_4, HNO_3, HCl, HBr, HI, $HClO_3$, $HMnO_4$	LiOH, NaOH, KOH, RbOH, CsOH, $Ca(OH)_2$, $Sr(OH)_2$, $Ba(OH)_2$	H_2SO_3, HNO_2, HF, HCN, H_2CO_3, H_3AsO_3, CH_3COOH	Все трудно-растворимые и NH_4OH
Все соли		H_2O	

химических соединений записываются положительно заряженные частицы, после соответствующего ионного обмена могут быть получены формулы продуктов предполагаемого взаимодействия:

$$NaCl + KI = NaI + KCl.$$

Для того чтобы определить, будет ли в действительности протекать это взаимодействие, по таблице растворимости необходимо проверить, есть ли в правой части уравнения реакции труднорастворимые вещества. Другими словами, необходимо уточнить, выполняется ли основное правило, определяющее возможность протекания реакций ионного обмена. В случае данной реакции обе соли NaI и KCl растворимы. Следовательно, реакция между растворами солей NaCl и KI не протекает, т. к. не ведет к образованию новых веществ: $NaCl + KI \neq$.

Возьмем для проведения реакции растворы двух других растворимых солей и запишем химические формулы продуктов предполагаемого взаимодействия:

$$2Na_3PO_4 + 3CaCl_2 = Ca_3(PO_4)_2\downarrow + 6NaCl.$$

Образующийся фосфат кальция является труднорастворимым соединением, следовательно, данная реакция протекает. После расстановки коэффициентов в молекулярном уравнении реакции, запишем это взаимодействие в виде полного и краткого ионных уравнений:

$$6Na^+ + 2PO4^{3-} + 3Ca^{2+} + 6Cl^- = Ca_3(PO_4)_2\downarrow + 6Na^+ + 6Cl^-,$$

$$3Ca^{2+} + 2PO4^{3-} = Ca_3(PO_4)_2\downarrow .$$

Краткое ионное уравнение выражает суть реакции образования фосфата кальция. Следует обратить внимание, что химическая формула последнего записана в молекулярном виде. Если вещество труднорастворимо, оно находится в твердой фазе и не переходит в раствор. Соответственно полагают, что ионы труднорастворимого вещества в растворе отсутствуют.

Рассмотрим процесс взаимодействия раствора медного купороса с труднорастворимым ZnS (минерал сфалерит). Соответствующая реакция будет протекать, так как продуктом взаимодействия является еще менее растворимый в воде CuS (минерал ковеллин):

$$ZnS\downarrow + CuSO_4 = CuS\downarrow + ZnSO_4,$$

$$ZnS\downarrow + Cu^{2+} + SO_4^{2-} = CuS\downarrow + Zn^{2+} + SO_4^{2-},$$

$$ZnS\downarrow + Cu^{2+} = CuS\downarrow + Zn^{2+}.$$

7.2. РЕАКЦИЯ СОЛИ С КИСЛОТОЙ

Реакция соли с кислотой возможна, если сильная кислота вытесняет более слабую, если образуется новая нерастворимая соль.

Так, серная кислота в водном растворе является более сильным электролитом, чем большинство других кислот и поэтому вытесняет их из солей:

$$Ca_3(PO_4)_2\downarrow + 3H_2SO_4 = 3CaSO_4\downarrow + 2H_3PO_4,$$
$$Ca_3(PO_4)_2\downarrow + 6H^+ + 3SO_4^{2-} = 3CaSO_4\downarrow + 2H_3PO_4.$$

Рассмотрим реакцию раствора серной кислоты с кальцитом $CaCO_3$. Серная кислота сильнее угольной, поэтому в результате данного взаимодействия из исходной соли вытесняется слабая угольная кислота. Также в данной реакции выполняется и второе условие сформулированного выше правила – образуется сульфат кальция $CaSO_4$, малорастворимое соединение. Угольная кислота H_2CO_3 является не вполне стойкой и распадается на воду и углекислый газ:

$$CaCO_3\downarrow + H_2SO_4 = CaSO_4\downarrow + H_2O + CO_2\uparrow,$$
$$CaCO_3\downarrow + 2H^+ + SO_4^{2-} = CaSO_4\downarrow + H_2O + CO_2\uparrow.$$

7.3. РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ ОСНОВНЫХ И КИСЛЫХ СОЛЕЙ

При взаимодействии кислоты и основания образуются соль и вода. Причем тип образующейся соли зависит от количественного соотношения исходных реагентов:

$$H_2SO_4 + 2KOH = K_2SO_4 + 2H_2O,$$

$$2H^+ + SO_4^{2-} + 2K^+ + 2OH^- = 2K^+ + SO_4^{2-} + 2H_2O,$$
$$H^+ + OH^- = H_2O.$$

В данной реакции при полной взаимной нейтрализации кислоты и основания образуется средняя соль K_2SO_4 .

При недостаточном количестве основания и, соответственно, неполной нейтрализации кислоты, образуется кислая соль, содержащая ион водорода в кислотном остатке:

$$H_2CO_3 + KOH = KHCO_3 + H_2O,$$
$$H_2CO_3 + K^+ + OH^- = K^+ + HCO_3^- + H_2O,$$
$$H_2CO_3 + OH^- = HCO_3^- + H_2O.$$

При добавлении к кислой соли какого - либо основания происходит ее нейтрализация и образуется средняя соль:

$$KHCO_3 + KOH = K_2CO_3 + H_2O,$$
$$K^+ + HCO_3^- + K^+ + OH^- = 2K^+ + CO_3^{2-} + H_2O,$$
$$HCO_3^- + OH^- = CO_3^{2-} + H_2O.$$

Кислые соли обычно не представлены в справочной таблице растворимости, поэтому при составлении ионных уравнений необходимо помнить, что эти соли, как правило, растворимы.

В таблице растворимости отсутствуют и нерастворимые основные соли. Они содержат в основном остатке одну или более гидроксильных групп и, соответственно, образуются при неполной нейтрализации основания кислотой:

$$Fe(OH)_3 + 2HCl = FeOHCl_2\downarrow + 2H_2O,$$
$$Fe(OH)_3 + 2H^+ + 2Cl^- = FeOHCl_2\downarrow + 2H_2O,$$

$$Fe(OH)_3 + HCl = Fe(OH)_2Cl\downarrow + H_2O,$$
$$Fe(OH)_3 + H^+ + Cl^- = Fe(OH)_2Cl\downarrow + H_2O.$$

При добавлении кислоты к основной соли происходит образование средней соли:

$$FeOHCl_2\downarrow + HCl = FeCl_3 + H_2O,$$
$$FeOHCl_2\downarrow + H^+ + Cl^- = Fe^{3+} + 3Cl^- + H_2O,$$
$$FeOHCl_2\downarrow + H^+ = Fe^{3+} + 2Cl^- + H_2O.$$

7.4. РЕАКЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ СЛАБЫХ КИСЛОТ И СЛАБЫХ ОСНОВАНИЙ

Примерами реакций образования малодиссоциирующих соединений служат реакции образования слабых кислот и слабых оснований:

$$CH_3COONa + HCl = CH_3COOH + NaCl,$$
$$CH_3COO^- + Na^+ + H^+ + Cl^- = CH_3COOH + Na^+ + Cl^-,$$
$$CH_3COO^- + H^+ = CH_3COOH;$$

$$NH_4Cl + NaOH = NH_4OH + NaCl,$$
$$NH_4^+ + Cl^- + Na^+ + OH^- = NH_4OH + Na^+ + Cl^-,$$
$$NH_4^+ + OH^- = NH_4OH.$$

В отмеченных реакциях взаимодействие протекает в направлении образования слабого электролита - либо слабой кислоты, либо слабого основания.

7.5. РЕАКЦИИ С УЧАСТИЕМ АМФОТЕРНЫХ ГИДРОКСИДОВ

Ряд гидроксидов в реакциях ионного обмена проявляет как основные, так и кислотные свойства. Характер проявляемых свойств зависит от второго реагента, с которым такой гидроксид вступает в реакцию. Подобные гидроксиды называют амфотерными. К амфотерным гидроксидам относят: $Zn(OH)_2$, $Sn(OH)_2$, $Pb(OH)_2$, $Al(OH)_3$, $Cr(OH)_3$, $Sb(OH)_3$ и некоторые другие.

Рассмотрим примеры реакций с участием амфотерных гидроксидов.

В реакции с кислотой амфотерный гидроксид проявляет свойства слабого основания:

$$Sn(OH)_2 + 2HNO_3 = Sn(NO_3)_2 + 2H_2O,$$
$$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2NO_3^- = Sn^{2+} + 2NO_3^- + 2H_2O,$$
$$Sn(OH)_2 + 2H^+ = Sn^{2+} + 2H_2O.$$

При взаимодействии с основанием амфотерный гидроксид проявляет свойства слабой кислоты. Для удобства составления уравнения соответствующей реакции нейтрализации можно представить формулу амфотерного гидроксида в виде кислоты. Например: $Zn(OH)_2 = H_2ZnO_2$, $Al(OH)_3 = H_3AlO_3$. Следует помнить, что соли, образованные этими кислотами и сильными основаниями, как правило, растворимы:

$$Zn(OH)_2 + 2KOH = K_2[Zn(OH)_4] \quad \text{(реакция в растворе)},$$
$$Zn(OH)_2 + 2K^+ + 2OH^- = 2K^+ + [Zn(OH)_4]^{2-},$$
$$Zn(OH)_2 + 2OH^- = [Zn(OH)_4]^{2-};$$

$$Zn(OH)_2 + 2KOH = K_2ZnO_2 + 2H_2O \text{ (реакция при спекании)},$$
$$H_2ZnO_2 + 2K^+ + 2OH^- = 2K^+ + ZnO_2^{2-} + 2H_2O,$$
$$H_2ZnO_2 + 2OH^- = ZnO_2^{2-} + 2H_2O.$$

7.6. ТЕОРИЯ КИСЛОТ И ОСНОВАНИЙ БРЕНСТЕДА - ЛАУРИ

В 1923 г. Бренстед и Лаури независимо друг от друга предложили рассматривать кислоты как вещества, способные отдавать протон, а основания как вещества, способные его присоединять. Следовательно, поведение кислот и оснований можно описывать с учетом способности этих веществ к переносу протонов. Например, при растворении в воде HCl действует как кислота, отдавая протон растворителю. В то же время растворитель (H_2O) действует как основание, присоединяя протон:

$$HCl + H_2O \rightarrow Cl^- + H_3O^+.$$

Термин «основание» применяют к веществам, образующим в водном растворе избыток ионов OH^-. Отметим, что ион OH^- представляет собой акцептор протонов; он легко реагирует с гидратированным протоном, образуя воду: $H_3O^+ + OH^- \leftrightarrow 2H_2O$.

Аналогично водные растворы аммиака обладают основными свойствами, потому что NH_3 реагирует с H_2O, образуя NH_4^+ и OH^-:

$$NH_3 + H_2O \leftrightarrow NH_4^+ + OH^-. \qquad (7.1)$$

В этой реакции H_2O отдает протон молекуле аммиака; следовательно, H_2O играет роль кислоты, а NH_3 - основания.

Реакции, приведенные выше в качестве примера реакций с переносом протона, являются обратимыми. Так, при смешении NH_4C1 и NaOH образуются H_2O и NH_3:

$$NH_4Cl + NaOH \leftrightarrow NH_4OH + NaCl, \qquad (7.2)$$

$$NH_4^+ + OH^- \leftrightarrow NH_3 + H_2O.$$

Ионное уравнение (7.2) представляет собой процесс, обратный реакции между NH_3 и H_2O (7.1). В реакции (7.2) ион NH_4^+ играет роль донора протона, а ион OH^- - роль акцептора протона. Таким образом, если реакция протекает в одном направлении, H_2O играет роль кислоты, а NH_3 - роль основания. В обратной же реакции NH_4^+ играет роль кислоты, а OH^- - роль основания.

Рассмотренный пример показывает, что каждая кислота связана с сопряженным основанием, которое образуется из этой кислоты в результате отщепления от нее протона. Например, сопряженным основанием для NH_4^+ является NH_3, а сопряженным основанием для H_2O является OH^-. Точно так же каждое основание имеет сопряженную кислоту, которая образуется из этого основания в результате присоединения к нему протона. Например, H_2O является сопряженной кислотой основания OH^-. **Кислота и основание, которые, подобно H_2O и OH^-, отличаются только наличием или отсутствием протона, называются сопряженной кислотно - основной парой.**

Чем легче какая - либо кислота отдает протон, тем труднее сопряженное ей основание присоединяет к себе протон. Другими словами, чем сильнее кислота, тем слабее сопряженное ей основание, а чем слабее кислота, тем сильнее сопряженное ей основание. Например, HCl является хорошим донором протона, потому что сопряженное этой кислоте основание Cl^- притягивает протоны слабее, чем вода. Вследствие этого протон переносится к H_2O с образованием H_3O^+.

На рис. 7.1 приведен ряд распространенных кислот и сопряженных им оснований. Ион H_3O^+ является самым сильным донором протона, который может существовать в равновесии с водным раствором. Поэтому кислоты, расположенные на рис. 7.1 выше H_3O^+, полностью отдают протоны воде с образованием H_3O^+. Точно так же, OH^- представляет собой самое сильное основание, которое может находиться в равновесии с водным раствором. Всякий более сильный акцептор протона должен полностью реагировать с водой, отнимая у нее протоны и переводя ее молекулы в ионы OH^-.

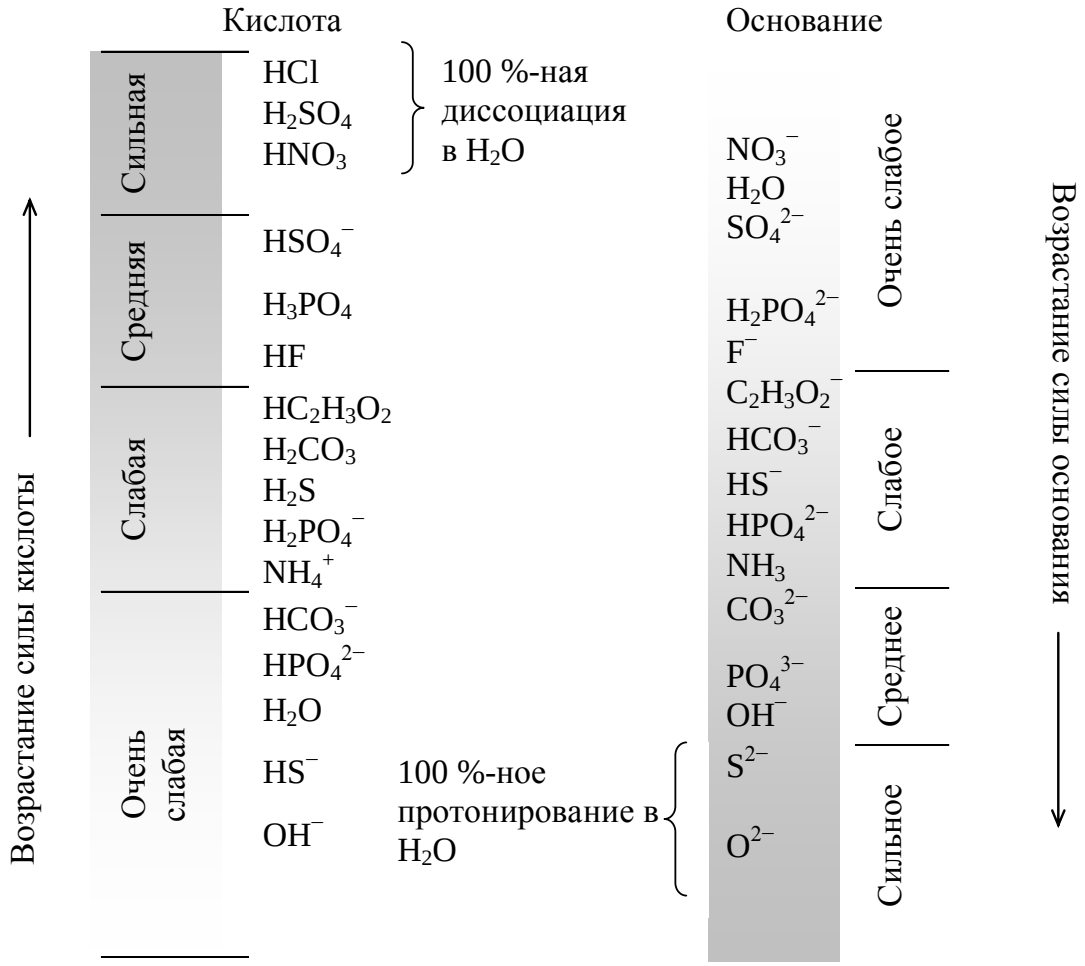


Рис. 7.1. Относительная сила сопряженных пар кислота – основание. Сильным кислотам соответствуют слабые сопряженные основания, а слабым кислотам – сильные сопряженные основания

7.7. ИОННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВОДЫ. ВОДОРОДНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ pH

Вода - наиболее распространенный растворитель различных веществ. Поэтому физико-химические свойства воды имеют большое значение во многих областях экспериментальной и прикладной химии. Так, например, от содержания ионов H^+ в воде сильно зависят растворимость различных ми-

нералов, разложение химических загрязнителей в сточных водах, скорость коррозии металлических материалов, а также пригодность воды для использования в технологических процессах. Обычно вода, не содержащая растворенных веществ, рассматривается как очень слабый электролит. Тем не менее, ее молекулы, хотя и в очень малой степени, диссоциируют, проявляя способность к самоионизации: $2H_2O \leftrightarrow H_3O^+ + OH^-$.

В этом процессе одна молекула воды действует как донор протона, т. е. как соединение, отдающее протон, а другая – как акцептор, т. е. как соединение, присоединяющее протон. Обычно вместо ионов гидроксония H_3O^+ говорят об ионах водорода, и состояние динамического равновесия электролитической диссоциации воды упрощенно выражают уравнением:

$$H_2O \leftrightarrow H^+ + OH^-.$$

Применив закон действия масс к диссоциации воды, можно записать общий вид соответствующей константы диссоциации:

$$K = \frac{C(H^+) \cdot C(OH^-)}{C(H_2O)}.$$

Концентрация ионов H^+ (H_3O^+) и OH^- в воде крайне ничтожна. Установлено, что при комнатной температуре на ионы распадается только $1 \cdot 10^{-7}$ моль H_2O. Так как из одной молекулы воды получается один ион H^+ и один ион OH^-, то концентрация водородных, а следовательно, и гидроксильных ионов в чистой воде равна $1 \cdot 10^{-7}$ моль/л. Число молей в 1 л воды 1000 : 18 = 55,5, где 1000 г – масса 1 л H_2O; 18 г/моль – молярная масса H_2O. Тогда концентрация недиссоциированных молекул воды составит $(55,5 - 1 \cdot 10^{-7})$ моль/л. $1 \cdot 10^{-7}$ весьма малая величина по сравнению с 55,5. Поэтому концентрация недиссоциированных молекул воды может быть принята равной

55,5 моль/л. Тогда:

$$C(H^+)\cdot C(OH^-) = K\cdot C(H_2O) = K_{H_2O}\ .$$

Константа K_{H_2O} называется ионным произведением воды. Для фиксированной температуры она строго постоянна и при 22 °С $K_{H_2O} = 1\cdot10^{-7}\cdot1\cdot10^{-7} = 1\cdot10^{-14}$.

Поскольку величина K_{H_2O} постоянна, то $C(H^+)$ и $C(OH^-)$ в водных растворах обратно пропорциональны друг другу. Любое повышение концентрации одного из этих ионов вызывает соответствующее уменьшение концентрации другого, и наоборот.

Хотя концентрации ионов водорода или гидроксильных групп могут быть очень малыми, в водных растворах они не бывают равными нулю, так как произведение их всегда постоянно и не равно нулю. Следовательно, в водных растворах кислот присутствуют не только ионы H^+, но и ионы OH^-, а в щелочной среде вместе с ионами OH^- содержатся и ионы H^+.

Ионное произведение воды позволяет по заданной концентрации H^+ найти концентрацию OH^-, и наоборот.

Пример. Определить концентрацию водородных ионов в 0,01 М растворе КОН.

Решение. КОН – сильный электролит. При полной диссоциации из каждой молекулы КОН образуется один ион OH^-. В 1 л раствора из 0,01 моль КОН образуется 0,01 моль ионов OH^-. Следовательно:

$$C(H^+) = \frac{K_{H_2O}}{C(OH^-)} = \frac{1\cdot10^{-14}}{1\cdot10^{-2}} = 1\cdot10^{-12}\ \text{моль/л}\ .$$

На практике принято реакцию водных растворов характеризовать концентрацией ионов водорода. Раствор имеет нейтральную реакцию, если в нем $C(H^+) = C(OH^-) = 1\cdot10^{-7}$ моль/л. Если $C(H^+) > 1\cdot10^{-7}$ моль/л, раствор имеет

кислую реакцию. Кислотность раствора тем выше, чем больше концентрация ионов водорода. Раствор, в котором $C(H^+) < 1 \cdot 10^{-7}$ моль/л, имеет щелочную реакцию.

Концентрацию ионов H^+ в водных растворах удобно выражать при помощи **водородного показателя pH**, который определяется как отрицательный десятичный логарифм молярной концентрации ионов водорода: $pH = - \lg C(H^+)$.

Соответственно отрицательный десятичный логарифм концентрации гидроксильных ионов называется гидроксильным показателем и обозначается pOH: $pOH = - \lg C(OH^-)$.

Из уравнения $C(H^+) \cdot C(OH^-) = 1 \cdot 10^{-14}$ следует, что $pH + pOH = 14$.

В нейтральном растворе pH = 7; в кислом pH < 7; в щелочном pH > 7. Причем выделяют сильно- и слабокислую среду, а также сильно- и слабощелочную:

$$pH = \overbrace{1,\ 2,\ 3}^{\text{сильнокислая}},\ \underbrace{4,\ 5,\ 6,}_{\text{слабокислая}}\ \overbrace{7,}^{\text{нейтральная}}\ \underbrace{8,\ 9,\ 10,}_{\text{слабощелочная}}\ \overbrace{11,\ 12,\ 13,\ 14}^{\text{сильнощелочная}}.$$

Для количественного определения pH существуют различные способы. Например, с этой целью используются специальные приборы, называемые pH – метрами. Однако простейшим способом оценки pH является использование кислотно - основных индикаторов. Индикатор представляет собой вещество органического происхождения, способное менять окраску в зависимости от pH среды. Если известно значение pH, при котором индикатор переходит из одной окрашенной формы формы в другую, то по наблюдаемой окраске раствора можно судить о том, выше или ниже его pH, чем pH перехода окраски данного индикатора.

Например, лакмус, один из наиболее распространенных индикаторов, изменяет окраску при pH, близком к 7. Однако изменение окраски лакмуса

происходит не очень резко. Красный цвет лакмус имеет при pH, приблизительно равном 5 или ниже, а синий цвет лакмус имеет при pH, приблизительно равном 8,2 или выше.

Существуют другие индикаторы, изменяющие окраску при значениях pH между 1 и 14. Наиболее распространенные из них представлены в табл. 7.2. Из этой таблицы следует, что, например, метиловый оранжевый изменяет

Таблица 7.2

Цвет распространенных кислотно-основных индикаторов в различной среде

Индикатор	Цвет индикатора в зависимости от pH среды
Лакмус	pH<5,0 (красный) [фиолетовый] pH>8,0 (синий)
Фенолфталеин	pH<8,0 (бесцветный) [бледно-малиновый] pH>9,8 (малиновый)
Метиловый оранжевый	pH<3,1 (красный) [оранжевый] pH>4,4 (желтый)

окраску в интервале pH от 3,1 до 4,4. При pH ниже 3,1 он имеет красную окраску. В растворах с pH в интервале от 3,1 до 4,4 метиловый оранжевый постепенно переходит в свою основную форму, имеющую желтую окраску. Когда pH достигает 4,4, переход в основную форму полностью завершается и раствор приобретает желтую окраску. Для приблизительной оценки pH растворов часто пользуются полосками бумаги, пропитанными различными индикаторами, к которым прилагается цветная шкала сравнения.

7.8. ГИДРОЛИЗ СОЛЕЙ

Природная вода, морская и пресная, как правило не является нейтральной средой и характеризуется значением pH, отличным от 7. Дело в том, что во многих случаях вода может выступать в отношении различных веществ и минералов не только как растворитель, но и как активный реагент, вызывающий химическое взаимодействие обменного характера. Такое взаимодействие имеет место, если ионы, образующиеся при диссоциации растворенного в воде вещества, являются остатками слабых электролитов.

Поясним механизм соответствующего явления, рассмотрев процесс ступенчатой диссоциации какого-либо слабого электролита, например, $Cu(OH)_2$:

$$Cu(OH)_2 \leftrightarrow CuOH^+ + OH^-, \quad K_1 << 1;$$

$$CuOH^+ \leftrightarrow Cu^{2+} + OH^-, \quad K_2 << K_1.$$

Первое из двух записанных равновесий характеризуется константой равновесия K_1. Величина этой константы намного меньше единицы, так как речь идет о слабом электролите. Следовательно, концентрация образующихся ионов $CuOH^+$ и OH^- очень мала. Еще меньше ионов образуется за счет второй ступени диссоциации слабого электролита, так как $K_2 << K_1$ (отщепление иона OH^- от положительно заряженного иона $CuOH^+$ требует больших энергетических затрат, чем отщепление от нейтральной молекулы $Cu(OH)_2$). Поэтому, если в воде растворить сильный электролит, образующий при диссоциации ионы Cu^{2+}, в соответствии с принципом Ле Шателье произойдет смещение анализируемых равновесий в левую сторону. При этом связывание ионов OH^- вызовет и смещение равновесия диссоциации воды, что приведет к накоплению ионов H^+ и изменению характера среды в растворе:

$$CuSO_4 = Cu^{2+} + SO_4^{2-},$$
$$H_2O \leftrightarrow OH^- + H^+,$$
$$Cu^{2+} + OH^- \leftrightarrow CuOH^+.$$

Процессы, рассмотренные выше, объединяют под названием «гидролиз». В общем случае **гидролизом называют взаимодействие ионов растворенного вещества с ионами H^+ или OH^- молекул воды, ведущее к образованию малодиссоциирующих соединений и изменению pH раствора.**

Явление гидролиза, вызывающее изменение характера среды, распространено в природе (табл. 7.3).

Необходимо помнить, что гидролизу подвергаются только те соли, которые содержат хотя бы один ион – остаток слабого электролита. Только в этом случае при растворении в воде возможно образование малодиссоциированных ионов (молекул) кислоты или основания, или того и другого вместе. Рассмотрим различные случаи гидролиза.

7.8.1. Гидролиз соли, образованной слабым основанием и сильной кислотой

После растворения и диссоциации соли, образованной слабым основанием и сильной кислотой, например, медного купороса $CuSO_4$, в водном растворе устанавливается равновесие с участием ионов Cu^{2+} (остаток слабого электролита $Cu(OH)_2$) и молекул H_2O:

$$Cu^{2+} + HOH \leftrightarrow CuOH^+ + H^+, \qquad (7.3)$$

или в молекулярной форме:

$$2CuSO_4 + 2H_2O \leftrightarrow (CuOH)_2SO_4 + H_2SO_4. \quad (7.4)$$

Таблица 7.3

Гидролиз в природных водных системах

Водная система	Среднее значение pH
Рудничные воды колчеданных месторождений	1 - 2
Воды кратерных озер	1 - 3
Воды торфяных болот	4
Воды, насыщенные CO_2	5
Грунтовые воды (питьевые)	6,5 – 8,0
Морская вода	8,2 – 8,5
Содовые озера	10,0
Насыщенный раствор известняка, мела ($CaCO_3$)	10,0

В результате гидролиза ионы OH^- частично связываются, а ионы H^+ накапливаются. Поэтому в растворе становится больше ионов водорода, чем гидроксильных групп. Среда приобретает кислый характер: pH < 7.

Отметим последовательность действий при анализе процесса гидролиза той или иной соли.

Сначала следует определить, содержит ли соль ион – остаток слабого электролита. Например, при растворении NaCl образуются ионы Na^+ и Cl^-, соответствующие сильным электролитам – основанию NaOH и кислоте HCl. Подобные соли гидролизу не подвергаются: $NaCl + H_2O \neq$.

В том случае, если соль содержит ион – остаток слабого электролита, гидролиз протекать будет. Причем суть процесса выражают составлением молекулярного и ионного уравнений гидролиза. Удобнее, сделав заготовку

молекулярного уравнения, начать с ионной формы взаимодействия. При этом можно воспользоваться соответствующими правилами.

Для составления ионного уравнения гидролиза по катиону необходимо (смотри уравнение 7.3):

1. Выписать катион слабого основания.

2. Прибавить одну молекулу воды.

3. Поставить знак равновесия.

4. Записать формулу соединения, образованного катионом слабого основания и группой OH^- из воды.

5. Прибавить оставшийся от воды ион H^+.

Комментарии к данному правилу.

При составлении ионного уравнения гидролиза к одному катиону слабого основания прибавляем только одну молекулу воды. Это связано с тем, что при обычных условиях гидролиз протекает только по первой ступени: один ион – остаток слабого электролита взаимодействует с одной молекулой воды. При повышении температуры или сильном разведении раствора возможны следующие ступени гидролиза до образования нейтральных молекул слабого электролита:

$$CuOH^+ + HOH \leftrightarrow Cu(OH)_2 + H^+,$$

$$(CuOH)_2SO_4 + 2H_2O \leftrightarrow 2Cu(OH)_2 + H_2SO_4.$$

В уравнениях гидролиза ставится знак равновесия, так как гидролиз солей обратим. Например, если в результате гидролиза накапливаются ионы H^+, добавление к раствору соли какой - либо сильной кислоты вызовет смещение равновесия в сторону исходных негидролизованных ионов соли.

Для составления молекулярного уравнения гидролиза необходимо (смотри уравнение 7.4):

1. Выписать формулу соли.

2. Прибавить воду.

3. Поставить знак равновесия.

4. Записать формулы веществ, образованных катионами в правой части ионного уравнения и анионом исходной соли.

5. В случае необходимости – уравнять.

7.8.2. Гидролиз соли, образованной сильным основанием и слабой кислотой

Примером соли, образованной сильным основанием и слабой кислотой, является ацетат натрия CH_3COONa. При растворении в воде эта соль диссоциирует на ионы Na^+ и CH_3COO^-. Ацетат – ион является остатком слабой уксусной кислоты, следовательно, исходная соль будет подвергаться гидролизу. Для составления молекулярного и ионного уравнений гидролиза можно воспользоваться правилами, подобными тем, что были рассмотрены выше для гидролиза соли, образованной слабым основанием и сильной кислотой:

$$CH_3COONa + H_2O \leftrightarrow CH_3COOH + NaOH,$$
$$CH_3COO^- + HOH \leftrightarrow CH_3COOH + OH^-.$$

Ионы CH_3COO^-, взаимодействуя с ионами H^+ воды, образуют молекулы слабодиссоциированной уксусной кислоты. Ионы же Na^+ не связываются ионами OH^-, так как NaOH – сильный электролит. Уменьшение в растворе числа ионов H^+ нарушает равновесие между молекулами воды и ее ионами, вызывая диссоциацию дополнительного количества молекул воды. Вновь образующиеся ионы H^+ в свою очередь связываются ионами CH_3COO^- в молекулы CH_3COOH, а свободные ионы OH^- накапливаются в растворе. Избыток ионов гидроксила создает щелочную среду: $pH > 7$.

7.8.3. Гидролиз соли, образованной слабым основанием и слабой кислотой

Примером соли, образованной слабым основанием и слабой кислотой**,** служит фторид аммония NH_4F, гидролизующийся следующим образом:

$$NH_4F + H_2O \leftrightarrow NH_4OH,$$
$$NH_4^+ + F^- + HOH \leftrightarrow NH_4OH + HF.$$

При гидролизе фторида аммония одновременно связываются ионы H^+ и OH^-, т. е. образуются два слабых электролита - слабая кислота и слабое основание. Характер среды в подобных случаях зависит от относительной силы образующихся кислоты и основания. При численном равенстве констант диссоциации основания и кислоты, среда будет нейтральной. Если константа диссоциации кислоты превышает константу диссоциации основания, то раствор соли будет слабокислым и, наоборот, раствор будет иметь слабощелочную реакцию, если константа диссоциации основания больше константы диссоциации кислоты.

7.8.4. Полный гидролиз

Возможен случай протекания гидролиза по всем возможным ступеням до полного разложения соли. Это происходит при гидролизе солей, образованных слабым основанием и слабой кислотой, когда получающиеся кислота и основание очень слабые, к тому же летучие или труднорастворимые. Такие соли отмечены прочерком в таблице растворимости. Они могут быть получены только сухим путем. При контакте с водой эти соли необратимо разлагаются, т. к. протекает полный гидролиз. В результате полного гидролиза образуются осадок слабого основания и молекулы слабой кислоты. Например,

взаимодействие Al_2S_3 (в таблице растворимости данная соль отмечена прочерком) с водой протекает следующим образом:

$$A1_2S_3 + 6H_2O \rightarrow 2A1\ (OH)_3\downarrow + 3H_2S\uparrow,$$
$$2Al^{3+} + 3S^{2-} + 6H_2O \rightarrow 2A1\ (OH)_3\downarrow + 3H_2S\uparrow.$$

7.8.5. Количественные аспекты гидролиза

Для количественной характеристики процесса гидролиза используют две величины – **степень гидролиза** и константу гидролиза.

Отношение концентрации гидролизованной части молекул к общей концентрации соли в растворе называют степенью гидролиза:

$$h = C(\text{гидр.}) / C(\text{общ.}),$$

где h – степень гидролиза; C(гидр.) – концентрация гидролизованных молекул соли; C(общ.) – общая концентрация соли в растворе.

Степень гидролиза соли зависит от нескольких факторов:

1) от константы диссоциации кислоты или основания, образующихся в процессе гидролиза. Чем меньше константа диссоциации, тем больше степень гидролиза;

2) от температуры. При нагревании раствора гидролиз усиливается, так как увеличивается степень диссоциации воды;

3) для солей, образованных сильными кислотами и слабыми основаниями, а также сильными основаниями и слабыми кислотами, степень гидролиза также возрастает при разбавлении раствора.

Запишем в общем виде уравнение реакции гидролиза соли MeA, образованной слабым основанием MeOH и слабой кислотой HA:

$$MeA + H_2O \leftrightarrow MeOH + HA,$$

$$Me^+ + A^- + HOH \leftrightarrow MeOH + HA.$$

Константа равновесия для гидролиза рассматриваемой соли имеет вид:

$$K = \frac{C(MeOH)\cdot C(HA)}{C(Me^+)\cdot C(A^-)\cdot C(H_2O)}. \qquad (7.5)$$

Для разбавленного раствора можно принять, что молярная концентрация воды в результате реакции гидролиза практически не меняется и имеет почти то же значение, что и для чистой воды, а именно 55,5 моль/л. Объединяя в уравнении (7.5) две постоянные величины К и $C(H_2O)$ в одну – константу гидролиза $K_{гидр.}$, получим:

$$K_{гидр.} = K\cdot C(H_2O) = \frac{C(MeOH)\cdot C(HA)}{C(Me^+)\cdot C(A^-)}. \qquad (7.6)$$

Константа гидролиза зависит от температуры и природы растворенной соли, но в области больших разбавлений практически не зависит от концентрации. Константа гидролиза показывает, насколько велика концентрация молекул слабого основания и молекул слабой кислоты в сравнении с концентрацией соответствующих катионов и анионов после установления равновесия гидролиза.

Умножим в равенстве (7.6) числитель и знаменатель дроби на величину $C(H^+)\cdot C(OH^-)$:

$$K_{гидр.} = \frac{C(MeOH)\cdot C(HA)\cdot C(H^+)\cdot C(OH^-)}{C(Me^+)\cdot C(A^-)\cdot C(H^+)\cdot C(OH^-)} = \frac{K_{H_2O}}{K_{MeOH}\cdot K_{HA}}.$$

Следовательно, константа гидролиза соли, образованной катионом

слабого основания и анионом слабой кислоты, равна ионному произведению воды, деленному на произведение констант диссоциации кислоты и основания. Чем слабее основание или кислота, катион и анион которых входят в состав соли, тем в большей степени соль будет подвергаться гидролизу, тем больше будет значение соответствующей константы гидролиза.

7.9. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вычислить pH 0,005 н. раствора гидроксида калия.

2. Определить pH 0,01 н. раствора уксусной кислоты. Константа диссоциации CH_3COOH составляет $1{,}75 \cdot 10^{-5}$.

3. Чему равна концентрация ионов водорода в 0,1 н. растворе NaOH?

4. Составить молекулярные и ионные уравнения возможных реакций:

$MnCl_2 + Na_2SO_3$;	$NH_4C1 + Fe(NO_3)_2$;	$K_2SO_4 + H_2SiO_3$;
$NaOH + Zn(OH)_2$;	$MgSO_4 + H_2CO_3$;	$KOH + SnCl_2$;
$H_2SO_4 + NaHS$;	$Cr_2O_3 + Ba(OH)_2$;	$A1PO_4 + Cr(CH_3COO)_3$;
$KOH + CO_2$;	$HNO_3 + (NH_4)_2SO_4$;	$PbO_2 + NaNO_3$;
$NH_4NO_3 + HgSO_4$;	$Fe(NO_3)_3 + K_2S$;	$MnCl_2 + H_2SO_3$;
$TiO_2 + MgCl_2$;	$Zn(OH)_2 + CaO$;	$Pb(CH_3COO)_2 + K_2SO_4$;
$Cr_2O_3 + SO_3$;	$Mg_3(PO_4)_2 + Na_2SO_4$;	$Fe(NO_3)_2 + NaCl$;
$A1(OH)_3 + NaOH$;	$CuSO_4 + SnCl_2$;	$K_2CO_3 + HC1$.

5. Составить молекулярные и ионные уравнения возможных реакций гидролиза:

$BiCl_3 + H_2O$;	$AgNO_3 + H_2O$;	$CH_3COOK + H_2O$;
$K_3PO_4 + H_2O$;	$(NH_4)_2CO_3 + H_2O$;	$Fe_2(SO_4)_3 + H_2O$;
$Mg(NO_3)_2 + H_2O$;	$Cr_2(CO_3)_3 + H_2O$;	$Sn(NO_3)_2 + H_2O$;
$Zn_3(PO_4)_2 + H_2O$;	$FeSO_4 + H_2O$;	$Cr_2S_3 + H_2O$.

Глава 8
СТРОЕНИЕ АТОМА И ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЗАКОН Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

8.1. СТРОЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБОЛОЧЕК АТОМОВ

Для того чтобы понять закономерности распределения и содержания химических элементов в земной коре, необходимо знать электронную структуру атомов. Расположение электронов в атоме определяет его электронное строение и химические свойства.

Так, в геохимии явления распределения элементов в различных природных объектах связывают с конфигурацией электронных оболочек соответствующих атомов. По В.М. Гольдшмидту «геохимия изучает распределение и содержание химических элементов в минералах, рудах, породах, почвах, водах и атмосфере и циркуляцию элементов в природе на основе свойств атомов и ионов».

Современные представления об электронном строении атомов сформировались на основе классических положений **квантовой механики.** Квантовая (волновая) механика - раздел теоретической физики, изучающий законы движения микрочастиц, характеризующихся размерами 10^{-8} - 10^{-15} м.

Луи де Бройль предположил, что движение любой материальной частицы сопровождается распространением фазовых волн:

$$\lambda = \frac{h}{mV} \quad , \tag{8.1}$$

где λ - длина волны, связанная с движущейся частицей вещества; h - постоянная Планка; m – масса движущейся частицы; V – скорость частицы.

У макроскопических тел волновые свойства не проявляются, так как

длины волн оказываются очень малыми. Однако формула (соотношение) де Бройля (8.1) позволила перенести представления о двойственной, корпускулярно - волновой природе на частицы вещества. Причем корпускулярно - волновой дуализм частиц микромира подтверждается опытами по отражению и прохождению электронов через кристаллы. В этих опытах проявляется дифракционная картина, наличие которой служит признаком волнового процесса. Соответствующий эффект наблюдается, когда длина волны, создаваемой электронами, имеет порядок величины, сопоставимый с межатомным расстоянием в кристалле.

Согласно статистической интерпретации волны де Бройля имеют особый физический смысл «волн вероятности». Интенсивность волны вероятности служит мерой вероятности обнаружения частицы в данном месте пространства. С позиций квантовой механики существование электрона в атоме связывается с вероятностью нахождения электрона в определенном объеме dV(x,y,z) атомного пространства. Пространство вокруг ядра, в котором наиболее вероятно нахождение электрона, принято называть **атомной орбиталью.**

Возможность нахождения частицы в фиксированной области трехмерного пространства (x, y, z) в данный момент времени (t) характеризуется волновой функцией $\psi(x,y,z,t)$. Вероятность W(x,y,z,t) обнаружить частицу в объеме $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ в момент времени t определяется квадратом волновой функции:

$$W(x,y,z,t) = | \psi(x,y,z,t) |^2 \, dV.$$

Основное уравнение квантовой механики, определяющее вид функции ψ для различных случаев движения и взаимодействия микрочастиц, называется уравнением Шредингера. **Уравнение Шредингера** является постулатом и представляет собой дифференциальное уравнение высокого порядка. Для

одного электрона в отсутствие внешнего магнитного поля оно имеет вид:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U(x, y, z, t)\psi,$$

где Δ - оператор Лапласа; U(x,y,z,t) - потенциальная энергия электрона; m - масса электрона; $i = \sqrt{-1}$.

Решение уравнения Шредингера получается в виде набора целых чисел. Эти числа определяют наиболее вероятное положение электрона (его «адрес») в атоме. Электрон существует в трехмерном пространстве, поэтому такой набор включает три числа, которые называют квантовыми числами. **Квантовые числа** можно сравнить с почтовым индексом, содержащим в сжатом числовом коде информацию о местоположении интересующего объекта. Причем среди этих чисел есть главные (основные), без которых положение объекта не определяется в принципе, и вспомогательные, позволяющие детализировать его пространственную локализацию.

8.1.1. Квантовые числа

Первое число в решении уравнения Шредингера называют главным квантовым числом (обозначают буквой n). **Главное квантовое число** определяет энергию электрона в атоме, связанную с расстоянием, на которое электрон удален от ядра. Чем больше значение n, тем слабее связан электрон с ядром, тем на большем удалении от ядра атома он находится. Причем энергия электрона принимает не любые, а лишь определенные дискретные (квантующиеся) значения.

Главное квантовое число может принимать целочисленные значения. Реально для электронов в невозбужденных атомах химических элементов оно

изменяется от 1 до 7. Совокупность электронов в атоме, характеризующихся одним и тем же значением главного квантового числа, называют **энергетическим уровнем или электронным слоем** (с соответствующим значению n номером). Энергетические уровни, для которых n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, также называют, соответственно, K, L, M, N, O, P, Q - уровнями. Если, например, n = 4, то говорят, что электрон находится на четвертом (считая от ядра) уровне или на N - уровне.

Второе число в решении уравнения Шредингера - **орбитальное, или побочное, квантовое число** ι характеризует различие в энергетическом состоянии электронов в пределах данного уровня. Значение орбитального квантового числа определяет число подуровней, составляющих данный энергетический уровень. Для электронов, находящихся на энергетическом уровне с главным квантовым числом n, орбитальное квантовое число ι может принимать значения 0,1,2,3, ... до (n - 1). Поэтому возможное число подуровней в каждом энергетическом уровне равно значению главного квантового числа.

Численные значения ι принято заменять буквенными обозначениями. Подуровни, которым отвечают значения побочного квантового числа ι = 0, 1, 2 и 3, называются, соответственно, s, p, d и f - подуровнями.

В состав энергетических уровней входят следующие подуровни:

1-й уровень – s - подуровень (ι = 0);

2-й уровень – s - подуровень (ι = 0) и p - подуровень (ι = 1);

3-й уровень – s - подуровень (ι = 0), p - подуровень (ι = 1) и d - подуровень (ι = 2);

4-й уровень – s - подуровень (ι = 0), p - подуровень (ι = 1), d - подуровень (ι = 2) и f - подуровень (ι = 3).

В атомах известных химических элементов более четырех подуровней электронами не заполняется.

С точки зрения волновых представлений орбитальное квантовое число

характеризует форму электронного облака, пространственную область его наиболее вероятного нахождения. Для атомной орбитали s - электронов характерна форма шара, для p - электронов – форма гантели, для d - электронов – форма четырехлопастного винта, для f - электронов эта форма еще сложнее.

Третье число в решении уравнения Шредингера - **магнитное квантовое число m_e** характеризует магнитный момент электрона, обусловленный его движением в поле ядра. Магнитное квантовое число принимает целочисленные значения от $-\iota$ до $+\iota$, включая нуль, т. е. всего $(2\cdot\iota+1)$ значений. Например, для d - электрона, для которого $\iota=2$, магнитное квантовое число может иметь $(2\cdot2+1)$ значений, а именно m_e = -2, -1, 0, +1, +2. Этим значениям отвечают $(2\cdot\iota+1)$ энергетических состояний - так называемых квантовых или энергетических ячеек, возможных для электронов данного подуровня. Эти ячейки принято обозначать квадратами, а находящиеся в них электроны - стрелками.

Электрон обладает способностью вращаться вокруг собственной оси. Поэтому дополнительно к трем рассмотренным квантовым числам добавляется еще одно, не связанное с решением уравнения Шредингера. Соответствующее квантовое число S называют спиновым квантовым числом или спином электрона. Спиновое квантовое число принимает два значения +½ или – ½ в зависимости от направления вращения электрона вокруг своей оси.

8.1.2. Распределение электронов в атомах. Принципы запрета и наименьшей энергии

Распределение электронов в атомах химических элементов определяется тремя основными положениями: принципом запрета Паули, принципом наименьшей энергии, а также правилом Гунда.

Согласно принципу запрета, установленному швейцарским физиком

В. Паули, в автоме не может быть двух электронов с одинаковым набором всех четырех квантовых чисел. Максимальное количество электронов, которое может находиться на n - ном энергетическом уровне, так, чтобы не нарушалось это условие, соответствует формуле $x = 2n^2$. Следовательно, на первом уровне может находиться не более двух электронов, на втором - 8, на третьем - 18, на четвертом - 32 и т. д. Наибольшее количество электронов, которое может разместиться на s - подуровне любого уровня равно 2, на p - подуровне их может разместиться не более 6, на d - подуровне - 10 и на f - подуровне - 14.

При описании электронных структур отдельных атомов для условной записи принята определенная символика. Вначале арабскими цифрами указывают номер уровня, а далее буквенным символом s, p, d или f - подуровень, к которому относятся электроны, и, наконец, верхним цифровым индексом справа от этого символа - количество электронов на рассматриваемом подуровне. Так, например, запись $4p^6$ означает, что на p - подуровне четвертого энергетического уровня располагается 6 электронов; а запись $4f^3$, что на f - подуровне четвертого уровня находится 3 электрона.

Согласно другому принципу – принципу наименьшей энергии, распределение электронов должно отвечать наибольшей прочности их связи с ядром атома, т.е. электрон прежде всего занимает такие положения, при которых он будет обладать наименьшим собственным запасом энергии. Так как энергия электрона в основном определяется значениями квантовых чисел n и ι, **Клечковский В. М.** предложил следующие два правила:

1. По мере увеличения заряда ядра атома последовательное заполнение электронами энергетических уровней и подуровней осуществляется в направлении возрастания суммы главного n и орбитального ι квантовых чисел (n+ι).

2. Если сумма (n+ι) оказывается одинаковой для нескольких подуровней, то последовательное заполнение электронами энергетических уровней и подуровней происходит в порядке уменьшения ι и увеличения n. Например,

при n+ι = 6 сначала заполняется 4d - подуровень (n = 4, ι = 2), а затем 5p - подуровень (n = 5, ι = 1).

8.1.3. Квантовые ячейки. Правило Гунда

Количеством значений магнитного квантового числа для электронов одного подуровня определяется число квантовых (энергетических) ячеек этого подуровня. Квантовые ячейки для электронов обычно располагают ступенями, что соответствует повышению энергии электронов при переходе от s к p подуровню. Внутри каждой ячейки может размещаться не более двух электронов, которые при этом должны различаться значением спинового квантового числа (иметь антипараллельные спины). В противном случае для двух электронов одного атома все четыре квантовые числа будут иметь одинаковые значения, что противоречит принципу запрета Паули.

Понятием квантовая ячейка охватывается энергетическое состояние электрона, характеризуемое определенными значениями квантовых чисел n, ι и m_e. Для s - электронов при значении орбитального квантового числа ι = 0 возможно только одно значение магнитного числа: $m_e = 0$, и, таким образом, в s - подуровне может быть только одна энергетическая ячейка.

Для p - электронов (ι = 1) возможны три варианта магнитного квантового числа (-1, 0, +1) и, соответственно, три квантовые ячейки в p - подуровне. Для d - электронов (ι = 2) возможны 5 значений m_e (-2, -1, 0, +1, +2), соответственно, в d - подуровне имеется 5 ячеек. В случае f - подуровня (ι = 3) m_e принимает значения -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 (7 ячеек).

Значениями орбитального квантового числа ι определяется форма электронного облака (атомной орбитали). В свою очередь, магнитное квантовое число определяет взаимную ориентацию в пространстве этих орбиталей. Для s - электронов при ι = 0 и $m_e = 0$ это соответствует тому, что для электрон-

ного облака шаровидной формы не существует различных вариантов его ориентации в пространстве, все направления равнозначны (рис. 8.1). Для p - электронов, имеющих форму гантели, $\iota = 1$ и m_e может принимать 3 значения, чему отвечают 3 варианта взаимной ориентации этих орбиталей: вдоль осей x, y, z (рис. 8.2). У более сложных по своей конфигурации d и f - электронов существует 5 и 7 вариантов соответственно их взаимного расположения в пространстве. Знание такой взаимной ориентации атомных орбиталей p, d и f - электронов позволяет объяснить направленный характер химической связи, расположение химических связей в пространстве под вполне определенными углами.

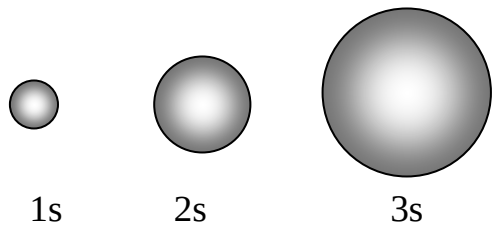


Рис. 8.1. Изображения контуров 1s-, 2s- и 3s – орбиталей

Для определения конфигурации электронных оболочек атомов используют еще одно теоретическое положение - **правило Ф. Гунда**:

электроны в пределах данного подуровня (s-, p-, d- или f-) располагаются сначала по одному в свободных квантовых ячейках, ориентируя при этом свои спины параллельно.

Например, по правилу Гунда, пять электронов на d - подуровне размещаются по одному в каждой из пяти энергетических ячеек подуровня. При этом спины электронов должны быть направлены в одну сторону.

В зависимости от того, на какой подуровень приходится последний электрон при застройке электронной оболочки атома, различают s, p, d и

f - элементы.

Символы s - элементов отмечены в таблице Менделеева красным цветом. Для s - элементов характерны ярко выраженные металлические свойства; их атомы легко отдают внешние электроны. Атомы данных элементов способны окисляться ионами водорода воды и разбавленных кислот, причем для большинства из них (кроме бериллия и магния) даже с водой реакция протекает довольно бурно.

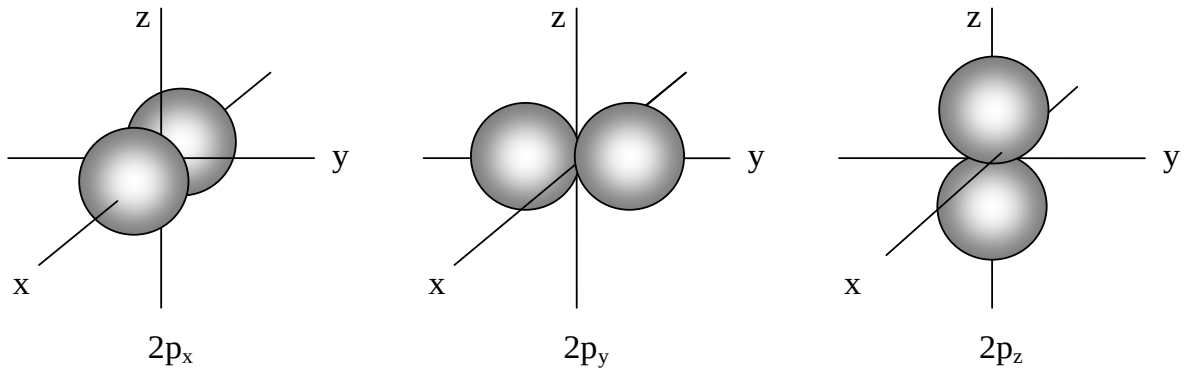


Рис. 8.2. Изображения контуров 2p – орбиталей. Три орбитали с различной ориентацией в пространстве соответствуют различным значениям магнитного квантового числа

Водород также способен терять электрон и образовывать соединения, в которых его степень окисления +1. Однако наряду с этим известны соединения (гидриды щелочных и щелочноземельных металлов), в которых водород заряжен отрицательно.

Символы p - элементов отмечены в таблице Менделеева желтым цветом. Часть p - элементов обнаруживает неметаллические свойства, проявляя способность как к окислению, так и к восстановлению, например, N, P, S. Для таких p - элементов как, например, Al, Ga, In, Tl, Sn, Pb более характерны

металлические свойства и положительные степени окисления в соединениях. Атомы инертных газов, относящихся к p - элементам, окисляются трудно, т.к. имеют устойчивую электронную конфигурацию с завершенным p - подуровнем внешнего энергетического уровня.

К числу d - элементов принадлежат представители переходных элементов. Переходные элементы, расположенные в периодической системе Д. И. Менделеева друг под другом, обнаруживают большое сходство в свойствах и составляют побочные подгруппы I - VIII групп. Все d - элементы - типичные металлы, образуемые ими простые вещества способны выступать в окислительно - восстановительных реакциях только в качестве восстановителей.

К числу f - элементов относят два семейства элементов - лантаноиды и актиноиды. Все f - элементы являются типичными металлами, практически для всех них характерна степень окисления +3 и близкие химические свойства в пределах семейства.

8.2. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТОВ

8.2.1. Размеры атомов

Ряд свойств атомов зависит от их электронной конфигурации. Такими свойствами, определяющими важные характеристики химического поведения атомов различных элементов являются размер атома, энергия ионизации, энергия сродства к электрону.

Согласно квантовомеханической модели, атом не имеет четко определенных границ, позволяющих однозначно установить его размеры. С увеличением расстояния от ядра вероятность обнаружения электрона в соответствующей области атомного пространства уменьшается, приближаясь к нулевому значению на больших расстояниях. Тем не менее, существуют методики, позволяющие рассчитывать расстояния между атомами, находящимися

в химических соединениях. С помощью этих методик определены атомные радиусы, которые служат мерой относительных размеров атомов. Например, расстояние между центрами атомов Br в молекуле Br_2 равно 2,28 $\overset{o}{A}$, что позволяет приписать атому Br радиус 1,14 $\overset{o}{A}$.

При перемещении слева направо вдоль любого периода таблицы Менделеева отмечается увеличение эффективного заряда ядра атомов и числа электронов на их внешнем энергетическом уровне. Общее число энергетических уровней для атомов химических элементов в пределах одного периода при этом неизменно. В результате с увеличением порядкового номера элемента происходит рост энергии взаимодействия электронов с ядром и заметное сжатие внешних орбиталей.

Перемещение сверху вниз в любой группе, наоборот, приводит к возрастанию размера атомов, что соответствует увеличению их главного квантового числа, определяющего число энергетических уровней.

В изменении атомных радиусов обнаруживается периодическая закономерность. При перемещении вдоль каждого периода от щелочного металла (1 группа) к галогену (7 группа) наблюдается уменьшение размеров атомов. В пределах каждого семейства (группы) периодической таблицы, например, среди щелочных металлов, по мере увеличения атомного номера радиус атома возрастает.

8.2.2. Энергия ионизации

Энергией ионизации I называется энергия, необходимая для отрыва и удаления электрона из сферы влияния ядра изолированного атома.

Более доступной для экспериментального определения величиной является **потенциал ионизации.** Это тот наименьший потенциал, при котором происходит отрыв электрона из атома и последующее его удаление из сферы притяжения ядра. Энергию ионизации I выражают в Джоулях или электрон -

вольтах (эВ); 1 эВ – энергия электрона в ускоряющем электрическом поле с разностью потенциалов 1 В (1 эВ = 96,49 кДж/моль). Оба эти понятия обычно используются как равнозначные. Чем больше энергия ионизации, тем прочнее связан электрон в атоме или ионе. Следовательно, чем меньше энергия ионизации данного атома, тем более выражены его восстановительные свойства.

При удалении из атома не одного, а двух и более электронов говорят о первом I_1, втором I_2 и т. д. ионизационном потенциале. Удаление каждого последующего электрона из атома (иона) требует затраты все большего количества энергии. Причина этого заключается в том, что положительный заряд ядра, определяющий силу притяжения удаляемого электрона, остается все время постоянным, тогда как число электронов, нейтрализующих этот заряд, последовательно уменьшается.

В периодах величина энергии ионизации с возрастанием порядкового номера увеличивается (табл. 8.1), а восстановительная способность атомов, соответственно, уменьшается. Это связано с уменьшением радиусов атомов и увеличением положительных зарядов ядер.

Энергия ионизации в пределах главных подгрупп с увеличением порядкового номера уменьшается, а восстановительная способность атомов, соответственно, увеличивается. Объясняется это тем, что притяжение валентного электрона к ядру ослабляется с увеличением радиуса атома, причем это увеличение влияет на силу притяжения в большей мере, чем возрастание положительного заряда ядра.

Таким образом, в таблице Менделеева из s- и p - элементов наиболее сильные восстановители расположены слева внизу (самый сильный восстановитель - франций). Наиболее слабые восстановительные свойства проявляют химические элементы, расположенные в правом верхнем углу таблицы. Особенно это относится к фтору.

Для переходных элементов (d - элементы), а также для лантаноидов и актиноидов (f - элементы) значения энергии ионизации с возрастанием по-

рядкового номера постепенно увеличиваются, но незначительно, поскольку с возрастанием порядкового номера мало изменяются радиусы атомов и заряды ядер.

Таблица 8.1

Последовательные энергии ионизации I_n (кДж/моль) атомов химических элементов третьего периода

Элемент	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Na	490	4560					
Mg	735	1445	7730				
Al	580	1815	2740	11600			
Si	780	1575	3220	4350	16100		
P	1060	1890	2905	4950	6270	21200	
S	1005	2260	3375	4565	6950	8490	27000
Cl	1255	2295	3850	5160	6560	9360	11000
Ar	1525	2665	3945	5770	7230	8780	12000

8.2.3. Сродство к электрону и электроотрицательность

Характеристикой способности нейтральных атомов к присоединению электронов является **сродство к электрону E** - количество энергии, которая выделяется или которую необходимо затратить для присоединения электрона к атому. В случае большинства нейтральных атомов и всех положительно заряженных ионов присоединение электрона сопровождается выделением энергии и соответствует экзотермическому процессу. Следовательно, чем больше по абсолютной величине отрицательное значение E, тем больше способность атома притягивать электроны и, соответственно, выше его окислительная активность.

Сродство к электрону тесно связано с энергией ионизации: сродство к

электрону для однозарядного положительного иона противоположно по знаку, но совпадает по величине с энергией ионизации соответствующего нейтрального атома.

В изменении величины сродства к электрону в периодах и группах таблицы Менделеева нет столь же ярко выраженной закономерности, как в изменении энергии ионизации. Сродство к электрону зависит не только от радиуса атома и заряда ядра, но и от числа электронов на внешнем уровне атома и наличия свободных квантовых ячеек.

Для характеристики относительной способности атома смещать к себе участвующие в образовании химической связи электроны и приобретать отрицательный заряд служит еще одна условная величина - электроотрицательность. Мерой электроотрицательности (χ) является полусумма первого потенциала ионизации I_1 и сродства к электрону E:

$$\chi = (I_1 + E)/2.$$

Удобнее пользоваться не абсолютными значениями электроотрицательности, а относительными. При оценке значений электротрицательности одному из элементов приписывают условно выбранное значение параметра. Например, в качестве точки отсчета выбирают значение 2,5, которое принимается за электроотрицательность углерода. Понятие электроотрицательности ввел Л. Полинг, который и выбрал для углерода это значение. Конкретное значение точки отсчета не играет важной роли, так как сравнивают относительные значения электроотрицательности элементов. По Полингу наиболее электроотрицательным элементом является фтор, имеющий электроотрицательность, равную 4,0. Наименьшую элетроотрицательность, равную 0,79, имеет цезий. Электроотрицательности всех остальных элементов находятся в отмеченных пределах. Чем выше значение электроотрицательности для данного элемента, тем более выражены его неметаллические свойства, тем

сильнее его атомы в молекулах химических соединений притягивают электроны, приобретая отрицательный эффективный заряд.

С увеличением порядкового номера электроотрицательность s- и p - элементов в периодах увеличивается (от щелочного металла к галогену), а в подгруппах, как правило, снижается. В целом, при перемещении слева направо вдоль одного периода сродство к электрону возрастает, что соответствует увеличению способности атома притягивать электрон.

Самые большие значения сродства к электрону характерны для галогенов. Это объясняется тем, что атомы галогенов имеют конфигурацию внешних электронов вида s^2p^5. Добавление всего одного электрона от атома другого элемента приводит к образованию устойчивой конфигурации, характерной для атомов благородных газов. Полной противоположностью галогенам являются химически инертные благородные газы – гелий, неон, аргон, криптон, ксенон и радон. Атомы благородных газов, имеющие заполненные s- и p- подуровни, не притягивают к себе дополнительного электрона; чтобы присоединить к ним электрон, нужно затратить энергию. Точно так же присоединение электрона к атомам щелочноземельных металлов требует затраты энергии, т.к. в каждом из них имеется заполненный внешний s - подуровень.

8.3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Укажите, какие экспериментальные данные свидетельствуют о наличии волновых свойств у частиц вещества.

2. Формально ион Li^{2+} имеет всего один электрон. Как вы думаете: большую или меньшую величину составит энергия ионизации данного иона в сравнении с энергией ионизации атома водорода H? Объясните ответ.

3. Какие из перечисленных ниже обозначений атомных орбиталей не имеют смысла: 4f, 2d, 2s, 5p, 1p, 3f, 3d?

4. Укажите значения квантовых чисел n, ι, m_e для всех орбиталей, входящих в 4f - подуровень; для всех орбиталей, входящих в электронную оболочку с n = 2.

5. Чем отличаются 2p- и 3p - орбитали?

6. Какие характеристики орбиталей определяются значением: а) главного квантового числа; б) орбитального квантового числа; в) магнитного квантового числа?

7. Укажите, в чем различие между следующими терминами: а) орбита и орбиталь; б) длина волны и частота; в) s - орбиталь и p - орбиталь; г) основное и возбужденное состояние; д) непрерывный спектр и линейчатый спектр; е) главное квантовое число и орбитальное квантовое число.

8. Запишите наборы квантовых чисел, разрешенных для каждой из следующих орбиталей: а) 1s; б) 2p; в) 3d.

9. Какая из орбиталей каждой указанной пары имеет более низкую энергию в многоэлектронном атоме: а) 3p, 5s; б) 2s, 2p; в) 3d, 3s; г) 3d, 4f?

10. Объясните, почему 2s-электрон в атоме бериллия испытывает действие большего эффективного заряда ядра, чем 2s-электрон в атоме лития?

11. Напишите электронные конфигурации следующих атомов: а) K; б) Si; в) Se; г) Mn; д) La.

12. Как изменяются перечисленные ниже свойства при перемещении слева направо в любом периоде таблицы Менделеева: а) размер атома; б) энергия ионизации; в) сродство к электрону. Как изменяется каждое из этих свойств при перемещении сверху вниз в произвольной группе таблицы?

13. Исходя из положения элементов в периодической таблице, укажите, какой из атомов в каждой паре имеет большее значение радиуса: а) Na, Li; б) Li, Be; в) O, P; г) N, Si.

14. Исходя из положения элементов в периодической таблице, укажите, какой из атомов в каждой паре имеет большее значение энергии ионизации: а) N, F; б) Na, Mg; в) O, S; г)Al, Si.

15. Объясните низкую реакционную способность благородных газов с учетом их энергий ионизации и сродства к электрону.

Глава 9
ХИМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

9.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Вода – одно из самых распространенных на Земле веществ. Это вещество и в жидком и в твердом состоянии состоит из молекул H_2O.

Миллионы лет назад при высыхании обширных морей образовались крупные залежи другого распространенного вещества - минерала галита. Химический состав данного минерала соответствует хлориду натрия NaCl. Как в растворе, так и в твердом состоянии хлорид натрия состоит из ионов Na^+ и Cl^-.

Почему вещества состоят из разных частиц, одни из заряженных ионов, а другие из электронейтральных молекул?

Объяснение природы сил, ответственных за химическую связь атомов, стало возможным после установления электронного строения атомов. Все современные теории химической связи сходятся в одном: образование химической связи сопровождается существенной перестройкой электронных оболочек взаимодействующих атомов. При этом важно, что перестройка электронных оболочек затрагивает в основном наиболее подвижные валентные электроны внешнего, а в некоторых случаях и более глубоких уровней.

У s- и p - элементов валентными являются электроны внешнего уровня. У d - элементов валентными являются не только s - электроны внешнего, но и d - электроны предпоследнего уровня. У f - элементов (лантаноидов и актиноидов) валентными являются s - электроны внешнего уровня, обычно один d - электрон предпоследнего уровня и f - электроны третьего извне уровня. Например, для урана, проявляющего в химических соединениях степени окисления +3, +4, +5 и +6, валентную группу электронов образуют два 7s, один 6d

и три 5f - электрона: $_{92}U = \ldots 5f^3 6d^1 7s^2$.

Образование молекул из отдельных атомов, между которыми возникает химическая связь, всегда сопровождается выделением значительного количества энергии. Эта энергия образования химической связи, так же, как и обратная ей по знаку энергия разрыва (или диссоциации) связи, может служить мерой прочности химической связи.

В зависимости от характера перераспределения валентных электронов между взаимодействующими атомами различают два основных типа химической связи:

1) ионную (гетерополярную), когда электроны практически полностью переходят от одного взаимодействующего атома к другому;

2) ковалентную (гомеополярную), когда электроны лишь частично смещаются к одному из взаимодействующих атомов.

Теория химической связи основывается на том, что атомы или ионы, имеющие на внешнем уровне 8 (или 2 для легких атомов) электронов, т.е. подобные по своей электронной конфигурации атомам инертных газов, отличаются большой устойчивостью. Поэтому атомы, переходя в состояние ионов, либо теряют электроны до тех пор, пока не будет образована устойчивая восьми- или двухэлектронная оболочка, либо приобретают электроны до тех пор, пока их внешний электронный уровень не будет дополнен до восьмиэлектронной оболочки. Между образовавшимися противоположно заряженными ионами возникает химическая связь.

Основы теории ковалентной (гомеополярной) химической связи разработал **Г. Н. Льюис**. Он считал, что устойчивые электронные конфигурации возникают не за счет полного перехода части внешних электронов от одного атома к другому, а за счет образования одной или нескольких общих для обоих взаимодействующих атомов пар электронов. Эти пары электронов принадлежат одновременно одному и другому атому. Льюис предложил в формулах молекул химических соединений указывать только наиболее подвижные валентные электроны, обозначая их точками вокруг символов ато-

мов. Одной паре общих электронов соответствует одинарная связь, двум парам - двойная, трем парам - тройная и т. д. (рис. 9.1).

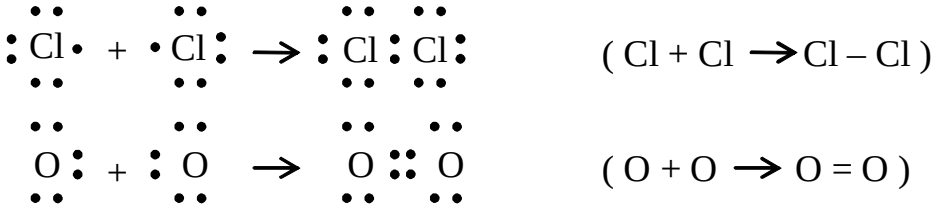


Рис. 9.1. Схема химической связи по Г.Н. Льюису.
Связь образуется за счет общих электронных пар. Одной паре общих электронов соответствует одинарная связь, двум парам – двойная и т.д.

Теория Льюиса позволила объяснить структуру большого количества соединений как неорганических, так и органических, ионных и ковалентных, полярных и неполярных. Но оставалось неясным, почему именно пары электронов обладают свойством образовывать химическую связь. Ответ на этот вопрос был получен лишь после того, как к объяснению и количественной трактовке химической связи была приложена квантовая теория.

Используя уравнения квантовой механики, расчетным путем удалось определить, как изменяется потенциальная энергия системы из двух атомов водорода по мере их сближения (рис. 9.2). Было установлено, что если электроны двух взаимодействующих атомов водорода имеют параллельные спины, то сближение этих атомов приводит к постепенному увеличению потенциальной энергии системы и росту сил отталкивания; химическая связь в этом случае не возникает. Если же электроны взаимодействующих атомов имеют разноименные спины (нижняя кривая), то по мере уменьшения расстояния между атомами и нарастании сил химической связи потенциальная энергия убывает, на некотором расстоянии она достигает минимума, что далее приводит к образованию молекулы H_2. Дальнейшее сближение атомов связано с

преодолением электростатических сил отталкивания между одноименно заряженными ядрами и требует больших затрат энергии.

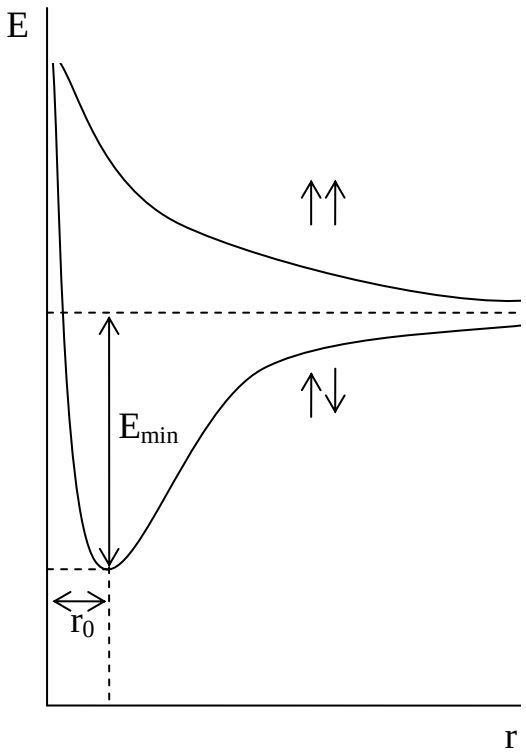


Рис. 9.2. Зависимость потенциальной энергии системы из двух атомов водорода от расстояния между ними

С точки зрения волновых представлений электронные облака взаимодействующих атомов как бы втягиваются друг в друга и в пространстве между ядрами возникает повышенная плотность электронного облака, количественно определяемая квадратом волновой функции ψ. Таким образом, положительно заряженные ядра связываются этим плотным облаком отрицательно заряженных электронов.

Если к системе из двух атомов водорода, образовавших молекулу H_2, присоединять третий, то химической связи не возникнет, поскольку спин у электрона этого атома будет параллелен спину какого-либо из уже имеющихся в молекуле водорода электронов.

Используя рассмотренный подход, квантовая механика пришла к теоретическому обоснованию особой роли пар электронов в образовании химической связи и к объяснению причин ее насыщаемости.

В 30-х годах XX в. для описания и квантово-механической трактовки химических связей в молекулах было предложено два упрощенных полуэмпирических метода: метод валентных связей (ВС), предложенный Л. Полингом и Д. Слэйтером, и метод молекулярных орбиталей (МО), разработанный Ф. Гундом, Э. Хюккелем и Р. Малликеном.

9.2. МЕТОД ВАЛЕНТНЫХ СВЯЗЕЙ

В основе метода ВС, называемого иногда также методом электронных пар, лежат следующие исходные положения.

1. Химическую связь образуют два электрона с антипараллельными спинами, принадлежащие двум атомам. При этом происходит перекрывание электронных облаков, между атомами возникает зона с повышенной электронной плотностью, что и приводит к образованию химической связи. Возникшая таким образом химическая связь называется ковалентной.

2. Валентность элемента равна числу неспаренных электронов на внешнем энергетическом уровне атома этого элемента в нормальном и возбужденном состояниях.

3. Ковалентная связь тем прочнее, чем больше перекрываются облака связующих электронов. Из двух орбиталей атома наиболее прочную связь образует та, которая сильнее перекрывается с орбиталью другого атома.

4. Химическая связь располагается в том направлении, в котором достигается наибольшее перекрывание валентных орбиталей.

Более подробно рассмотрим второе положение, с помощью которого можно прогнозировать валентность различных элементов. С точки зрения этого положения в свободных атомах элементов не все электроны, обычно

считающиеся валентными (в простейшем случае - электроны внешнего уровня), являются неспаренными: часть из них образует неподеленные пары электронов, каждая из которых целиком заполняет энергетическую ячейку. Склонность таких электронов к образованию химической связи невелика.

Рассмотрим, например, атом углерода. На внешнем уровне у него 4 электрона, из которых два ($2s^2$) в нормальном невозбужденном состоянии атома являются спаренными, а два других ($2p^2$) в соответствии с правилом Гунда занимают отдельные свободные ячейки 2p - подуровня и являются неспаренными, способными к взаимодействию с неспаренными электронами других атомов. Таким образом, валентность атома углерода, находящегося в невозбужденном состоянии, равна двум.

При получении атомом углерода небольшого количества дополнительной энергии он переходит в возбужденное состояние, при котором все электроны внешнего уровня стремятся разместиться в свободных энергетических ячейках этого уровня по одному:

Такой возбужденный атом углерода может образовать 4 химические связи (по числу неспаренных электронов) и проявить наиболее характерную для него валентность, равную четырем.

Относительно небольшое количество энергии, затраченное на возбуждение атома углерода, разъединение его двух 2s - электронов и перемещение одного из них в свободную ячейку 2p - подуровня с избытком покрывается энергией, которая выделяется при образовании четырех ковалентных связей.

Следовательно, анализируя возможную валентность какого-либо эле-

мента, необходимо учитывать как число неспаренных электронов в невозбужденном состоянии, так и число неспаренных электронов, которое будет иметь атом в возбужденном состоянии после распределения электронов внешнего уровня по свободным энергетическим ячейкам этого уровня.

Однако вначале необходимо определить пределы возбуждения атома. Обычно под возбужденным состоянием атома подразумевают такое состояние, в которое он переходит при получении энергии, достаточной для перераспределения внешних электронов по энергетическим ячейкам всех подуровней данного внешнего уровня, без их перехода на более высокие энергетические уровни. Переход электрона с одного энергетического уровня на другой, более высокий, требует больших затрат энергии, чем те, которые обычно имеют в виду, когда говорят об энергии возбуждения атома.

Попробуем на основании метода валентных связей (ВС) предсказать, какой валентностью будут обладать элементы второго и третьего периодов периодической системы Д. М. Менделеева в нормальном и возбужденном состояниях.

На внешнем уровне атомов элементов второго периода по четыре энергетические ячейки: одна 2s и три 2p ячейки. Так, один внешний электрон невозбужденного атома лития находится в 2s ячейке. При возбуждении он может перейти в какую - либо из трех ячеек 2p - подуровня, но валентность атома при этом не изменится: он и в нормальном, и в возбужденном состояниях будет оставаться одновалентным по количеству неспаренных электронов на внешнем уровне.

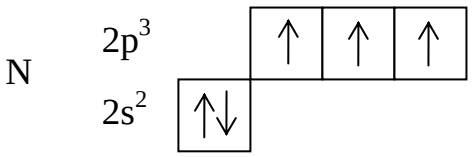
Два внешних электрона невозбужденного атома бериллия образуют на 2s - подуровне неподеленную пару электронов. При возбуждении эта пара распадается и каждый из электронов занимает отдельную энергетическую ячейку 2s- и 2p- подуровня. Валентность возбужденного атома соответственно числу неспаренных электронов становится равной 2. Эту валентность обычно и проявляет бериллий в соединениях.

Атом бора в невозбужденном состоянии имеет неподеленную пару

электронов на 2s - подуровне и неспаренный электрон на 2p - подуровне, т.е. бор должен быть одновалентен; B_4C – пример соединения, в котором бор проявляет такую валентность. После возбуждения атома бора на его внешнем уровне появляется 3 неспаренных электрона, определяющие его валентность, равную трем.

Атом углерода в процессе возбуждения переходит в конфигурацию с четырьмя неспаренными электронами во внешнем уровне. Заметим, что на внешнем энергетическом уровне этого атома как раз столько ячеек, сколько необходимо для распределения по одному четырех внешних электронов. Больше свободных ячеек на этом уровне нет. Эти обстоятельства ставят атом азота (порядковый номер 7) в иные условия, чем атомы предшествующих ему элементов второго периода.

У атома азота в невозбужденном состоянии имеется неподеленная пара электронов на 2s- подуровне и три неспаренных электрона в трех ячейках 2p - подуровня:



В этом состоянии он трехвалентен, например, NH_3, NCl_3 и др. Возбуждение атома азота с разделением неподеленных пар невозможно: на втором энергетическом уровне нет для этого свободных ячеек. При любых переходах внешних электронов в процессе возбуждения из одной энергетической ячейки в другую число неспаренных электронов будет оставаться одним и тем же, равным трем.

Атом кислорода в невозбужденном состоянии на внешнем уровне имеет две неподеленные пары электронов и два неспаренных электрона. Возбудить атом так, чтобы спаренные электроны оказались неспаренными и заняли отдельные энергетические ячейки, не представляется возможным. Поэтому

кислород практически во всех случаях двухвалентен. По этим же причинам неизвестно ни одного соединения фтора, в котором последний имел бы валентность выше единицы. У атома неона все энергетические ячейки внешнего уровня полностью укомплектованы неподеленными парами электронов и неспаренных электронов у него нет ни в нормальном состоянии, ни в случае поглощения небольших количеств энергии. Этим и объясняется свойственная неону химическая инертность.

Обратимся к атомам элементов третьего периода. Атомы этих элементов имеют на внешнем уровне, помимо одной s - ячейки и трех p - ячеек, еще 5 энергетических ячеек d - подуровня. Для четырех первых представителей (Na, Mg, A1, Si) на основании метода валентных связей можно прогнозировать те же самые валентности в нормальном и возбужденном состояниях атома, как и для соответствующих элементов 2-го периода (Li, Be, B, C). Однако далее картина существенно изменяется.

У атома фосфора в нормальном состоянии три неспаренных электрона и он, как и азот, обнаруживает валентность, равную трем, во многих соединениях (PH_3, $PC1_3$, P_2O_3 и др.). Но, благодаря наличию на внешнем уровне свободных энергетических ячеек 3d - подуровня, становится возможным возбуждение. В результате на внешнем уровне появляется пять неспаренных электронов, и становится возможным образование соединений типа PF_5, $PC1_5$, P_2O_5, H_3PO_4 и др.

В невозбужденном атоме серы на внешнем уровне 2 неспаренных электрона и в таком состоянии сера двухвалентна (H_2S, SCl_2, CS_2 и т. д.). При ступенчатом возбуждении атом серы может образовать конфигурацию из 4 и 6 неспаренных электронов. Известны соединения, в которых сера четырехвалентна (SCl_4, SO_2, H_2SO_3 и др.) и шестивалентна (SF_6, SO_3, H_2SO_4 и др.).

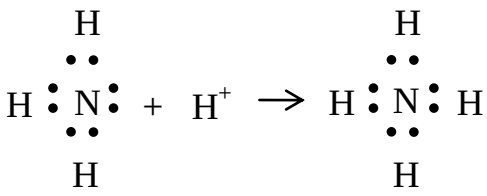
В нормальном состоянии на внешнем уровне атома аргона 4 неподеленные пары электронов и нет ни одного неспаренного. Этому соответствует значительная химическая инертность аргона. Теоретически не исключена возможность образования аргоном соединений, в которых он обнаруживал бы

валентность II, IV, VI и даже VIII. Отметим, что для инертных газов с большим порядковым номером - криптона, ксенона и радона такие соединения синтезированы.

9.3. ДОНОРНО-АКЦЕПТОРНЫЙ МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ КОВАЛЕНТНОЙ СВЯЗИ

Выше рассматривался механизм образования ковалентной химической связи, при котором две атомные орбитали, принадлежащие различным атомам, перекрывают друг друга и за счет этого достигается выигрыш энергии. Такой механизм образования связи обычно называют обменным. Но возможен и механизм, при котором связующая пара электронов поставляется только одним из взаимодействующих атомов, называемым донором, в то время как второй атом - акцептор, воспринимает эту пару, предоставляя для ее размещения свободную орбиталь. Эта неподеленная пара электронов создает в промежутке между ядрами атомов зону повышенной плотности электронного облака, что и вызывает возникновение химической связи.

Например, свободная неподеленная пара электронов молекулы аммиака (донор), взаимодействуя со свободной орбиталью H^+ иона (акцептор), образует ион аммония NH_4^+:



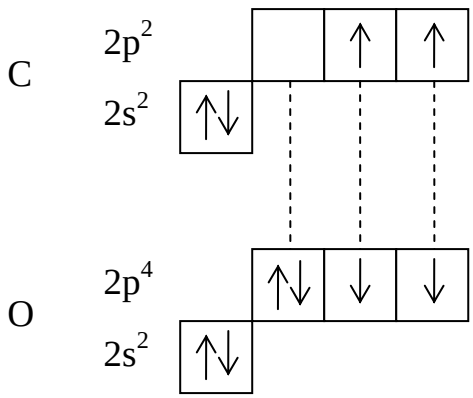
Механизм образования ковалентной химической связи, при котором пара связующих электронов поставляется только одним из взаимодействующих атомов (донором) и воспринимается вторым атомом (акцептором), имеющим свободную орбиталь, называется донорно - акцепторным, а сама

химическая связь – донорно - акцепторной.

Обычно смещение связующей пары электронов от атома - донора к атому - акцептору приводит к образованию полярной молекулы, у которой положительный полюс находится у атома - донора, а отрицательный - у атома - акцептора. В связи с этим донорно - акцепторную связь обозначают стрелкой соответствующего направления, хотя какой-либо разницы между ковалентной связью, возникшей по донорно - акцепторному механизму и ковалентной связью, образовавшейся по обменному механизму, нет.

Так, в молекуле оксида углерода (II) не две химические связи, как это можно было бы предположить, исходя из того, что кислород двухвалентен, а три. Третья связь возникает по донорно - акцепторному механизму: C≡O.

В невозбужденном атоме углерода два неспаренных электрона ($2p^2$) могут дать две обычные ковалентные связи (по обменному механизму) с атомом кислорода, у которого также два неспаренных электрона. В атоме кислорода на 2p - подуровне есть неподеленная пара электронов, а в атоме углерода на таком же 2p - подуровне - свободная орбиталь. Таким образом, имеется возможность для образования еще одной химической связи по донорно - акцепторному механизму:



9.4. СВОЙСТВА КОВАЛЕНТНОЙ СВЯЗИ

Важнейшими свойствами ковалентной связи являются **насыщаемость, направленность и поляризуемость.**

Под насыщаемостью ковалентной связи подразумевают, что атом данного химического элемента может образовать не произвольное, а строго определенное количество химических связей, ограниченное его максимальной валентностью. В простейшем случае, например, при образовании молекулы H_2 из двух атомов водорода, насыщаемость химической связи обусловлена тем, что связь возникает, когда электроны взаимодействующих атомов имеют антипараллельные спины. Добавление третьего атома уже невозможно, так как спин его электрона будет параллелен спину одного из электронов молекулы H_2.

Максимальная валентность лимитируется также количеством валентных атомных орбиталей. Это количество, в свою очередь, зависит от количества квантовых ячеек на внешнем энергетическом уровне атома.

Так, у элементов второго периода валентность не превышает 4, хотя количество электронов на внешнем уровне атомов данных элементов варьирует от 1 до 8. Объясняется это тем, что число квантовых ячеек на внешнем уровне, в которых могли бы разместиться неспаренные электроны, т. е. число валентных орбиталей у элементов второго периода, не превышает 4 (одна s - орбиталь и три p - орбитали).

У атомов элементов третьего периода на внешнем уровне 9 квантовых ячеек (одна s-, три p-, пять d- орбиталей) и в них могут разместиться по одному все внешние электроны, даже у атома аргона. Валентность для элементов этого периода варьирует от 1 до 8.

Направленность ковалентной химической связи обусловлена сложной конфигурацией атомных p, d и f - орбиталей, степень перекрытия которых атомными орбиталями других атомов существенно зависит от того, по какому направлению идет присоединение каждого нового атома.

Взаимное расположение p - орбиталей, имеющих форму гантели, вдоль условных осей x, y и z определяется тремя возможными для p - электронов

значениями магнитного квантового числа m_e (-1, 0, 1). Наибольшее перекрывание электронных облаков при образовании химических связей за счет p - электронов достигÅется вдоль осей орбиталей и, если у атома было образовано три связи, то в идеальном случае они должны располагаться под углом 90°. Однако из-за электростатического взаимодействия угол несколько иной.

Для d- электронов возможны 5 значений магнитного квантового числа и этому соответствуют 5 вариантов взаимного расположения d- орбиталей и образуемых ими химических связей. Типичные формы f- орбиталей, допускающие 7 вариантов их взаимного расположения, в пространстве еще сложнее.

Таким образом, направленность химической связи обусловлена тем, что для p-, d- и f- орбиталей существуют строго ограниченные квантовыми условиями (значениями m_e) варианты их взаимного расположения в пространстве. Ситуация упрощается, если ковалентная связь данного атома с другими осуществляется за счет его валентной s - орбитали, форма которой отвечает шаровой симметрии. Такой атом может образовывать одинаково прочные химические связи в любом направлении, поскольку все направления равнозначны.

Ковалентную связь, образованную за счет взаимного перекрывания атомных орбиталей вдоль линии, соединяющих центры взаимодействующих атомов называют **σ** (сигма) **– связью** (рис. 9.3).

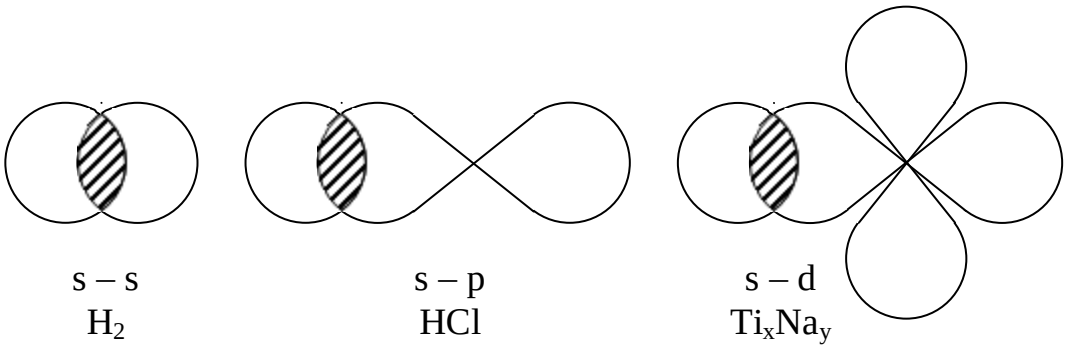
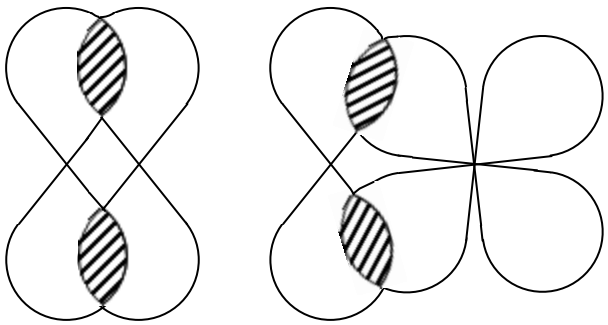


Рис. 9.3. Схема образования σ - связи

Ковалентную связь, образованную за счет двукратного взаимного перекрывания атомных орбителей перпендикулярно линии, соединяющей центры взаимодействующих атомов, называется **π (**пи) **- связью** (рис. 9.4).

Более прочные σ - связи, т.к. выделение энергии при их образовании больше, чем при образовании π - связей.



p – p
N ≡ N

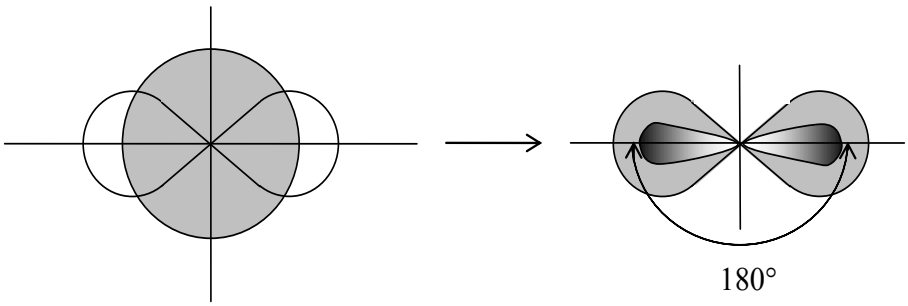
p – d
Fe_xSi_y

Рис. 9.4. Схема образования π - связи

Гибридизация и гибридные связи. Рассмотрим в качестве примера образование молекул $BeCl_2$, BCl_3 и CCl_4 при взаимодействии атомов трех первых элементов второго периода с атомами хлора.

Атом бериллия двухвалентен, так как в возбужденном состоянии он имеет на внешнем уровне два неспаренных электрона. Несмотря на различную энергию 2s и 2p - орбиталей, установлено, что обе связи Be-Cl в молекуле $BeC1_2$ совершенно равноценны, а атомы хлора расположены строго симметрично относительно атома бериллия. Объяснение этого факта заключается в том, что когда атом образует химические связи за счет разных электронов, отличающихся по энергетическому состоянию, между ними происходит перераспределение электронной плотности. В результате образуются новые по форме, но одинаковые для всех валентных электронов электронные орбитали.

Соответствующие атому в его исходном невозбужденном состоянии атомные орбитали вырождаются. При этом, например, из шаровидной s - орбитали и гантелевидной p - орбитали получается гибрид, представляющий более плотную и вытянутую орбиталь (рис. 9.5).



Одна s- и одна p- орбитали атома бериллия

Две sp- гибридные орбитали атома бериллия

Рис. 9.5. Схема гибридизации s- и p - орбиталей атома бериллия

Процесс образования новых по форме и распределению электронной плотности орбиталей называется **гибридизацией.** Гибридизация сама по себе требует затрат энергии. Однако последующее химическое взаимодействие приводит к выигрышу энергии. Это обусловлено тем, что более плотная и растянутая гибридная орбиталь данного атома будет больше перекрываться валентными орбиталями взаимодействующих с ним атомов и образующаяся связь будет прочнее.

Молекула $BeCl_2$ симметрична потому, что две связи атома бериллия с атомами хлора образованы двумя совершенно одинаковыми гибридными орбиталями. В этом случае речь идет о sp - гибридизации и образовании двух гибридных sp - орбиталей (рис. 9.6).

Атом бора трехвалентен, так как в возбужденном состоянии на его внешнем уровне три неспаренных электрона, из которых один - 2s- электрон, а

два - 2р- электроны.

Как и в случае с $BeCl_2$, в молекуле $BC1_3$ все образуемые связи B-C1 одинаковы по длине и прочности, а сама молекула имеет правильную треугольную форму. Правильная треугольная форма молекулы $BC1_3$ объясняется возникновением у атома бора трех одинаковых гибридных sp^2 - орбиталей, образованных из одной 2s - орбитали и двух 2р – орбиталей (рис. 9.7).

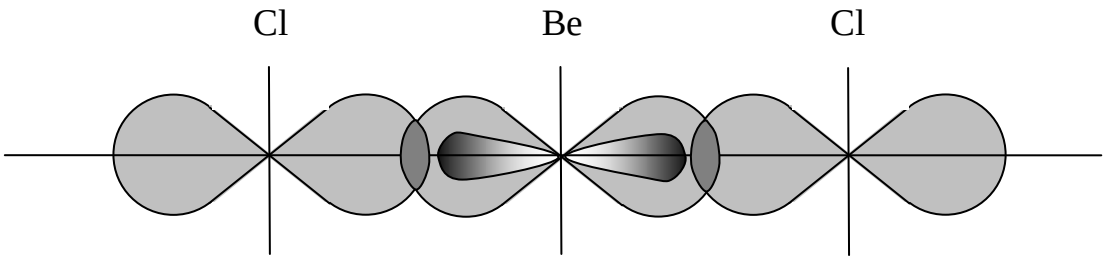


Рис. 9.6. Схема образования химических связей в молекуле $BeCl_2$

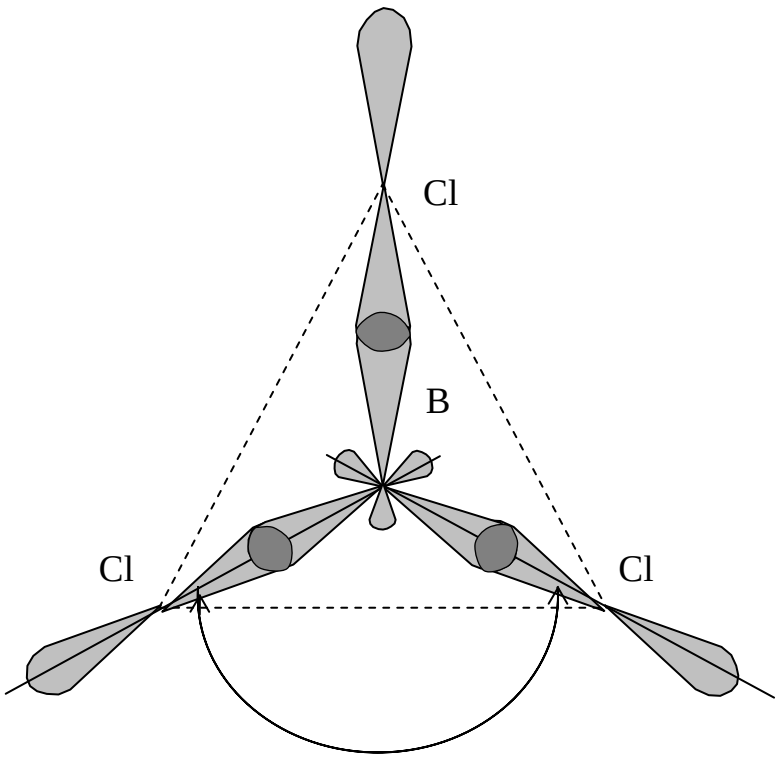


Рис. 9.7. Схема образования химических связей в молекуле BCl_3

У атома углерода в возбужденном состоянии 4 валентные орбитали, из которых одна - 2s- и три другие - 2p - орбитали (см. схему выше). В молекуле $CC1_4$ все связи C-C1 также совершенно равноценны, и она имеет симметричную тетраэдрическую структуру.

В случае sp^2 - гибридизации угол между гибридными орбиталями составляет 120°. Четыре совершенно равноценные связи в молекуле CCl_4, расположенные под углом $109^o28'$ (тетраэдрический угол), - следствие sp^3 - гибридизации в атоме углерода при взаимодействии с атомами хлора. Из одной 2s - орбитали и трех 2p - орбиталей образовалось четыре идентичные sp^3 - орбитали, взаимно ориентированные под углом $109^o 28'$.

Следует подчеркнуть, что не всегда все гибридные орбитали, возникшие в результате sp, sp^2, sp^3 и других более сложных видов гибридизации, участвуют в образовании химической связи. О том, что гибридизация того или иного типа произошла, судят прежде всего по величине угла между образованными химическими связями. Если угол близок к 120°, это свидетельствует о sp^2 - гибридизации; если он близок к тетраэдрическому ($109^o28'$), имеет место sp^3 - гибридизация и т. д.

Так, при образовании молекулы воды происходит sp^3 - гибридизация, поскольку угол между двумя связями O-H ($104^o 28'$) ближе всего к тетраэдрическому. Атом кислорода может образовать 4 химические связи: две из них - за счет двух неспаренных 2p - электронов и две - за счет готовых электронных пар, расположенных в 2s- и 2p - ячейках, по донорно - акцепторному механизму. Гибридизация четырех орбиталей по sp^3 типу является причиной взаимной ориентировки связей O-H в молекуле H_2O под углом, близким к тетраэдрическому.

Очевидно, sp^3 - гибридизация имеет место и при образовании молекулы NH_3, поскольку угол H-N-H ($107^020'$) ближе всего к тетраэдрическому. В молекуле аммиака три образовавшиеся гибридные связи оказались занятыми, а

одна осталась свободной.

При взаимодействии двух одинаковых атомов связующая пара электронов (область перекрытия валентных орбиталей) располагается между этими двумя атомами посередине.

В общем случае, когда взаимодействуют два различных атома, связующая пара всегда смещена в сторону атома более электроотрицательного элемента. Это приводит к несовпадению центров положительных и отрицательных зарядов, молекула поляризуется, приобретает структуру диполя.

Полярность молекулы оценивают величиной дипольного момента, представляющего собой произведение расстояния между центрами зарядов на величину электрического заряда. Количественной мерой поляризуемости ковалентной химической связи наряду с дипольным моментом является также эффективный заряд атома.

Рассмотрим случай, когда оба взаимодействующих атома равноценны по своей электроотрицательности. Очевидно, что связующая пара электронов установится точно посередине между атомами. Центры положительных и отрицательных зарядов будут совпадать и оба атома не приобретут никакого заряда. Моделью этого случая могут быть неполярные молекулы H_2, O_2 и т. д.

Рассмотрим другой случай, когда электроотрицательность одного из взаимодействующих атомов больше, чем электроотрицательность другого. Тогда последний будет иметь положительный эффективный заряд.

Чем больше значение эффективного заряда атома приближается к целочисленному (1, 2, 3 и т. д.), т.е. чем более выражено смещение валентных электронов к ядру одного из взаимодействующих атомов, тем больше связь в молекуле данного соединения приближается к чисто ионной.

Чем меньше это значение, тем более ковалентна химическая связь. В соответствии со значениями эффективных зарядов атомов можно сказать, что, например, в молекуле HI связь на 5 % ионная и на 95 % ковалентная.

Полного смещения связующих пар электронов от более электроположительного к более отрицательному элементу и образования чисто ионной

связи практически никогда не наблюдается. Даже при взаимодействии атома франция (самого электроположительного из известных элементов) с атомом фтора (самым электроотрицательным из элементов) эффективные заряды атомов в образованной молекуле равны не +1 и -1, а лишь +0,94 и -0,94, т. е. и в этом случае связь на 6 % остается ковалентной.

Ионная связь должна рассматриваться как предельный случай ковалентной связи, что практически полностью никогда не реализуется.

9.5. МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНЫХ ОРБИТАЛЕЙ

Далеко не все факты образования химической связи могут быть объяснены с позиций метода ВС, в котором решающая роль в образовании химической связи отводится паре электронов с антипараллельными спинами. Например, в молекулярном ионе водорода H_2^+ только один электрон, и нет никаких условий для образования неподеленной пары электронов и возникновения химической связи. Между тем связь между ядрами водорода в молекулярном ионе H_2^+ довольно прочна и составляет около 259 кДж/моль. Для сравнения: энергия связи атомов в молекуле H_2 равна 435 кДж/моль.

Можно было бы ожидать, что существует прочная молекула гелия He_2. В действительности двухатомной молекулы He_2 не существует. Эти факты, не находящие объяснения и рамках метода валентных связей (ВС), удалось объяснить, опираясь на метод молекулярных орбиталей (МО). Метод МО более универсален и позволяет объяснить более широкий круг явлений, чем метод ВС.

В методе МО вся молекула рассматривается как единый ядерный каркас, пронизанный орбиталями, общими для всей молекулы электронов. Когда из двух или нескольких атомов образуется молекула, атомные орбитали связующих электронов перекрывают друг друга и вырождаются в молекулярные орбитали, охватывающие ядра всех атомов, входящих в состав молекулы. В

отношении молекулярных орбиталей применимы понятия квантовых чисел, принципы наименьшей энергии и запрета Паули, правило Гунда.

При сближении двух или нескольких взаимодействующих атомов орбитали их связующих электронов взаимодействуют друг с другом и с силовыми полями ядер. В результате взаимодействия орбитали деформируются и вырождаются в совершенно иную по конфигурации молекулярную орбиталь. Волновая функция Ψ, характеризующая распределение электронной плотности молекулярной орбитали, может быть рассчитана как линейная комбинация волновых функций соответствующих атомных орбиталей. В зависимости от квантовых характеристик электронов, образующих связь, волновые функции двух взаимодействующих атомов могут либо складываться, либо вычитаться. Молекулярная орбиталь, полученная сложением волновых функций электронов взаимодействующих атомов, называется связывающей, а находящиеся на ней электроны - связывающими. Молекулярная орбиталь, полученная вычитанием волновых функций электронов взаимодействующих атомов, называется разрыхляющей, а находящиеся на ней электроны - разрыхляющими. Связывающие электроны непосредственно участвуют в образовании химической связи, в то время как разрыхляющие электроны дестабилизируют ее.

Все это может быть выражено следующей энергетической схемой, в которой атомные и молекулярные орбитали представлены как энергетические ячейки (клетки) с соответствующими обозначениями.

Клетки, обозначающие связывающие молекулярные орбитали, располагаются ниже, чем клетки, обозначающие исходные атомные орбитали, а разрыхляющие молекулярные орбитали, отвечающие более высокому уровню энергии системы, выше.

В методе ВС кратность химической связи определяется числом пар электронов, участвующих в ее образовании. В методе МО кратность связи равна полусумме числа электронов, поступивших на связывающие орбитали,

минус полусумма числа электронов, поступивших на разрыхляющие орбитали. Величина этой разности и, соответственно, кратность связи может выражаться как целым, так и дробным числом. Чем больше избыток связывающих электронов в сравнении с числом разрыхляющих, тем выше кратность и прочность химической связи, тем меньше межатомное расстояние в молекуле. Если число связывающих электронов равно числу разрыхляющих, химической связи в данной системе атомов не возникает.

Рассмотрим энергетическую схему образования молекулы водорода, представленную на рис. 9.8. При образовании молекулы водорода из двух изолированных атомов оба s - электрона этих атомов поступают на связывающую молекулярную орбиталь, отвечающую σ - связи, и на разрыхляющей орбитали не оказывается ни одного электрона. Кратность связи равна единице.

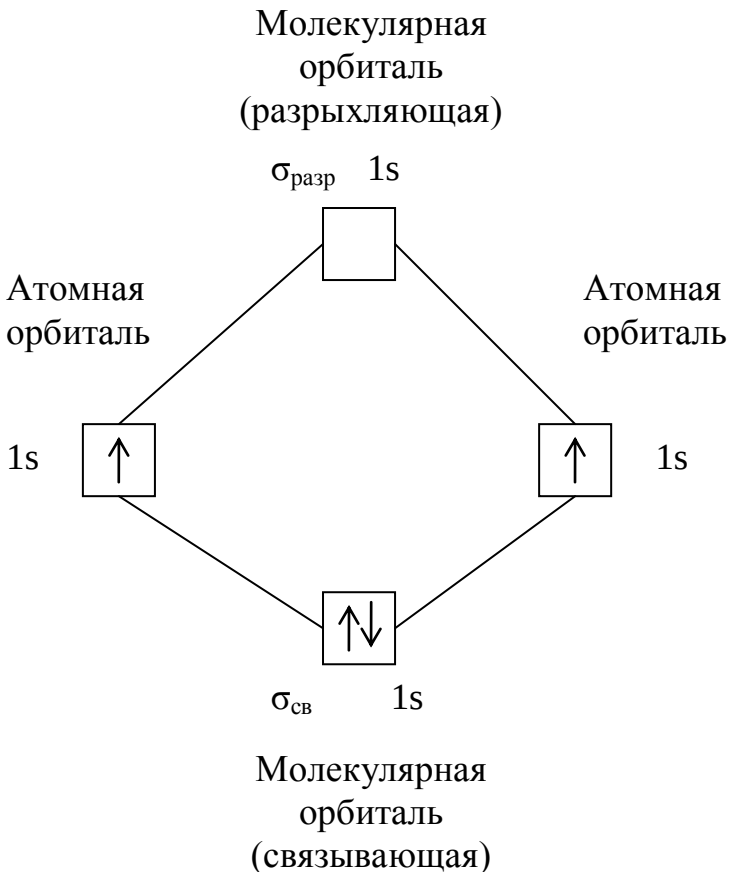


Рис. 9.8. Энергетическая схема образования молекулы водорода

В случае молекулярного кислорода, каждый из атомов кислорода, образующих молекулу O_2, вносит по 4 электрона внешнего p - подуровня, которые могут образовать две π - связи и одну σ - связь. Шесть из этих восьми электронов поступают прежде всего на связывающие орбитали, а оставшиеся два - на разрыхляющие. С точки зрения принципа запрета Паули возможно размещение этих двух электронов на одной разрыхляющей орбитали, если они обладают антипараллельными спинами. Здесь необходимо учесть еще и правило Гунда: поскольку свободны все три разрыхляющие молекулярные орбитали, энергетически более выгодно разместить каждый из этих электронов в отдельной энергетической ячейке - на отдельной разрыхляющей орбитали. Поэтому в молекуле O_2 оказывается два неспаренных электрона.

9.6. МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ВОДОРОДНАЯ СВЯЗЬ

Свойства веществ определяются не только природой атомов и характером химической связи между ними. Имеет важное значение и величина межмолекулярного взаимодействия, называемого также силами Ван-дер-Ваальса. Этими силами определяется, в каком агрегатном состоянии (твердом, жидком или газообразном) находится данное вещество, как велики расстояния между образующими его частицами (молекулами, атомами, ионами), какова степень свободы этих частиц, в каких соотношениях находится средняя потенциальная энергия частиц, характеризующая их связь, и средняя кинетическая энергия этих же частиц. Различают три вида межмолекулярного взаимодействия: ориентационное (дипольное), индукционное (деформационное) и дисперсионное.

Ориентационное (дипольное) взаимодействие вызывает притяжение

полярных молекул, которое проявляется тем больше, чем больше дипольный момент молекул μ. Сущность его заключается в том, что две полярные молекулы А и В ориентируются таким образом, что возникает притяжение между разноименно заряженными полюсами. Так как тепловое движение нарушает взаимную ориентацию полярных молекул, повышение температуры ослабляет ориентационное взаимодействие. Если взаимодействуют неполярные молекулы ($\mu = 0$), ориентационный эффект отсутствует.

Индукционное (деформационное) взаимодействие проявляется особенно заметно, когда одна из взаимодействующих молекул полярна, а вторая неполярна, но легко поляризуема (деформируемая). В этом случае электрическое поле полярной молекулы может вызывать смещение зарядов в неполярной молекуле и индуцировать новый диполь, ориентированный своим положительным полюсом к отрицательному полюсу полярной молекулы. Индукционное взаимодействие мало меняется с температурой, оно нередко сопутствует ориентационному и дополняет его. Электрические поля ориентированных полярных молекул могут вызывать дополнительное смешение центров тяжести зарядов и тем самым усиливать дипольное взаимодействие.

При взаимодействии неполярных молекул или атомов с трудно деформируемой электронной оболочкой не может возникнуть ни ориентационного, ни индукционного взаимодействия. В том случае, если бы силы Ван-дер-Ваальса были обусловлены только этими двумя эффектами, такие газы, как водород, кислород, азот, а тем более благородные газы практически было бы невозможно сжижать. Однако на практике это удается сделать.

Межмолекулярное взаимодействие между совершенно неполярными молекулами обусловлено главным образом дисперсионным эффектом. Сущность эффекта состоит в том, что в процессе движения электронов в молекулах или атомах могут происходить быстрые смещения центров тяжести положительных и отрицательных зарядов с образованием мгновенных диполей. Дипольный момент, возникающий у одной молекулы, может индуцировать

поляризацию другой молекулы. В итоге между поляризованными молекулами возникает притяжение, как и в случае деформационного взаимодействия.

Дисперсионное взаимодействие обычно является существенной составляющей в общей величине межмолекулярного взаимодействия. Ориентационный эффект играет большую роль при взаимодействии полярных молекул с большими дипольными моментами (H_2O, NH_3, HC1); индукционный эффект чаще всего лишь незначительно влияет на суммарную величину сил Ван-дер-Ваальса.

Межмолекулярные силы играют большую роль при переходе вещества из одного агрегатного состояния в другое, например, при сжижении газов. С ними в большей или меньшей мере связаны такие физико-химические свойства вещества как плотность, температура кипения (конденсации), температура плавления (кристаллизации), вязкость, поверхностное натяжение, коэффициент диффузии и т. д.

Водородная связь представляет особый тип взаимодействия, ведущий к образованию как межмолекулярных связей, так и связей между атомами в молекулах. Она занимает промежуточное положение между чисто химической связью и физической межмолекулярной.

В качестве связующего мостика при осуществлении водородной связи выступает атом водорода, находящийся в соединении с атомом какого-либо более электроотрицательного элемента (фтора, кислорода, азота, хлора, серы). Малый по размерам ион водорода, вокруг которого отсутствуют отрицательные электрические поля электронов, может легко вторгаться в электронные оболочки других ионов или атомов, не испытывая с их стороны заметного отталкивания. Оказавшись между атомами сильно электроотрицательных элементов, он может выполнять роль связующего звена. Эта дополнительная химическая связь, обозначаемая обычно пунктиром, получила название водородной связи.

Энергия водородной связи сравнительно невелика (от 8 до 40 кДж/моль). Тем не менее, эта связь играет важную роль при образовании

водных и многих неводных растворов, в процессах электролитической диссоциации кислот и оснований, в построении сложных структур белковых веществ и во многих других случаях.

Наличие водородной связи в молекулах того или иного вещества может быть установлено многими физическими методами (рентгеноструктурный анализ, инфракрасная спектроскопия, ядерный магнитный резонанс и др.), а также на основе сравнения свойств данного вещества со свойствами химически подобных ему веществ.

Так, экстраполируя изменения в ряду галогеноводородов HI - HBr - HCl температур плавления (-50,8; -86,9 и -114,2 °С), температур кипения (-35,4; -66,8 и -85,08 °С) и теплот испарения (19,76; 17,61 и 16,15 кДж/моль), можно было бы установить соответствующие значения для HF, во всяком случае ниже -114,2 °С; -85,08 °С и 16,15 кДж/моль. Однако в действительности это -83,36 °С ; +19,52 °С и 32,6 кДж/моль. В дополнение к типичной ковалентной связи здесь действует еще и водородная связь, вызывающая ассоциацию молекул HF.

В структуре льда каждый атом кислорода имеет 4 направленные к атомам водорода связи, расположенные почти точно под тетраэдрическим углом (109,5 °С). Две из этих связей - обычные полярные ковалентные связи с длиной 0,099 нм, а две другие - водородные с длиной 0,176 нм. При плавлении льда происходит частичное разрушение водородных связей, в связи с чем вместо увеличения объема вначале происходит его уменьшение. Этим же объясняются и другие аномалии в изменении свойств воды при переходе ее из твердого состояния в жидкое (аномально высокие значения теплоты плавления и теплоемкости и др.).

9.7. КОМПЛЕКСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

9.7.1. Составление формул комплексных соединений

В химии известны сложные по составу вещества, образование которых происходит при взаимодействии более простых частиц – молекул, атомов и ионов. Такие сложные соединения, состоящие из более простых, часто относят к комплексным соединениям. Согласно современным воззрениям в структуре молекул комплексных соединений (называемых также координационными соединениями) различают:

1) **комплексообразователь** – центральная частица (атом, ион) вокруг которой расположены тесно связанные с ней **лиганды -** электронейтральные молекулы или несущие определенный заряд ионы. Комплесообразователь и лиганды составляют **внутреннюю координационную сферу** комплексного соединения. Количество лигандов во внутренней сфере определяет **координационное число** комплексного соединения. В том случае, если суммарный заряд внутренней сферы не равен нулю, при составлении химической фомулы ее заключают в квадратные скобки;

2) **внешнюю координационную сферу -** совокупность частиц, непосредственно не связанных с центральным атомом и находящихся за пределами внутренней координационной сферы.

Например: $K_4[Fe(CN)_6]$. В данном комплексном соединении комплексообразователем является ион Fe^{2+}, лигандами – ионы CN^-, координационное число равно 6. Комплексообразователь и лиганды образуют комплексный ион $[Fe(CN)_6]^{4-}$, вокруг которого размещены ионы внешней сферы – ионы K^+.

$[Co(NH_3)_6]Cl_3$. В этом соединении комплексообразователем является ион Co^{3+}, лигандами – молекулы NH_3, координационное число равно 6. Комплексообразователь и лиганды образуют комплексный ион $[Co(NH_3)_6]^{3+}$, вокруг которого размещены ионы внешней сферы – ионы Cl^-.

Известны комплексные соединения без внешней координационной сферы, состоящие только из центрального атома - комплексообразователя и окружающих его лигандов. Таковы, например, карбонилы никеля $Ni(CO)_4$ и

железа $Fe(CO)_5$.

Установлено, что наибольшей способностью к комплексообразованию обладают следующие частицы:

1) атомы с малым радиусом в высшей положительной степени окисления (например, B^{3+}, Al^{3+}, Si^{4+});

2) ионы металлов, имеющие внешнюю 18-ти электронную оболочку (например, Ag^{+}, Zn^{2+}, Hg^{2+});

3) нейтральные атомы d - элементов (например, Fe^0, Co^0, Ni^0).

Отметим, что ионы металлов большого размера с внешней 8-ми электронной оболочкой и малым зарядом обладают слабыми комплексообразующими свойствами. Это ионы щелочных и щелочноземельных металлов. Как правило, они располагаются во внешней сфере комплексного соединения.

В качестве лигандов в комплексных соединениях чаще всего присутствуют отрицательно заряженные ионы (F^-, Cl^-, I^-, OH^-, NO^{2-}, CN^-, SCN^-) либо полярные или легко поляризуемые молекулы (NH_3, H_2O, CO).

Комплексообразователь обычно имеет свободные орбитали, а лиганды - неподеленные пары электронов. Если вакантные орбитали комплексообразователя и заполненные орбитали лигандов могут перекрываться, то между ними образуется ковалентная связь за счет неподеленной пары электронов лиганда. При этом наиболее распространенными значениями координационных чисел являются 2 (для комплексообразователя с зарядом +1), 4 или 6 (для комплексообразователя с зарядом +2) и 6 (для комплексообразователя с зарядом +3).

Зная частицы, образующие комплексное соединение, можно составить его химическую формулу. Например, запишем формулу комплексного соединения, состоящего из ионов K^+, Cr^{3+} и NO_2^-. Первый шаг - выбор комплексообразователя. В данном случае комплексообразователем будет служить ион d - металла Cr^{3+} (ионы щелочных металлов, к которым относится ион K^+, располагаются во внешней сфере). Второй шаг - определение лигандов

и координационного числа. В качестве лигандов в комплексном соединении чаще всего выступают отрицательно заряженные ионы, в нашем случае - NO_2^-. Заряд комплексообразователя равен 3, следовательно, наиболее вероятное значение координационного числа будет равно 6. С учетом электронейтральности образуемого соединения формула комплексного соединения запишется следующим образом $K_3[Cr(NO_2)_6]$.

9.7.2. Поведение комплексных соединений в водных растворах

Химическая связь между внутренней и внешней сферами комплексного соединения является электростатической, а между комплексообразователем и лигандами, как правило, донорно - акцепторной, причем лиганды являются донорами электронных пар, а центральные атомы - акцепторами этих пар.

Ионы внешней сферы комплексного соединения подвижны и вступают в обменные реакции:

$$K_4[Fe(CN)_6] + 2CuSO_4 = Cu_2[Fe(CN)_6]\downarrow + 2K_2SO_4,$$
$$2Cu^{2+} + [Fe(CN)_6]^{4-} = Cu_2[Fe(CN)_6]\downarrow;$$

$$[Co(NH_3)_6]I_3 + 3AgNO_3 = [Co(NH_3)_6](NO_3)_3 + 3AgI\downarrow,$$
$$I^- + Ag^+ = AgI\downarrow.$$

Следует иметь в виду, что хотя лиганды, входящие в состав внутренней координационной сферы, связаны с комплексообразователем гораздо более прочными связями, чем ионы внешней сферы, все же прочность этих связей ограничена.

Количественно способность комплексного иона к диссоциации в растворе (устойчивость комплекса) характеризуется величиной **константы**

нестойкости. Ее можно получить, применив закон действующих масс к равновесию диссоциации комплексного иона.

Рассмотрим, например, раствор, содержащий комплексные ионы $[Cu(NH_3)_4]^{2+}$, которые создают некоторую равновесную концентрацию ионов меди и молекул аммиака:

$$[Cu(NH_3)_4]^{2+} \leftrightarrow Cu^{2+} + 4NH_3.$$

Константа нестойкости в этом случае приобретает вид:

$$К_н = \frac{C(Cu^{2+}) \cdot C^4(NH_3)}{C([Cu(NH_3)_4]^{2+})}.$$

Константа нестойкости характеризует устойчивость комплекса, зависящую от прочности связи между нейтральным атомом и лигандами. Чем меньше значение константы нестойкости комплексного иона, тем он более прочен и устойчив в водном растворе.

Так, приливание щелочи к растворам солей $[Cu(NH_3)_4]SO_4$ и $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ приведет к образованию осадка гидроксида меди только в одном случае.

Комплексная соль $[Cu(NH_3)_4]SO_4$ диссоциирует в водном растворе на комплексный ион и внешнюю сферу:

$$[Cu(NH_3)_4]SO_4 = [Cu(NH_3)_4]^{2+} + SO_4^{2-}.$$

Комплексный ион $[Cu(NH_3)_4]^{2+}$ достаточно прочен, равновесной концентрации ионов Cu^{2+}, образующихся при его частичной диссоциации, недостаточно для протекания реакции образования осадка гидроксида меди:

$$[Cu(NH_3)_4]^{2+} + OH^- \neq.$$

Соль $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ не является комплексной и в водном растворе диссоциирует на все составляющие ее частицы:

$$CuSO_4 \cdot 5H_2O = Cu^{2+} + SO_4^{2-} + 5\ H_2O.$$

Наличие в растворе несвязанных ионов Cu^{2+} обеспечивает образование осадка при добавлении щелочи:

$$Cu^{2+} + 2OH^- = Cu(OH)_2\downarrow.$$

Существуют комплексные соединения, константа нестойкости для которых так велика, что они практически полностью распадаются в водных растворах на все составляющие их частицы. Например, железоаммониевые квасцы $(NH_4)_2SO_4 \cdot Fe_2(SO_4)_3 \cdot 12H_2O$ не образуют устойчивый комплексный ион. В разбавленном водном растворе это соединение полностью диссоциирует на все составляющие его ионы:

$$(NH_4)_2SO_4 \cdot Fe_2(SO_4)_3 = 2NH_4^+ + 2Fe^{3+} + 4SO_4^{2-}.$$

Подобные соединения с малоустойчивой внутренней сферой получили название двойных солей. В концентрированных водных растворах двойные соли наряду с простыми ионами содержат и комплексные ионы. Это свидетельствует о том, что резкой границы между комплексными и двойными солями нет. Двойная соль отличается от комплексной лишь степенью диссоциации комплексного иона: у двойной она практически полная, у комплексной - незначительная.

Отметим важное практическое значение комплексообразования для

промышленного извлечения золота из отвалов обогатительных фабрик. Соответствующий процесс реализуется при выщелачивании золота цианидными растворами. Золото – химически инертный металл, перевести его в водный раствор достаточно трудно. Однако это удается осуществить при орошении золотосодержащих отвалов цианидным раствором. Происходящий процесс комплексообразования уменьшает окислительно-восстановительный потенциал золота и металл окисляется кислородом воздуха, переходя при этом в растворимое соединение:

$$4Au + O_2 + 8NaCN = 4Na[Au(CN)_2] + 4NaOH.$$

$$Au - 1e^- = Au^+ \quad | 4$$

$$O_2 + 2H_2O + 4e^- = 4OH^- \quad | 1$$

Из цианидного раствора золото вытесняют более активным металлом:

$$2Na[Au(CN)_2] + Zn = Na_2[Zn(CN)_4] + 2Au.$$

$$Au^+ + 1e^- = Au \quad | 2$$

$$Zn - 2e^- = Zn^{2+} \quad | 1$$

9.8. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Обозначая электроны точками, приведите льюисовы символы атомов следующих элементов: Ca, Se, Br, B.

2. Предскажите химическую формулу соединения, образуемого следующими парами элементов: а) Zn и O, б) K и Se, в) Al и S, г) Zn и F, д) Sr и Br.

3. Приведите валентную структуру следующих молекул: SiH_4, H_2S, CO, N_2, H_2O, CS_2.

4. Укажите, к какому типу (ионному или ковалентному) принадлежат

следующие вещества: NH_3, Br_2, Cl_2O, $BaCl_2$, FeO.

5. Определите, какие гибридные орбитали используются атомом углерода для образования химических связей в следующих соединениях: а) CH_4, б) C_2H_6, в) C_2H_2, г) H_2CO_3.

6. Поясните, что понимают под термином «перекрывание» атомных орбиталей.

7. Как могут перекрываться две атомарные р – орбитали при образовании молекулярной орбитали σ - или π - типа? Приведите соответствующий рисунок.

8. Почему связывающая молекулярная орбиталь, образованная атомными орбиталями двух взаимодействующих атомов, имеет более низкую энергию, чем исходные атомные орбитали?

9. Объясните, почему удаление электрона из молекулы O_2 делает связь в ней более прочной, тогда как удаление электрона из молекулы N_2 ослабляет в ней связь.

10. Назовите различия между следующими понятиями: а) локализованные и делокализованные связи, б) гибридные и негибридные орбитали, в) σ- и π - молекулярные орбитали.

11. Напишите уравнение диссоциации комплексной соли, заключив внутреннюю сферу в квадратные скобки: $Cr(SCN)_3 \cdot 5NH_3$.

12. Запишите выражение для константы нестойкости следующего комплексного соединения: $[Ni(NH_3)_6](NO_3)_2$.

13. В растворе какой соли образуется осадок при добавлении щелочи: $(NH_4)_2[Hg(SCN)_4]$ или $HgF_2 \cdot 2H_2O$?

14. Напишите уравнения реакций ионного обмена, в результате которых образуются нерастворимые комплексные соединения: $K_4[Fe(CN)_6] + CuSO_4$; $CoCl_2 + (NH_4)_2[Hg(SCN)_4]$.

Глава 10
ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

10.1. ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫЕ РЕАКЦИИ

Во многих химических реакциях происходит изменение степени окисления атомов или ионов, образующих молекулы взаимодействующих веществ. Такие реакции относят к окислительно – восстановительным.

Степень окисления атома в химическом соединении - это условный заряд, которым обладал бы этот атом при полном смещении электронов, образующих химическую связь, к более электроотрицательному из взаимодействующих атомов.

Степень окисления атомов одного элемента в разных соединениях может быть различной. Когда химическая связь образована одинаковыми атомами, как, например, в молекуле H_2, электроны распределяются между ними без преимущественного смещения к одному из них. Поэтому степень окисления каждого атома водорода в молекуле H_2 равна нулю.

Для определения степени окисления необходимо исходить из следующих положений:

1. Степень окисления атомов простых веществ равна нулю. Так, в H_2, Cl_2, N_2, Al, Fe степень окисления атомов равна нулю, поскольку преимущественного смещения электронов, участвующих в образовании связи, не происходит.

2. В химических соединениях более электроотрицательным элементам приписывают отрицательные степени окисления, а менее электроотрицательным - положительные. Абсолютная величина степени окисления при-

близительно соответствует валентности элемента, или числу электронных пар, обобществляемых в связях, которые образует атом.

Например, водород в химических соединениях имеет степень окисления +1. Так, в HCl водороду приписывается степень окисления +1, а хлору степень окисления -1. Для водорода возможна отрицательная степень окисления -1, когда он связан с менее электроотрицательным элементом, как, например, в гидридах щелочных металлов NaH, LiH и т.п.

3. В любой молекуле сумма положительных и отрицательных степеней окисления всех атомов равна нулю. Например, в CO_2 кислороду приписывается степень окисления -2, поскольку он более электроотрицательный элемент. Следовательно, углероду нужно приписать степень окисления +4.

Периодическая система элементов Д.И. Менделеева позволяет найти закономерности, с помощью которых можно определять степени окисления элементов. Степени окисления элементов испытывают периодические изменения. Все щелочные металлы (главная подгруппа первой группы элементов) имеют в соединениях степень окисления +1. Эти металлы образуют химические связи с другими элементами, теряя один электрон. Элементы второй группы в химических соединениях находятся в состоянии окисления +2. В третьей группе наиболее часто встречающийся в природе элемент алюминий в соединениях всегда проявляет степень окисления +3.

Наиболее электроотрицательный элемент фтор проявляет степень окисления -1. Другие неметаллы имеют отрицательные степени окисления во всех случаях, когда они связаны с менее электроотрицательным элементом. Кислород всегда встречается в состоянии окисления -2 (исключения - фторид кислорода OF_2 и перекись водорода H_2O_2. В первом из этих соединений степень окисления кислорода +2, во втором, как и в других пероксидах, -1).

При обсуждении окислительно - восстановительных реакций принято считать вещество, понижающее степень окисления образующих его частиц, окислителем. Окислитель обладает повышенным сродством к электрону. Поскольку окислитель присоединяет электроны, он восстанавливается, т.е.

уменьшает свою степень окисления.

Аналогично вещество, которое отдает электроны, т.е. повышает степень окисления образующих его атомов или ионов, называется восстановителем.

10.1.1. Составление уравнений методом окислительно - восстановительных полуреакций

В окислительно - восстановительных реакциях процессы окисления и восстановления происходят совместно: если одно вещество присоединяет электроны и тем самым восстанавливается, то другое вещество должно отдавать электроны и, следовательно, окисляться. Окисление и восстановление идут одновременно, один из этих процессов не может происходить без другого. Тем не менее удобно рассматривать каждый из них отдельно.

Например, реакцию окисления иона Fe^{2+} ионом Ce^{4+}:

$$Fe^{2+} + Ce^{4+} = Fe^{3+} + Ce^{3+}$$

можно представить как совокупность двух процессов. Один из них – окисление Fe^{2+}, другой - восстановление Ce^{4+} :

(окисление) $Fe^{2+} - 1e^{-} = Fe^{3+}$, Fe^{2+} - восстановитель;

(восстановление) $Ce^{4+} + 1e^{-} = Ce^{3+}$, Ce^{4+} - окислитель.

Такие уравнения, описывающие только окисление или только восстановление, называются полуреакциями. Число электронов, теряемое в процессе окисления, т. е. в полуреакции окисления, должно быть равно числу электронов, приобретаемых в полуреакции восстановления. Если это условие выполнено, при суммировании полуреакций может быть получено стехиометрически сбалансированное уравнение окислительно - восстановительной

реакции.

На практике для уравнивания окислительно - восстановительных реакций применяется несколько методов, различающихся уровнем сложности и количеством дополнительно подбираемых стехиометрических коэффициентов. Более часто применяется так называемый ионно - электронный метод или метод полуреакций. Суть метода заключается в том, что окислитель, восстановитель, среду реакции и продукты взаимодействия записывают в виде ионов, если они - сильные электролиты. Процессы окисления и восстановления при этом рассматривают в виде полуреакций.

В качестве примера составим уравнение реакции между перманганатом калия и сульфитом натрия, протекающей в кислой среде:

$$KMnO_4 + Na_2SO_3 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + Na_2SO_4 + K_2SO_4 + H_2O. \qquad (10.1)$$

Для расстановки коэффициентов в уравнении реакции (10.1), выполним следующие действия. Сначала запишем в виде схемы две полуреакции, в одной из которых участвует окислитель, а в другой - восстановитель:

$$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} \quad (MnO_4^- \text{ - окислитель}),$$
$$SO_3^{2-} \rightarrow SO_4^{2-} \quad (SO_3^{2-} \text{ - восстановитель}).$$

Затем уравняем по отдельности каждую полуреакцию. Причем сначала уравняем число атомов, подвергающихся окислению или восстановлению, затем остальные элементы и, наконец, заряды. Если реакция проводится в кислом водном растворе, к реагентам добавляют ионы H^+ и молекулы H_2O, чтобы уравнять число атомов водорода и кислорода. Аналогично, для реакции в щелочной среде, при составлении полных полуреакций прибавляют OH^- и H_2O. Соответствующее правило отражено в таблице (10.1).

В полуреакции для перманганат – иона в обеих частях уравнения есть по одному атому марганца. Однако в левой части содержатся четыре атома

кислорода, тогда как в правой части нет ни одного. Чтобы уравнять четыре атома кислорода, содержащиеся в MnO_4^- , следует ввести в число продуктов четыре молекулы H_2O:

$$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O.$$

Таблица 10.1

Добавление и связывание ионов кислорода при составлении полуреакций окисления – восстановления

Характер среды	Добавление ионов O^{2-}	Связывание ионов O^{2-}
кислая	$H_2O = O^{2-} + 2H^+$	$O^{2-} + 2H^+ = H_2O$
нейтральная	$H_2O = O^{2-} + 2H^+$	$O^{2-} + H_2O = 2OH^-$
щелочная	$2OH^- = O^{2-} + H_2O$	$O^{2-} + H_2O = 2OH^-$

Для того чтобы уравнять восемь атомов водорода, которые появились после предыдущей операции среди продуктов, добавим к исходным реагентам $8H^+$:

$$MnO_4^- + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O. \qquad (10.2)$$

На этой стадии в обеих частях полуреакции (10.2) содержится равное число атомов каждого элемента, но необходимо уравнять и заряды. Суммарный заряд реагентов в левой части составляет +8 + (-1) = +7, заряд продуктов равен +2 + 4·(0) = +2. Чтобы уравнять заряды, к левой части полуреакции (10.2) надо добавить пять электронов:

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O.$$

Выполнив аналогичные действия для сульфит - иона, придем к следу-

ющей полуреакции окисления:

$$SO_3^{2-} + H_2O - 2e^- \rightarrow SO_4^{2-} + 2H^+.$$

На последней стадии уравнение каждой полуреакции умножают на такой множитель, чтобы число электронов, присоединяемое в одной полуреакции, совпало с числом электронов, отдаваемых в другой полуреакции. Затем полуреакции суммируют и получают сбалансированное уравнение полной реакции.

В рассматриваемом примере полуреакцию с перманганат - ионом следует умножить на 2, а полуреакцию с сульфит - ионом умножить на 5. Полное сбалансированное уравнение представляет собой сумму полуреакций:

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2 \quad \left| \times 2 \right.$$
$$SO_3^{2-} + H_2O - 2e^- \rightarrow SO_4^{2-} + 2H^+ \quad \left| \times 5 \right.$$

$$2MnO_4^- + 16H^+ + 5SO_3^{2-} + 5H_2O \rightarrow 2Mn^{2+} + 8H_2O + 5SO_4^{2-} + 10H^+.$$

После сокращения в левой и правой части суммарного уравнения ионов водорода и молекул воды получим:

$$2MnO_4^- + 6H^+ + 5SO_3^{2-} \rightarrow 2Mn^{2+} + 5SO_4^{2-} + 3H_2O.$$

Теперь запишем полное уравнение окислительно-восстановительной реакции в молекулярной форме:

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5Na_2SO_3 = 2MnSO_4 + 5Na_2SO_4 + K_2SO_4 + 3H_2O.$$

Отметим, что уравнение составлено верно, если число атомов каждого химического элемента в левой и правой части уравнения совпадает.

Метод полуреакций - не единственный метод уравнивания окисли-

тельно – восстановительных взаимодействий. Отметим другой распространенный метод, называемый методом электронного баланса. В качестве примера рассмотрим ту же реакцию перманганата калия с сульфитом натрия в кислой среде.

Для уравнивания реакции методом электронного баланса, поступают следующим образом:

1. Определяют степень окисления каждого элемента в обеих частях уравнения для выяснения, какие элементы подвергаются окислению и восстановлению. В рассматриваемом примере степень окисления марганца изменяется от +7 в MnO_4^- до +2 в Mn^{2+}, а степень окисления серы изменяется от +4 в SO_3^{2-} до +6 в SO_4^{2-}.

2. Определяют изменение степени окисления каждого элемента при окислении или восстановлении. Эти изменения представляют в виде схемы:

$$Mn^{7+} + 5e^- \rightarrow Mn^{2+},$$
$$S^{4+} - 2e^- \rightarrow S^{6+}.$$

3. С учетом установленных изменений степеней окисления, уравнивают число электронов, отдаваемых ионом S^{4+} (восстановитель), и число электронов, присоединяемых ионом Mn^{7+} (окислитель):

$$\begin{array}{l} Mn^{7+} + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} \quad \left| \times 2, \right. \\ S^{4+} - 2e^- \rightarrow S^{6+} \quad \left| \times 5, \right. \end{array}$$
$$2Mn^{7+} + 5S^{4+} \rightarrow 2Mn^{2+} + 5S^{6+}.$$

4. После определения коэффициентов для окислителя и восстановителя, методом подбора уравнивают число атомов остальных элементов.

В рассмотренном примере итоговое уравнение реакции идентично тому, что было получено методом полуреакций (ионно – электронным методом).

Однако метод полуреакций менее трудоемок в плане дополнительного уравнивания ионов, сохраняющих степень окисления, и, кроме этого, позволяет подбирать среду реакции, если она заранее не известна.

Отметим, если в каждой из окислительно - восстановительных пар (в каждой из полуреакций) переносится одинаковое число электронов, то реакцию называют комплементарной, если неодинаковое - некомплементарной.

Комплементарная реакция:

$$2CeO_2 + 2FeSO_4 + 4H_2SO_4 = Ce_2(SO_4)_3 + Fe_2(SO_4)_3 + 4H_2O.$$

$$Fe^{2+} - 1e^- \rightarrow Fe^{3+},$$

$$Ce^{4+} + 1e^- \rightarrow Ce^{3+}.$$

Некомплементарная реакция:

$$2KMnO_4 + 10FeSO_4 + 8H_2SO_4 = 2MnSO_4 + 5Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 8H_2O.$$

$$2Fe^{2+} - 2e^- \rightarrow 2Fe^{3+},$$

$$Mn^{7+} + 5e^- \rightarrow Mn^{2+}.$$

Некомплементарные окислительно - восстановительные реакции обычно медленнее комплементарных, так как в случае некомплементарного взаимодействия механизм реакции более сложный, связанный с образованием промежуточных соединений.

Те реакции, в которых окисленная и восстановленная формы отличаются только числом электронов, проходят быстро. Медленно протекают окислительно - восстановительные реакции, в которых перенос электронов осуществляется атомами или группами атомов и сопровождается их перегруппировкой, например, реакции с участием перманганат (MnO_4^-) или бихромат ($Cr_2O_7^{2-}$) - ионов. Некоторые реакции по этой причине практически не идут, например, реакция с участием пары ClO_4^-/Cl^-, так как скорость ее чрез-

вычайно мала из - за необходимости разрушить устойчивую структуру иона ClO_4^-.

10.2. ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Любой контакт поверхности металла с раствором электролита сопровождается распределением зарядов в виде двойного электрического слоя. При этом возникающая разность потенциалов на границе металл - электролит определяется следующими процессами:

1) ионизация металла с образованием положительных ионов и свободных электронов («электронный газ»):

$$Me^0 \leftrightarrow Me^{z+} + ze^-. \qquad (10.3)$$

Данный процесс обусловлен особым строением кристаллической решетки металла, в узлах которой расположены катионы, находящиеся в равновесии со свободными электронами внешних электронных оболочек;

2) сольватация катионов при взаимодействии с молекулами L растворителя:

$$Me^{z+} + nL \leftrightarrow [MeL_n]^{z+}. \qquad (10.4)$$

Суммарный процесс можно представить следующей реакцией:

$$Me^{z+} + nL \leftrightarrow [MeL_n]^{z+} + ze^-. \qquad (10.5)$$

Каждому из процессов (10.3) и (10.4) соответствует свой тепловой эффект. Так, диссоциация протекает с поглощением энергии U_d, а сольватация с выделением U_{solv}. Поэтому соотношение U_d/ U_{solv} фактически определяет направление результирующего процесса (10.5). Например, когда $U_{solv} > U_d$,

происходит переход катионов металла в раствор.

Переход катионов в раствор характерен для активных металлов, например, для Zn, Cd, Fe. При этом раствор около поверхности металла приобретает избыточный положительный заряд, а поверхность металла - отрицательный; на границе металл – раствор возникает скачок потенциала. По мере увеличения концентрации катионов в растворе у поверхности металла выход ионов из металла уменьшается, а процесс их обратной адсорбции из раствора, наоборот, интенсифицируется. При равенстве скоростей этих процессов устанавливается динамическое равновесие.

Сольватированные (гидратированные – в случае водных растворов) катионы металла в растворе и оставшиеся в кристаллической решетке электроны образуют двойной электрический слой. Изменение потенциала φ в этом слое суммарно складывается из скачка потенциала ψ в слое жестко ориентированных катионов у поверхности металла (так называемый адсорбционный слой) и скачка потенциала ψ' в менее упорядоченном размытом слое (так называемый диффузный слой): $\varphi = \psi + \psi'$.

В противоположность рассмотренному случаю, из менее активных металлов, таких как Au, Ag, Cu катионы в раствор практически не переходят. Для этих металлов $U_{solv} < U_d$. Поэтому, если, например, металлическое серебро контактирует с раствором собственной соли, преобладает переход катионов серебра из раствора на поверхность металла. В результате поверхность металла заряжается положительно, а прилегающий к ней раствор – отрицательно.

Отметим существование еще одного механизма образования скачка потенциала. Двойной электрический слой также образуется при контакте инертного металла, например, Pt с раствором, содержащим окисленную или восстановленную форму какого - либо соединения.

Так, ион Fe^{3+} в растворе $FeCl_3$ в отсутствие восстановителей не может проявить окислительной способности. Однако, если в раствор поместить ме-

таллическую платину, то катион Fe^{3+} способен отнять от поверхности металла один электрон и восстановиться до состояния Fe^{2+}:

$$FeCl_3 + e^- \leftrightarrow FeCl_2 + Cl^-.$$

В результате поверхность платины приобретает положительный заряд, а прилегающий слой раствора – отрицательный за счет избытка ионов Cl^-. Возникающий положительный потенциал на платине будет тем выше, чем больше окислительная способность катиона металла в растворе. В общем случае этот потенциал определяется соотношением концентраций окисленной и восстановленной формы ионов в растворе и характеризует окислительно - восстановительную активность системы, например: Fe^{2+}, Fe^{3+}/Pt. Такой потенциал называют окислительно - восстановительным потенциалом.

Следует помнить, что во всех рассмотренных выше случаях причиной возникновения скачка потенциала является именно окислительно - восстановительный процесс на поверхности металла, погруженного в раствор электролита. Следовательно, значение этого потенциала также характеризует окислительно - восстановительные свойства системы.

Г. Нернст, изучая потенциалы различных электродных систем, установил, что величина этих потенциалов определяется следующими факторами:

1) природой веществ, составляющих окислительно - восстановительную систему (каждое вещество характеризуется своим значением потенциала);

2) соотношением между активностями (концентрациями) этих веществ;

3) температурой системы.

Соответствующая зависимость выражается уравнением, носящем имя автора - **Г. Нернста**:

$$E_{Ox/Red} = E^0_{Ox/Red} + \frac{2,3RT}{nF} \lg \frac{a_{Ox}}{a_{Red}}, \qquad (10.6)$$

где E^0 - стандартный электродный потенциал; n - число электронов, принимающих участие в электродном процессе; R - универсальная газовая постоянная; T - температура; F - постоянная Фарадея; a_{Ox}, a_{Red} - активности окисленной и восстановленной форм компонентов системы.

Физический смысл величины E^0 вытекает из уравнения (10.6): стандартный электродный потенциал – это потенциал системы при активности всех ее компонентов, равных единице. При выполнении данного условия $a_{Ox} = a_{Red} = 1$, получаем $\lg 1 = 0$ и $E = E^0$.

В том случае, если отдельные компоненты системы находятся в твердом состоянии или представляют собой газы, парциальное давление которых составляет одну атмосферу, их можно исключить из уравнения Нернста, т.к. их активности равны единице. Активности остальных компонентов следует возвести в степень, равную соответствующему стехиометрическому коэффициенту в уравнении окислительно - восстановительной реакции.

Отметим, что на практике для удобства в уравнение Нернста записывают молярные концентрации компонентов, а не их активности. Также часто постоянные величины объединяют в одну константу. Тогда для комнатной температуры (25 ^oC) уравнение Нернста принимает вид:

$$E_{Ox/Red} = E^0_{Ox/Red} + \frac{0,059}{n} \lg \frac{C_{Ox}}{C_{Red}}.$$

Рассмотрим в качестве примера общий вид уравнения Нернста для различных систем:

1) $Cu^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Cu^0$.

$$E_{Cu^{2+}/Cu^0} = E^0_{Cu^{2+}/Cu^0} + \frac{0,059}{2} \lg C(Cu^{2+}).$$

2) $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \leftrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O.$

$$E_{MnO_4^-/Mn^{2+}} = E^0_{MnO_4^-/Mn^{2+}} + \frac{0,059}{5} \lg \frac{C(MnO_4^-) \cdot C^8(H^+)}{C(Mn^{2+})}.$$

Часто на ход окислительно - восстановительного процесса оказывает большое влияние характер среды. Иногда влияние среды на ход окислительно - восстановительного процесса так велико, что некоторые реакции могут осуществляться только в кислой или щелочной среде.

От pH среды нередко зависит и количество электронов, присоединяемых молекулой (ионом) окислителя или отдаваемых молекулой (ионом) восстановителя. Так, например, перманганат калия $KMnO_4$ при диссоциации в водных растворах образует ионы MnO_4^-. Эти ионы, выступая в роли окислителя, в кислой среде восстанавливаются с образованием иона Mn^{2+}, в сильнощелочной - с образованием MnO_4^{2-} - иона, в слабощелочной и нейтральной - с образованием молекул MnO_2.

Обычно при анализе окислительно - восстановительного процесса его разбивают на две полуреакции:

1) восстановительную, включающую ион (атом) - восстановитель, вместе со своей окисленной формой;

2) окислительную, включающую ион (атом) - окислитель, вместе со своей восстановленной формой.

Часто полуреакции включают не только атомы, изменяющие свою степень окисления, но и взаимодействующие с ними ионы H^+ и OH^- среды. Любая полуреакция, являющаяся в одной окислительно - восстановительной реакции окислительной, может выступить в другой реакции в роли восстановительной.

Для решения вопроса, может ли одна полуреакция по отношению к другой полуреакции выступить в качестве восстановительной или окисли-

тельной, используют таблицу стандартных электродных потенциалов (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Значения стандартных электродных потенциалов

Окислительно – восстановительная полуреакция	E^0, В
$Ag^+ + e^- \leftrightarrow Ag$	+0,799
$Al^{3+} + 3e^- \leftrightarrow Al$	-1,66
$Ba^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Ba$	-2,90
$Br_2 + 2e^- \leftrightarrow 2Br^-$	+1,065
$Ca^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Ca$	-2,87
$Cd^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Cd$	-0,403
$Ce^{4+} + e^- \leftrightarrow Ce^{3+}$	+1,61
$Cl_2 + 2e^- \leftrightarrow 2C1^-$	+1,359
$Co^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Co$	-0,277
$Co^{3+} + e^- \leftrightarrow Co^{2+}$	+1,842
$Cr^{3+} + 3e^- \leftrightarrow Cr$	-0,74
$Cu^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Cu$	+0,37
$Fe^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Fe$	-0,440
$Fe^{3+} + e^- \leftrightarrow Fe^{2+}$	+0,771
$2H^+ + 2e^- \leftrightarrow H_2$	0,000
$Hg_2^{2+} + 2e^- \leftrightarrow 2Hg$	+0,789
$2Hg^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Hg_2^{2+}$	+0,920
$Hg^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Hg$	+0,854
$Li^+ + e^- \leftrightarrow LI$	-3,05
$Mg^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Mg$	-2,37
$Mn^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Mn$	-1,18
$Na^+ + e^- \leftrightarrow Na$	-2,71

$Ni^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Ni$	-0,28
$Pb^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Pb$	-0,126
$Sn^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Sn$	-0,136
$Zn^{2+} + 2e^- \leftrightarrow Zn$	-0,763

В таблице 10.2 каждая из окислительно - восстановительных полуреакций охарактеризована величиной стандартного электродного потенциала при 25 °С. Чем больше значение потенциала E°, тем выше окислительная способность. Окисленная форма иона (атома) в полуреакции, имеющей более высокое значение E°, может принимать электроны от восстановленной формы другого иона (атома) из полуреакции, имеющей меньшее значение E°. После перехода электронов окисленная форма иона (атома) в первой полуреакции (высшая степень окисления) превращается в восстановленную форму (низшая степень окисления), а восстановленная форма иона (атома) второй полуреакции - в окисленную. Например, ионы MnO_4^- в кислой среде (E° = 1,51 В) могут служить окислителями для хлорид - ионов Cl^- (E° = 1,36 В), превращая их в молекулы Cl_2, переходя при этом в ионы Mn^{2+}.

Потенциалы полуреакций указывают, насколько легко окисляются или восстанавливаются соответствующие частицы. Чем более положительна величина E° для полуреакции, тем больше тенденция к протеканию этой полуреакции в том направлении, в котором она записана.

К наиболее распространенным окислителям относятся галогены, кислород и такие анионы, как, например, MnO_4^-, ClO_3^- и NO_3^-, в которых центральный атом имеет высокую положительную степень окисления. В качестве окислителей иногда также используются ионы металлов с высокими положительными степенями окисления, как, например, Ce^{4+}, который легко восстанавливается до Ce^{3+}.

В качестве восстановителей часто используются водород H_2 и многие металлы. Растворы восстановителей трудно хранить длительное время, поскольку они взаимодействуют с присутствующим в воздухе O_2, являющимся хорошим окислителем.

Разность между стандартными потенциалами полуреакций определяет возможность протекания интересующей реакции. Предположим, речь идет об осуществлении окислительно - восстановительного взаимодействия:

окислитель I + восстановитель II = восстановитель I + окислитель II

с известными потенциалами $E^0_{(\text{окислитель I/ восстановитель I})}$ и $E^0_{(\text{окислитель II/восстановитель II})}$.

Решить вопрос о возможности протекания данного взаимодействия можно путем сравнения величины потенциала полуреакции, используемой в качестве окислительной ($E^0_{(\text{окислитель I/ восстановитель I})}$) и потенциала полуреакции, используемой в качестве восстановительной ($E^0_{(\text{окислитель II/восстановитель II})}$). Реакция будет протекать в прямом направлении (слева направо) при большем потенциале первой полуреакции. Если же для первой полуреакции потенциал меньше, предполагаемая реакция не пойдет; принципиально возможной будет обратная реакция.

Например, выясним, в каком направлении будет протекать реакция между диоксидом свинца PbO_2 и иодидом калия KI в кислой среде:

$$2KI + PbO_2 + 2H_2SO_4 = I_2 + K_2SO_4 + PbSO_4 + 2H_2O.$$

Для ответа на поставленный вопрос сравним величины соответствующих окислительно – восстановительных потенциалов: $E^0(PbO_2/Pb) = + 1{,}68$ В; $E^0(I_2/2I^-) = + 0{,}53$ В. Первый потенциал больше, следовательно, окислителем будет выступать PbO_2, а рассматриваемая реакция будет протекать слева направо.

10.3. ГАЛЬВАНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В принципе энергию, выделяющуюся в любой самопроизвольной окислительно-восстановительной реакции, можно непосредственно исполь-

зовать для выполнения электрической работы. Это осуществлено в гальваническом элементе, представляющем собой устройство, в котором перенос электронов происходит по внешнему пути, а не непосредственно между реагентами.

Одна из таких самопроизвольных реакций происходит, если кусочек цинка поместить в раствор, содержащий ионы Cu^{2+}. При протекании этой реакции голубая окраска раствора, характерная для ионов Cu^{2+}, исчезает, и на поверхности цинка начинает осаждаться металлическая медь. Одновременно происходит растворение цинка.

Эти превращения описываются уравнением:

$$Zn_{(тв.)} + Cu^{2+}{}_{(водн.)} = Zn^{2+}{}_{(водн.)} + Cu_{(тв.)}.$$

На рис. 10.1 показан гальванический элемент, в котором используется данная окислительно - восстановительная реакция между Zn и Cu^{2+}. На ри-

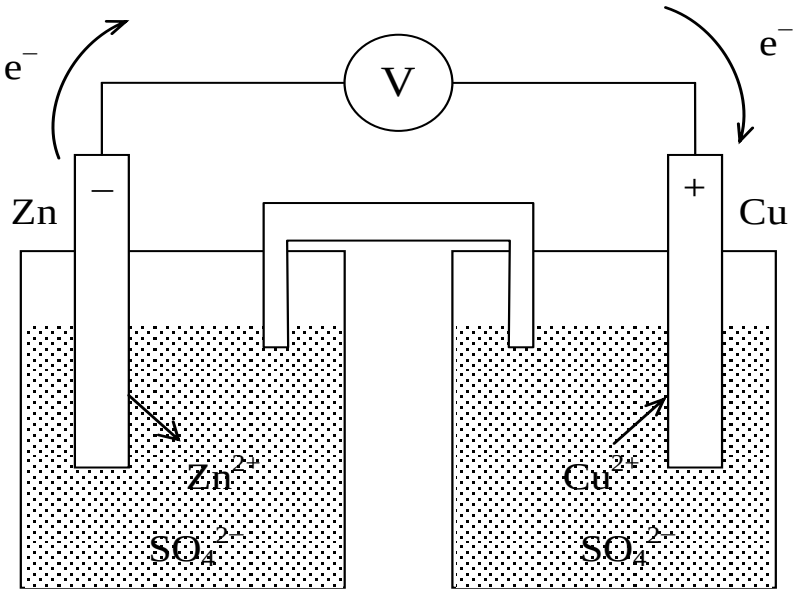


Рис. 10.1. Медно – цинковый гальванический элемент

сунке видно, что металлический цинк и $Cu^{2+}_{(водн.)}$ не находятся в непосредственном контакте друг с другом. Следовательно, Cu^{2+} может восстанавливаться только в результате перетекания электронов по проводнику, соединяющему цинковый и медный электроды (т. е. по внешней цепи).

По определению электрод, на котором происходит окисление, называется анодом, а электрод, на котором происходит восстановление, называется катодом. Чтобы запомнить эти определения, полезно воспользоваться следующим мнемоническим правилом: слова «окисление» и «анод» начинаются с гласных букв, а «восстановление» и «катод» - с согласных.

В рассматриваемом примере Zn является анодом, а Cu - катодом:

а) на аноде $Zn - 2e^- \rightarrow Zn^{2+}$ (окисление),

б) на катоде $Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$ (восстановление).

Гальванический элемент можно рассматривать как устройство, состоящее из двух полуэлементов. Один из них соответствует процессу окисления, а другой - процессу восстановления. При окислении металлического цинка на аноде появляются свободные электроны. Они перемещаются по внешней цепи к катоду, где происходит их поглощение ионами Cu^{2+}. Электроны самопроизвольно перемещаются от отрицательного электрода к положительному, следовательно, анод является отрицательным электродом, а катод - положительным.

Во время работы гальванического элемента, изображенного на рис. 10.1, окисление Zn приводит к появлению дополнительных ионов Zn^{2+} в анодном пространстве элемента. Если не провести нейтрализацию их положительного заряда, дальнейшее окисление приостановится. Подобно этому восстановление Cu^{2+} вызывает появление избыточного отрицательного заряда в растворе в катодном пространстве. Избежать накопления избыточных зарядов в приэлектродном пространстве можно, используя «солевой мостик». Солевой мостик представляет собой U - образную трубку, содержащую раствор какого

- либо сильного электролита ($NaNO_3$, NH_4Cl), ионы которого не реагируют с другими ионами в гальваническом элементе, а также с материалами, из которых сделаны электроды. Концы U - образной трубки закрывают фильтровальной бумагой, чтобы при перевертывании трубки электролит не вылился из нее.

При протекании на электродах процессов окисления и восстановления ионы из солевого мостика проникают в анодное и катодное пространство гальванического элемента и нейтрализуют избыточные заряды.

10.3.1. Электродвижущая сила (ЭДС) гальванического элемента

Перемещение электронов по внешней цепи гальванического элемента обусловлено так называемой электродвижущей силой (сокращенно ЭДС) элемента. ЭДС измеряется в единицах электрического напряжения (вольтах) и иначе называется напряжением, или потенциалом, гальванического элемента. Один вольт представляет собой ЭДС, необходимую для того, чтобы заряд в 1 Кл приобрел энергию в 1 Дж: 1В = 1 Дж/Кл.

Точное измерение ЭДС гальванического элемента требует применения специальных приборов. Эти измерения выполняют таким образом, чтобы через гальванический элемент протекал ничтожно малый ток. Если допустить протекание значительного тока, кажущееся напряжение гальванического элемента понижается, так как он обладает внутренним сопротивлением. Кроме этого, вокруг электродов произойдет изменение концентраций ионов, что вызовет изменение электродных потенциалов.

ЭДС, создаваемая гальваническим элементом, обозначается буквой Е. Если гальванический элемент работает при стандартных условиях, то он создает стандартную ЭДС, обозначаемую символом Е°. Напомним, что стандартным условиям соответствуют 1 моль/л концентрация реагентов и продуктов в растворах и давление в 1 атм для газообразных участников реакций.

Медно - цинковый гальванический элемент в стандартных условиях создает ЭДС величиной 1,10 В.

ЭДС любого гальванического элемента зависит от протекающей в нем реакции, от концентраций реагентов и продуктов, от температуры.

Непосредственное измерение потенциалов анода и катода по отдельности невозможно. Однако, если одной полуреакции условно приписать стандартный электродный потенциал, то стандартные потенциалы других полуреакций можно определять относительно этого условного эталона. В качестве такого условного эталона выбрана полуреакция, соответствующая восстановлению ионов H^+ с образованием молекул H_2. Ей условно приписывается стандартный потенциал, равный 0 В:

$$2H^+ + 2e^- \leftrightarrow H_2 \quad E^0 = 0 \text{ В}.$$

Гальванический элемент, в котором протекает реакция, например, между Zn и H^+, характеризуется окислительно – восстановительным процессом:

$$Zn + 2H^+ \leftrightarrow Zn^{2+} + H_2.$$

Окисление цинка происходит в анодном, а восстановление H^+ - в катодном отделении. В подобном гальваническом элементе работающий при стандартных условиях ($C(H^+) = 1$ моль/л и $p(H_2) = 1$ атм.) стандартный водородный электрод состоит из платиновой проволоки и платиновой фольги, покрытой тонко измельченной платиной – платиновой чернью. Электрод заключен в стеклянную трубку, в которой собирается газообразный водород, выделяющийся над поверхностью платины.

Описанный гальванический элемент создает стандартную ЭДС $E° = 0{,}76$ В. Принимая во внимание потенциал стандартного водородного

электрода ($E^0 = 0$), можно вычислить стандартный потенциал Zn:

$$E^0_{\text{элемента}} = E^0_{\text{катод}} - E^0_{\text{анод}}, \quad 0{,}76\ \text{В} = 0 - E^0_{\text{анод}}.$$

Таким образом, цинку приписывается стандартный потенциал, составляющий - 0,76 В.

Стандартные потенциалы других электродных полуреакций устанавливаются путем измерений ЭДС гальванических элементов аналогичным образом.

Данные об электродных потенциалах приведены в табл. 10.2. Комбинируя между собой соответствующие реакции, можно по их электродным потенциалам вычислять стандартные ЭДС самых разнообразных гальванических элементов.

10.3.2. Гальванические элементы, применяемые на практике

Гальванические элементы получили широкое применение как удобные источники энергии, важным достоинством которых является компактность. Для создания гальванического элемента в принципе подходит любая самопроизвольная окислительно - восстановительная реакция. Лабораторные образцы гальванических элементов с солевым мостиком позволяют понять принцип действия электрохимического элемента. Однако они неудобны для практического использования.

Ниже рассмотрено устройство распространенных электрических батарей, применяемых на практике. Электрическая батарея, как правило, представляет собой несколько соединенных друг с другом гальванических элементов. При последовательном соединении нескольких гальванических элементов ЭДС батареи равна сумме ЭДС отдельных элементов.

Свинцовая аккумуляторная батарея

Одним из вариантов широко применяемых гальванических элементов является свинцовая аккумуляторная батарея. Свинцовая аккумуляторная батарея напряжением 12 В, используемая в автомобилях, состоит из шести гальванических элементов, каждый из которых дает напряжение 2 В. Анод такого элемента выполнен из свинца, а катод - из диоксида свинца PbO_2, заполняющего металлическую решетку. Оба электрода погружены в серную кислоту. В процессе разрядки батареи в ней протекают электродные реакции:

(анод) $Pb + SO_4^{2-} - 2e^- \rightarrow PbSO_4\downarrow$,

(катод) $PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^- \rightarrow PbSO_4\downarrow + 2H_2O$,

---

$$Pb + PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O. \qquad (10.7)$$

Между Pb и PbO_2 не должно быть прямого физического контакта. Чтобы предотвратить соприкосновение электродов, между ними помещают перегородки из стекловолокна. Для повышения силы снимаемого тока в каждом элементе помещено несколько анодных и катодных пластин.

Из уравнения (10.7) видно, что в процессе разряда свинцовой аккумуляторной батареи расходуется серная кислота. Концентрированная серная кислота имеет высокую плотность, но в процессе разрядки батареи плотность электролита уменьшается.

Электролит в свежезаряженной батарее имеет плотность 1,25 - 1,30 г/см^3. Если его плотность становится ниже 1,20 г/см^3, батарея нуждается в перезарядке. Плотность электролита измеряют с помощью ареометра. Это устройство снабжено поплавком, глубина погружения в жидкость которого зависит от ее плотности.

Для заряда свинцовой аккумуляторной батареи используется внешний источник энергии, позволяющий обращать направление самопроизвольной окислительно - восстановительной реакции (10.7).

Перезарядка возможна благодаря тому, что $PbSO_4$, образующийся во время разряда батареи, не отделяется от электродов. Поэтому при подключении внешнего источника энергии электроны перетекают с одного электрода на другой, а $PbSO_4$ превращается в Pb на одном электроде и в PbO_2 на другом, т. е. вновь образуются вещества, имевшиеся в свежезаряженной батарее. При слишком быстрой зарядке батареи возможно разложение воды на H_2 и O_2. Смесь H_2 и O_2 взрывоопасна, кроме того, эта вторичная реакция приводит к сокращению срока службы батареи. Выделение газообразных водорода и кислорода приводит к механическому удалению Pb, PbO_2 или $PbSO_4$ с поверхности электродов и их накоплению в виде шлама в нижней части батареи. Со временем это может вызвать короткое замыкание в батарее и вывести ее из строя.

Сухой элемент

Разновидность гальванических элементов, называемая сухим элементом, получила широкую известность благодаря тому, что этот элемент используется для питания компактных электрических фонарей, радиоприемников и другой бытовой электронной техники.

В одном из вариантов изготовления сухого элемента анод выполняется в виде цинковой оболочки, наполненной влажной пастой из MnO_2, NH_4Cl и угольного порошка. В пасту погружен инертный катод - графитовый стержень. Снаружи сухой элемент имеет декоративную защитную оболочку из картона или полимерного материала. В этом гальваническом элементе протекают следующие электродные реакции:

(анод) $Zn - 2e^- \rightarrow Zn^{2+}$,

(катод) $2NH_4^+ + 2MnO_2 + 2e^- \rightarrow Mn_2O_3 + 2NH_3 + H_2O$.

В другом варианте (щелочном) вместо NH_4Cl используется КОН. Анодная реакция и в этом случае включает окисление Zn, а катодная реакция - восстановление MnO_2. Сухой элемент такого типа обладает большей работоспособностью, чем кислый, поскольку в нем не возникает коррозии цинкового анода, имеющей место при взаимодействии металла с NH_4Cl в присутствии влаги. Однако щелочные сухие элементы дороже. В любом варианте сухой элемент дает напряжение около 1,5 В.

Щелочной аккумулятор. Никель – кадмиевая батарея

Поскольку сухие элементы нельзя перезаряжать, их приходится заменять. Поэтому большое распространение получила никель - кадмиевая перезаряжаемая батарея, удобная для применения в различных бытовых приборах, питаемых аккумуляторами, и в переносных электронных устройствах. Анод этой батареи изготавливается из металлического кадмия, катод – из диоксида никеля. В качестве электролита используется щелочь (KOH, LiOH).

При работе батареи протекают следующие электродные реакции:

(анод) $Cd + 2OH^- - 2e^- \rightarrow Cd(OH)_2\downarrow$,

(катод) $NiO_2 + 2H_2O + 2e^- \rightarrow Ni(OH)_2\downarrow + 2OH^-$.

Как и в свинцовой аккумуляторной батарее, в никель - кадмиевой батарее продукты реакции не отделяются от электродов. Это позволяет легко проводить обратные реакции при перезарядке. Поскольку ни на стадии раз-

ряда, ни на стадии заряда не происходит выделения газов, никель - кадмиевую батарею можно герметизировать, что представляет собой значительное удобство при эксплуатации.

Топливный элемент

Многие вещества могут быть использованы в качестве топлива, так как их взаимодействие с кислородом воздуха сопровождается экзотермическим тепловым эффектом. Получаемую при горении тепловую энергию нередко превращают в электрическую энергию. Поскольку горение представляет собой окислительно - восстановительную реакцию, последнюю можно использовать для прямого получения электрического тока, создав соответствующий гальванический элемент.

Прямое преобразование химической энергии в электрическую имеет большие преимущества по сравнению с обычным способом превращения химической энергии сначала в тепловую и лишь после этого в электрическую. При получении электрической энергии из тепловой последнюю используют для превращения воды в пар. Затем пар приводит в действие турбину, которая вращает генератор. При превращении энергии из одной формы в другую или при ее передаче от одного вещества к другому происходят неизбежные потери энергии. Обычно в электрическую энергию удается превратить не более 40 % энергии, полученной в результате сгорания топлива; остальная часть рассеивается в окружающую среду. Прямое получение электрической энергии из топлива при помощи гальванических элементов обеспечивает более высокий коэффициент преобразования химической энергии топлив в электрическую энергию. Гальванические элементы, в которых реагентами служат способные к горению вещества, называются **топливными элементами.**

Одной из возникающих при разработке топливных элементов проблем является высокая температура, сопровождающая работу большинства подобных элементов. Разработан низкотемпературный топливный элемент, в

котором используется H_2, но пока что этот топливный элемент дорог для широкого применения.

В кислородно - водородном топливном элементе протекают следующие электродные реакции:

(анод) $2H_2 + 4OH^- - 4e^- \rightarrow 4H_2O$,

(катод) $O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$.

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.

Электроды данного элемента выполнены в виде полых трубок из пористого прессованного угля, пропитанного катализатором; электролитом служит КОН (рис. 10.2). Топливный элемент работает до тех пор, пока не прекращается подача реагентов.

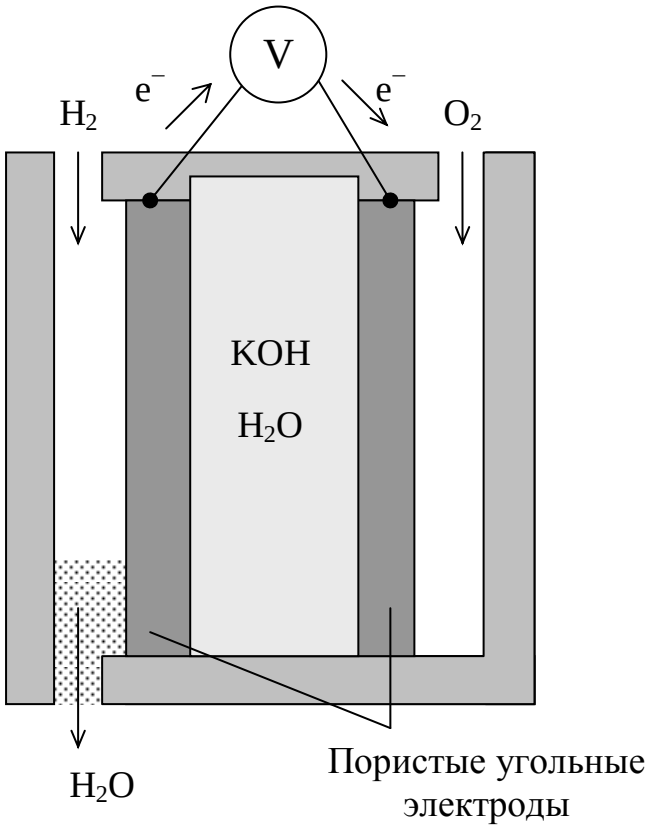


Рис. 10.2. Кислородно - водородный топливный элемент

10.4. ЭЛЕКТРОЛИЗ

С помощью гальванических элементов можно использовать самопроизвольные окислительно - восстановительные реакции для получения электрической энергии. С другой стороны, источник электрической энергии позволяет проводить несамопроизвольные окислительно - восстановительные реакции, например, разлагать расплавленный хлорид натрия на составляющие его элементы: $2NaC1 = 2Na + Cl_2$.

Подобные процессы, которые можно осуществить за счет энергии внешнего источника электрического тока, называются реакциями электролиза и проводятся в электролитических ячейках (электролизерах). Электролитическая ячейка состоит из двух электродов, погруженных в расплавленную соль или водный раствор. Электрическую энергию для проведения электролиза получают от внешнего источника постоянного электрического тока.

Электролиз – это совокупность окислительно - восстановительных процессов, протекающих на электродах под действием внешнего источника постоянного тока.

При электролизе расплавленного NaC1 ионы Na^+ притягиваются и затем присоединяют электроны на отрицательном электроде, восстанавливаясь до металла. Точно так же происходит перемещение ионов $C1^-$ к положительному электроду, где они отдают электроны и окисляются (рис. 10.3)

Как и в гальваническом элементе, электрод, на котором происходит восстановление, называется катодом, а электрод, на котором происходит окисление, называется анодом. В рассматриваемом случае в электролитической ячейке протекают следующие реакции:

(анод) $2Cl^-$ (расплав) $- 2e^- \rightarrow Cl_2$ (газ),

(катод) $2Na^+$ (расплав) $+ 2e^- \rightarrow 2Na$ (расплав).

$2Na^+$ (расплав) $+ 2Cl^-$ (расплав) $\rightarrow 2Na$ (расплав) $+ Cl_2$ (газ).

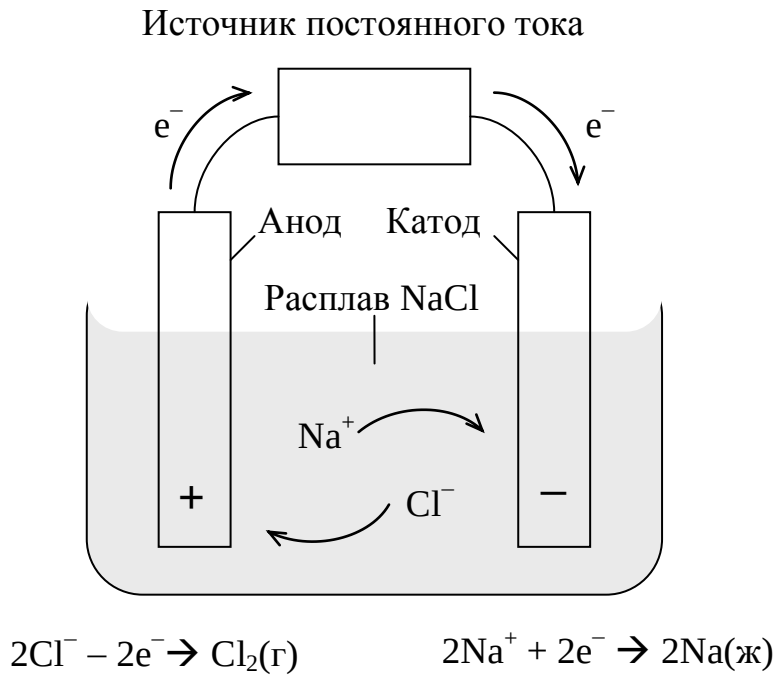


Рис. 10.3. Схема электролиза расплавленного NaCl

Рассмотренный процесс электролиза хлорида натрия используется для промышленного получения щелочного металла. Расплавленный NaCl подвергают электролизу в специальном электролизере, сконструированном таким образом, чтобы Na и Cl_2 не могли вступать в контакт друг с другом и снова образовывать NaCl. Кроме того, предусмотрено, чтобы натрий не вступал в контакт с воздухом и не образовывал оксид.

10.4.1. Электролиз водных растворов электролитов

При электролизе водных растворов солей необходимо учитывать

наличие конкурирующих процессов на катоде и аноде из-за присутствия молекул воды. Это вызвано тем, что, например, на катоде в первую очередь будут восстанавливаться ионы с большим значением электродного потенциала. Так, натрий нельзя получить электролизом водного раствора NaCl, потому что на катоде ионы водорода молекул воды восстанавливаются легче, чем ион Na^+ в растворе:

$$2H_2O + 2e^- \rightarrow H_2 + 2OH^- \qquad E^0 = -0{,}83\ В,$$

$$Na^+ + e^- \rightarrow Na \qquad E^0 = -2{,}71 В.$$

Следовательно, при электролизе водного раствора NaCl на катоде вместо натрия должен выделяться газообразный водород.

На другом электроде - аноде в случае рассматриваемой соли возможно окисление Cl^- или H_2O:

$$2Cl^- - 2e^- \rightarrow C1_2 \quad E^0 = -1{,}36\ В,$$

$$2H_2O - 4e^- \rightarrow 4H^+ + O_2 \quad E^0 = -1{,}23\ В.$$

Эти стандартные окислительные потенциалы отличаются друг от друга не слишком сильно, но из их сравнения следует, что молекулы H_2O должны окисляться с большей легкостью, чем ионы Cl^-. Однако для осуществления реакции иногда требуется намного более высокое напряжение, чем то, которое указывают электродные потенциалы. Дополнительное напряжение, необходимое для проведения электролиза, называется **перенапряжением**. Электроосаждению металлов соответствуют низкие значения перенапряжения, но перенапряжения, соответствующие выделению газообразного водорода или газообразного кислорода, обычно весьма значительны. В рассматриваемом примере перенапряжение, необходимое для образования H_2, настолько велико, что Cl^- окисляется легче, чем H_2O. По этой причине при электролизе водных

растворов NaCl (рассолов) образуются H_2 и Cl_2, если только концентрация Cl^- не слишком низка. При этом протекают следующие реакции:

$$\text{(анод)} \quad 2Cl^- - 2e^- \rightarrow Cl_2,$$

$$\underline{\text{(катод)} \quad 2H_2O + 2e^- \rightarrow H_2 + 2OH^-.}$$

$$2Cl^- + 2H_2O \rightarrow Cl_2 + H_2 + 2OH^-.$$

Для образования H_2 и Cl_2 из раствора при стандартных условиях требуется минимальное напряжение 2,06 В. На практике для проведения электролиза используют более высокое напряжение, что объясняется наличием внутреннего сопротивления электролитической ячейки, а также отмеченным выше перенапряжением.

При электролизе водных растворов активных металлов, как, например, Na, Ca, Mg и Al, характеризующихся довольно большими отрицательными значениями стандартных электродных потенциалов, вместо соответствующего металла на катоде выделяется H_2. Поэтому такие активные металлы получают электролизом расплавов их солей. Выше мы уже кратко обсудили электролитическое получение натрия. Рассмотрим еще один пример - получение алюминия.

Для промышленного получения алюминия используют оксид Al_2O_3, добываемый в виде минерала боксита. Оксид алюминия не проводит электрический ток и имеет очень высокую температуру плавления свыше 2000 ^{0}C. Поэтому после предварительной очистки Al_2O_3 растворяют в расплавленном криолите Na_3AlF_6, в результате чего образуется расплав, проводящий электрический ток. Расплавленную смесь подвергают электролизу при температуре около 950 ^{0}C, используя угольные электроды. При электролизе на катоде выделяется алюминий, а на аноде – кислород, взаимодействующий с материалом анода:

(катод) $Al^{3+} + 3e^- = Al$ (расплав),

(анод) $C + 2O^{2-} - 4e^- = CO_2$ (газ).

10.4.2. Электролиз с активным анодом

Обсуждая электролиз расплава или раствора NaCl, мы считали электроды инертными. Это означает, что сами электроды в процессе электролиза не вступают в реакцию, а просто служат поверхностями, на которых происходят окисление и восстановление. Однако в электролитическом процессе получения алюминия анод вступает в реакцию. Следовательно, электродные реакции включают не только окисление и восстановление растворителя и растворенных веществ, но и самих электродов. При электролизе водных растворов металлический электрод окисляется, если его потенциал меньше окислительно – восстановительного потенциала воды. Например, медь окисляется легче, чем вода:

$$Cu - 2e^- = Cu^{2+} \qquad E° = 0{,}34 \text{ В}.$$

$$2H_2O - 4e^- = 4H^+ + O_2 \qquad E^o = 1{,}23 \text{ В}.$$

К одному из многих интересных применений таких электролизных процессов относится рафинирование, или очистка, металлической меди. В промышленности соединения меди восстанавливают с помощью химических восстановителей. Например, для восстановления меди в CuS через расплавленную руду продувают воздух: $CuS + O_2 = Cu + SO_2$.

Полученная таким способом металлическая медь называется губчатой; она имеет чистоту приблизительно 99 % и содержит примеси железа, цинка, золота и серебра, а также других веществ. Некоторые примеси значительно снижают электропроводность металлической меди. Поэтому медь, идущую на изготовление электрических проводов, подвергают дальнейшей очистке. Такую очистку проводят путем электролиза. Губчатую медь помещают в элек-

тролизер и подключают к внешнему источнику тока в качестве анода. Тонкие листы чистой меди играют роль катода; электролитом служит раствор $CuSO_4$. При пропускании электрического тока медь растворяется на аноде и осаждается на катоде:

$$(\text{анод})\ Cu - 2e^- = Cu^{2+},$$

$$(\text{катод})\ Cu^{2+} + 2e^- = Cu.$$

Такие металлы, как цинк и железо, которые окисляются легче, чем медь, вместе с ней растворяются на аноде. Поскольку они восстанавливаются труднее, чем медь, регулируя напряжение, можно предотвратить их осаждение на катоде. Такие металлы, как серебро и золото, которые окисляются труднее, чем медь, не растворяются на аноде. По мере растворения меди они падают с анода и скапливаются под ним на дне ванны в виде ила. Анодный ил периодически извлекают из электролитической ванны в процессе ее очистки. Он служит важным источником получения золота и серебра.

Другим интересным применением электролиза является покрытие металлов. Если, например, в описанной выше электролитической ячейке вместо меди сделать катодом какой - либо другой металл, в процессе электролиза на нем будет образовываться медное покрытие. Вместо меди можно нанести другой металл. При этом предмет, на который хотят нанести покрытие, делают катодом в электролитической ячейке. Металл, который наносят на другие поверхности, делают анодом. Нанесенное покрытие защищает различные предметы от коррозии и улучшает их внешний вид. Многие наружные части автомобилей, например бамперы и дверные ручки, электролитически покрывают хромом.

10.4.3. Количественные аспекты электролиза

Количество продуктов химической реакции, происходящей в электро-

литической ячейке, прямо пропорционально количеству электричества, проходящему через ячейку. Например, при пропускании через электролитическую ячейку 1 моля электронов осаждается 1 моль металлического Na, а при пропускании 2 молей электронов - 2 моля Na.

Аналогично, для образования 1 моля меди из Cu^{2+} требуется 2 моля электронов, а для образования 1 моля алюминия из Al^{3+} - 3 моля электронов.

Количество электричества, протекающего через электрическую цепь, и в частности через электролитическую ячейку, измеряется в кулонах. 96 500 Кулонов (Кл) составляют 1 Фарадей: 1 Ф = 96 500 Кл = заряд 1 моля электронов.

Кулон представляет собой такой электрический заряд, который протекает за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер (А). Следовательно, чтобы определить, какое количество электричества Q (в кулонах) пропущено через электрохимическую ячейку, нужно умножить силу тока I в амперах на время его пропускания t в секундах: $Q = I \cdot t$.

10.5. ПРИКЛАДНАЯ ЭЛЕКТРОХИМИЯ

Эффективность промышленного производства в немалой степени зависит от долговечности и надежности применяемого оборудования. В первую очередь это относится к механизмам и конструкциям, изготовленным из различных металлов. На практике металлическое оборудование подвергается не только тем или иным механическим нагрузкам, оно испытывает и различные виды химического воздействия, вызывающие коррозионные процессы. Так, согласно имеющимся оценкам, примерно 15 % ежегодного мирового производства железа идёт на замену металлических изделий, пришедших в негодность из-за коррозионных повреждений.

10.5.1. Химическая коррозия металлов

Коррозией металлов и сплавов называется их химическое разрушение, обусловленное взаимодействием металлических материалов с окружающей средой. В процессе коррозии протекают реакции окисления - восстановления, в которых окислителем является среда, контактирующая с металлами.

В зависимости от механизма протекания коррозия металлов может быть химическая и электрохимическая.

При химической коррозии происходит непосредственное взаимодействие металла с агрессивной средой, не являющейся электролитом. Причем агрессивная среда может быть как в газообразном, так и в жидком состоянии.

Например, при действии кислорода или хлора протекают реакции с образованием соответствующих продуктов - оксидов или хлоридов металлов, например, железа:

$$4Fe + 3O_2 = 2Fe_2O_3,$$
$$2Fe + 3Cl_2 = 2FeCl_3.$$

Скорость окисления металлов в газах зависит от природы металла, состава газа и температуры. В результате химической коррозии металл покрывается слоем продуктов реакции окисления (чаще всего пленкой оксида или гидроксида). Образующаяся пленка препятствует диффузии окислителя к металлу и тем самым замедляет, а иногда и прекращает дальнейшую коррозию металла. Поэтому большое значение для скорости протекания химической коррозии имеют состав и структура образующихся продуктов окисления.

Например, алюминий в сухом воздухе, или под действием кислорода,

растворенного в воде, покрывается тонкой (50 – 100 $\overset{0}{A}$), но очень плотной пленкой оксида, после чего окисление металла практически прекращается. В случае железа оксидные слои (FeO или Fe_3O_4) не образуют сплошной пленки на его поверхности и не предохраняют металл от дальнейшего разрушения.

10.5.2. Электрохимическая коррозия

Электрохимическая коррозия - процесс самопроизвольного разрушения одного из контактирующих в токопроводящей среде металлов. Важно, что токопроводящей средой может быть не только раствор какого-либо электролита, но даже тонкая пленка влаги, практически всегда присутствующая на поверхности металлов и металлических конструкций, эксплуатируемых в воздушной среде.

Коррозия металлов в электролитах является результатом образования короткозамкнутых гальванических элементов. В таком гальваническом элементе отрицательным полюсом работает тот металл, потенциал которого меньше (отрицательнее), а второй металл служит положительным полюсом.

Разрушается (растворяется) тот металл, который имеет более отрицательный потенциал - это анод. Анодное разрушение поверхности металла собственно и составляет процесс электрохимической коррозии.

На положительном полюсе - катоде происходит тот процесс восстановления из раствора, потенциал которого положительнее.

В зависимости от состава раствора, находящегося около положительного электрода, возможно протекание одного из трёх конкурирующих процессов:

1. В нейтральном и щелочном растворах, не содержащих ионов металлов, потенциал которых более положителен, чем - 0,8 В, происходит восстановление растворенного в воде молекулярного кислорода. В этом случае

процесс называется коррозией с кислородной деполяризацией:

$$O_2 + 2H_2O + 4e^- = 4OH^-.$$

Пример. Контакт металлического железа (E^0 = - 0,44 В) с цинком (E^0 = - 0,76 В) в присутствии воды (рис. 10.4) сопровождается следующими электродными процессами:

$$\text{(анод)}\ \ Zn - 2e^- = Zn^{2+},$$
$$\underline{\text{(катод)}\ O_2 + 2H_2O + 4e^- = 4OH^-.}$$
$$2Zn + O_2 + 2H_2O = 2Zn(OH)_2.$$

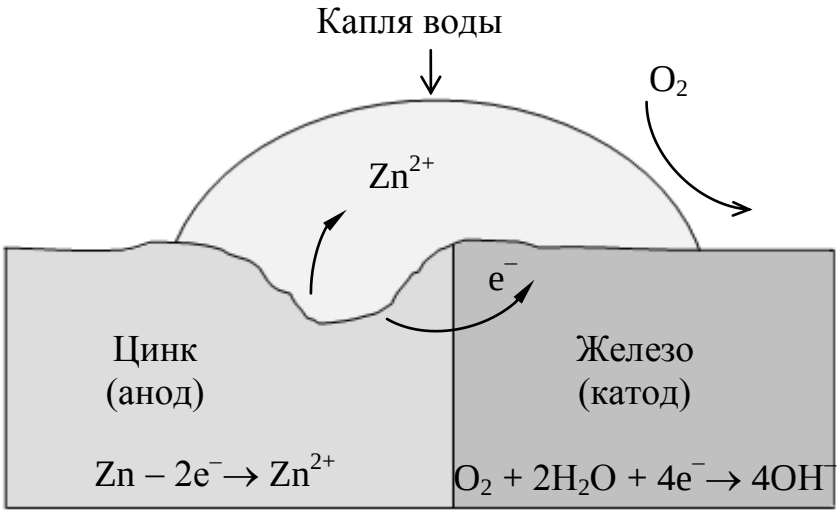


Рис. 10.4. Контакт металлического железа с цинком в присутствии воды

2. В кислом растворе происходит восстановление ионов водорода. Тогда процесс называют коррозией с водородной деполяризацией:

$$2H^+ + 2e^- = H_2.$$

Пример. Контакт магния (E^0 = - 2,36 В) с медью (E^0 = 0,34 В) в растворе соляной кислоты сопровождается следующими электродными процессами:

$$\text{(анод)}\ \ Mg - 2e^- = Mg^{2+},$$

$$\underline{\text{(катод)}\ \ 2H^+ + 2e^- = H_2.}$$

$$Mg + 2HCl = MgCl_2 + H_2$$

3. В растворе, содержащем ионы металлов Me^{n+}, потенциал которых более положителен, чем - 0,8 В, происходит восстановление этих ионов:

$$Me^{n+} + ne^- = Me^0.$$

Процесс металлической деполяризации имеет место при работе гальванических элементов. При коррозии этот процесс встречается редко.

10.5.3. Причины, вызывающие образование гальванопар на поверхности металла

Появление разности потенциалов сопровождает любой контакт металл - электролит. В случае возникновения на поверхности металла участков с различным значением потенциала, образуются гальванические элементы и протекает электрохимическая коррозия.

Распространенной причиной возникновения на металлической поверхности участков с различным значением потенциала может быть структурная неоднородность металла. Неоднородность внутренних напряжений в металлическом изделии также может приводить к возникновению гальванической пары, т. к. сжатие увеличивает электродный потенциал металла, а растяжение - уменьшает. Поэтому в деформированной детали сжатые слои

металла будут играть роль катода, а растянутые - роль анода, подвергаясь при этом разрушению.

Непостоянный состав электролита над различными участками поверхности металла, например, обусловленный разной концентрацией растворенных солей и газов, тоже может вызвать возникновение разности потенциалов. Многие другие факторы, например, различная скорость движения электролита по поверхности металла, также могут служить причиной образования участков с различным значением электродного потенциала металла.

Известен еще один специальный вид гальванопар, который часто приходится учитывать на практике, это так называемые пары дифференциальной аэрации. Пары дифференциальной аэрации возникают в том случае, когда металл или металлическое изделие подвергается неоднородному воздействию кислорода воздуха. Та часть поверхности металла, к которой кислород попадает легче, становится катодом элемента. Анодом же будет часть поверхности, менее доступная кислороду. Это является следствием изменения электродного потенциала при действии кислорода на поверхность металла.

На практике приходится часто встречаться с парами дифференциальной аэрации, например, при подземной коррозии. Допустим, трубопровод проходит сначала через легко проницаемую для воздуха песчаную почву, а затем через пласт глины, сквозь которую воздух проникает с трудом. Если не принять специальные меры защиты от коррозии, в этом случае тоже может возникнуть пара дифференциальной аэрации, причем будет разрушаться та часть трубы, которая проходит через глину.

10.5.4. Коррозия металлов в защитных и антифрикционных маслах

Для защиты металлов от коррозии часто применяется нанесение масляного покрытия как на эксплуатируемое оборудование, так и на подлежащее консервации. Однако при определенных условиях коррозионные процессы

могут протекать и при наличии подобного защитного покрытия. Следует отметить, что в работающем двигателе, где металл соприкасается с нагретым маслом, при определенном составе масла также идут коррозионные процессы.

Химическую коррозию могут вызывать соединения нефтепродуктов, способные реагировать с металлом в молекулярном состоянии: образующиеся в результате окисления высокомолекулярные и в ещё большей мере низкомолекулярные органические кислоты, сернистые соединения, являющиеся продуктом сгорания топлив, содержащих серу.

Цветные металлы и сплавы, применяемые в подшипниках - свинец, кадмий и другие - особенно подвержены химической коррозии.

В практике коррозионной защиты различают коррозию наружных поверхностей и соответственно наружную консервацию и коррозию внутренних поверхностей машин и механизмов.

Коррозия наружных поверхностей, как правило, носит электрохимический характер:

$$2Me + O_2 + 2H_2O = 2Me(OH)_2.$$

Внутренняя коррозия чаще всего протекает по смешанному электрохимическому и химическому механизму. Именно совокупность двух типов коррозии приводит к наибольшему износу техники.

Для повышения антикоррозионных свойств масел применяются различные вещества. Для борьбы с химической коррозией в двигателях внутреннего сгорания используются антиокислительные и противокоррозионные присадки.

Антиокислительные присадки (некоторые амины, фенолы, фосфиды) предотвращают или замедляют окисление минеральных масел и топлив и поэтому уменьшают накопление в них коррозионно - активных веществ.

Противокоррозионные присадки, например, алкилфенольные, защищают металл от химической коррозии путем образования на нем адсорбци-

онных пленок, устойчивых к воздействию коррозионно - активных веществ.

Антиокислительные и противокоррозионные присадки, как правило, не защищают металл от электрохимической коррозии, от коррозии в присутствии воды, потому что адсорбционные пленки, образующиеся на металле под влиянием антикоррозионных присадок, пропускают воду, разрушаются и десорбируются. Поэтому для предотвращения электрохимической коррозии используют специальные ингибиторы электрохимической коррозии. Эти вещества обычно представляют собой органические соединения, молекулы которых состоят из двух частей - углеводородного радикала и функциональной группы, обеспечивавшей защитные свойства.

Уменьшение электрохимической коррозии металла с помощью этих ингибиторов может достигаться двумя путями: они вытесняют воду с поверхности металла, создавая на нём адсорбционную пленку, не пропускающую воду и не разрушаемую водой; они могут избирательно затруднять катодные или анодные процессы при коррозии.

Решение типовых задач

Задача 1. Как будет протекать процесс коррозии в том случае, если алюминиевые листы конструкции, эксплуатируемой во влажной атмосфере, скрепить железными болтами?

Решение. В местах соприкосновения двух металлов образуется гальванический элемент. Металл, который окисляется легче, играет при этом роль анода, а второй металл - роль катода. Из сравнения стандартных электродных потенциалов алюминия (E^0 = - 1,66 В) и железа (E^0 = - 0,44 В) следует, что алюминий будет играть роль анода:

$$(\text{анод})\ Al - 3e^- = Al^{3+}.$$

На катоде (железо) пойдет процесс восстановления кислорода:

(катод) $O_2 + 2H_2O + 4e^- = 4OH^-$.

Таким образом, в месте контакта с железом алюминий будет корродировать, что приведет к нарушению прочности крепления:

$$4Al + 3O_2 + 6H_2O = 4Al(OH)_3.$$

Задача 2. Слой цинка на "гальванизированном" (оцинкованном) железе называют "жертвенным анодом". Что это означает? Оказывает ли хром такое же действие на железные изделия, покрытые хромом?

Решение. Цинк окисляется легче, чем железо, потому что его стандартный электродный потенциал (E^0 = - 0,76 В) отрицательнее (для железа E^0 = - 0,44 В). Поэтому при контакте цинка и железа анодному растворению подвергается цинк:

(анод) $Zn - 2e^- = Zn^{2+}$.

На катоде, которым является железо, при этом будет происходить восстановление, например, ионов водорода (в кислом растворе):

(катод) $2H^+ + 2e^- = H_2$.

Если в контакте с железом находится хром (E^0 = - 0,74 В), он также играет роль "жертвенного анода", поскольку его стандартный электродный потенциал меньше, чем у железа.

Такой способ защиты железа (или другого металла) от коррозии путем превращения его в катод электрохимического элемента называется **катодной защитой.**

Задача 3. Определить процессы, которые будут протекать при контакте железа и никеля в растворе серной кислоты (гальванопара $Fe/H_2SO_4/Ni$).

Решение. Из двух данных металлов меньшее значение стандартного электродного потенциала имеет железо (для железа E^0 = - 0,44 В, для никеля E^0 = - 0,25 В). Следовательно, анодному растворению будет подвергаться железо:

$$(\text{анод}) \quad Fe - 2e^- = Fe^{2+}.$$

В кислой среде на катоде гальванопары (на никеле) будут восстанавливаться ионы водорода:

$$(\text{катод}) \quad 2H^+ + 2e^- = H_2.$$

Если рассматриваемая гальванопара будет реализована в растворе хлорида натрия (Fe/NaCl/Ni), то катодный процесс будет заключаться в восстановлении растворенного кислорода:

$$(\text{катод}) \; O_2 + 2H_2O + 4e^- = 4OH^-.$$

10.6. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КОРРОЗИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ

К количественным методам оценки степени коррозионного разрушения относятся:

1. Определение изменения массы образцов (массометрический метод).

2. Определение объема выделяющихся газообразных продуктов или объема газа, поглощаемого в процессе коррозии (объемный метод).

3. Химический анализ раствора (аналитический метод), применяемый при изучении скорости коррозии отдельных компонентов сплава.

Наиболее широко распространенным, благодаря своей простоте и надежности, является массометрический метод. Это - прямой метод, непосредственно связанный с массой разрушенного металла.

Показателем скорости коррозии в данном методе является величина К,

представляющая собой отношение:

$$К = \frac{m_0 - m_1}{S \cdot t},$$

где m_0 - масса образца до коррозии, г; m_1 - масса образца после коррозии; S - площадь поверхности образца, $м^2$; t - время коррозионного разрушения, ч.

Массовые потери при коррозии могут быть пересчитаны в скорость коррозии, выраженную в мм/год:

$$П = \frac{8{,}76 \cdot К}{\rho},$$

где П - скорость коррозия, мм/год; К - скорость коррозии, $г/(м^2 \cdot ч)$; ρ - плотность металла, $г/см^3$; 8,76 - коэффициент пересчета.

На основании величины П можно произвести оценку химической стойкости металлов по десятибалльной шкале (таблица 10.3).

10.7. МЕТОДЫ БОРЬБЫ С КОРРОЗИЕЙ

Методы борьбы с коррозией чрезвычайно многочисленны и разнообразны. Выбор того или иного метода зависит от природы и структуры подлежащего защите материала, от условий его работы, от коррозионных свойств среды. Все эти методы удобно разделить на три группы:

1) изменение внешних условий работы изделия;

2) изменение структуры металла, подлежащего защите;

3) защита поверхности.

В последней группе можно выделить три подгруппы: а) нанесение ок-

сидных пленок; б) нанесение неметаллических покрытий; в) нанесение металлических покрытий (включая гальванические покрытия).

Таблица 10.3

Шкала коррозионной стойкости металлов

Группа стойкости	П, мм/год	Балл
1. Совершенно стойкие	< 0,001	0
2. Весьма стойкие	0,001 – 0,005 0,005 -0,01	1 2
3. Стойкие	0,01 – 0,05 0,05 – 0,1	3 4
4. Пониженностойкие	0,1 – 0,5 0,5 – 1,0	5 6
5. Малостойкие	1,0 – 5,0 5,0 – 10,0	7 8
6. Нестойкие	> 10,0	9

Изменение внешних условий работы конструкции (изделия). Коррозию можно уменьшить или устранить, создав такие условия для работы изделия, которые затрудняли бы разряд ионов водорода или ионизацию кислорода на катодах микрогальванопар или затрудняли бы растворение анодных участков. Здесь можно указать три пути.

Защита обработкой среды. Можно устранить кислородную деполя-

ризацию удалением кислорода из раствора, вызывающего коррозию. Например, воду для паровых котлов освобождают от кислорода добавкой какого - либо восстановителя. Введением в раствор других добавок можно пассивировать анодные составляющие защищаемого металла. Например, в холодильных установках, где в железной аппаратуре циркулируют специальные растворы, добавка кремнекислого натрия или хромпика ($K_2Cr_2O_7$) пассивирует железо и ослабляет коррозию.

Защита приложением внешней ЭДС (**катодная защита**). Этот чисто электрохимический метод заключается в том, что изделие, подлежащее защите от коррозии, соединяют с отрицательным полюсом внешнего источника электричества, т. е. сообщают ему катодную поляризацию; анодами служат чугунные, свинцовые или графитовые пластины, погруженные в тот же раствор, что и защищаемое изделие. На катодной поверхности выделяется водород, растворение защищаемого металла не происходит. Для защиты железа от коррозии в растворах хлористого натрия достаточна плотность тока на защищаемой конструкции 10 - 12 мкА/см^2. При интенсивно перемешиваемом растворе необходима плотность тока до 250 мкА/см^2. Катодную защиту применяют для котлов, химической аппаратуры и т. п. Однако эффективность ее в изделиях сложной конфигурации невысокая.

Защита протекторами. Этот метод, также электрохимический, заключается в том, что к защищаемому изделию прикрепляют протекторы - пластинки, муфты и т. п. из металла (чаще всего из цинка), имеющего более отрицательный потенциал. В возникающей гальванической паре металл протектора анодно растворяется. Протекторы по мере износа нужно менять. Метод эффективен в среде, хорошо проводящей электрический ток. Радиус действия протектора невелик, и поэтому для защиты большой поверхности приходится устанавливать много протекторов.

Изменение структуры металла изделия. Электрохимическую коррозию можно ослабить, изменив состав и структуру металла легированием, т. е. введением в сплав с защищаемым металлом некоторых добавок. В этом

направлении возможны три пути:

1) Вводится добавка более благородного металла, образующего твердый раствор с основным металлом. Потенциал анодного растворения повышается, и тем самым коррозия затрудняется. Однако, чтобы достигнуть значительного повышения потенциала, приходится вводить значительные количества более благородного металла. Например, медь устойчиво защищается добавкой золота в количестве 52 - 53,5 % (по массе). Конечно, такой метод защиты дорог и применяется, например, в ювелирной промышленности.

2) Вводится добавка, которая, образуя сплав с различными составляющими основного металла (обычно многокомпонентного сплава), может повлиять так, что потенциалы всех составляющих сблизятся и, следовательно, ЭДС микрогальванопар уменьшится.

3) Вводится добавка, которая может подвергаться коррозии наряду с основным металлом, но продукты ее разрушения образуют на поверхности изделия плотные защитные пленки, препятствующие дальнейшей коррозии. Так, при разрушении кремнистого чугуна или стали на поверхности образуется пленка силикатов, обладающая защитными свойствами.

Защита поверхности металла. Защита оксидными пленками. Известно, что пленка оксида (или других продуктов коррозии) на поверхности может защищать металл от дальнейшего разрушения. Подбирая условия обработки, можно искусственным путем создать малопористую, достаточно устойчивую пленку оксидов на металлической поверхности. Наибольшее распространение получили следующие приемы.

Воронение, или **оксидирование стали**. Способы его выполнения очень разнообразны. Обработка железа паром, а затем восстанавливающими газами при температурах около 900 °С приводит к образованию пленки оксидов, состоящей в наружном слое из Fe_3O_4 и в более глубоком - из FeO. Воронение достигается также погружением стали в расплавленную смесь селитры и диоксида марганца при 300 °С или кипячением в щелочных окислительных

растворах, содержащих, например, едкий натр, селитру и диоксид марганца. В этих случаях в поверхностном слое образуется Fe_2O_3. Воронение сообщает изделию красивый бархатистый темно-синий с черным отливом цвет.

Однако в качестве коррозионной зашиты воронение недостаточно прочно. Оно пригодно лишь при работе в атмосферных условиях и требует периодической смазки изделия.

Фосфатирование стали. Процесс заключается в образовании на поверхности изделия пленки фосфорнокислых солей марганца и железа. Применяемая рецептура довольно разнообразна. Полученная пленка дополнительно покрывается специальным лаком. Покрытие достаточно устойчиво к коррозии в атмосферных условиях и даже в не слишком агрессивных жидких средах.

Оксидирование алюминия. Оксидная пленка на алюминии обладает высокой коррозионной устойчивостью в атмосферных условиях. Пленка может быть создана обработкой алюминия или его сплавов щелочными растворами, содержащими окислители, главным образом, хромовокислые соли. Можно, например, проводить травление в ванне, содержащей соду, едкий натр и бихромат калия, с последующей обработкой 2 % - ным раствором хромовой кислоты.

Анодное окисление алюминия. Весьма прочная пленка на алюминии получается при его анодной поляризации в 3 % - ном растворе хромовой кислоты при 40 °С. Катодом служит графит. Вследствие анодного пассивирования алюминия напряжение поднимается до 40 - 50 В.

Еще лучшие результаты дает анодное окисление алюминия в 20 % - ном растворе серной кислоты при 30 °С и плотности тока 2 А/дм^2 в течение 10 мин. Катодами служат свинцовые пластины. После электролиза изделие погружают в горячий раствор $K_2Cr_2O_7$. Получаемое покрытие настолько прочно, что даже после месяца работы в морской воде почти не обнаруживает признаков коррозии. Оксидная пленка служит прекрасным электроизолятором, выдерживая напряжение свыше 10 000 В. Поэтому анодное окисление алю-

миниевой проволоки применяют при изготовлении электротехнической аппаратуры.

Защита неметаллическими покрытиями. Покрытие красками или лаками является наиболее распространенным видом защиты металлов от коррозии. Пленка покрытия должна обладать большим электрическим сопротивлением и препятствовать работе микрогальванопар. Основой покрытия является пленкообразующее вещество (олифа и другие высыхающие масла). Для ускорения высыхания добавляют сиккативы - соединения свинца, марганца, кобальта и др. Наконец, для придания покрытию твердости и желаемого внешнего вида к краске добавляют пигменты - окрашенные соединения свинца, цинка, железа, хрома, меди, титана и т.д. Лакокрасочное покрытие должно плотно прилегать к поверхности металла, образуя сплошной слой. В противном случае в пустотах и порах под пленкой краски может удерживаться вода, которая будет служить электролитом для микрогальванопар на поверхности металла.

Из других неметаллических покрытий отметим бетон, асфальт, смолы, битумы, применяемые чаще всего для защиты подземных сооружений - трубопроводов, кабелей, оснований металлических конструкций и т. п. Для мелких изделий, предметов домашнего обихода и химической аппаратуры применяют защиту эмалью - слоем оплавленных силикатов, а также искусственными смолами и пластмассами.

Защита металлическими покрытиями. Широко применяется защита металлических изделий покрытием их слоем другого металла. Соответствующее покрытие должно удовлетворять ряду требований.

Необходимо обеспечить прочное сцепление слоя покрывающего металла с основным металлом. Прочность сцепления достигается либо за счет образования промежуточного слоя сплава обоих металлов, либо за счет сил сцепления. В обоих случаях поверхность основного металла должна быть предварительно тщательно очищена.

Покрытие должно быть пластичным, не растрескиваться и не отставать

от основы при изгибании. Иногда предъявляются специальные требования к твердости, стойкости к истиранию, жаростойкости и т.д. Покрывающий слой должен обладать равномерной заданной толщиной.

Покрытие должно защищать основной металл изделия от коррозии. В этом отношении следует различать два случая. Если металл покрытия имеет более положительный потенциал, чем металл основы, и при этом покрытие обладает порами, трещинами или царапинами, то при проникновении электролита в поры образуется гальваническая пара, в которой металл покрытия становится катодом, а металл основы - анодом. Возникновение такой пары будет только способствовать коррозии основного металла. Поэтому подобные покрытия, называемые катодными, должны быть сплошными, беспористыми и полностью исключать доступ вызывающих коррозию веществ к основному металлу. Примером может служить покрытие железа медью или меди серебром. Конечно, металл катодного покрытия сам по себе должен быть коррозионностоек.

Если потенциал металла покрытия более отрицателен, чем потенциал металла основы, то при доступе электролита к металлу основы последний будет играть роль катода в возникающей гальванической паре. Металл же покрытия станет анодом и будет разрушаться. Поэтому подобные покрытия, называемые анодными, даже и при нарушении непрерывности слоя защищают основной металл от коррозии. Примером анодного покрытия может служить нанесение цинка на железо.

Способы нанесения металлических покрытий очень разнообразны. К ним относятся:

1) способ горячего погружения;

2) пульверизация, заключающаяся в распылении расплавленного металла струей сжатых газов на подлежащую покрытию поверхность;

3) плакирование, заключающееся в совместной горячей прокатке покрываемого металла и тонкой пластины покрывающего металла;

4) диффузионные покрытия (цементация), получающиеся нагреванием

покрываемого изделия в порошке металла, подлежащего нанесению;

5) контактные покрытия, получающиеся погружением изделия из менее благородного металла в раствор соли более благородного металла;

6) гальванические покрытия.

Рассмотрим подробнее **гальванические покрытия.** Гальванические покрытия получают путем электролиза. Так как процесс ведут при невысоких температурах (от 15 до 60 °С), то приставание наносимого слоя к основному металлу достигается только за счет сил сцепления, причем иногда осадок даже воспроизводит, продолжает кристаллическую структуру основы. Поэтому очень важно предварительно тщательно очистить поверхность изделия. Впрочем, иногда имеет место и диффузия наносимого металла, хотя и на очень небольшую глубину. Гальванический осадок в большинстве случаев может быть получен любой толщины - от десятитысячных долей миллиметра до нескольких миллиметров. Наиболее часто применяют гальваническое осаждение цинка, никеля, хрома, меди, олова, золота, серебра, реже свинца, кадмия, кобальта, железа. Для специальных целей можно производить покрытие платиной, вольфрамом, сурьмой, мышьяком.

10.8. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Определите, будет ли протекать реакция окисления – восстановления между растворами солей KBr и $FeCl_3$:

$$2KBr + 2FeCl_3 = Br_2 + 2KCl + 2FeCl_2.$$

$E^0(Br_2/2Br^-) = 1{,}06$ В; $E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0{,}77$ В.

2. Установите, можно ли перемешивать раствор $Fe(NO_3)_3$ алюминиевой ложкой?

$E^0(Al^{3+}/Al) = -1{,}66$ В; $E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0{,}77$ В; $E^0(Fe^{2+}/Fe) = -0{,}44$ В.

3. Запишите процессы, протекающие на электродах при электролизе водных растворов следующих веществ: NaCl, $Ca(NO_3)_2$, HCl, $Fe_2(SO_4)_3$, KOH, $ZnSO_4$. Рассмотрите два случая электролиза – с графитовым анодом и анодом, изготовленным из меди.

4. Составьте схемы двух гальванических элементов, содержащих железо, причем в одном из них данный металл должен быть «+», а в другом «-». Запишите уравнения протекающих электродных реакций и рассчитайте ЭДС гальванических элементов.

5. Из каких металлов необходимо составить гальванический элемент, чтобы его ЭДС была максимальной?

6. Хромирование поверхности изделий из железа придает им повышенные декоративные свойства и защищает от коррозии. В действительности покрытие из хрома наносят на тонкий слой никеля, защищающий железо. Слой хрома предохраняет никель от потускнения и создает прочную, блестящую поверхность. Обеспечивает ли никель катодную защиту железа?

7. Объясните, какой коррозионный процесс может возникнуть при соединении медной трубки с водопроводной трубой из оцинкованного железа?

8. Рассчитайте скорость коррозии алюминия в олеуме. Размеры образца металла 50х30х1 мм, масса до испытания 4,0530 г, после восьмисуточного испытания – 4,0189 г. Произведите количественную оценку коррозионной стойкости алюминия в олеуме по десятибалльной шкале.

9. Запишите уравнения электродных процессов в следующих гальванопарах: Sn/NaCl/Fe, Ni/$HgCl_2$/Cu, Cr/HCl/Fe, Zn/$CuSO_4$/Ni.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Общая химия**:** Учебник для технических направлений и специальных вузов / Н.В. Коровин. - 9-е издание, переработанное - М.: Высшая школа, 2007. - 557 с.

Общая и неорганическая химия: Учебник для вузов / Я.А. Угай. - 5-е издание, стереотипное - М.: Высшая школа, 2007. - 527 с.

Фролов В.В. Химия, 3-е изд. - М.: Высшая школа, 1986. - 432 с.

Глинка Н.Л. Общая химия: Учебное пособие для вузов / Под ред. А. И. Ермакова. - 30-е издание, исправленное. - М.: Интеграл - Пресс, 2003. - 728 с.

Дробашева Т. И. Общая химия. - М.: Феникс, 2004 г. - 448 с.

Курс химии: Учебник для инженерно-технических вузов / Г.П. Лучинский. – М.: Высшая школа, 1985. – 416 с.

Лабораторные работы по химии**:** Учебное пособие / Н.В. Коровин, Э.И. Мингулина, Н.Г. Рыжова; Под редакцией Н.В. Коровина - 4-е издание, переработанное - М.: Высшая школа, 2007. - 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ……...……3

Глава 1. КЛАССИФИКАЦИЯ И НОМЕНКЛАТУРА НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ ……4

1.1. Основные классы неорганических соединений. Горные породы и минералы земной коры ……..4

1.2. Номенклатура неорганических веществ ……8

1.3. Контрольные вопросы и задания ……...11

Глава 2. НАПРАВЛЕННОСТЬ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ……..13

2.1. Энергетические соотношения в химических системах ……...13

2.2. Самопроизвольные процессы ……18

2.3. Энтальпийный и энтропийный факторы химической реакции. Энергия Гиббса ……21

2.4. Расчет изменений энергии Гиббса в стандартных условиях ……24

2.5. Подземная газификация угля – новые возможности для энергетики ……26

2.6. Задачи для самостоятельного решения ……28

Глава 3. ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ……32

3.1. Скорость химической реакции ……...32

3.2. Зависимость скорости реакции от концентрации реагентов ……...34

3.3. Молекулярность и порядок реакции ……38

3.4. Влияние давления и температуры на скорость реакции ……..41

3.5. Энергия активации ……..42

3.6. Явление катализа. Гомогенный и гетерогенный катализ ……45

3.7. Задачи для самостоятельного решения ……49
Глава 4. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ……51
4.1. Гомогенное химическое равновесие ……52
4.2. Константа химического равновесия ……..54
4.3. Гетерогенное химическое равновесие ……...57
4.4. Смещение химического равновесия ……..59
4.5. Задачи для самостоятельного решения ……64
Глава 5. ОБРАЗОВАНИЕ РАСТВОРОВ ……..66
5.1. Растворы ……...66
5.2. Способы выражения концентрации растворов ……68
5.3. Растворимость вещества и ее зависимость от различных факторов ……...……..……74
5.4. Осмос. Осмотическое давление ……78
5.5. Давление пара растворителя над раствором. Замерзание и кипение раствора ……83
5.6. Зависимость растворимости от температуры и давления ……...89
5.7. Произведение растворимости труднорастворимого вещества ……...
91
5.8. Задачи для самостоятельного решения ……96
Глава 6. ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ДИССОЦИАЦИЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ ……98
6.1. Теория электролитической диссоциации ……..98
6.2. Степень и константа электролитической диссоциации ……101
6.3. Активная концентрация ионов ……105
6.4. Солевой эффект ……107
6.5. Жесткость природной воды ……..108
6.6. Умягчение воды ……110
Глава 7. РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ ……...113

7.1. Реакция соли с солью ……113
7.2. Реакция соли с кислотой ……...116
7.3. Реакции с участием основных и кислых солей …….……...116
7.4. Реакции образования слабых кислот и слабых оснований ……..……...…….118
7.5. Реакции с участием амфотерных гидроксидов ……..119
7.6. Теория кислот и оснований Бренстеда - Лаури ……120
7.7. Ионное произведение воды. Водородный показатель pH …….123
7.8. Гидролиз солей ……..127
7.9. Контрольные задания ……...135
Глава 8. СТРОЕНИЕ АТОМА И ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ЗАКОН Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА ……137
8.1. Строение электронных оболочек атомов ……137
8.2. Периодичность изменения свойств элементов ……...146
8.3. Контрольные задания ……151
Глава 9. ХИМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ ……152
9.1. Общие положения ……152
9.2. Метод валентных связей ……...156
9.3. Донорно-акцепторный механизм образования ковалентной связи ……..……...161
9.4. Свойства ковалентной связи ……162
9.5. Метод молекулярных орбиталей ……170
9.6. Межмолекулярное взаимодействие и водородная связь ……173
9.7. Комплексные соединения ……176
9.8. Контрольные задания ……182
Глава 10. ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ……184
10.1. Окислительно-восстановительные реакции ……184

10.2. Образование электродных потенциалов ……...192
10.3. Гальванические элементы ……..199
10.4. Электролиз ……...210
10.5. Прикладная электрохимия ……216
10.6. Методы оценки коррозионного разрушения ……225
10.7. Методы борьбы с коррозией ……..226
10.8. Контрольные задания ……..233
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ….……..235

Учебное издание

Рафаил Абдрахманович Апакашев
Валерий Васильевич Павлов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ХИМИИ

Учебное пособие

Редактор изд-ва *Л. В. Устьянцева*
Компьютерная верстка *Н. Л. Кузиной*
Дизайн обложки *Л. А. Болотновой*

Подписано в печать . Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16.
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. 15,00. Уч.-изд. л. 11,76. Тираж 150. Заказ .

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Отпечатано с оригинал-макета в ООО «ИРА УТК».
620219, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 42.

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического
факультета «12» октября 2021
г. Председатель комиссии
Осипов П.А.

М. Л. Хазин

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания по самостоятельной работе студентов
по направлению 20.03.01 Техносферная безопасность
для студентов очного и заочного обучения

Екатеринбург, 2021

Х12

Рецензенты: Тихонов И. Н., к-т. техн. наук, зав. кафедрой «Электронное машиностроение» УрФУ, Жуков Ю. Н., д-р. техн. наук, профессор кафедры «Электронное машиностроение» УрФУ

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры эксплуатации горного оборудования 21 сентября 2021 года (протокол № 1) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Хазин М. Л. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ: Методические указания по самостоятельной работе студентов. Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 24 с.

В методических указаниях по самостоятельной работе приведена последовательность выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Материаловедение и технологии конструкционных материалов», изложена методика решения задач, даны задачи, вопросы для самопроверки по разделам.

Методические указания предназначены для студентов направлений 20.03.01 Техносферная безопасность, подготовка которых требует знаний по свойствам и применению металлических и неметаллических материалов.

© Хазин М. Л., 2019

© Уральский государственный
горный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование производства, выпуск современных разнообразных машиностроительных конструкций, специальных приборов, машин и различной аппаратуры невозможны без дальнейшего развития производства и изыскания новых материалов, как металлических, так и неметаллических.

Материаловедение является одной из первых инженерных дисциплин, основы которой широко используются при курсовом и дипломном проектировании, а также в практической деятельности инженера-машиностроителя.

Прогресс в области машиностроения тесно связан с созданием и освоением новых, наиболее экономичных материалов, обладающих самыми разнообразными механическими и физико-химическими свойствами. Свойства материала определяются его внутренним строением, которое, в свою очередь, зависит от состава и характера предварительной обработки. В курсе "Материаловедение" изучаются физические основы этих связей.

ПРОГРАММА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ЧАСТЬ I. МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ

Строение металлов

Металловедение как наука о свойствах металлов и сплавов. Типы связи в твердых телах. Атомно-кристаллическое строение металлов. Процесс кристаллизации.

Рассмотрите типы химической связи в твердых телах, основное внимание обратите на особый тип металлической связи, который обусловливает отличительные свойства металлов: высокую электропроводность и теплопроводность, высокую пластичность и металлический блеск. Металлические тела характеризуются кристаллическим строением. Однако свойства реальных кристаллов определяются известными несовершенствами кристаллического строения. В связи с этим необходимо разобраться в видах несовершенств и особенно в строении дислокаций (линейных несовершенств), причинах их легкого перемещения в кристаллической решетке и влияния на механические свойства.

Термодинамические причины фазовых превращений являются одним из частных случаев общего закона природы: стремления любой системы

к состоянию с наименьшим запасом энергии (в данном случае свободной энергии). Уясните теоретические основы процесса кристаллизации, состоящего из двух элементарных процессов: зарождения и роста кристаллов, и влияния на эти параметры степени переохлаждения.

В процессе кристаллизации при формировании структуры литого металла решающее значение имеет реальная среда, а также возможность искус-

ственного воздействия на строение путем модифицирования.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?
2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?
3. Что такое элементарная ячейка?
4. Что такое полиморфизм?
5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?
6. Что такое мозаичная структура?
7. Виды дислокаций и их строение.
8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?
9. Каковы параметры процесса кристаллизации?
10. Что такое переохлаждение?

Теория сплавов

Сплавы, виды взаимодействия компонентов в твердом состоянии. Диаграммы состояния для случаев полной нерастворимости, неограниченной и ограниченной растворимости компонентов в твердом виде, а также для случая образования устойчивого химического соединения.

Необходимо отчетливо представлять строение металлов и сплавов в твердом состоянии. Уясните, что такое твердый раствор, химическое (металлическое) соединение, механическая смесь. Наглядное представление о состоянии любого сплава в зависимости от его состава и температуры дают диаграммы состояния. Нужно усвоить общую методику построения диаграмм состояния для различных случаев взаимодействия компонентов в твердом состоянии.

При изучении диаграмм состояния нужно уметь применять правило отрезков (для определения доли каждой фазы или структурной составляющей в сплаве), правило фаз (для построения кривых нагревания и охлаждения), определять химический состав фаз. С помощью правил Курнакова нужно уметь установить связь между составом, строением и свойствами сплава.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число степеней свободы?
2. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.
3. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения?
4. Как строятся диаграммы состояния?

5. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.

6. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.

7. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.

8. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.

10. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?

Пластическая деформация и механические свойства металлов

Напряжения и деформация. Явление наклепа. Стандартные механические свойства: твердость; характеристики, определяемые при растяжении; ударная вязкость; сопротивление усталости.

Рассмотрите физическую природу деформации и разрушения. Внимание уделите механизму пластической деформации, ее влиянию на плотность дислокаций. Уясните связь между основными характеристиками, строением и механическими свойствами. Разберитесь в сущности явления наклепа и его практическом использовании.

Изучите основные методы исследования механических свойств металлов и физический смысл определяемых при разных методах испытания характеристик.

Вопросы для самопроверки

1. В чем различие между упругой и пластической деформациями?

2. Как изменяется строение металла в процессе пластического деформирования?

3. Как изменяется плотность дислокаций при пластической деформации?

4. Как влияют дислокации на прочность металла?

5. Почему наблюдается огромное различие теоретической и практической прочности?

6. Как влияет изменение строения на свойства деформированного металла?

7. В чем сущность явления наклепа и какое он имеет практическое использование?

8. Какие характеристики механических свойств определяются при испытании на растяжение?

9. Что такое твердость?

10. Какие методы определения твердости вы знаете?

Влияние нагрева на структуру и свойства деформируемого металла

Необходимо знать сущность рекристаллизационных процессов: возврата, первичной рекристаллизации, собирательной (вторичной) рекристаллизации, протекающих при нагреве деформированного металла. Уясните, как при этом изменяются механические, физико-химические свойства и размер зерна. Установите влияние состава сплава и степени пластической деформации на протекание рекристаллизационных процессов. Научитесь выбирать режим рекристаллизационного отжига. Уясните его практическое значение, различие между холодной и горячей пластическими деформациями.

Вопросы для самопроверки

1. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве?
2. В чем сущность процесса возврата?
3. Что такое полигонизация?
4. Сущность процессов первичной и вторичной рекристаллизации.
5. Как влияют состав сплава и степень пластической деформации на температуру рекристаллизации?
6. Что такое критическая степень деформации?
7. В чем различие между холодной и горячей пластическими деформациями?
8. Как изменяются строение и свойства металла при горячей пластической деформации?
9. Каково назначение рекристаллизационного отжига и как он осуществляется?

Железо и его сплавы

Диаграмма состояния железо - цементит. Классификация железоуглеродистых сплавов. ГОСТы на металлы и сплавы. Фазы, образуемые легирующими элементами в сплавах железа. Структурные классы легированных сталей. Чугуны.

Научитесь вычерчивать диаграмму состояния железо - цементит и определять все фазы и структурные составляющие этой системы. С помощью правила фаз постройте кривые охлаждения (или нагревания) для любого сплава; разберитесь в классификации железоуглеродистых сплавов и усвойте, что различие между тремя классами (техническое железо, сталь, чугун) не является формальным (по содержанию углерода). Разные классы сплавов принципиально различны по структуре и свойствам. Технические железоуглеродистые сплавы состоят не только из железа и углерода, но и обяза-

тельно содержат постоянные примеси, попадающие в сплав в результате предыдущих операций при выплавке.

Изучите влияние легирующих элементов на критические точки железа и стали и объясните, при каком сочетании углерода и соответствующего легирующего элемента могут быть получены легированные стали ферритного, перлитного, аустенитного и ледебуритного классов.

Уясните влияние постоянных примесей на строение чугуна и разберитесь в различии металлической основы серых чугунов разных классов. Запомните основные механические свойства и назначение чугунов различных классов и их маркировку. Обратите внимание на способы получения ковких и высокопрочных чугунов. Изучите физическую сущность процесса графитизации.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое феррит, аустенит, перлит, цементит и ледебурит?
2. Какие превращения происходят в сплавах при температурах A1, A2, A3, A4, Acm?
3. Каковы структуры серых чугунов? 1
4. Каковы структура и свойства технического железа, стали и белого чугуна?
5. Как влияют легирующие элементы на положение критических точек железа и стали?
6. Какие легирующие элементы являются карбидообразующими?
7. Какие легирующие элементы способствуют графитизации?
8. Как влияют легирующие элементы на свойства феррита и аустенита?
9. В чем отличие серого чугуна от белого?
10. Классификация и маркировка серых чугунов.

Теория термической обработки стали

Превращения в стали при нагреве. Превращения переохлажденного аустенита. Мартенситное превращение и его особенности. Превращения аустенита при непрерывном охлаждении. Превращения при отпуске закаленной стали.

Теория и практика термической обработки стали - главные вопросы металловедения. Термическая обработки - один из основных способов влияния на строение, а следовательно, и на свойства сплавов.

При изучении превращений переохлажденного аустенита особое внимание обратите на диаграмму изотермического распада, устанавливающую связь между температурными условиями превращения, интенсивностью распада и строением продуктов превращения.

Изучите влияние легирующих элементов на кинетику и характер превращения аустенита в перлитной, промежуточной и мартенситной областях. В связи с влиянием легирующих элементов на диаграммы изотермического

распада аустенита рассмотрите причины получения различных классов по структуре (перлитного, мартенситного, аустенитного). Уясните влияние легирующих элементов на превращения при отпуске. Запомните, что легирующие элементы, как правило, затормаживают процессы превращений.

Вопросы для самопроверки

1. Механизм образования аустенита при нагреве стали.
2. Каковы механизмы и температурные районы образования структур перлитного типа (перлита, сорбита, тростита) и бейнита?
3. В чем различие между перлитом, сорбитом и троститом?
4. Что такое мартенсит и в чем сущность и особенности мартенситного превращения?
5. Что такое критическая скорость закалки?
6. От чего зависит количество остаточного аустенита?
7. В чем сущность превращений, происходящих при отпуске?
8. Как влияют легирующие элементы на перлитное превращение?
9. В чем сущность явления отпускной хрупкости?
10. Как влияют легирующие элементы на превращения при отпуске?

Технология термической обработки

Основные виды термической обработки стали. Отжиг, нормализация, закалка, обработка холодом. Прокаливаемость стали. Отпуск стали. Поверхностная закалка.

Уясните влияние скорости охлаждения на структуру и свойства стали и физическую сущность процессов отжига, нормализации, закалки и обработки холодом. При изучении технологических процессов термической обработки особое внимание обратите на разновидности режимов и их назначение. Для выяснения причин брака при термической обработке стали следует прежде всего разобраться в природе термических и фазовых напряжений.

Уясните различие между закаливаемостью и прокаливаемостью стали, а также факторы, влияющие на эти характеристики. Разберитесь в способе получения высокопрочных деталей - термомеханической обработке.

Различные виды поверхностной закалки позволяют получить особое сочетание свойств поверхностного слоя и сердцевины, что приводит к повышению эксплуатационных характеристик изделия.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
2. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
3. Какова природа фазовых и термических напряжений?

4. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?

5. Каковы виды и причины брака при закалке?

6. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особенности?

7. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?

8. Какие вам известны технологические приемы уменьшения деформации при термической обработке?

9. Для чего и как производится обработка холодом?

10. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

Химико-термическая обработка стали и поверхностное упрочнение наклепом

Физические основы химико-термической обработки. Цементация. Азотирование. Цианирование. Диффузионная металлизация. Дробеструйный наклеп.

При изучении основ химико-термической обработки следует исходить из того, что принципы химико-термической обработки едины. Процесс химико-термической обработки состоит из выделения атомов насыщающего вещества внешней средой, захвата (сорбции) этих атомов поверхностью металла и диффузии их внутрь металла. Поэтому рассмотрите реакции в газовой среде при цементации или азотировании и усвойте современные представления о процессе диффузии в металлах. В большинстве случаев насыщение может происходить из твердой, жидкой и газовой сред, а поэтому нужно знать наиболее удачные варианты насыщения для каждого метода химико-термической обработки и конечные результаты (поверхностное упрочнение и изменение физико-химических свойств).

Разберитесь в технологии проведения отдельных видов химико-термической обработки. Уясните преимущества и области использования цементации, азотирования, цианирования и различных видов диффузионной металлизации. Объясните влияние легирования на механизм формирования структуры поверхностного слоя. Рассмотрите сущность и назначение дробеструйного поверхностного наклепа и его влияние на эксплуатационные свойства деталей машин.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключаются физические основы химико-термической обработки?

2. Химизм процесса азотирования.

3. Химизм процесса цементации.

4. Назначение цементации и режим термической обработки после нее.

5. Для каких целей и как производится нитроцементация?

6. Каковы свойства цементированных и азотированных изделий?

7. Химизм и назначение процесса цианирования.

8. Сущность и назначение процесса борирования.

9. Как изменяются свойства изделий при дробеструйной обработке и какова природа этих изменений?

10. Как влияет поверхностное упрочнение на эксплуатационные характеристики изделий?

Конструкционные стали

Конструкционные стали общего назначения. Цементуемые, улучшаемые, пружинно-рессорные стали. Высокопрочные мартенситостареющие стали. Коррозионно-стойкие и жаростойкие стали и сплавы. Жаропрочные стали и сплавы.

Нужно усвоить принципы маркировки сталей и уметь по маркировке определить состав и особенности данной стали, а также иметь общее представление о разных группах стали.

Разберитесь во влиянии легирующих элементов на изменение структуры и свойств стали, особое внимание уделите технологическим особенностям термической обработки легированной стали различных групп.

Рассмотрите способы классификации, основные принципы выбора для различного назначения цементуемых, улучшаемых, пружинно-рессорных, износостойких, высокопрочных, нержавеющих, жаропрочных и других сталей.

При изучении жаропрочных сталей обратите внимание на особенности поведения металла в условиях нагружения при повышенных температурах. Уясните сущность явления ползучести и основные характеристики жаропрочности; каковы предельные рабочие температуры и области применения сталей различного структурного класса.

В качестве примеров указать две-три марки стали каждой группы, расшифровать состав, назначить режим термической обработки и охарактеризовать структуру, свойства и область применения.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: 40, 20Х, 30ХГСА, 50Г, Г13, ШХ15, 18Х2Н4ВА, 5ХНМ, Х18Н9Т, Н18К8М5Т.

2. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?

3. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?

4. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?

5. Какова термическая обработка цементуемых деталей?

6. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?

7. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

8. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?

9. Какие вы знаете износостойкие стали?

10. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющим сталям?

Инструментальные стали

Классификация и маркировка инструментальных сталей. Стали, не обладающие и обладающие теплостойкостью. Стали для режущего, измерительного и штампового инструмента. Твердые сплавы.

Изучите классификацию инструментальных сталей в зависимости от назначения инструмента и в связи с этим рассмотрите основные эксплуатационные свойства инструмента каждой группы. Особое внимание уделите быстрорежущим сталям. Уясните причины их высокой красностойкости и особенности термической обработки.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите химический состав сталей марок: У10, 9ХС, ХВГ, Р18, Р18Ф2, Р9К10, Р9М4К8, Х12, 6ХВ2С, Х12М.

2. Как классифицируются инструментальные стали?

3. Требования, предъявляемые к сталям для режущего инструмента.

4. Приведите примеры углеродистых и легированных сталей, используемых для режущего инструмента.

5. Укажите и расшифруйте основные марки быстрорежущей стали.

6. Что представляют собой твердые сплавы?

7. Каковы свойства и преимущества твердых сплавов?

8. Укажите марки твердых сплавов, их состав и назначение.

Алюминий, магний и их сплавы

Деформируемые и литейные сплавы.

Обратите внимание на основные преимущества алюминиевых и магниевых сплавов, связанные с их высокой удельной прочностью. Рассмотрите классификацию алюминиевых сплавов и обоснуйте технологический способ изготовления изделий из сплавов каждой группы. Разберитесь в основах теории термической обработки (старения) легких сплавов. Обоснуйте выбор способа упрочнения деформируемых и литейных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Свойства и применение алюминия.

2. Как классифицируются алюминиевые сплавы?

3. Какие сплавы упрочняются путем термической обработки?

4. В чем сущность процесса старения?

5. Какие сплавы не упрочняются путем термической обработки?
6. Какие вы знаете литейные алюминиевые сплавы?
7. Какие вы знаете жаропрочные алюминиевые сплавы?
8. Какие вы знаете порошковые алюминиевые сплавы?
9. Каковы свойства магния?
10. Укажите свойства и назначение сплавов на основе магния.

Медь и ее сплавы

Латуни и бронзы.

Изучите классификацию медных сплавов и уясните маркировку, состав, структуру, свойства и области применения разных групп медных сплавов.

Вопросы для самопроверки

1. Как влияют примеси на свойства чистой меди?
2. Как классифицируются медные сплавы?
3. Какие сплавы относятся к латуням?
4. Приведите несколько примеров латуней с указанием их состава, структуры, свойств и назначения.
5. Какие сплавы относятся к бронзам? Их маркировка и состав.
6. Укажите строение, свойства и назначение различных бронз.
7. Какой термической обработке подвергается бериллиевая бронза?

Композиционные материалы

Обратите внимание на принципиальное отличие композиционного материала, заключающееся в сочетании разнородных материалов с четкой границей раздела между ними. В связи с тем, что композит обладает свойствами, которыми не может обладать ни один из его компонентов в отдельности, такие материалы становятся весьма перспективными в различных областях новой техники. Укажите свойства композитов в зависимости от вида матрицы и формы, размеров и взаимного расположения наполнителя. Уясните возможность использования композитов в качестве жаропрочных материалов и способы повышения их жаропрочности.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое композиты?
2. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?
3. Как подразделяют композиты по виду матрицы?
4. От чего зависят механические свойства композитов?
5. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?

ЧАСТЬ II. НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Пластические массы

В основе неметаллических материалов лежат полимеры. Обратите внимание на особенности строения полимеров, которые определяют их механические и физико-химические свойства. Классификация полимерных материалов. Свойства и области применения пластмасс.

Пластические массы - искусственные материалы, получаемые на основе органических полимерных связывающих веществ, которые являются обязательными компонентами пластмасс. Изучите различные группы пластических масс, их свойства и области применения.

Вопросы для самопроверки

1. Что лежит в основе классификации полимеров?
2. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?
3. Какие вы знаете наполнители пластмасс?
4. Для чего вводят в пластмассы отвердители?
5. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.
6. Укажите область применения термопластов и реактопластов.
7. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

Резиновые материалы

Как технический материал резина отличается от других материалов высокими эластичными свойствами, что связано со свойствами самой основы резины - каучука. Уясните состав резины, способы получения и влияние различных добавок на ее свойства. Подробно рассмотрите влияние порошковых и органических наполнителей на свойства резины, изучите физико-механические свойства и области применения резин различных марок.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой резина?
2. Какие компоненты относятся к совмещающимся и как они влияют на свойства резины?
3. Объясните роль порошковых наполнителей.
4. В каких случаях применяются волокнистые наполнители?

Неорганические материалы

Поскольку большинство неорганических материалов содержит раз-

личные соединения кремния с другими элементами, эти материалы получили общее название силикатных материалов. Обратите внимание на внутреннее строение неорганического стекла. Уясните сущность стеклообразного состояния как разновидности аморфного состояния вещества. Разберитесь в изменении свойств стекла в зависимости от состава. Рассмотрите стеклокристаллические материалы (ситаллы) и их отличие от стекла минерального. Уясните причины образования кристаллической структуры ситаллов.

При изучении керамических материалов обратите внимание на отличие технической керамики от обычной. Разберитесь в химическом и фазовом составах технической керамики, ее свойствах и области применения.

Вопросы для самопроверки

Какие силикатные материалы относятся к минеральному стеклу?

Их отличительные свойства.

Как достигаются электроизоляционные или электропроводящие свойства стекла?

Объясните причины, вызывающие кристаллизацию ситаллов (стеклокристаллитов).

Укажите область применения ситаллов.

5. В чем отличие технической керамики от обычной? Укажите область ее применения.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Задания на контрольные работы выдают индивидуально каждому студенту. Задание включает вопросы и задачи по основным разделам курса.

При выполнении контрольных работ студенты изучают методику выбора и назначения сталей и сплавов для изготовления конкретных деталей машин и различного вида инструментов, а также знакомятся с особенностями строения, технологией получения и областью применения наиболее распространенных неметаллических материалов. Одновременно студент должен научиться пользоваться рекомендуемыми справочными материалами, с тем чтобы уметь в дальнейшем правильно выбрать материал при курсовом и дипломном проектировании.

Перечень ГОСТов, необходимых для выполнения контрольных работ, приведен в приложении. Диаграмма состояния железо-цементит и диаграмма изотермического превращения аустенита эвтектоидной стали У8 также приведены в приложении (см. рис. 1 и 2).

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант 1

1. Что такое ликвация? Виды ликвации, причины их возникновения и способы устранения.

2. Дайте определение ударной вязкости (KCV). Опишите методику измерения этой характеристики механических свойств металла.

3. Вычертите диаграмму состояния железо - карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 3,6% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8, нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 45...50 HRC. Укажите, как этот режим называется, опишите сущность превращений и какая структура получается в данном случае.

5. Как изменяются структура и свойства стали 40 и У12 в результате закалки от температуры 750 и 850° С. Объясните с применением диаграммы состояния железо-цементит. Выберите оптимальный режим нагрева под закалку каждой стали.

Вариант 2

1. Как и почему скорость охлаждения при кристаллизации влияет на строение слитка?

2. Из листа свинца путем прокатки при комнатной температуре была получена тонкая фольга. Твердость и прочность этой фольги оказались такими же, как у исходного листа. Объясните, какие процессы происходили при пластической деформации свинца и какими изменениями структуры и свойств они сопровождались.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-карбид железа, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,8% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму состояния железо -цементит и кривую изменения твердости в зависимости от температуры отпуска, назначьте для углеродистой стали 40 температуру закалки и температуру отпуска, необходимые для обеспечения твердости 400 НВ. Опишите превращения на всех этапах термической обработки и получаемую структуру.

5. Для каких целей применяется диффузионный отжиг? Как выбирается режим такого отжига? Приведите примеры.

Вариант 3

1. Опишите виды твердых растворов. Приведите примеры.

2. Дайте определение твердости. Какими методами измеряют твердость металлов и сплавов? Опишите их.

3. Вычертите диаграмму состояния железо-цементит, укажите структурные составляющие во всех областях диаграммы, опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 2,2% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 150 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в данном случае.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит обоснуйте выбор режима термической обработки, применяемой для устранения цементитной сетки в заэвтектоидной стали. Дайте определение выбранного режима обработки и опишите превращения, которые происходят при нагреве и охлаждении.

Вариант 4

1. Опишите физическую сущность и механизм процесса кристаллизации.

2. Для чего проводится рекристаллизационный отжиг? Как назначается режим этого вида обработки? Приведите несколько конкретных примеров.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава, содержащего 0,4 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Используя диаграмму изотермического превращения аустенита, объясните, почему нельзя получить в стали чисто мартенситную структуру при охлаждении ее со скоростью меньше критической?

5. После термической обработки углеродистой стали получена структура цементит + мартенсит отпуска. Нанесите на диаграмму состояния железо-цементит ординату заданной стали (примерно) и обоснуйте температуру нагрева этой стали под закалку. Так же укажите температуру отпуска.. Опишите превращения, которые произошли при термической обработке.

Вариант 5

1. Что такое ограниченные и неограниченные твердые растворы? Каковы необходимые условия образования неограниченных твердых растворов?

2. Опишите сущность явления наклепа и примеры его практического использования.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава содержащего 1,1% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. При непрерывном охлаждении стали У8 получена структура троостит + мартенсит. Нанесите на диаграмму изотермического превращения аустенита кривую охлаждения, обеспечивающую получение данной структуры. Укажите интервалы температур превращений и опишите характер превращения в каждом из них.

5. С помощью диаграммы состояния железо - цементит установите температуру полной и неполной закалки для стали 45 и опишите структуру и свойства стали после каждого вида термической обработки.

Вариант 6

1. Начертите диаграмму состояния для случая ограниченной растворимости компонентов в твердом виде. Укажите структурные составляющие во всех областях этой диаграммы и опишите строение типичных сплавов раз-

личного состава, встречающихся в этой системе.

2. Волочение медной проволоки проводят в несколько переходов. В некоторых случаях проволока на последних переходах разрывается. Объясните причину разрыва и укажите способ его предупреждения.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,5 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей получение твердости 200 НВ. Укажите, как этот режим называется и какая структура получается в этом случае.

5. Используя диаграмму состояния железо-цементит, установите температуры нормализации, отжига и закалки для стали У12. Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали после каждого вида обработки.

Вариант 7

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к железу. Какое практическое значение оно имеет?

2. Как изменяются свойства деформированного металла при нагреве, какие процессы происходят при этом?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 0,7 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита стали У8. Нанесите на нее кривую режима изотермической обработки, обеспечивающей твердость 20...25 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура образуется в данном случае.

5. Плашки из стали УНА закалены: первая - от температуры 760° С, вторая - от температуры 850° С. Используя диаграмму состояния железо - цементит, укажите температуры закалки, объясните, какая из этих плашек закалена правильно, имеет более высокие режущие свойства и почему.

Варианта 8

1. В чем сущность процесса модифицирования? Приведите пример использования модификаторов для повышения свойств литейных алюминиевых сплавов.

2. В чем различие между холодной и горячей пластической деформацией? Опишите особенности обоих видов деформации.

3. Опишите превращения и постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 5,0 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Углеродистые стали 35 и У8 после закалки и отпуска имеют структуру мартенсит отпуска и твердость: первая 45 HRC, вторая - 60 HRC. Используя диаграмму состояния железо - цементит и учитывая превращения, происходящие при отпуске, укажите температуру закалки и температуру отпуска для каждой стали. Опишите превращения, происходящие в этих сталях

в процессе закалки и отпуска, и объясните, почему сталь У8 имеет большую твердость, чем сталь 35.

5. Сталь 40 подвергалась закалке от температур 760 и 840º С. С помощью диаграммы состояния железо-цементит укажите, какие структуры образуются в каждом случае. Объясните причины образования разных структур и рекомендуйте оптимальный режим нагрева под закалку данной стали.

Вариант 9

1. Охарактеризуйте особенности металлического типа связи и основные свойства металлов.

2. Какими стандартными характеристиками механических свойств оценивается прочность металлов и сплавов? Как эти характеристики определяются?

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 4,8 % С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. С помощью диаграммы состояния железо-цементит установите температуру полного и неполного отжига и нормализации для стали 20, Охарактеризуйте эти режимы термической обработки и опишите структуру и свойства стали.

5. Почему для изготовления инструмента применяется сталь с исходной структурой зернистого перлита? В результате какой термической обработки можно получить эту структуру? Приведите конкретный режим для любой инструментальной стали.

Вариант 10

1. Опишите явление полиморфизма в приложении к титану. Какое практическое значение оно имеет?

2. Каким способом можно восстановить пластичность холоднокатаной медной ленты? Назначьте режим термической обработки и опишите сущность происходящих процессов.

3. Постройте кривую охлаждения (с применением правила фаз) для сплава железа, содержащего 1,4% С. Какова структура этого сплава при комнатной температуре и как такой сплав называется?

4. Вычертите диаграмму изотермического превращения аустенита для стали У8. Нанесите на нее кривую режима термической обработки, обеспечивающей получение твердости 60...63 HRC. Укажите, как этот режим называется и какая структура при этом получается. Опишите сущность происходящих превращений.

5. С помощью диаграммы состояния железо-цементит опишите структурные превращения, происходящие при нагреве доэвтектоидной стали. Покажите критические точки АС1 и АС3 для выбранной вами стали. Установите режим нагрева этой стали под закалку. Охарактеризуйте процесс закалки, опишите получаемую структуру и свойства стали.

ЛИТЕРАТУРА

Арзамасов Б. Н., Сидорин И. И. и др. Материаловедение: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 648 с.

Батышев А. И., Безпалько В. И., Смолькин А. А. Материаловедение и технология материалов М.: Изд-во Инфра-М, 2012. 288 с.

Богодухов С. И., Козик Е. С.. Материаловедение: учеб. для вузов. М.: Машиностроение, 2015. 504 с.

Бондаренко, Г. Г. Кабанова Т. А., Рыбалко В. В. Материаловедение: учебник для бакалавров / под ред. Г. Г. Бондаренко. 2-е изд. М.: Юрайт, 2014. 359 с.

Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П. Материаловедение: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 2009. 528 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Хазин М. Л. Материаловедение: учебно-практическое пособие. Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

.

ПРИЛОЖЕНИЯ

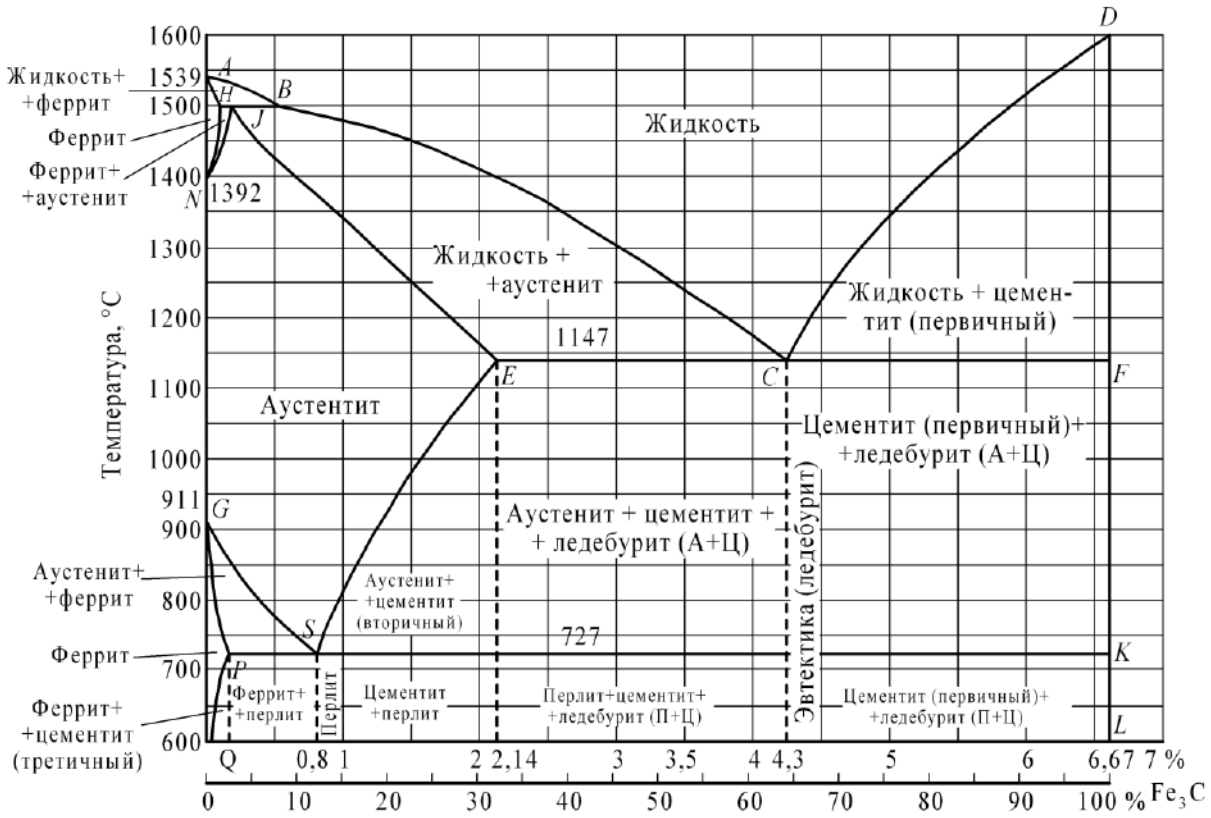


Рисунок 1 – Диаграмма состояния железо-цементит

Перечень ГОСТов на стали и сплавы

1. Сталь

Углеродистая обыкновенного качества – ГОСТ 380-71

Углеродистая качественная – ГОСТ 1050-74

Легированная, конструкционная, качественная, рессорно-пружинная– ГОСТ 1050-74

Углеродистая инструментальная – ГОСТ 1435-74

Легированная инструментальная – ГОСТ 5950-73

Подшипниковая – ГОСТ 801-78

Быстрорежущие стали – ГОСТ 19265-73

Конструкционный повышенной и высокой обрабатываемости резанием – ГОСТ 1414-75

Жаростойкие и жаропрочные – ГОСТ 5632-72

Коррозионностойкие – ГОСТ 5632-72

Сплавы твердые спеченные – ГОСТ 3882-74

Магнитотвердые (для постоянных магнитов) – ГОСТ 6862-71

Электротехнические – ГОСТ 21427.0-75...

ГОСТ 21427.3-75

2. Чугун

Серый – ГОСТ 1412-79

Ковкий – ГОСТ 1215-79
Высокопрочный – ГОСТ 7293-85
Жаростойкий – ГОСТ 7769-75
3. Алюминий и его сплавы
Алюминий – ГОСТ 11069-74
Деформируемые – ГОСТ 4784-74
Литейные – ГОСТ 2685-75
4. Медь и ее сплавы
Медь ГОСТ 859 – 78
Латунь двойная и многокомпонентная
деформируемая – ГОСТ 15527-70
Латунь литейная – ГОСТ 17711-80
Бронза оловяннистая деформируемая – ГОСТ5017-74
Бронза безоловяннистая деформируемая – ГОСТ 18175-78
Бронза оловяннистая литейная – ГОСТ 613-79
Бронза безоловяннистая литейная – ГОСТ 493-79
Медно-никелевые сплавы – ГОСТ 492-73
5. Титановые сплавы – ГОСТ 19807-74
6. Антифрикционные сплавы
Алюминиевые – ГОСТ 14113-78
Цинковые – ГОСТ 21437-75
Баббиты – ГОСТ 1320-74
7. Магний и его сплавы
Магний – ГОСТ 804-72
Деформируемые – ГОСТ 14957-76
Литейные – ГОСТ 2856-79

Учебное издание

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Учебно-практическое пособие
по выполнению практических и
самостоятельных работ
для студентов очного и заочного обучения
направлений
направлений специалитета
21.05.04 Горное дело

Редактор Л. В. Устьянцева

Компьютерная верстка автора

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 × 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 1,71. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.О.15 РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Направление подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

Профиль
Экспертиза и аудит промышленной и пожарной безопасности

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Философии и культурологии	Горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Беляев В. П.	Колчина Н. В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 18.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

Автор: Гладкова И. В., доцент, к. ф. н

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;

- освоение информации и ее логическая переработка;
- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др..

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

Критерии оценки доклада, сообщения	*Количество баллов*
Содержательность, информационная насыщенность доклада	2
Наличие аргументов	2
Наличие выводов	2
Наличие презентации доклада	2
Владение профессиональной лексикой	2
Итого:	10

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен (зачет) - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

ЕДИНАЯ СИСТЕМА КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

ГОСТ 2.301-68 — ГОСТ 2.303-68, ГОСТ 2.304—81, ГОСТ 2.305-68 — ГОСТ 2.307—68, ГОСТ 2.308—79, ГОСТ 2.309—73, ГОСТ 2.310—68, ГОСТ 2.311—68, ГОСТ 2.312—72, ГОСТ 2.313—82, ГОСТ 2.314-68 — ГОСТ 2.316-68, ГОСТ 2.317—69, ГОСТ 2.318—81, ГОСТ 2.320—82, ГОСТ 2.321—84

Издание официальное

ИПК ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ
Москва

ЕДИНАЯ СИСТЕМА КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

ГОСТ 2.301-68 — ГОСТ 2.303-68, ГОСТ 2.304—81, ГОСТ 2.305-68 — ГОСТ 2.307—68, ГОСТ 2.308—79, ГОСТ 2.309—73, ГОСТ 2.310—68, ГОСТ 2.311—68, ГОСТ 2.312—72, ГОСТ 2.313—82, ГОСТ 2.314-68 — ГОСТ 2.316-68, ГОСТ 2.317—69, ГОСТ 2.318—81, ГОСТ 2.320—82, ГОСТ 2.321—84

Издание официальное

Москва
2001

© ИПК Издательство стандартов, 2001

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ФОРМАТЫ

Unified system for design documentation.
Formats

ГОСТ 2.301—68*
Взамен
ГОСТ 3450—60

Утвержден Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

Срок введения установлен **с 01.01.71**

1. Настоящий стандарт устанавливает форматы листов чертежей и других документов, предусмотренных стандартами на конструкторскую документацию всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 1181—78, СТ СЭВ 6306—88.

(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

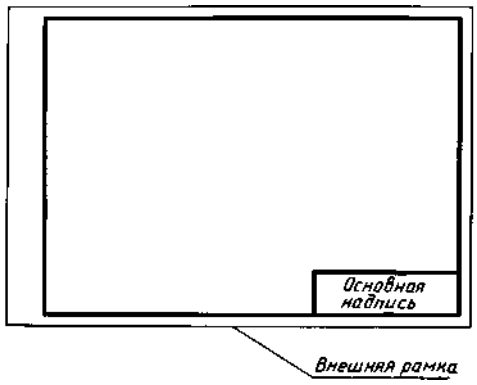
2. Форматы листов определяются размерами внешней рамки (выполненной тонкой линией) оригиналов, подлинников, дубликатов, копий (черт. 1).

3. Формат с размерами сторон 1189 × 841 мм, площадь которого равна 1 м^2, и другие форматы, полученные путем последовательного деления его на две равные части параллельно меньшей стороне соответствующего формата, принимаются за основные.

4. Обозначения и размеры сторон основных форматов должны соответствовать указанным в табл. 1.

Таблица 1

Обозначение формата	Размеры сторон формата,мм
A0	841 × 1189
A1	594 × 841
A2	420 × 594
A3	297 × 420
A4	210 × 297



Черт. 1

При необходимости допускается применять формат А5 с размерами сторон 148 × 210 мм.

5. Допускается применение дополнительных форматов, образуемых увеличением коротких сторон основных форматов на величину, кратную их размерам.

Размеры производных форматов, как правило, следует выбирать по табл. 2.

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в декабре 1980 г., марте 1989 г. (ИУС 3—81, 7—89)*

Обозначение производного формата составляется из обозначения основного формата и его кратности согласно табл. 2, например, А0 × 2, А4 × 8 и т. д.

Таблица 2

мм

Кратность	Формат				
	А0	А1	А2	А3	А4
2	1189 × 1682	—	—	—	—
3	1189 × 2523	841 × 1783	594 × 1261	420 × 891	297 × 630
4	—	841 × 2378	594 × 1682	420 × 1189	297 × 841
5	—	—	594 × 2102	420 × 1486	297 × 1051
6	—	—	—	420 × 1783	297 × 1261
7	—	—	—	420 × 2080	297 × 1471
8	—	—	—	—	297 × 1682
9	—	—	—	—	297 × 1892

6. Предельные отклонения сторон форматов — по табл. 3.

Таблица 3

мм

Размеры сторон форматов	Предельные отклонения
до 150	±1,5
св. 150 до 600	±2,0
св. 600	±3,0

4—6. **(Измененная редакция, Изм. № 1).**

7, 8. **(Исключены, Изм. № 1).**

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

МАСШТАБЫ

Unified system for design documentation.
Scales

ГОСТ 2.302—68*
Взамен
ГОСТ 3451—59

Утвержден Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

Срок введения установлен **с 01.01.71**

1. Настоящий стандарт устанавливает масштабы изображений и их обозначение на чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт не распространяется на чертежи, полученные фотографированием, а также на иллюстрации в печатных изданиях и т. п.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

2а. Внастоящем стандарте применяют следующие термины с соответствующими определениями:

масштаб: Отношене линейного размера отрезка на чертеже к соответствующему линейному размеру того же отрезка в натуре;

масштаб натуральной величины: Масштаб с отношением 1:1;

масштаб увеличения: Масштаб с отношением большим,чем 1:1 (2:1 и т.д.);

масштаб уменьшения: Масштаб с отношением меньшим,чем 1:1 (1:2 и т.д.).

(Введен дополнительно, Изм. № 2).

2. Масштабы изображений на чертежах должны выбираться из следующего ряда:

Масштабы уменьшения	1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000
Натуральная величина	1:1
Масштабы увеличения	2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1

3. При проектировании генеральных планов крупных объектов допускается применять масштабы 1:2000; 1:5000; 1:10000; 1:20000; 1:25000; 1:50000.

4. Внеобходимых случаях допускается применять масштабы увеличения $(100n):1$,где n — целое число.

5. Масштаб,указанный в предназначенной для этого графе основной надписи чертежа,должен обозначаться по типу 1:1; 1:2; 2:1 и т.д.

Изменение № 2 принято Межгосударственным Советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 17 от 22.06.2000)

За принятие изменения проголосовали:

Наименование государства	Наименование национального органа по стандартизации
Азербайджанская Республика	Азгосстандарт
Республика Беларусь	Госстандарт Республики Беларусь
Кыргызская Республика	Кыргызстандарт
Республика Молдова	Молдовастандарт
Российская Федерация	Госстандарт России
Республика Таджикистан	Таджикгосстандарт
Туркменистан	Главгосинспекция «Туркменстандартлары»
Республика Узбекистан	Узгосстандарт
Украина	Госстандарт Украины

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в феврале 1980 г., декабре 2000 г. (ИУС 4—80, 3—2001)*

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ЛИНИИ

Unified system for design documentation.
Lines

ГОСТ 2.303—68*

Взамен ГОСТ 3456—59

Утвержден Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г. Срок введения установлен

с 01.01.71

1. Настоящий стандарт устанавливает начертания и основные назначения линий на чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

Специальные назначения линий (изображение резьбы, шлицев, границы зон с различной шероховатостью и т.д.) определены в соответствующих стандартах Единой системы конструкторской документации.

Стандарт соответствует СТ СЭВ 1178—78, СТ СЭВ 6306—88.

(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

2. Наименование, начертание, толщина линий по отношению к толщине основной линии и основные назначения линий должны соответствовать указанным в табл. 1. Примеры применения линий показаны на черт. 1—9.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

3. Для сложных разрезов и сечений допускается концы разомкнутой линии соединить штрих-пунктирной тонкой линией.

4. В строительных чертежах в разрезах видимые линии контуров, не попадающие в плоскость сечения, допускается выполнять сплошной тонкой линией (черт. 9).

5. Толщина сплошной основной линии *s* должна быть в пределах от 0,5 до 1,4 мм в зависимости от величины и сложности изображения, а также от формата чертежа.

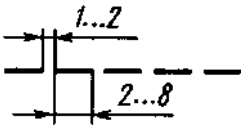
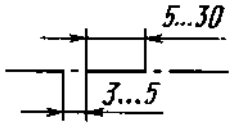
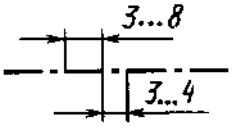
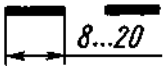
Толщина линий одного и того же типа должна быть одинакова для всех изображений на данном чертеже, вычерчиваемых в одинаковом масштабе.

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

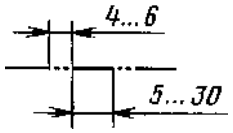
★

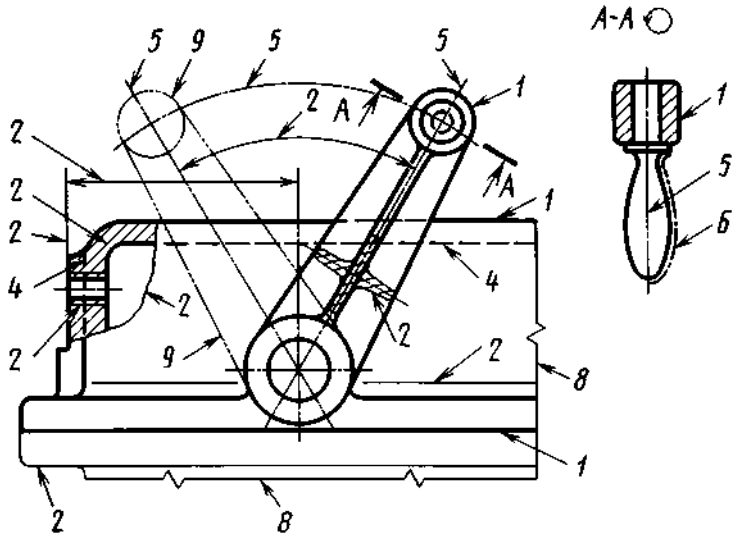
** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в феврале 1980 г., марте 1989 г. (ИУС 4—80, 7—89)*

Таблица 1

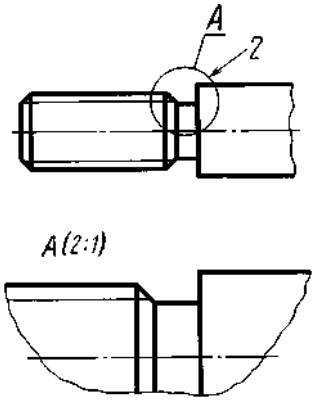
Наименование	Начертание	Толщина линии по отношению к толщине основной линии	Основное назначение
1. Сплошная толстая основная		s	Линии видимого контура Линии перехода видимые Линии контура сечения (вынесенного и входящего в состав разреза)
2. Сплошная тонкая		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{s}{2}$	Линии контура наложенного сечения Линии размерные и выносные Линии штриховки Линии-выноски Полки линий-выносок и подчеркивание надписей Линии для изображения пограничных деталей («обстановка») Линии ограничения выносных элементов на видах, разрезах и сечениях Линии перехода воображаемые Следы плоскостей, линии построения характерных точек при специальных построениях
3. Сплошная волнистая			Линии обрыва Линии разграничения вида и разреза
4. Штриховая			Линии невидимого контура Линии перехода невидимые
5. Штрихпунктирная тонкая		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{s}{2}$	Линии осевые и центровые Линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений
6. Штрихпунктирная утолщенная		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{2}{3}s$	Линии, обозначающие поверхности, подлежащие термообработке или покрытию Линии для изображения элементов, расположенных перед секущей плоскостью («наложенная проекция»)
7. Разомкнутая		От s до $1\frac{1}{2}s$	Линии сечений

Окончание табл. 1

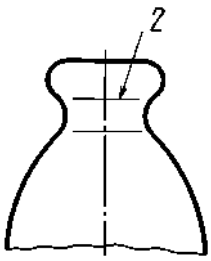
Наименование	Начертание	Толщина линии по отношению к толщине основной линии	Основное назначение
8. Сплошная тонкая с изломами		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{s}{2}$	Длинные линии обрыва
9. Штрихпунктирная с двумя точками тонкая		От $\frac{s}{3}$ до $\frac{s}{2}$	Линии сгиба на развертках. Линии для изображения частей изделий в крайних или промежуточных положениях. Линии для изображения развертки, совмещенной с видом



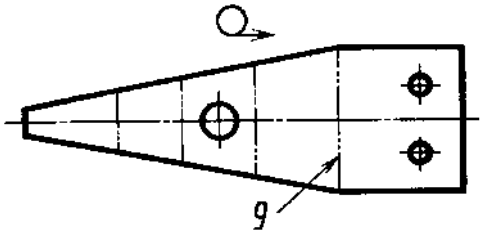
Черт.1



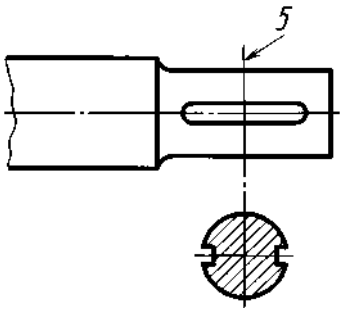
Черт.
2



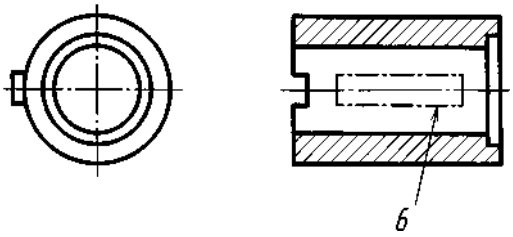
Черт.
3



Черт.4

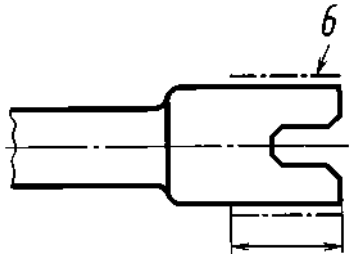


Черт.5

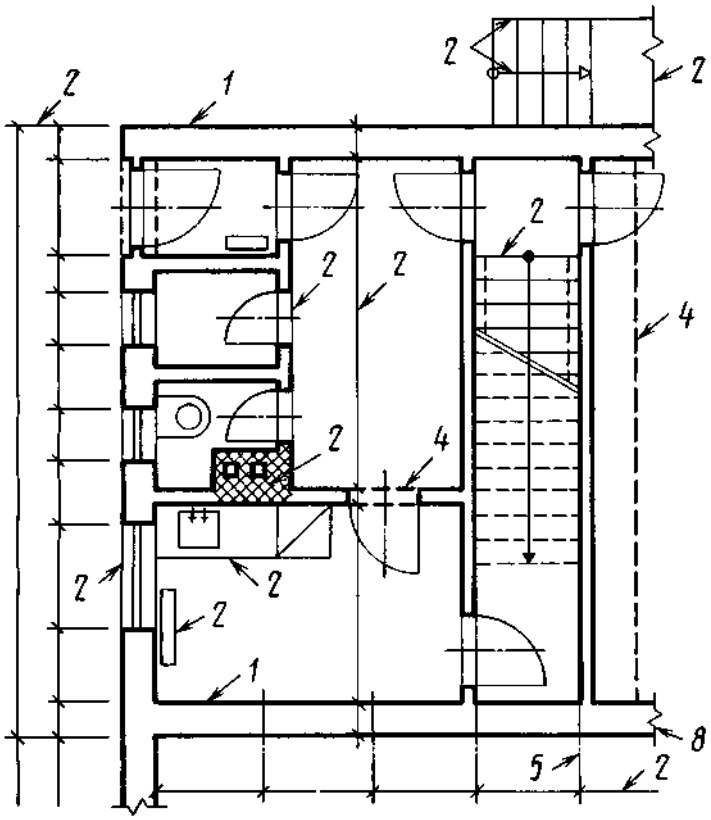


Черт.6

Черт.7



Черт.8



Черт.9

Примечание. Номера позиций на черт. 1—9 соответствуют номерам пунктов табл. 1.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

6. Наименьшая толщина линий и наименьшее расстояние между линиями в зависимости от формата чертежа должна соответствовать указанным в табл. 2.

Таблица 2

Формат чертежа	Наименьшая толщина линий в мм, выполненных		Наименьшее расстояние между линиями в мм, выполненными	
	в туши	в карандаше	в туши	в карандаше
С размером большей стороны 841 мм и более	0,3		0,8	1,0
С размером большей стороны менее 841 мм	0,2	0,3	0,8	

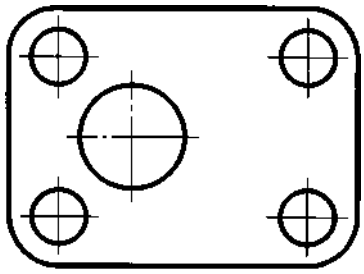
7. Длину штрихов в штриховых и штрихпунктирных линиях следует выбирать в зависимости от величины изображения.

8. Штрихи в линии должны быть приблизительно одинаковой длины.

9. Промежутки между штрихами в линии должны быть приблизительно одинаковой длины.

10. Штрихпунктирные линии должны пересекаться и заканчиваться штрихами.

11. Штрихпунктирные линии, применяемые в качестве центровых, следует заменять сплошными тонкими линиями, если диаметр окружности или размеры других геометрических фигур в изображении менее 12 мм (черт. 10).



Черт.10

УДК 003.07:744:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ШРИФТЫ ЧЕРТЕЖНЫЕ

ГОСТ 2.304—81

Unified system for design documentation.
Letters for drawings

Дата введения 01.01.82

Настоящий стандарт устанавливает чертежные шрифты, наносимые на чертежи и другие технические документы всех отраслей промышленности и строительства.

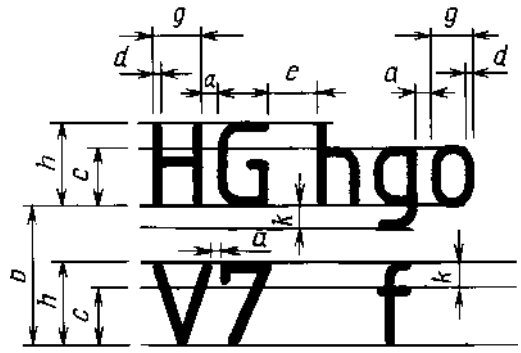
Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 851-78—СТ СЭВ 855-78, СТ СЭВ 6306—88.

1. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

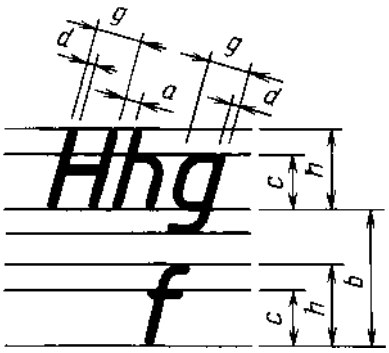
1.1. **Размер шрифта** *h* — величина, определенная высотой прописных букв в миллиметрах.

1.2. Высота прописных букв *h* измеряется перпендикулярно к основанию строки.

Высота строчных букв *c* определяется из отношения их высоты (без отростков *k*) к размеру шрифта *h*, например, $c = 7/10h$ (черт. 1 и 2).



Черт.1

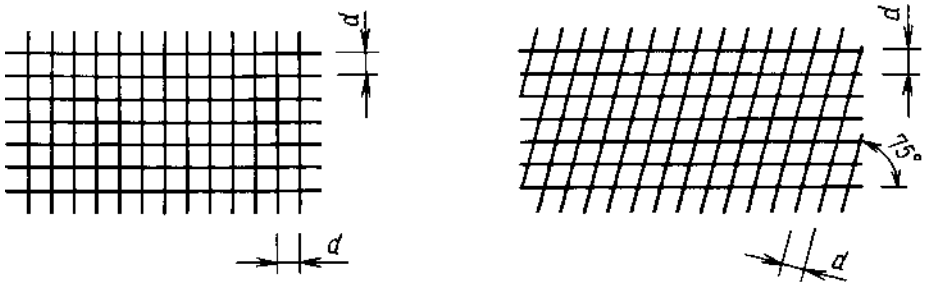


Черт.2

1.3. **Ширина буквы** *g* — наибольшая ширина буквы, измеренная в соответствии с черт. 1 и 2, определяется по отношению к размеру шрифта *h*, например, $g = 6/10h$, или по отношению к толщине линии шрифта *d*, например, $g = 6d$.

1.4. **Толщина линии шрифта** *d* — толщина, определяемая в зависимости от типа и высоты шрифта.

1.5. **Вспомогательная сетка** — сетка, образованная вспомогательными линиями, в которые вписываются буквы. Шаг вспомогательных линий сетки определяется в зависимости от толщины линий шрифта *d* (черт. 3).



Черт.3

2. ТИПЫ И РАЗМЕРЫ ШРИФТА

2.1. Устанавливаются следующие типы шрифта:
тип А без наклона ($d = 1/14\ h$) с параметрами, приведенными в табл. 1;
тип А с наклоном около 75° ($d = 1/14\ h$) с параметрами, приведенными в табл. 1;
тип Б без наклона ($d = 1/10\ h$) с параметрами, приведенными в табл. 2;
тип Б с наклоном около 75° ($d = 1/10\ h$) с параметрами, приведенными в табл. 2.

Таблица 1

Шрифт типа А ($d = h/14$)

Параметры шрифта	Обозначение	Относительный размер		Размеры, мм						
Размер шрифта — высота прописных букв	*h*	$(14/14)\ h$	14 *d*	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0
высота строчных букв	*c*	$(10/14)\ h$	10 *d*	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0
Расстояние между буквами	*a*	$(2/14)\ h$	2 *d*	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8
Минимальный шаг строк (высота вспомогательной сетки)	*b*	$(22/14)\ h$	22 *d*	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0
Минимальное расстояние между словами	*e*	$(6/14)\ h$	6 *d*	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4
Толщина линий шрифта	*d*	$(1/14)\ h$	*d*	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4

Таблица 2

Шрифт типа Б ($d = h/10$)

Параметры шрифта	Обозначение	Относительный размер		Размеры, мм							
Размер шрифта — высота прописных букв	h	$(10/10)\ h$	$10\ d$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0
высота строчных букв	c	$(7/10)\ h$	$7\ d$	1,3	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0
Расстояние между буквами	a	$(2/10)\ h$	$2\ d$	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0
Минимальный шаг строк (высота вспомогательной сетки)	b	$(17/10)\ h$	$17\ d$	3,1	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0
Минимальное расстояние между словами	e	$(6/10)\ h$	$6\ d$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0
Толщина линий шрифта	d	$(1/10)\ h$	d	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0

Примечания:

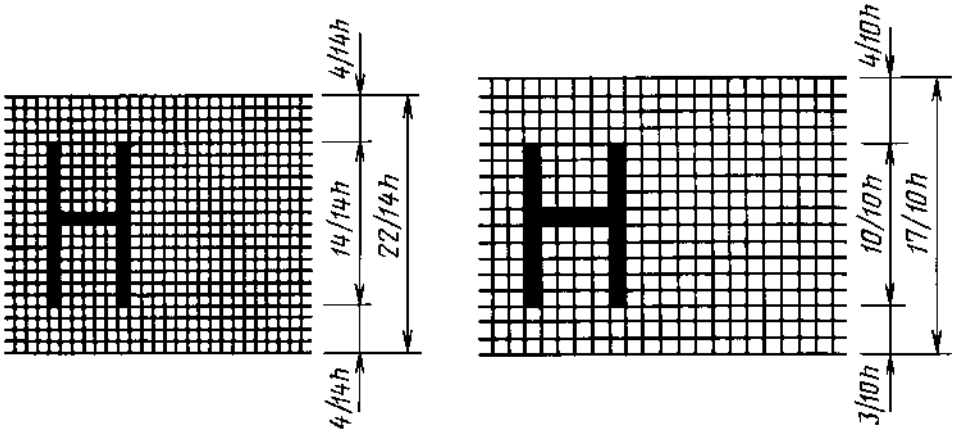
1. Расстояние a между буквами, соседние линии которых не параллельны между собой (например, *ГА, АТ*), может быть уменьшено наполовину, т.е. на толщину d линии шрифта.

2. Минимальным расстоянием между словами e, разделенными знаком препинания, является расстояние между знаком препинания и следующим за ним словом.

2.2. Устанавливаются следующие размеры шрифта: (1,8); 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

Примечание. Применение шрифта размером 1,8 не рекомендуется и допускается только для типа Б.

2.3. Построение шрифта во вспомогательной сетке показано на черт. 4.



Черт.4

2.4. Предельные отклонения размеров букв и цифр ±0,5 мм.

3. РУССКИЙ АЛФАВИТ (КИРИЛЛИЦА)

3.1. Шрифт типа А с наклоном приведен на черт. 5

Черт.

3.2. Шрифт типа А без наклона приведен на черт. 6.

Черт.6

3.3. Шрифт типа Б с наклоном приведен на черт. 7.

Черт.7

3.4. Шрифт типа Б без наклона приведен на черт. 8.

Черт.8

4. ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

4.1. Шрифт типа А с наклоном приведен на черт. 9.

Черт.9

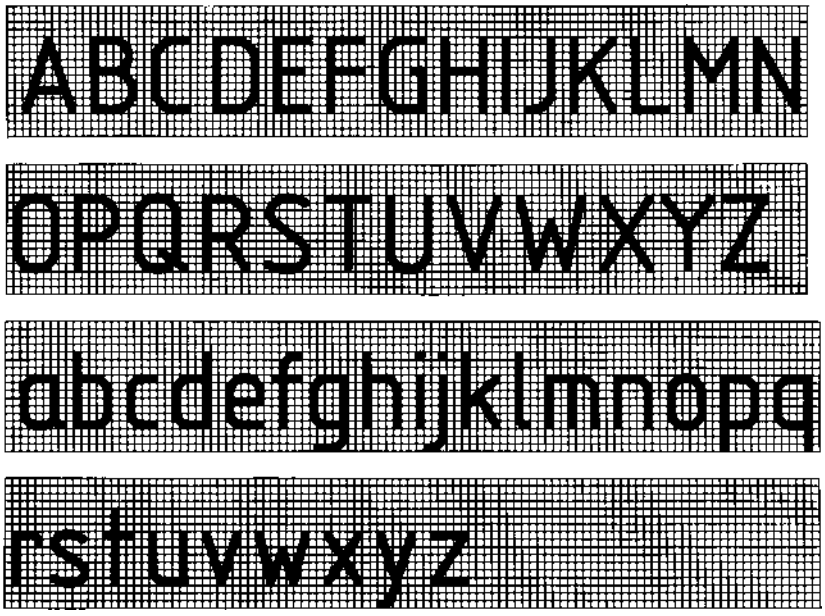
4.2. Шрифт типа А без наклона приведен на черт. 10.

Черт.10

4.3. Шрифт типа Б с наклоном приведен на черт. 11.

Черт.11

4.4. Шрифт типа Б без наклона приведен на черт. 12.



Черт.12

4.5. Виды, форма и расположение диакритических знаков для шрифтов типов А и Б без наклона приведены в справочном приложении.

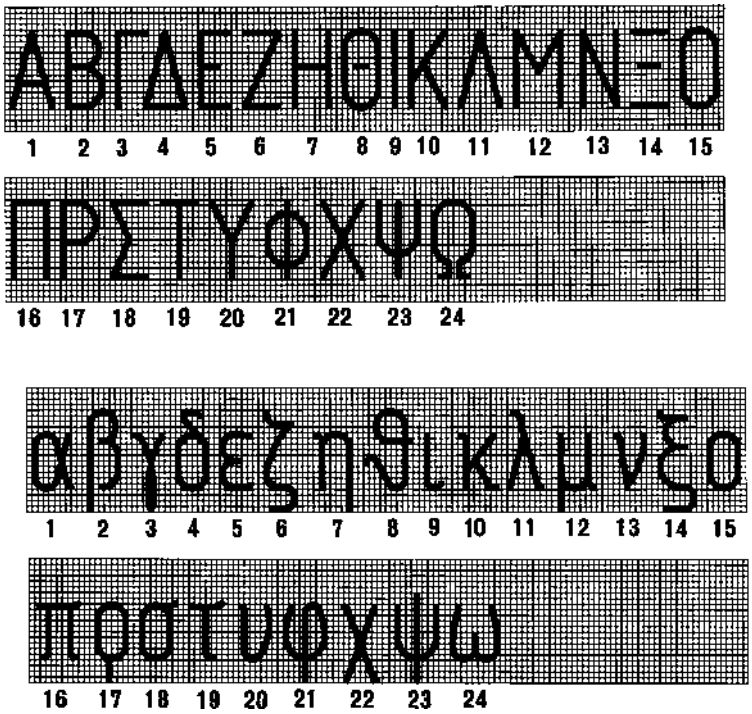
Диакритические знаки для шрифтов с наклоном следует выполнять по тем же правилам.

5. ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

5.1. Шрифт типа А с наклоном приведен на черт. 13.

Черт.13

5.2. Шрифт типа А без наклона приведен на черт. 14.



Черт.14

5.3. Шрифт типа Б с наклоном приведен на черт. 15.

Черт.15

5.4. Шрифт типа Б без наклона приведен на черт. 16.

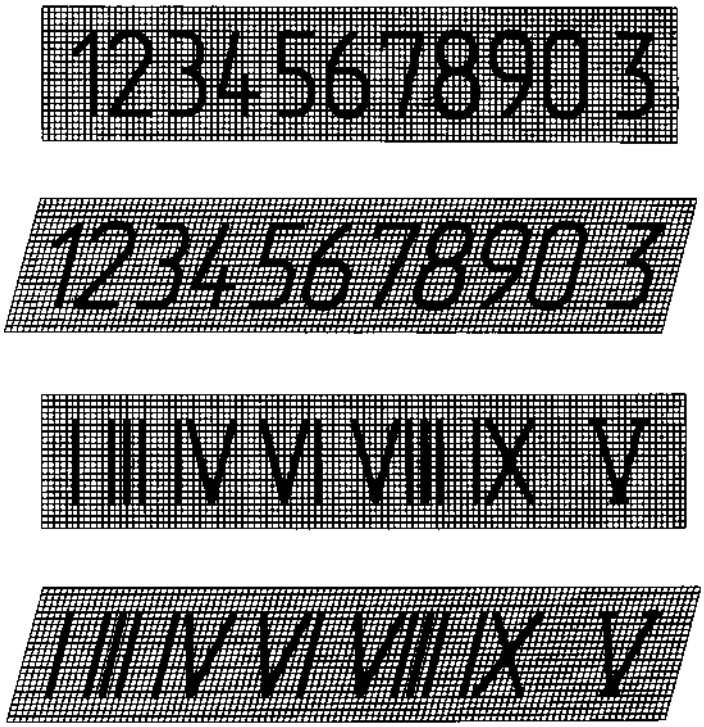
Черт.16

5.5. Наименование букв греческого алфавита, приведенных на черт. 13—16:

1 — альфа	9 — йота	17 — ро
2 — бета	10 — каппа	18 — сигма
3 — гамма	11 — ламбда	19 — тау
4 — дельта	12 — мю	20 — ипсилон
5 — эпсилон	13 — ню	21 — фи
6 — дзета	14 — кси	22 — хи
7 — эта	15 — омикрон	23 — пси
8 — тэта	16 — пи	24 — омега

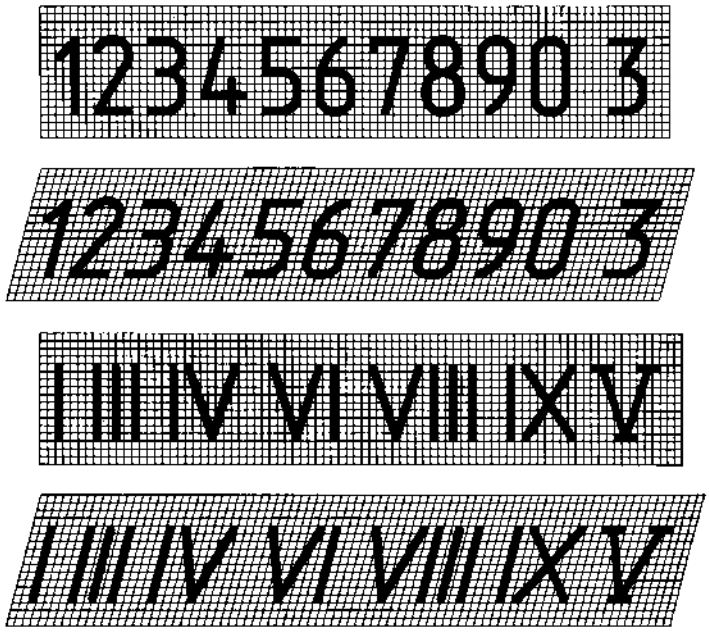
6. АРАБСКИЕ И РИМСКИЕ ЦИФРЫ

6.1. Шрифт типа А приведен на черт. 17.



Черт.17

6.2. Шрифт типа Б приведен на черт. 18.

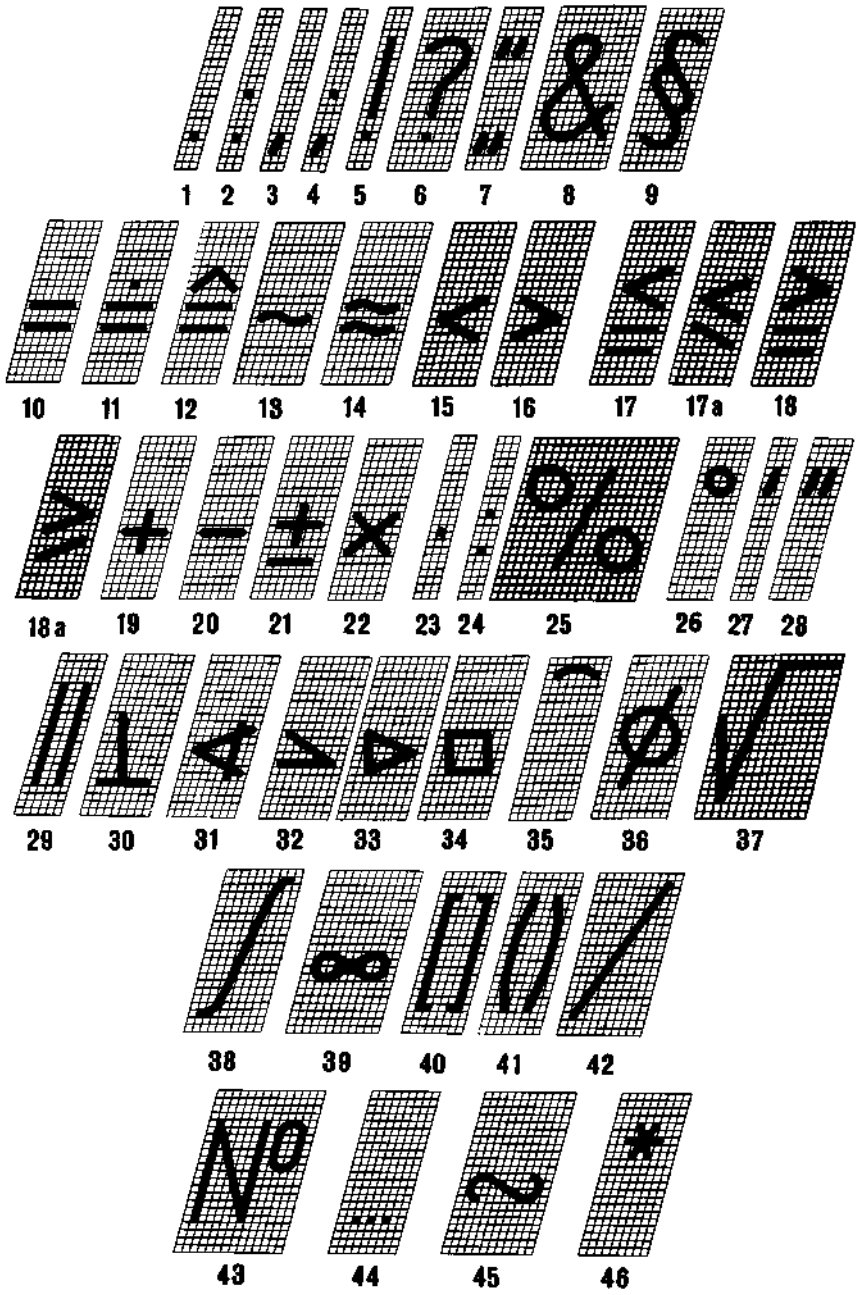


Черт.18

Примечания:
1. Римские цифры L, C, D, M следует выполнять по правилам латинского алфавита.
2. Римские цифры допускается ограничивать горизонтальными линиями.

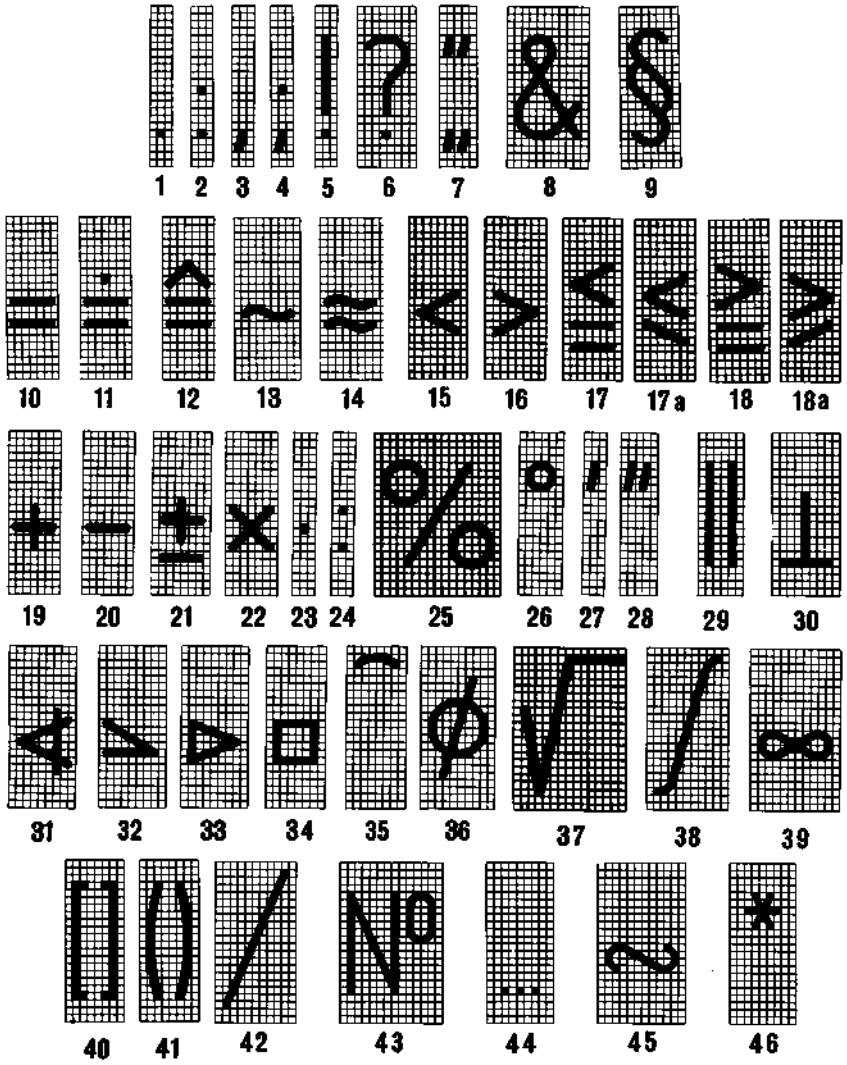
7. ЗНАКИ

7.1. Шрифт типа А с наклоном приведен на черт. 19.



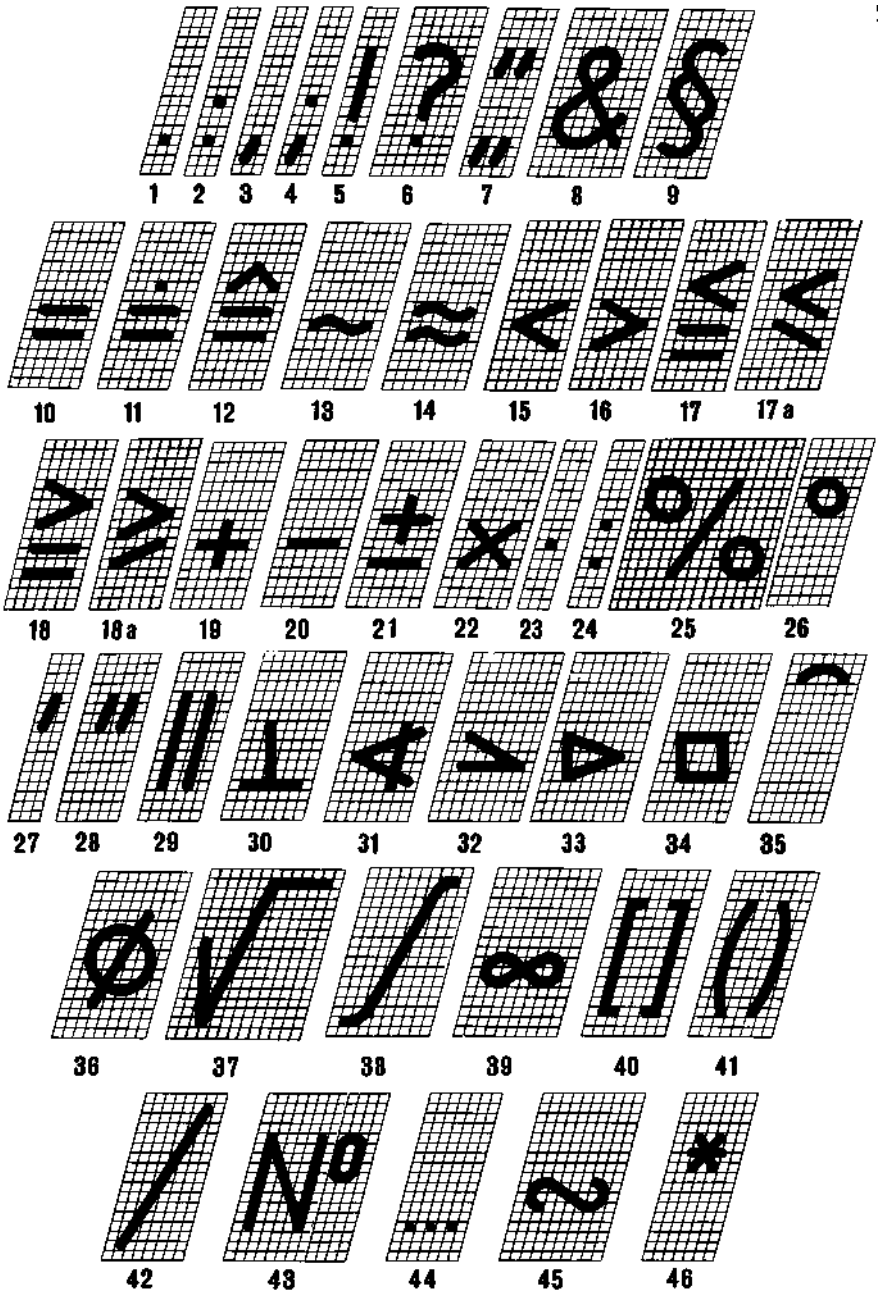
Черт.19

7.2. Шрифт типа А без наклона приведен на черт. 20.



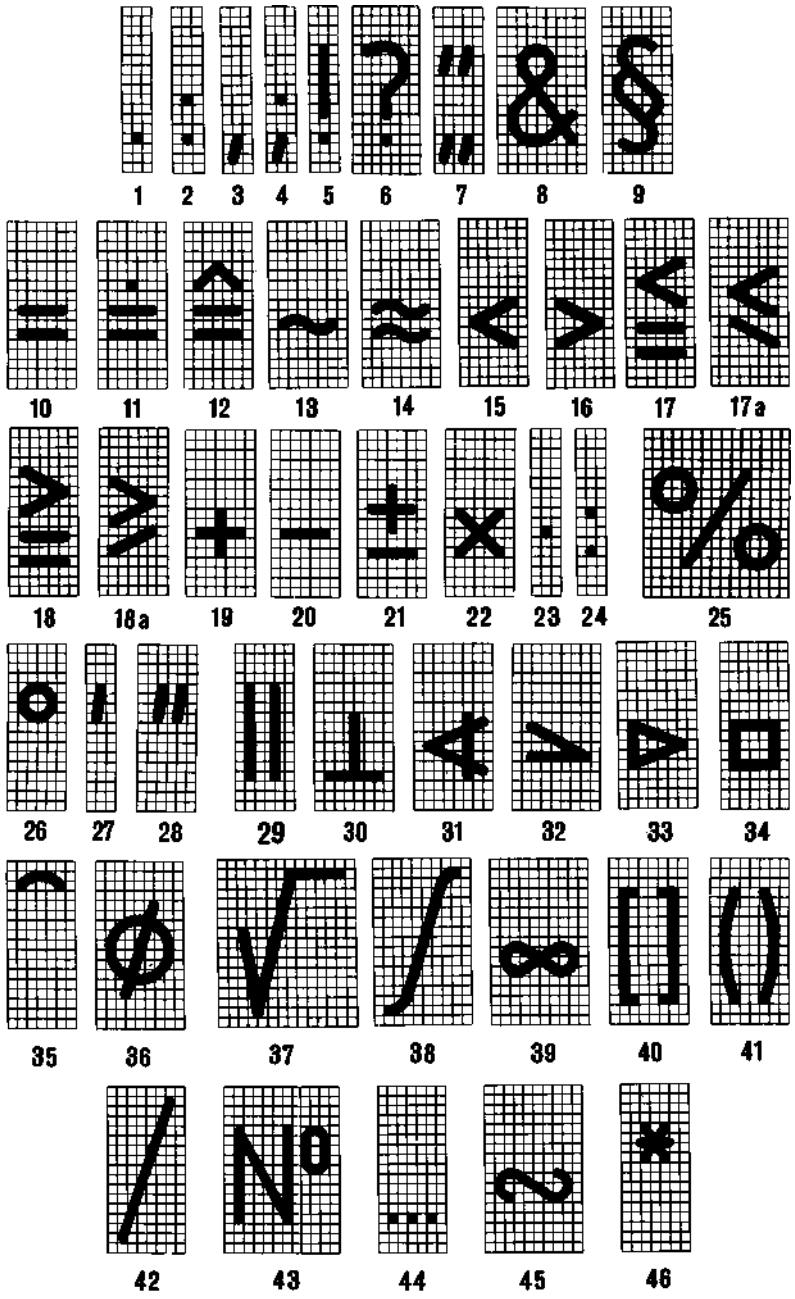
Черт.20

7.3. Шрифт типа Б с наклоном приведен на черт. 21.



Черт.21

7.4. Шрифт типа Б без наклона приведен на черт. 22.



Черт.22

7.5. Наименования знаков приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номера знаков на чертежах	Наименование знаков	Номера знаков на чертежах	Наименование знаков
1	Точка	25	Процент
2	Двоеточие	26	Градус
3	Запятая	27	Минута
4	Точка с запятой	28	Секунда
5	Восклицательный знак	29	Параллельно
6	Вопросительный знак	30	Перпендикулярно
7	Кавычки	31	Угол
8	И	32	Уклон
9	Параграф	33	Конусность
10	Равенство	34	Квадрат
11	Величина после округления	35	Дуга
12	Соответствует	36	Диаметр
13	Асимптотически равно	37	Радикал
14	Приблизительно равно	38	Интеграл
15	Меньше	39	Бесконечность
16	Больше	40	Квадратные скобки
17 и 17а	Меньше или равно	41	Круглые скобки
18 и 18а	Больше или равно	42	Черта дроби
19	Плюс	43	Номер
20	Минус, тире	44	От . . . до
21	Плюс—минус	45	Знак подобия
22, 23	Умножение	46	Звездочка
24	Деление		

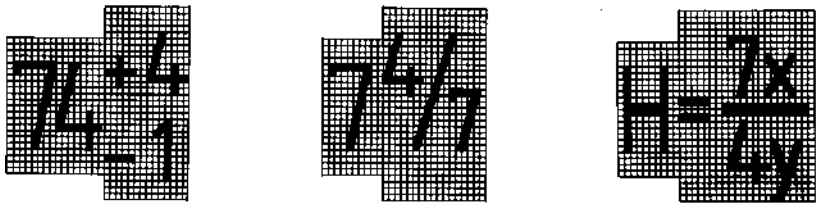
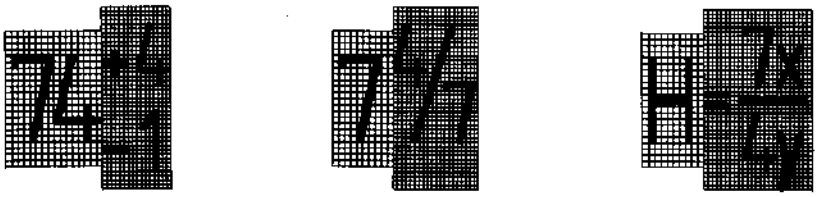
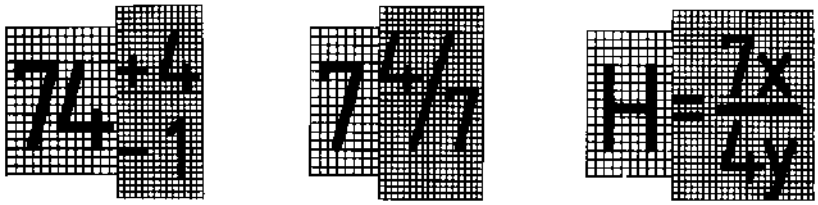
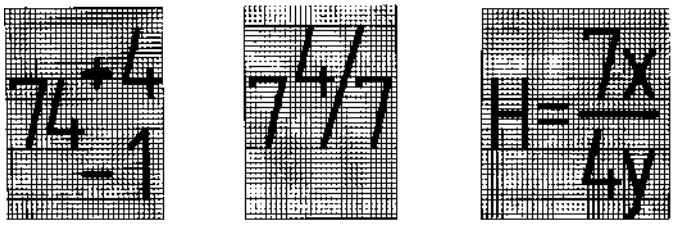
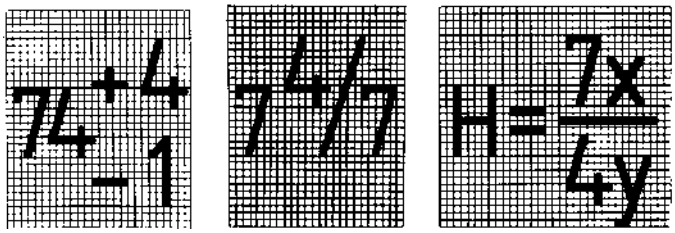
8. ПРАВИЛА НАПИСАНИЯ ДРОБЕЙ, ПОКАЗАТЕЛЕЙ, ИНДЕКСОВ И ПРЕДЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

8.1. Дроби, показатели, индексы и предельные отклонения выполняются в соответствии с табл. 4 размером шрифта:

на одну ступень меньшим, чем размер шрифта основной величины, к которой они приписываются;

одинакового размера с размером шрифта основной величины.

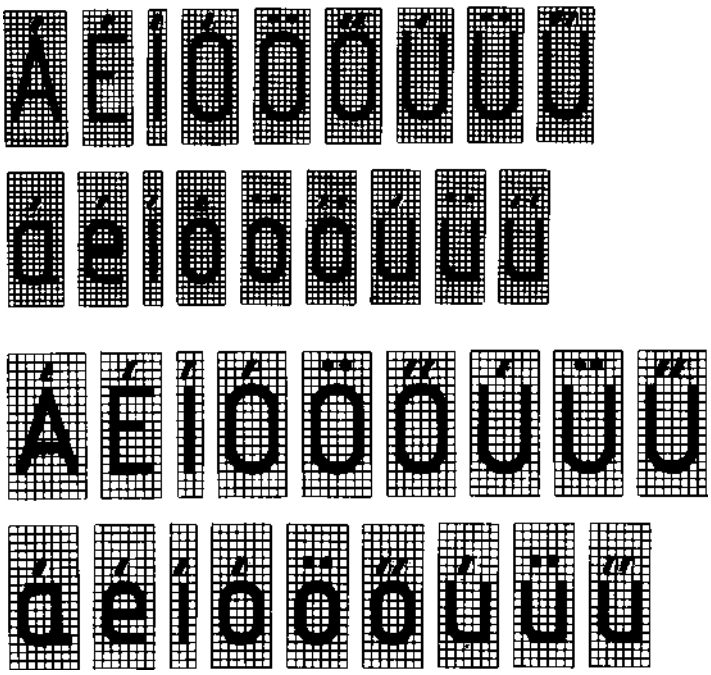
Таблица 4

Варианты выполнения	Шрифт		Примеры выполнения
	основные величины	дроби, показатели и т.п.	
Размер шрифта на одну ступень меньше, чем размер основной величины	Тип А	Тип Б	
	Тип А		
	Тип Б		
Размер шрифта такой же, как размер основной величины	Тип А		
	Тип Б		

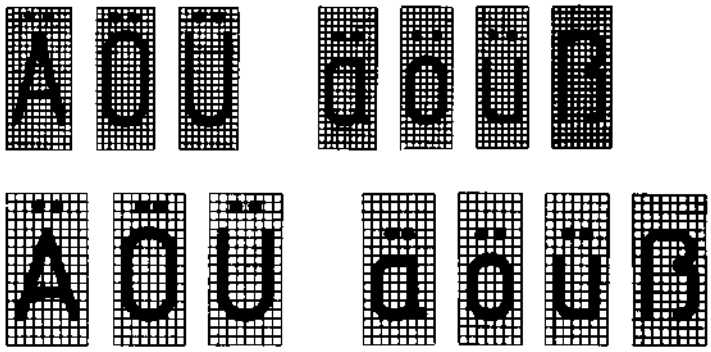
ПРИЛОЖЕНИЕ
Справочное

ДИАКРИТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ

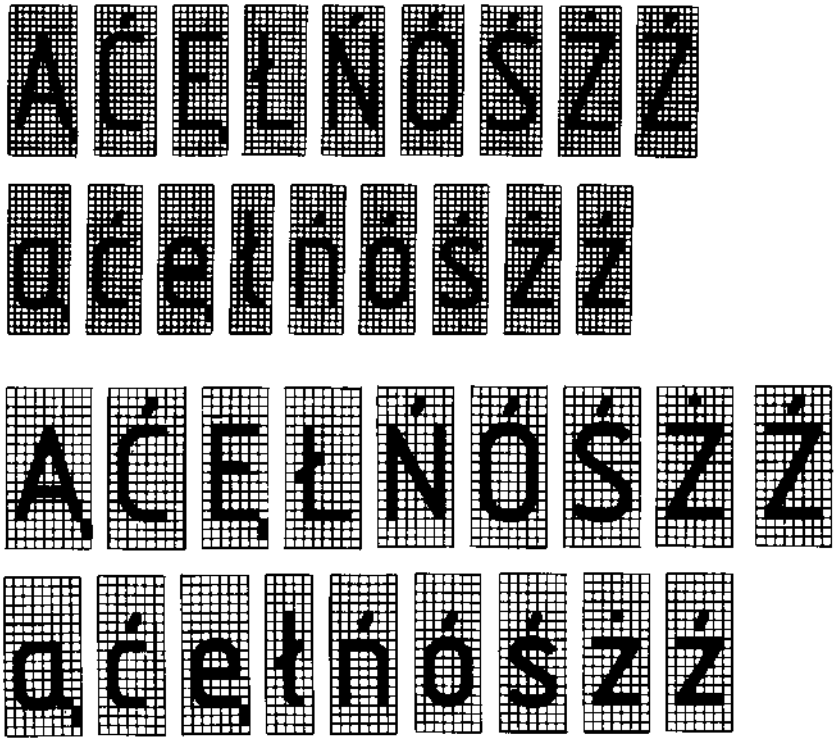
Венгерский язык



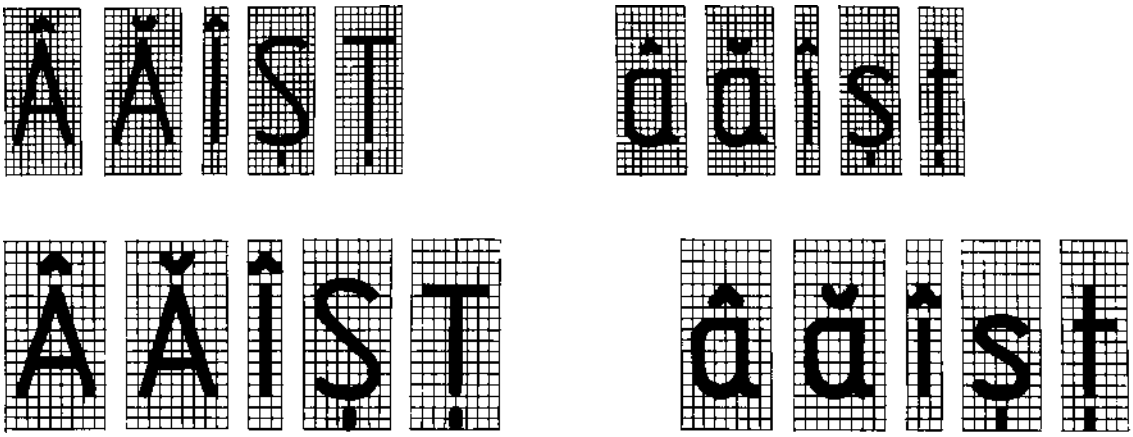
Немецкий язык



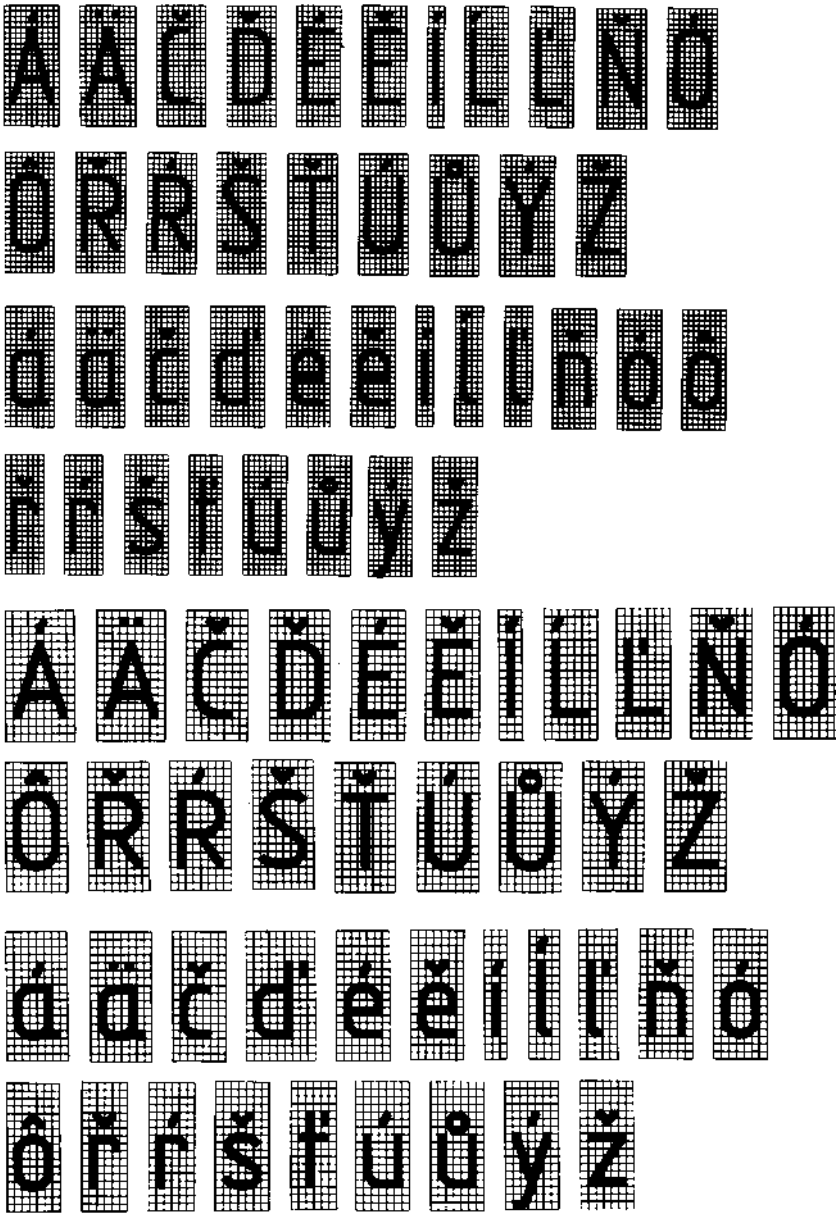
Польский язык



Румынский язык



Чешский и словацкий язык



ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. **РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Государственным комитетом СССР по стандартам**

2. **УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 28.03.81 № 1562**

3. **Стандарт содержит все требования СТ СЭВ 851-78—СТ СЭВ 855-78 и соответствует СТ СЭВ 6306—88 в части терминов и определений**

4. **ВЗАМЕН ГОСТ 2.304—68**

5. **ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в марте 1989 г. (ИУС 7—89)**

УДК 62(084.11) : 006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ИЗОБРАЖЕНИЯ — ВИДЫ, РАЗРЕЗЫ, СЕЧЕНИЯ

ГОСТ 2.305—68

Unified system for design documentation.
Image — appearance, sections

Дата введения 01.01.71

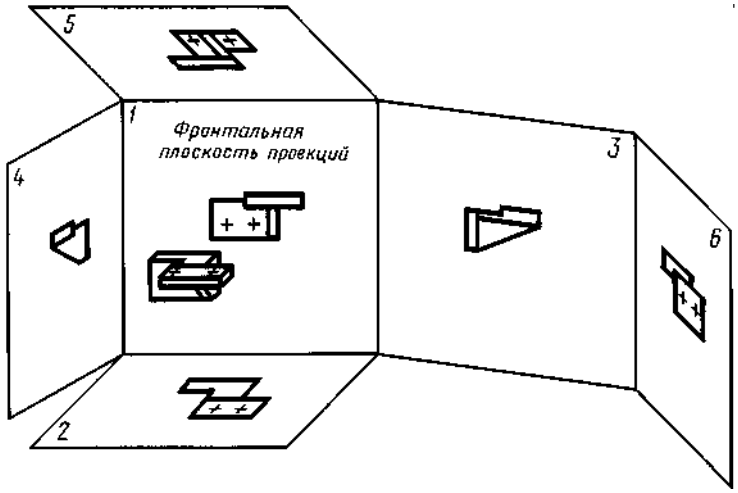
Настоящий стандарт устанавливает правила изображения предметов (изделий, сооружений и их составных элементов) на чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 363—88.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Изображения предметов должны выполняться по методу прямоугольного проецирования. При этом предмет предполагается расположенным между наблюдателем и соответствующей плоскостью проекций (черт. 1).



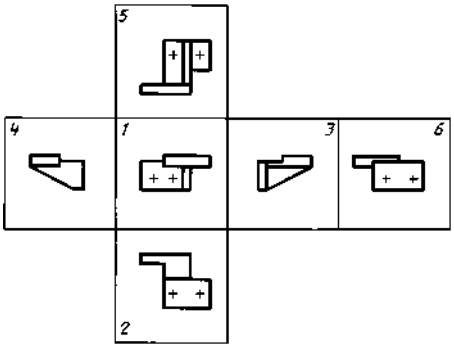
Черт. 1

1.2. За основные плоскости проекций принимают шесть граней куба; грани совмещают с плоскостью, как показано на черт. 2. Грань *6* допускается располагать рядом с гранью *4*.

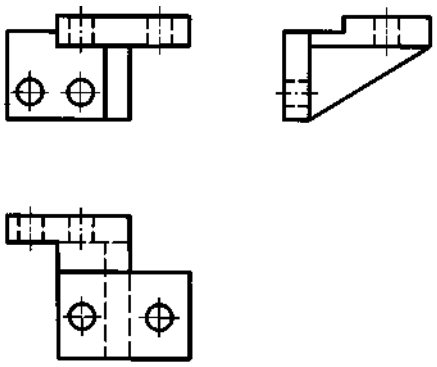
1.3 Изображение на фронтальной плоскости проекций принимается на чертеже в качестве главного. Предмет располагают относительно фронтальной плоскости проекций так, чтобы изображение на ней давало наиболее полное представление о форме и размерах предмета.

1.4. Изображения на чертеже в зависимости от их содержания разделяются на виды, разрезы, сечения.

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**



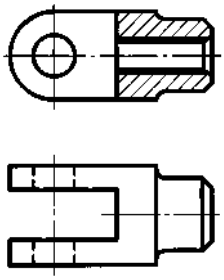
Черт. 2



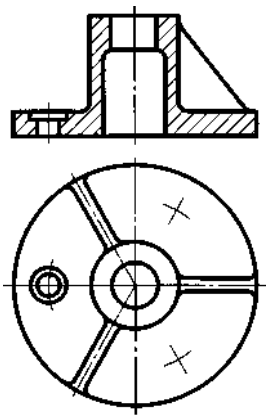
Черт. 3

1.5. В и д — изображение обращенной к наблюдателю видимой части поверхности предмета. Для уменьшения количества изображений допускается на видах показывать необходимые невидимые части поверхности предмета при помощи штриховых линий (черт. 3).

1.6 Р а з р е з — изображение предмета, мысленно рассеченного одной или несколькими плоскостями, при этом мысленное рассечение предмета относится только к данному разрезу и не влечет за собой изменения других изображений того же предмета. На разрезе показывается то, что получается в секущей плоскости и что расположено за ней (черт. 4). Допускается изображать не все, что расположено за секущей плоскостью, если это не требуется для понимания конструкции предмета (черт. 5).



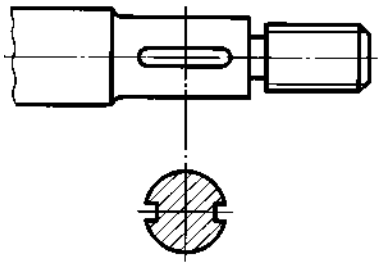
Черт. 4



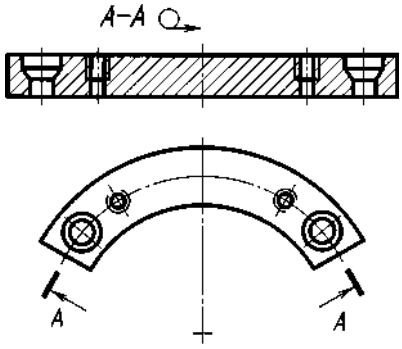
Черт. 5

1.7. С е ч е н и е — изображение фигуры, получающейся при мысленном рассечении предмета одной или несколькими плоскостями (черт. 6). На сечении показывается только то, что получается непосредственно в секущей плоскости.

Допускается в качестве секущей применять цилиндрическую поверхность, развертываемую затем в плоскость (черт. 7).



Черт. 6



Черт. 7

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.8. Количество изображений (видов, разрезов, сечений) должно быть наименьшим, но обеспечивающим полное представление о предмете при применении установленных в соответствующих стандартах условных обозначений, знаков и надписей.

2. ВИДЫ

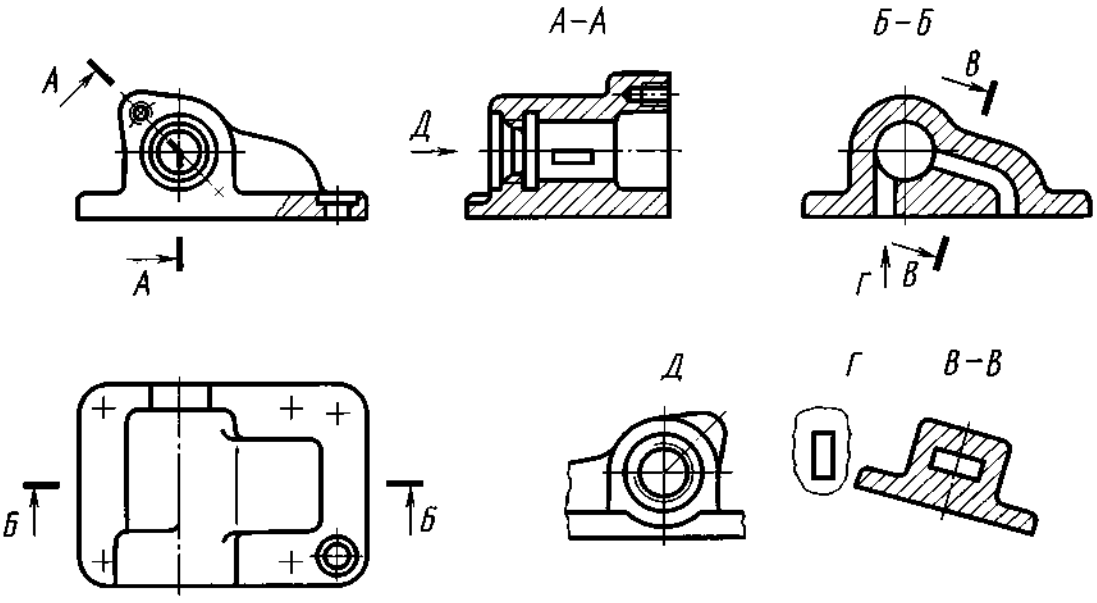
2.1. Устанавливаются следующие названия видов, получаемых на основных плоскостях проекций (основные виды, черт. 2):

1 — вид спереди (главный вид);
2 — вид сверху;
3 — вид слева;
4 — вид справа;
5 — вид снизу;
6 — вид сзади.

В строительных чертежах в необходимых случаях соответствующим видам могут присваиваться другие названия, например, «фасад».

Названия видов на чертежах надписывать не следует, за исключением случая, предусмотренного в п. 2.2. В строительных чертежах допускается надписывать название вида с присвоением ему буквенного, цифрового или другого обозначения.

2.2. Если виды сверху, слева, справа, снизу, сзади не находятся в непосредственной проекционной связи с главным изображением (видом или разрезом, изображенным на фронтальной плоскости проекций), то направление проектирования должно быть указано стрелкой около соответствующего изображения. Над стрелкой и над полученным изображением (видом) следует нанести одну и ту же прописную букву (черт. 8).



Черт. 8

Чертежи оформляют так же, если перечисленные виды отделены от главного изображения другими изображениями или расположены не на одном листе с ним.

Когда отсутствует изображение, на котором может быть показано направление взгляда, название вида надписывают.

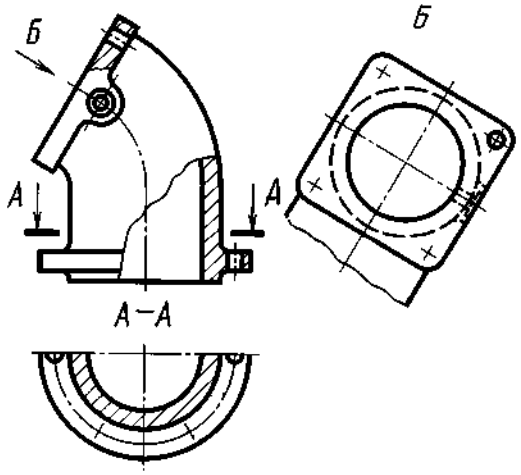
В строительных чертежах допускается направление взгляда указывать двумя стрелками (аналогично указанию положения секущих плоскостей в разрезах).

В строительных чертежах независимо от взаимного расположения видов допускается надписывать название и обозначение вида без указания направления взгляда стрелкой, если направление взгляда определяется названием или обозначением вида.

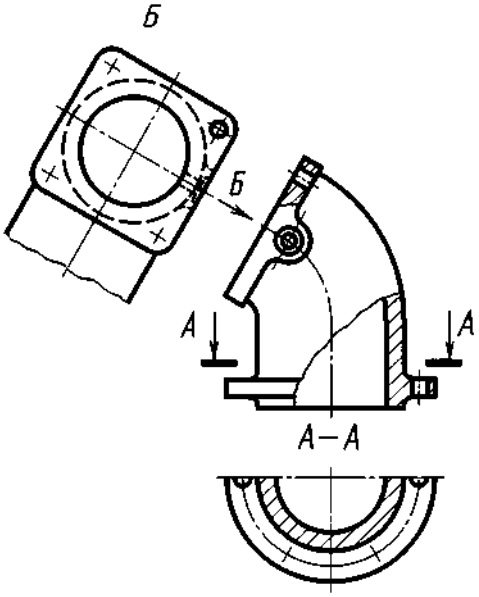
2.3. Если какую-либо часть предмета невозможно показать на перечисленных в п. 2.1 видах

без искажения формы и размеров, то применяют дополнительные виды, получаемые на плоскостях, непараллельных основным плоскостям проекций (черт. 9—11).

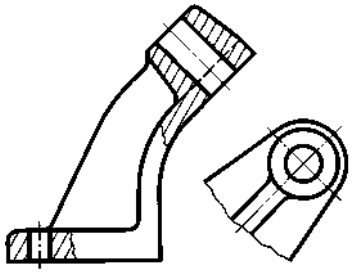
2.4. Дополнительный вид должен быть отмечен на чертеже прописной буквой (черт. 9, 10), а у связанного с дополнительным видом изображения предмета должна быть поставлена стрелка, указывающая направление взгляда, с соответствующим буквенным обозначением (стрелка *Б*, черт. 9, 10).



Черт. 9



Черт. 10



Черт. 11

Когда дополнительный вид расположен в непосредственной проекционной связи с соответствующим изображением, стрелку и обозначение вида не наносят (черт. 11).

2.2—2.4. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

2.5. Дополнительные виды располагают, как показано на черт. 9—11. Расположение дополнительных видов по черт. 9 и 11 предпочтительнее.

Дополнительный вид допускается повертывать, но с сохранением, как правило, положения, принятого для данного предмета на главном изображении, при этом обозначение вида должно быть дополнено условным графическим обозначением ◯. При необходимости указывают угол поворота (черт. 12).

Несколько одинаковых дополнительных видов, относящихся к одному предмету, обозначают одной буквой и вычерчивают один вид. Если при этом связанные с дополнительным видом части предмета расположены под различными углами, то к обозначению вида условное графическое обозначение ◯ не добавляют.

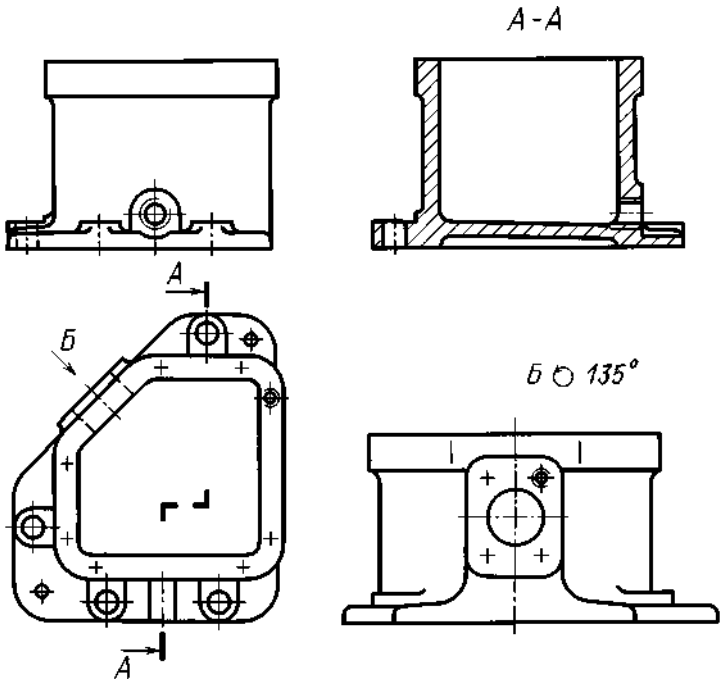
(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

2.6. Изображение отдельного, ограниченного места поверхности предмета называется местным видом (вид *Г*, черт. 8; вид *Д*, черт. 13).

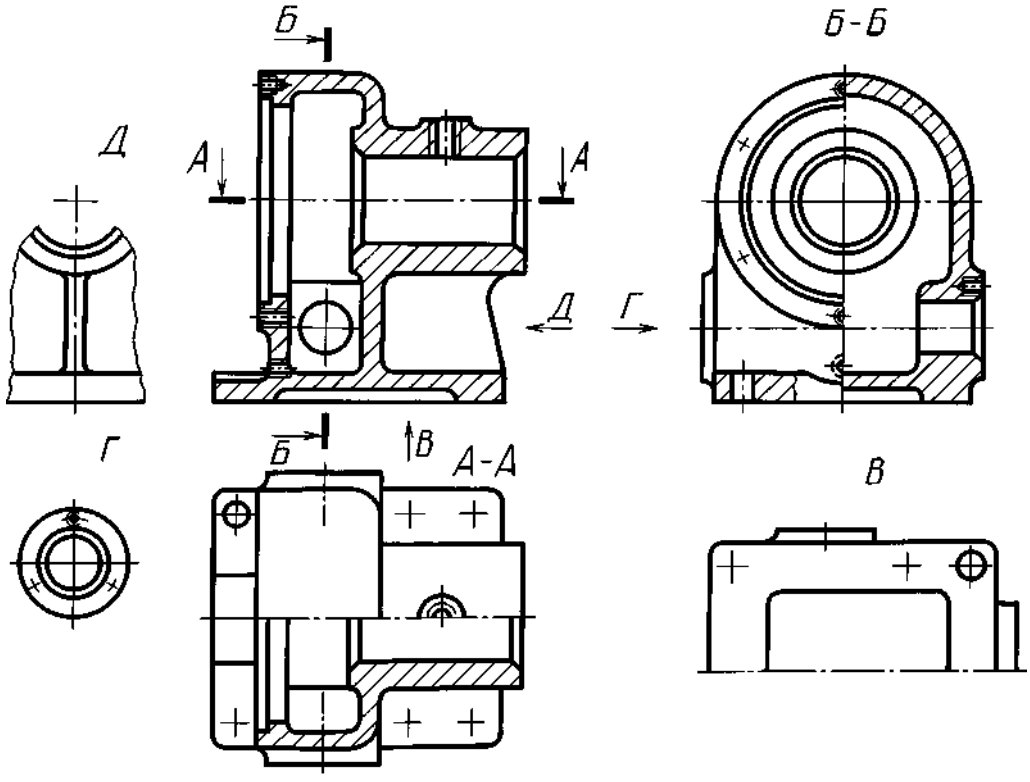
Местный вид может быть ограничен линией обрыва, по возможности в наименьшем размере (вид *Д*, черт. 13), или не ограничен (вид *Г*, черт. 13). Местный вид должен быть отмечен на чертеже подобно дополнительному виду.

2.7. Соотношение размеров стрелок, указывающих направление взгляда, должно соответствовать приведенным на черт. 14.

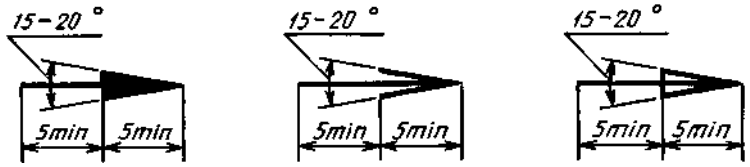
2.6, 2.7**. (Измененная редакция, Изм. № 2).**



Черт. 12



Черт. 13



Черт. 14

3. РАЗРЕЗЫ

3.1. Разрезы разделяются, в зависимости от положения секущей плоскости относительно горизонтальной плоскости проекций, на:

горизонтальные — секущая плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекций (например, разрез *А—А*, черт. 13; разрез *Б—Б*, черт. 15).

В строительных чертежах горизонтальным разрезам могут присваиваться другие названия, например, «план»;

вертикальные — секущая плоскость перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций (например, разрез на месте главного вида, черт. 13; разрезы *А—А, В—В, Г—Г*, черт. 15);

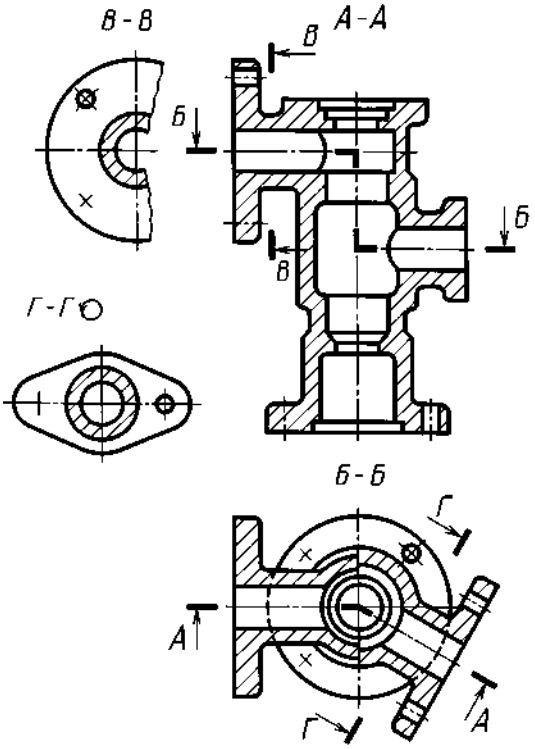
наклонные — секущая плоскость составляет с горизонтальной плоскостью проекций угол, отличный от прямого (например, разрез *В—В*, черт. 8).

В зависимости от числа секущих плоскостей разрезы разделяются на:

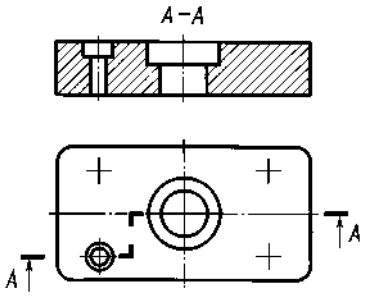
простые — при одной секущей плоскости (например, черт. 4, 5);

сложные — при нескольких секущих плоскостях (например, разрез *А—А*, черт. 8; разрез *Б—Б*, черт. 15).

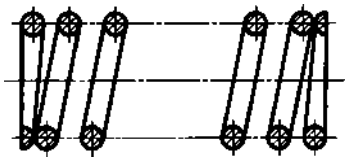
3.2. Вертикальный разрез называется фронтальным, если секущая плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций (например, разрез, черт. 5; разрез *А—А*, черт. 16), и профильным, если секущая плоскость параллельна профильной плоскости проекций (например, разрез *Б—Б*, черт. 13).



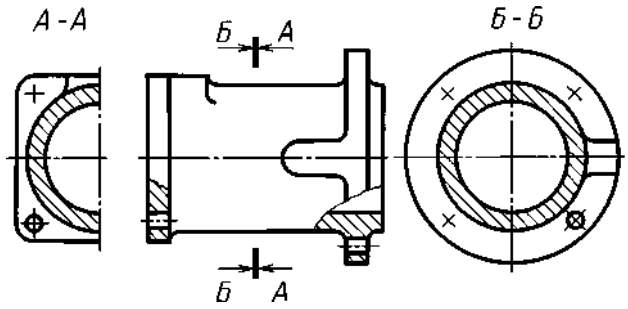
Черт. 15



Черт. 16



Черт. 17



Черт. 18

3.3. Сложные разрезы бывают ступенчатыми, если секущие плоскости параллельны (например, ступенчатый горизонтальный разрез *Б—Б*, черт. 15; ступенчатый фронтальный разрез *А—А*, черт. 16), и ломаными, если секущие плоскости пересекаются (например, разрезы *А—А*, черт. 8 и 15).

3.4. Разрезы называются продольными, если секущие плоскости направлены вдоль длины или высоты предмета (черт. 17), и поперечными, если секущие плоскости направлены перпендикулярно длине или высоте предмета (например, разрезы *А—А* и *Б—Б*, черт. 18).

3.5. Положение секущей плоскости указывают на чертеже линией сечения. Для линии сечения должна применяться разомкнутая линия. При сложном разрезе штрихи проводят также у мест пересечения секущих плоскостей между собой. На начальном и конечном штрихах следует ставить стрелки, указывающие направление взгляда (черт. 8—10, 13, 15); стрелки должны наноситься на расстоянии 2—3 мм от конца штриха.

Начальный и конечный штрихи не должны пересекать контур соответствующего изображения.

В случаях, подобных указанному на черт. 18, стрелки, указывающие направление взгляда, наносятся на одной линии.

3.1—3.5**. (Измененная редакция, Изм. № 2**).

3.6. У начала и конца линии сечения, а при необходимости и у мест пересечения секущих плоскостей ставят одну и ту же прописную букву русского алфавита. Буквы наносят около стрелок, указывающих направление взгляда, и в местах пересечения со стороны внешнего угла.

Разрез должен быть отмечен надписью по типу «*А—А*» (всегда двумя буквами через тире).

В строительных чертежах у линии сечения взамен букв допускается применять цифры, а также надписывать название разреза (плана) с присвоенным ему буквенным цифровым или другим обозначением.

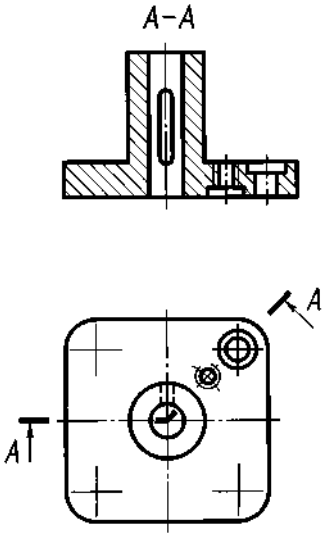
3.7. Когда секущая плоскость совпадает с плоскостью симметрии предмета в целом, а соответствующие изображения расположены на одном и том же листе в непосредственной проекционной связи и не разделены какими-либо другими изображениями, для горизонтальных, фронтальных и профильных разрезов не отмечают положение секущей плоскости, и разрез надписью не сопровождают (например, разрез на месте главного вида, черт. 13).

3.8. Фронтальным и профильным разрезам, как правило, придают положение, соответствующее принятому для данного предмета на главном изображении чертежа (черт. 12).

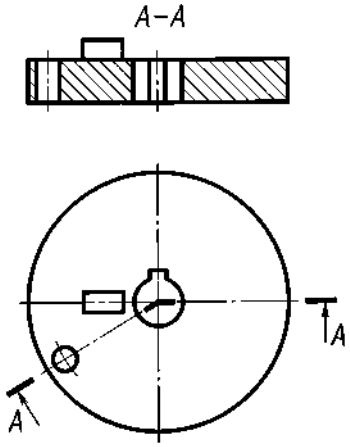
3.9. Горизонтальные, фронтальные и профильные разрезы могут быть расположены на месте соответствующих основных видов (черт. 13).

3.10. Вертикальный разрез, когда секущая плоскость непараллельна фронтальной или профильной плоскостям проекций, а также наклонный разрез должны строиться и располагаться в соответствии с направлением, указанным стрелками на линии сечения.

Допускается располагать такие разрезы в любом месте чертежа (разрез *В—В*, черт. 8), а также с поворотом до положения, соответствующего принятому для данного предмета на главном изображении. В последнем случае к надписи должно быть добавлено условное графическое обозначение (разрез *Г—Г*, черт. 15).



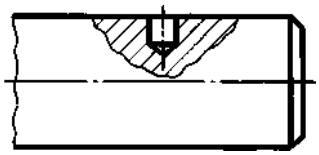
Черт. 19



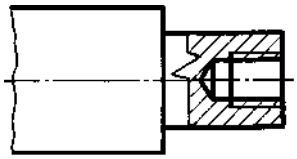
Черт. 20

3.11. При ломаных разрезах секущие плоскости условно повертывают до совмещения в одну плоскость, при этом направление поворота может не совпадать с направлением взгляда (черт. 19).

Если совмещенные плоскости окажутся параллельными одной из основных плоскостей проекций, то ломаный разрез допускается помещать на месте соответствующего вида (разрезы *А—А*, черт. 8, 15). При повороте секущей плоскости элементы предмета, расположенные на ней, вычерчивают так, как они проецируются на соответствующую плоскость, с которой производится совмещение (черт. 20).



Черт. 21

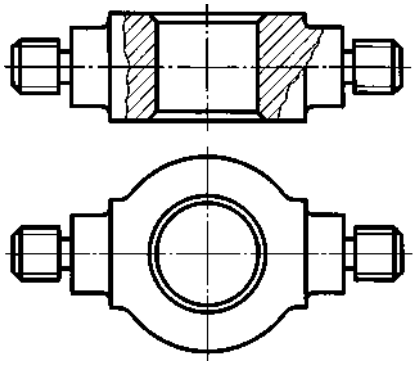


Черт. 22

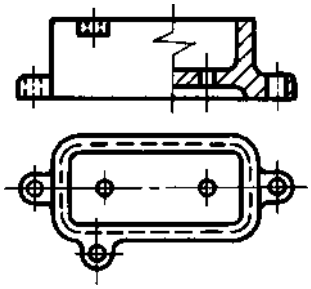
3.12. Разрез, служащий для выяснения устройства предмета лишь в отдельном, ограниченном месте, называется местным.

Местный разрез выделяется на виде сплошной волнистой линией (черт. 21) или сплошной тонкой линией с изломом (черт. 22). Эти линии не должны совпадать с какими-либо другими линиями изображения.

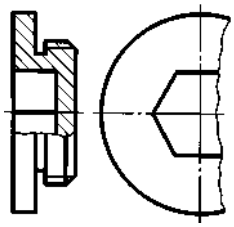
3.13. Часть вида и часть соответствующего разреза допускается соединять, разделяя их сплошной волнистой линией или сплошной тонкой линией с изломом (черт. 23, 24, 25). Если при этом соединяются половина вида и половина разреза, каждый из которых является симметричной фигурой, то разделяющей линией служит ось симметрии (черт. 26). Допускается также разделение разреза и вида штрихпунктирной тонкой линией (черт. 27), совпадающей со следом плоскости симметрии не всего предмета, а лишь его части, если она представляет тело вращения.



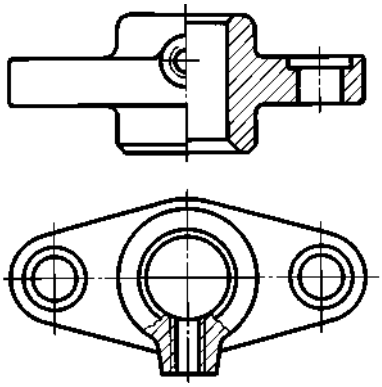
Черт. 23



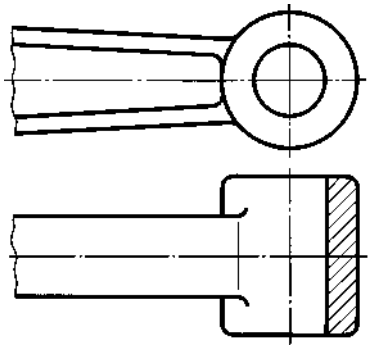
Черт. 24



Черт. 25



Черт. 26



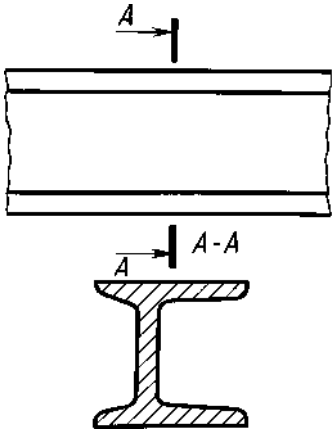
Черт. 27

3.10—3.13. (**Измененная редакция, Изм. № 2).**

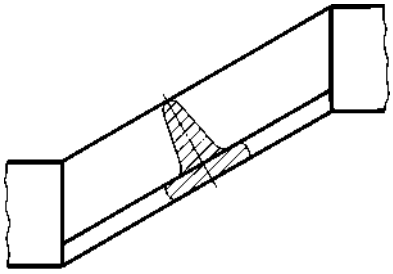
3.14. Допускается соединять четверть вида и четверти трех разрезов: четверть вида, четверть одного разреза и половину другого и т. п. при условии, что каждое из этих изображений в отдельности симметрично.

4. СЕЧЕНИЯ

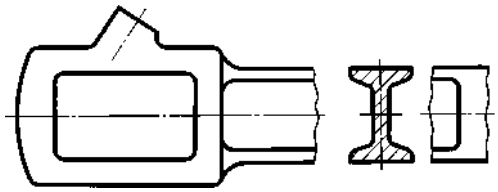
4.1. Сечения, не входящие в состав разреза, разделяют на:
вынесенные (черт. 6, 28);
наложенные (черт. 29).
Вынесенные сечения являются предпочтительными и их допускается располагать в разрезе между частями одного и того же вида (черт. 30).



Черт. 28



Черт. 29



Черт. 30

(Измененная редакция, Изм. № 2).

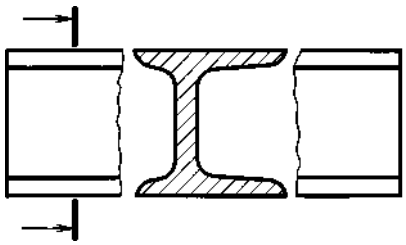
4.2. Контур вынесенного сечения, а также сечения, входящего в состав разреза, изображают сплошными основными линиями, а контур наложенного сечения — сплошными тонкими линиями, причем контур изображения в месте расположения наложенного сечения не прерывают (черт. 13, 28, 29).

4.3. Ось симметрии вынесенного или наложенного сечения (черт. 6, 29) указывают штрих-пунктирной тонкой линией без обозначения буквами и стрелками и линию сечения не проводят.

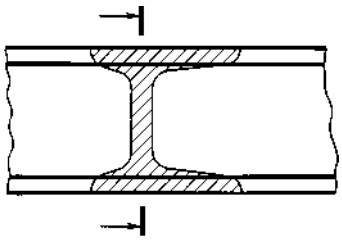
В случаях, подобных указанному на черт. 30, при симметричной фигуре сечения линию сечения не проводят.

Во всех остальных случаях для линии сечения применяют разомкнутую линию с указанием стрелками направления взгляда и обозначают ее одинаковыми прописными буквами русского алфавита (в строительных чертежах — прописными или строчными буквами русского алфавита или цифрами). Сечение сопровождают надписью по типу «*А—А*» (черт. 28). В строительных чертежах допускается надписывать название сечения.

Для несимметричных сечений, расположенных в разрыве (черт. 31) или наложенных (черт. 32), линию сечения проводят со стрелками, но буквами не обозначают.



Черт. 31



Черт. 32

В строительных чертежах при симметричных сечениях применяют разомкнутую линию с обозначением ее, но без стрелок, указывающих направление взгляда.

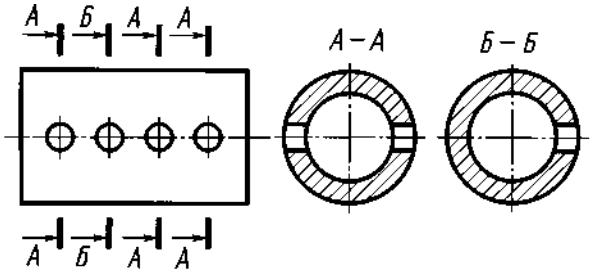
4.4. Сечение по построению и расположению должно соответствовать направлению, указанному стрелками (черт. 28). Допускается располагать сечение на любом месте поля чертежа, а также с поворотом с добавлением условного графического обозначения .

4.5. Для нескольких одинаковых сечений, относящихся к одному предмету, линию сечения обозначают одной буквой и вычерчивают одно сечение (черт. 33, 34).

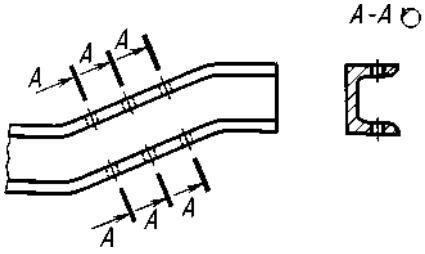
Если при этом секущие плоскости направлены под различными углами (черт. 35), то условное графическое обозначение не наносят.

Когда расположение одинаковых сечений точно определено изображением или размерами, допускается наносить одну линию сечения, а над изображением сечения указывать количество сечений.

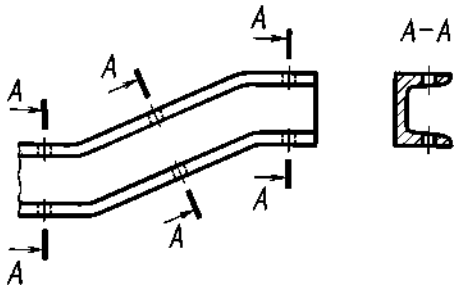
4.6 Секущие плоскости выбирают так, чтобы получить нормальные поперечные сечения (черт. 36).



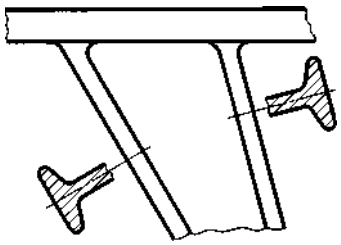
Черт. 33



Черт. 34



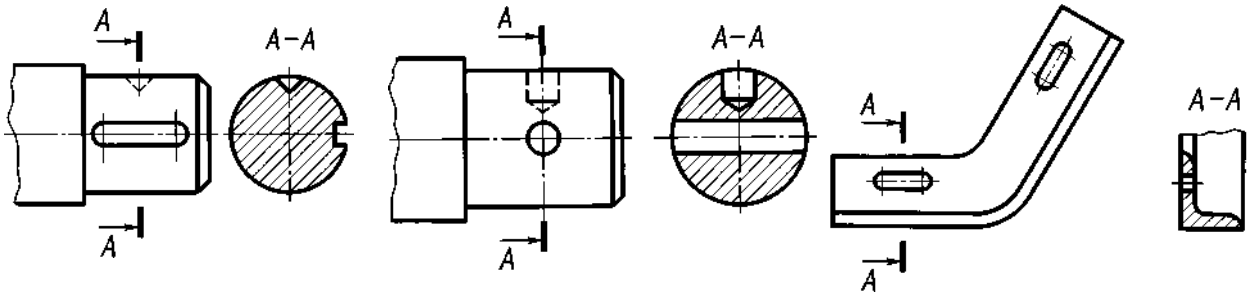
Черт. 35



Черт. 36

4.7. Если секущая плоскость проходит через ось поверхности вращения, ограничивающей отверстие или углубление, то контур отверстия или углубления в сечении показывают полностью (черт. 37).

4.8. Если сечение получается состоящим из отдельных самостоятельных частей, то следует применять разрезы (черт. 38).



Черт. 37

Черт. 38

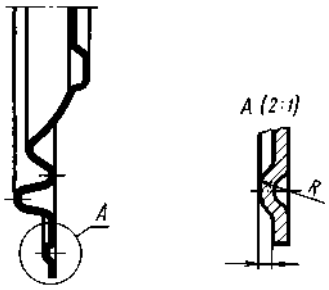
4.4—4.8. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

5. ВЫНОСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

5.1. Выносной элемент — дополнительное отдельное изображение (обычно увеличенное) какой-либо части предмета, требующей графического и других пояснений в отношении формы, размеров и иных данных.

Выносной элемент может содержать подробности, не указанные на соответствующем изображении, и может отличаться от него по содержанию (например, изображение может быть видом, а выносной элемент — разрезом).

5.2. При применении выносного элемента соответствующее место отмечают на виде, разрезе или сечении замкнутой сплошной тонкой линией — окружностью, овалом и т. п. с обозначением выносного элемента прописной буквой или сочетанием прописной буквы с арабской цифрой на полке линии-выноски. Над изображением выносного элемента указывают обозначение и масштаб, в котором он выполнен (черт. 39).



Черт. 39

В строительных чертежах выносной элемент на изображении допускается также отмечать фигурной или квадратной скобкой или графически не отмечать. У изображения, откуда элемент выносится, и у выносного элемента допускается также наносить присвоенное выносному элементу буквенное или цифровое (арабскими цифрами) обозначение и название.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

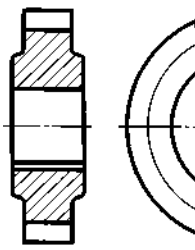
5.3. Выносной элемент располагают возможно ближе к соответствующему месту на изображении предмета.

6. УСЛОВНОСТИ И УПРОЩЕНИЯ

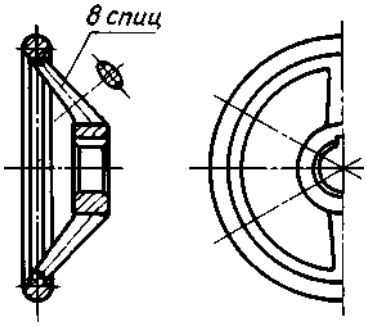
6.1. Если вид, разрез или сечение представляют симметричную фигуру, допускается вычерчивать половину изображения (вид В, черт. 13) или немного более половины изображения с проведением в последнем случае линии обрыва (черт. 25).

6.2. Если предмет имеет несколько одинаковых, равномерно расположенных элементов, то на изображении этого предмета полностью показывают один-два таких элемента (например, одно-два отверстия, черт. 15), а остальные элементы показывают упрощенно или условно (черт. 40).

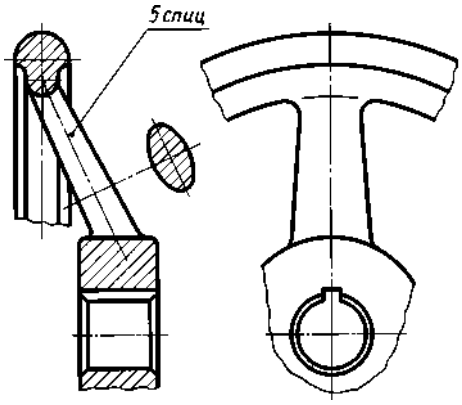
Допускается изображать часть предмета (черт. 41, 42) с надлежащими указаниями о количестве элементов, их расположении и т. п.



Черт. 40

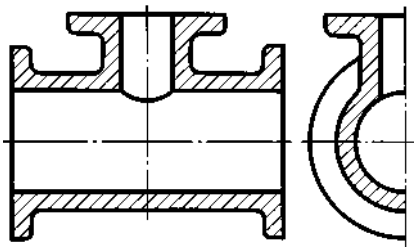


Черт. 41

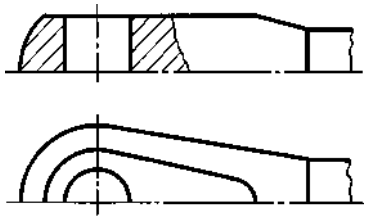


Черт. 42

6.3. На видах и разрезах допускается упрощенно изображать проекции линий пересечения поверхностей, если не требуется точного их построения. Например, вместо лекальных кривых проводят дуги окружности и прямые линии (черт. 43, 44).

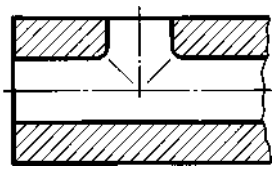


Черт. 43

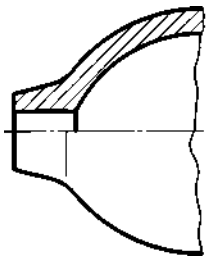


Черт. 44

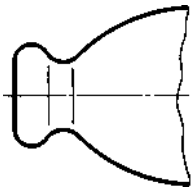
6.4. Плавный переход от одной поверхности к другой показывается условно (черт. 45—47) или совсем не показывается (черт. 48—50).



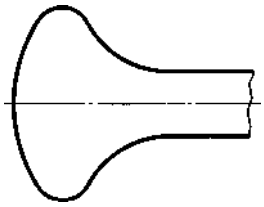
Черт. 45



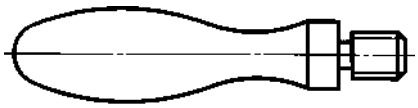
Черт. 46



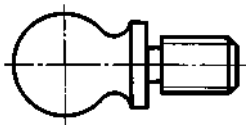
Черт. 47



Черт. 48

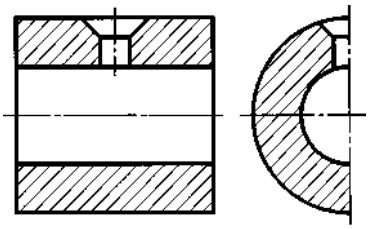


Черт. 49

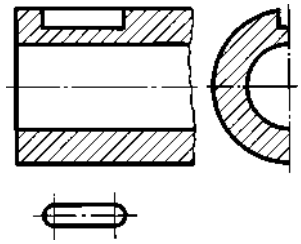


Черт. 50

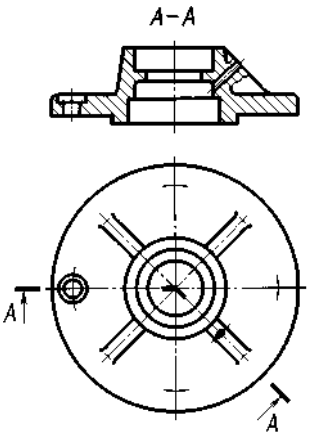
Допускаются упрощения, подобные указанным на черт. 51, 52.



Черт. 51



Черт. 52



Черт. 53

6.5. Такие детали, как винты, заклепки, шпонки, непустотелые валы и шпиндели, шатуны, рукоятки и т. п. при продольном разрезе показывают нерассеченными. Шарики всегда показывают нерассеченными.

Как правило, показываются нерассеченными на сборочных чертежах гайки и шайбы.

Такие элементы, как спицы маховиков, шкивов, зубчатых колес, тонкие стенки типа ребер жесткости и т. п. показывают незаштрихованными, если секущая плоскость направлена вдоль оси или длинной стороны такого элемента.

Если в подобных элементах детали имеется местное сверление, углубление и т. п., то делают местный разрез, как показано на черт. 21, 22, 53.

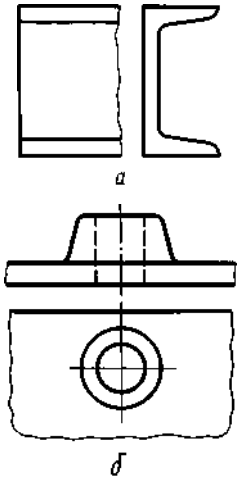
(Измененная редакция, Изм. № 2).

6.6. Пластины, а также элементы деталей (отверстия, фаски, пазы, углубления и т. п.) размером (или разницей в размерах) на чертеже 2 мм и менее изображают с отступлением от масштаба, принятого для всего изображения, в сторону увеличения.

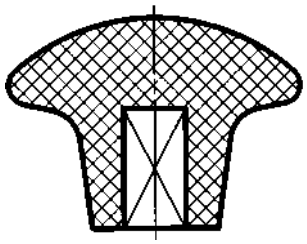
6.7. Допускается незначительную конусность или уклон изображать с увеличением.

На тех изображениях, на которых уклон или конусность отчетливо не выявляются, например, главный вид на черт. 54*а* или вид сверху на черт. 54*б*, проводят только одну линию, соответствующую меньшему размеру элемента с уклоном или меньшему основанию конуса.

6.8. При необходимости выделения на чертеже плоских поверхностей предмета на них проводят диагонали сплошными тонкими линиями (черт. 55).



Черт. 54

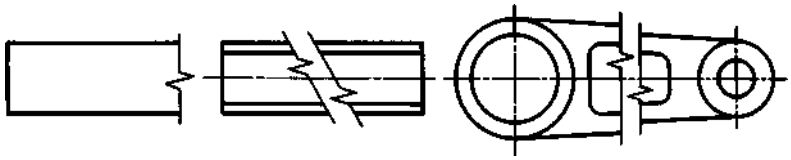


Черт. 55

6.9. Предметы или элементы, имеющие постоянное или закономерно изменяющееся поперечное сечение (валы, цепи, прутки, фасонный прокат, шатуны и т. п.), допускается изображать с разрывами.

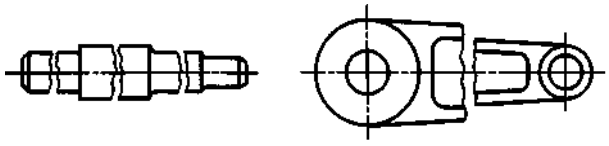
Частичные изображения и изображения с разрывами ограничивают одним из следующих способов:

а) сплошной тонкой линией с изломом, которая может выходить за контур изображения на длину от 2 до 4 мм. Эта линия может быть наклонной относительно линии контура (черт. 56а);



Черт. 56а

б) сплошной волнистой линией, соединяющей соответствующие линии контура (черт. 56б);



Черт. 56б

в) линиями штриховки (черт. 56в).

Черт. 56в

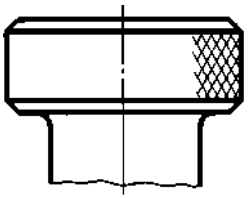
(Измененная редакция, Изм. № 2).

6.10. На чертежах предметов со сплошной сеткой, плетенкой, орнаментом, рельефом, накаткой и т. д. допускается изображать эти элементы частично, с возможным упрощением (черт. 57).

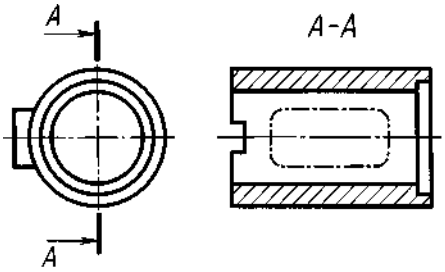
6.11. Для упрощения чертежей или сокращения количества изображений допускается:

а) часть предмета, находящуюся между наблюдателем и секущей плоскостью, изображать штрихпунктирной утолщенной линией непосредственно на разрезе (наложенная проекция, черт. 58);

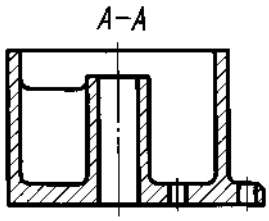
б) применять сложные разрезы (черт. 59);

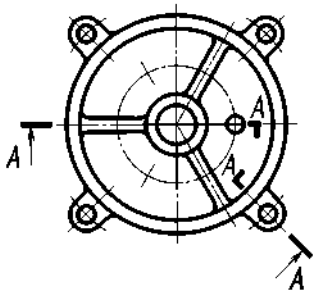


Черт. 57



Черт.58



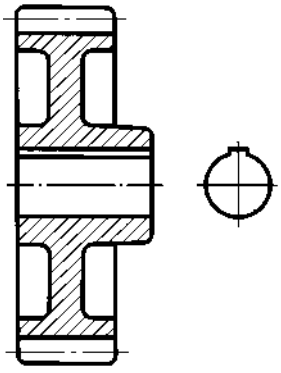


Черт. 59

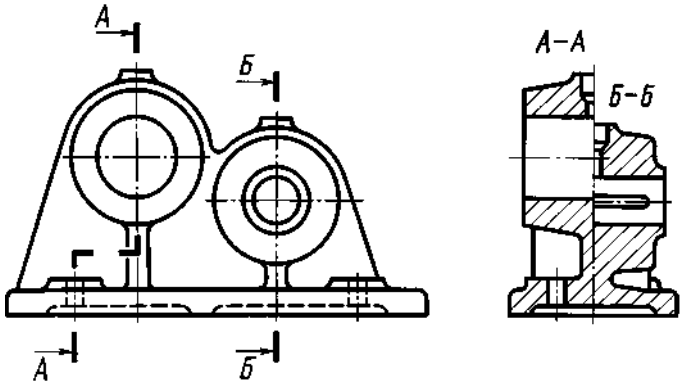
в) для показа отверстия в ступицах зубчатых колес, шкивов и т. п., а также для шпоночных пазов вместо полного изображения детали давать лишь контур отверстия (черт. 60) или паза (черт. 52);

г) изображать в разрезе отверстия, расположенные на круглом фланце, когда они не попадают в секущую плоскость (черт. 15).

6.12. Если вид сверху не является необходимым и чертеж составляется из изображений на фронтальной и профильной плоскостях проекций, то при ступенчатом разрезе линия сечения и надписи, относящиеся к разрезу, наносятся так, как показано на черт. 61.



Черт. 60

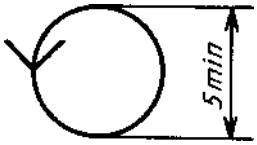


Черт. 61

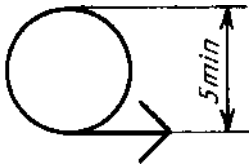
6.11, 6.12. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

6.13. Условности и упрощения, допускаемые в неразъемных соединениях, в чертежах электротехнических и радиотехнических устройств, зубчатых зацеплений и т. д., устанавливаются соответствующими стандартами.

6.14. Условное графическое обозначение «повернуто» должно соответствовать черт. 62 и «развернуто» — черт. 63.



Черт. 62



Черт. 63

(Введен дополнительно, Изм. № 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ по ГОСТ 2.317—69.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

3. Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 363—88

4. ВЗАМЕН ГОСТ 3453—59 в части разд. I—V, VII и приложения

5. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в сентябре 1987 г., августе 1989 г. (ИУС 12—87, 12—89)

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ОБОЗНАЧЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛОВ И ПРАВИЛА ИХ НАНЕСЕНИЯ НА ЧЕРТЕЖАХ

ГОСТ 2.306—68

Unified system for design documentation.
Graphical designations of materials and rules for their representation

Дата введения 01.01.71

1. Настоящий стандарт устанавливает графические обозначения материалов в сечениях и на фасадах, а также правила нанесения их на чертежи всех отраслей промышленности и строительства.
(Измененная редакция, Изм. № 2).

1а. Общее графическое обозначение материалов в сечениях независимо от вида материалов должно соответствовать черт. 1*а*.

Черт.1а

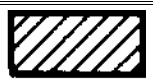
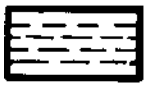
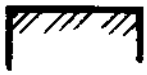
(Введен дополнительно, Изм. № 1).

2. Графические обозначения материалов в сечениях в зависимости от вида материалов должны соответствовать приведенным в табл. 1.

Допускается применять дополнительные обозначения материалов, не предусмотренных в настоящем стандарте, поясняя их на чертеже.

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

Таблица 1

Материал	Обозначение
1. Металлы и твердые сплавы	
2. Неметаллические материалы, в том числе волокнистые монолитные и плитные (прессованные), за исключением указанных ниже	
3. Древесина	
4. Камень естественный	
5. Керамика и силикатные материалы для кладки	
6. Бетон	
7. Стекло и другие светопрозрачные материалы	
8. Жидкости	
9. Грунт естественный	

Примечания:

1. Композиционные материалы, содержащие металлы и неметаллические материалы, обозначают как металлы.

2. Графическое обозначение п. 3 следует применять, когда нет необходимости указывать направление волокон.

3. Графическое обозначение п. 5 следует применять для обозначения кирпичных изделий (обожженных и необожженных), огнеупоров, строительной керамики, электротехнического фарфора, шлакобетонных блоков и т.п.

(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

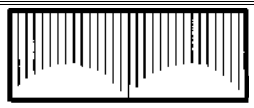
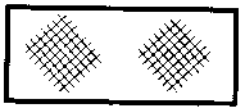
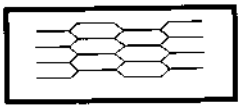
3. Устанавливают следующие обозначения сетки и засыпки из любого материала (в сечении), указанные на черт. 1.

а — сетка; *б* — засыпка

Черт.1

4. При выделении материалов и изделий на виде (фасаде) графические обозначения их должны соответствовать указанным в табл. 2.

Таблица 2

Материал	Обозначение
1. Металлы	
2. Сталь рифленая	
3. Сталь просечная	
4. Кладка из кирпича строительного и специального, клинкера, керамики, терракоты, искусственного и естественного камней любой формы и т.п.	
5. Стекло	

Примечания:

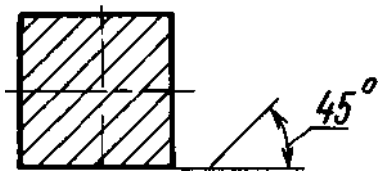
1. **(Исключено, Изм. № 1).**

2. Для уточнения разновидности материала, в частности, материалов с однотипным обозначением, графическое обозначение следует сопровождать поясняющей надписью на поле чертежа.

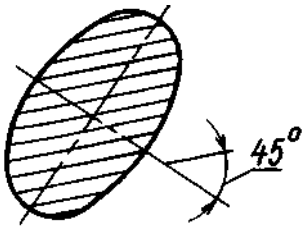
3. В специальных строительных конструктивных чертежах для армирования железобетонных конструкций должны применяться обозначения по ГОСТ 21.501.

4. Обозначение материала на виде (фасаде) допускается наносить не полностью, а только небольшими участками по контуру или пятнами внутри контура.

5. Наклонные параллельные линии штриховки должны проводиться под углом 45 ° к линии контура изображения (черт. 2*а*) или к его оси (черт. 2*б*), или к линиям рамки чертежа (черт. 2).

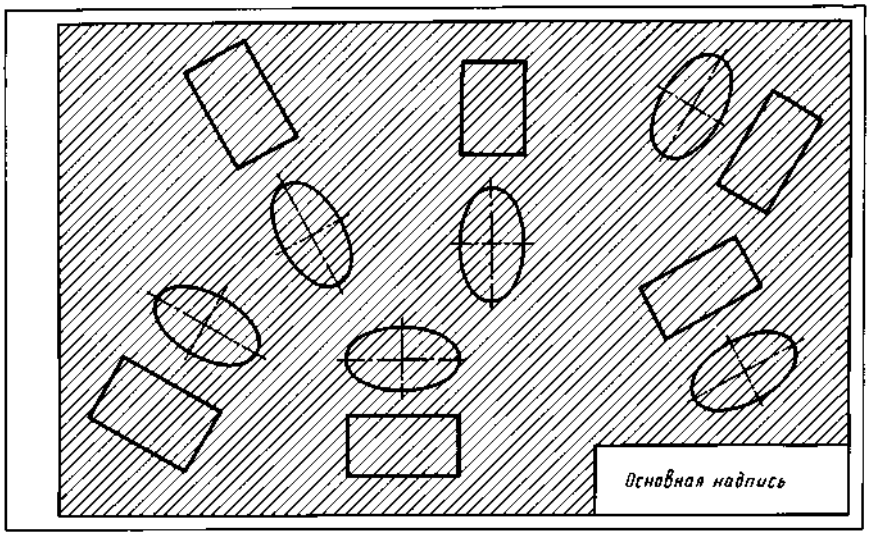


Черт.2а

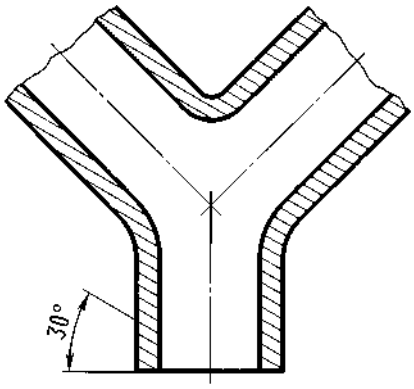


Черт.2б

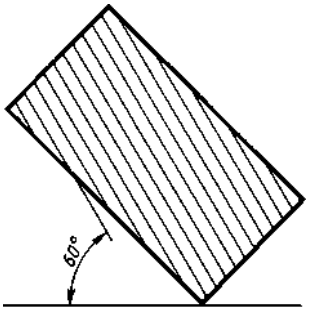
Если линии штриховки, приведенные к линиям рамки чертежа под углом 45 °, совпадают по направлению с линиями контура или осевыми линиями, то вместо угла 45 ° следует брать угол 30 ° или 60 ° (черт. 3 и 4).



Черт.2



Черт.3



Черт.4

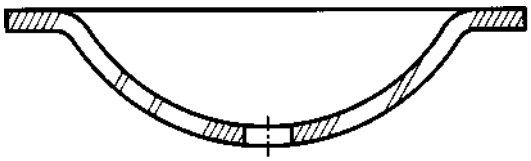
Линии штриховки должны наноситься с наклоном влево или вправо, но как правило, в одну и ту же сторону на всех сечениях, относящихся к одной и той же детали, независимо от количества листов, на которых эти сечения расположены.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

6. Расстояние между параллельными прямыми линиями штриховки (частота) должно быть, как правило, одинаковым для всех выполняемых в одном и том же масштабе сечений данной детали и выбирается в зависимости от площади штриховки и необходимости разнообразить штриховку смежных сечений. Указанное расстояние должно быть от 1 до 10 мм в зависимости от площади штриховки и необходимости разнообразить штриховку смежных сечений.

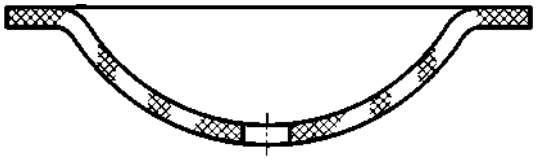
(Измененная редакция, Изм. № 2).

7. Узкие и длинные площади сечений (например, штампованных, вальцованных и других подобных деталей), ширина которых на чертеже от 2 до 4 мм, рекомендуется штриховать полностью только на концах и у контуров отверстий, а остальную площадь сечения — небольшими участками в нескольких местах (черт. 5 и 6). В этих случаях линии штриховки стекла (черт. 7) следует наносить с наклоном 15—20 ° к линии большей стороны контура сечения.



Черт.5

Штриховки всех обозначений в этом случае выполняют от руки.

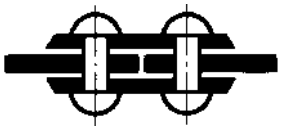


Черт.6

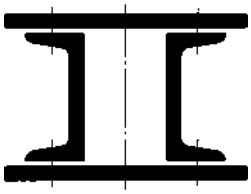
Черт.7

8. Узкие площади сечений, ширина которых на чертеже менее 2 мм, допускается показывать зачерненными с оставлением просветов между смежными сечениями не менее 0,8 мм (черт. 8, 9).

В строительных чертежах допускается на сечениях незначительной площади любой материал обозначать как металл или вообще не применять обозначение, сделав поясняющую надпись на поле чертежа.



Черт.8



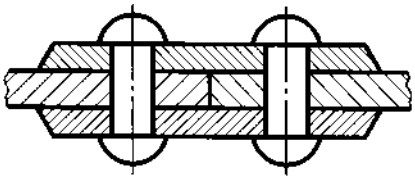
Черт.9

9. Обозначение, указанное в п. 3 табл. 1, и обозначение засыпки в сечении выполняют от руки.
(Измененная редакция, Изм. № 1).

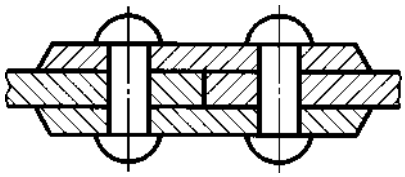
10. Для смежных сечений двух деталей следует брать наклон линий штриховки для одного сечения вправо, для другого — влево (встречная штриховка).

При штриховке «в клетку» для смежных сечений двух деталей расстояние между линиями штриховки в каждом сечении должно быть разным.

В смежных сечениях со штриховкой одинакового наклона и направления следует изменять расстояние между линиями штриховки (черт. 10) или сдвигать эти линии в одном сечении по отношению к другому, не изменяя угла их наклона (черт. 11).

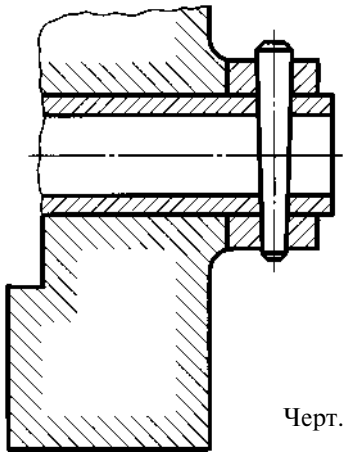


Черт.10



Черт.11

11. При больших площадях сечений, а также при указании профиля грунта допускается наносить обозначение лишь у контура сечения узкой полоской равномерной ширины (черт. 12).
(Измененная редакция, Изм. № 1).



Черт.12

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

3. Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 6306—88

4. ВЗАМЕН ГОСТ 3455—59 и ГОСТ 11633—65

5. ССЫЛОЧНЫЕ НОРМАТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ДОКУМЕНТЫ

Обозначение НТД, на который дана ссылка	Номер пункта
ГОСТ 21.501—93	4

6. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, 3, утвержденными в августе 1980 г., сентябре 1987 г., марте 1989 г. (ИУС 11—80, 12—87, 7—89)

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ И ПРЕДЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

ГОСТ 2.307—68

Unified system for design documentation.
Drawing of dimensions an limit deviations

Дата введения 01.01.71

Настоящий стандарт устанавливает правила нанесения размеров и предельных отклонений на чертежах и других технических документах на изделия всех отраслей промышленности и строительства.

(Измененная редакция, Изм. № 3).

1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

1.1. Основанием для определения величины изображенного изделия и его элементов служат размерные числа, нанесенные на чертеже.

Исключение составляют случаи, предусмотренные в ГОСТ 2.414; ГОСТ 2.417; ГОСТ 2.419, когда величину изделия или его элементов определяют по изображениям, выполненным с достаточной степенью точности.

Основанием для определения требуемой точности изделия при изготовлении являются указанные на чертеже предельные отклонения размеров, а также предельные отклонения формы и расположения поверхностей.

1.2. Общее количество размеров на чертеже должно быть минимальным, но достаточным для изготовления и контроля изделия.

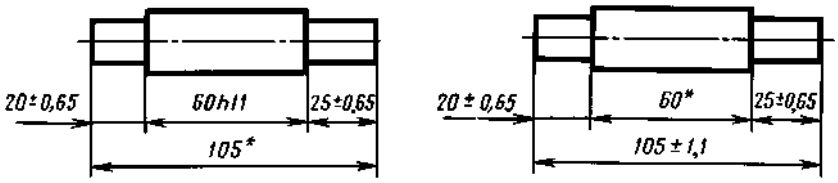
1.3. Размеры, не подлежащие выполнению по данному чертежу и указываемые для бóльшего удобства пользования чертежом, называются справочными.

1.4. Справочные размеры на чертеже отмечают знаком «*», а в технических требованиях записывают: «* Размеры для справок». Если все размеры на чертеже справочные, их знаком «*» не отмечают, а в технических требованиях записывают: «Размеры для справок».

На строительных чертежах справочные размеры отмечают и оговаривают только в случаях, предусмотренных в соответствующих документах, утвержденных в установленном порядке.

1.5. К справочным относят следующие размеры:

а) один из размеров замкнутой размерной цепи. Предельные отклонения таких размеров на чертеже не указывают (черт. 1);



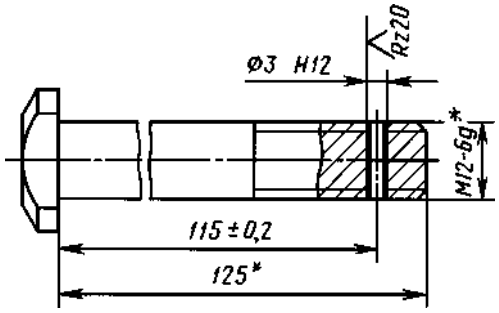
* Размеры для справок.

Черт. 1

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

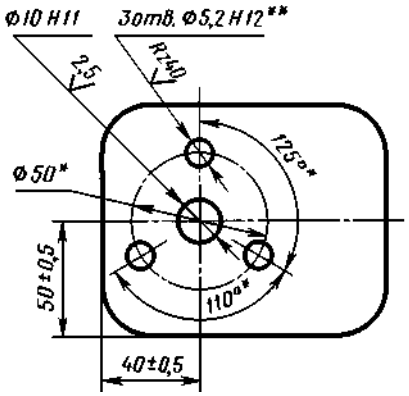
б) размеры, перенесенные с чертежей изделий-заготовок (черт. 2);

в) размеры, определяющие положение элементов детали, подлежащих обработке по другой детали (черт. 3);



* Размеры для справок.

Черт. 2



1*. Размеры для справок.

2*. Обработать по сопрягаемой детали (или по дет...).

Черт. 3

г) размеры на сборочном чертеже, по которым определяют предельные положения отдельных элементов конструкции, например, ход поршня, ход штока клапана двигателя внутреннего сгорания и т.п.;

д) размеры на сборочном чертеже, перенесенные с чертежей деталей и используемые в качестве установочных и присоединительных;

е) габаритные размеры на сборочном чертеже, перенесенные с чертежей деталей или являющиеся суммой размеров нескольких деталей;

ж) размеры деталей (элементов) из сортового, фасонного, листового и другого проката, если они полностью определяются обозначением материала, приведенным в графе 3 основной надписи.

Примечания:

1. Справочные размеры, указанные в перечислениях *б, в, г, е, ж*, допускается наносить как с предельными отклонениями, так и без них.

2. Установочными и присоединительными называются размеры, определяющие величины элементов, по которым данное изделие устанавливают на месте монтажа или присоединяют к другому изделию.

3. Габаритными называются размеры, определяющие предельные внешние (или внутренние) очертания изделия.

1.6. На чертежах изделий у размеров, контроль которых технически затруднен, наносят знак «*», а в технических требованиях помещают надпись «Размеры обеспеч. инстр.».

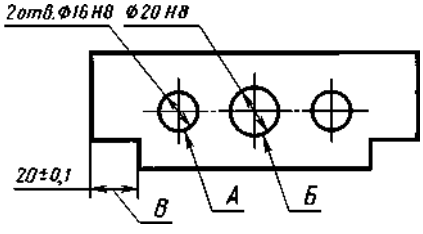
Примечание. Указанная надпись означает, что выполнение заданного чертежом размера с предельным отклонением должно гарантироваться размером инструмента или соответствующим технологическим процессом.

При этом размеры инструмента или технологический процесс проверяются периодически в процессе изготовления изделий.

Периодичность контроля инструмента или технологического процесса устанавливается предприятием-изготовителем совместно с представителем заказчика.

1.7. Не допускается повторять размеры одного и того же элемента на разных изображениях, в технических требованиях, основной надписи и спецификации. Исключение составляют справочные размеры, приведенные в п. 1.5, перечислениях *б* и *ж*.

Если в технических требованиях необходимо дать ссылку на размер, нанесенный на изображение, то этот размер или соответствующий элемент обозначают буквой, а в технических требованиях помещают запись, аналогичную приведенной на черт. 4.



1. Допуск параллельности осей отв. *А* и *Б* — 0,05 мм.

2. Разность размеров *В* с обеих сторон — более 0,1 мм.

Черт. 4

На строительных чертежах размеры допускается повторять.

1.5—1.7. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

1.8. Линейные размеры и их предельные отклонения на чертежах и в спецификациях указывают в миллиметрах, без обозначения единицы измерения.

Для размеров и предельных отклонений, приводимых в технических требованиях и пояснительных надписях на поле чертежа, обязательно указывают единицы измерения.

(Измененная редакция, Изм. № 3).

1.9. Если на чертеже размеры необходимо указать не в миллиметрах, а в других единицах измерения (сантиметрах, метрах и т.д.), то соответствующие размерные числа записывают с обозначением единицы измерения (см, м) или указывают их в технических требованиях.

На строительных чертежах единицы измерения в этих случаях допускается не указывать, если они оговорены в соответствующих документах, утвержденных в установленном порядке.

1.10. Угловые размеры и предельные отклонения угловых размеров указывают в градусах, минутах и секундах с обозначением единицы измерения, например: 4 °; 4 °30′; 12 °45′30″; 0 °30′40″; 0 °18′; 0 °5′25″; 0 °0′30″; 30 °±1 °; 30 °±10′.

1.11. Для размерных чисел применять простые дроби не допускается, за исключением размеров в дюймах.

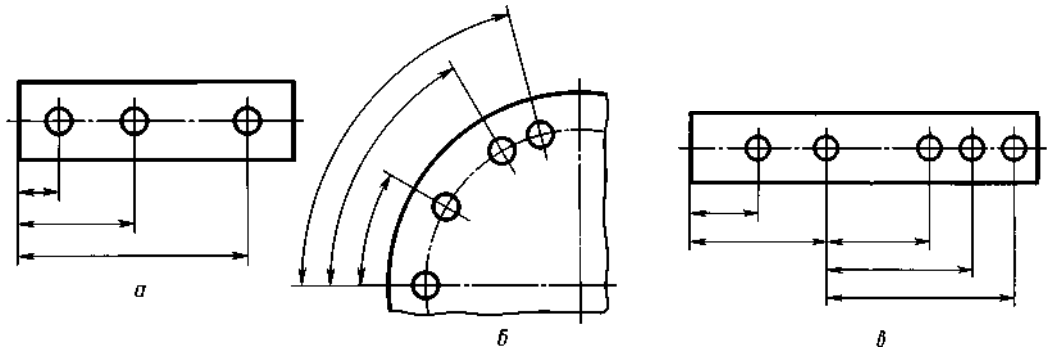
1.12. Размеры, определяющие расположение сопрягаемых поверхностей, проставляют, как правило, от конструктивных без с учетом возможностей выполнения и контроля этих размеров.

1.13. При расположении элементов предмета (отверстий, пазов, зубьев и т.п.) на одной оси или на одной окружности размеры, определяющие их взаимное расположение, наносят следующими способами:

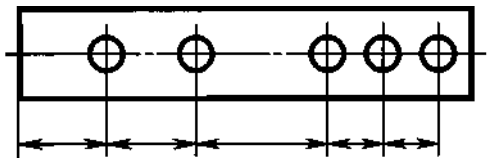
от общей базы (поверхности, оси) — по черт. 5*а* и *б*;

заданием размеров нескольких групп элементов от нескольких общих баз — по черт. 5*в*;

заданием размеров между смежными элементами (цепочкой) — по черт. 6.



Черт. 5

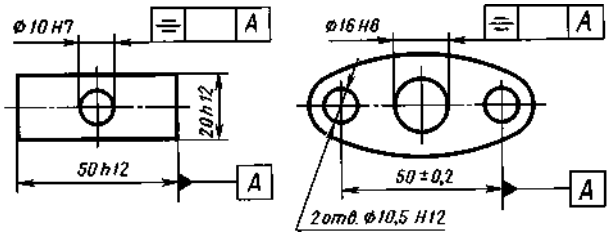


Черт. 6

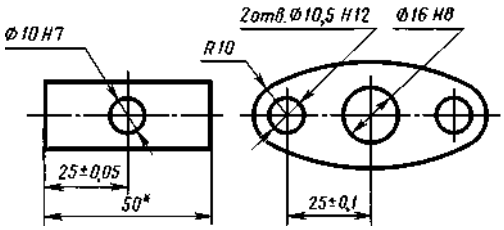
1.14. Размеры на чертежах не допускается наносить в виде замкнутой цепи, за исключением случаев, когда один из размеров указан как справочный (см. черт. 1).

На строительных чертежах размеры наносят в виде замкнутой цепи, кроме случаев, предусмотренных в соответствующих документах, утвержденных в установленном порядке.

Размеры, определяющие положение симметрично расположенных поверхностей у симметричных изделий, наносят, как показано на черт. 7 и 8.



Черт. 7



* Размеры для справок.

Черт. 8

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.15. Для всех размеров, нанесенных на рабочих чертежах, указывают предельные отклонения.

Допускается не указывать предельные отклонения:

а) для размеров, определяющих зоны различной шероховатости одной и той же поверхности, зоны термообработки, покрытия, отделки, накатки, насечки, а также диаметры накатанных и насеченных поверхностей. В этих случаях непосредственно у таких размеров наносят знак ≈ ;

б) для размеров деталей изделий единичного производства, задаваемых с припуском на пригонку.

На таких чертежах в непосредственной близости от указанных размеров наносят знак «*», а в технических требованиях указывают:

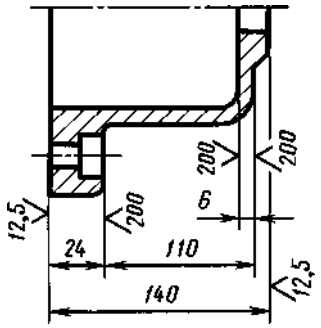
«* Размеры с припуском на пригонку по дет. ...»,

«* Размеры с припуском на пригонку по черт. ...»,

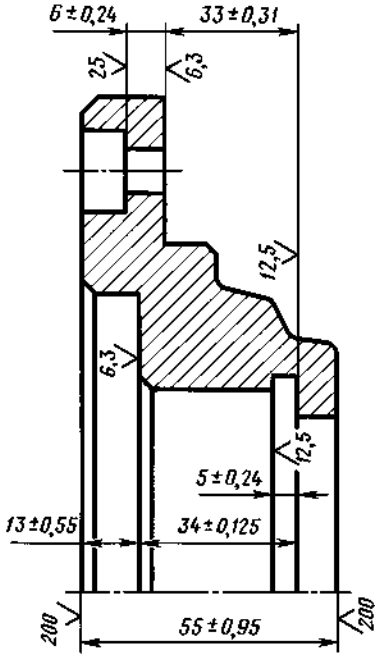
«* Размеры с припуском на пригонку по сопрягаемой детали».

На строительных чертежах предельные отклонения размеров указывают только в случаях, предусмотренных в соответствующих документах, утвержденных в установленном порядке.

1.16. При выполнении рабочих чертежей деталей, изготовляемых отливкой, штамповкой, ковкой или прокаткой с последующей механической обработкой части поверхности детали, указывают не более одного размера по каждому координатному направлению, связывающего механически обрабатываемые поверхности с поверхностями, не подвергаемыми механической обработке (черт. 9 и 10).



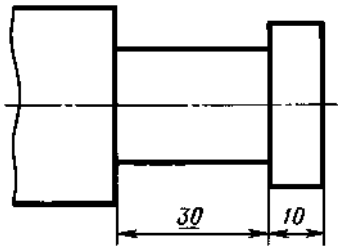
Черт. 9



Черт. 10

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.17. Если элемент изображен с отступлением от масштаба изображения, то размерное число следует подчеркнуть (черт. 10*а*).



Черт. 10а

(Введен дополнительно, Изм. № 2).

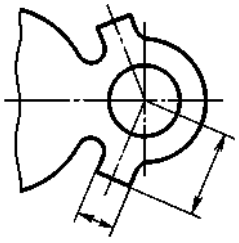
2. НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ

2.1. Размеры на чертежах указывают размерными числами и размерными линиями.

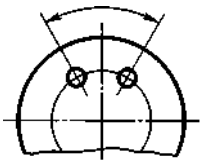
2.2. При нанесении размера прямолинейного отрезка размерную линию проводят параллельно этому отрезку, а выносные линии — перпендикулярно размерным (черт. 11).

2.3. При нанесении размера угла размерную линию проводят в виде дуги с центром в его вершине, а выносные линии — радиально (черт. 12).

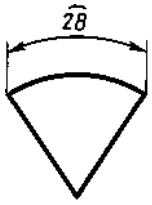
2.4. При нанесении размера дуги окружности размерную линию проводят концентрично дуге, а выносные линии — параллельно биссектрисе угла, и над размерным числом наносят знак «⌒» (черт. 13).



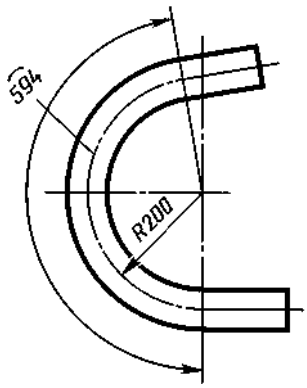
Черт. 11



Черт. 12



Черт. 13



Черт. 14

Допускается располагать выносные линии размера дуги радиально, и, если имеются еще концентричные дуги, необходимо указывать, к какой дуге относится размер (черт. 14).

2.4а. При нанесении размеров деталей, подобных изображенной на черт. 14*а*, размерные линии следует проводить в радиусном направлении, а выносные — по дугам окружностей (черт. 14*а*).

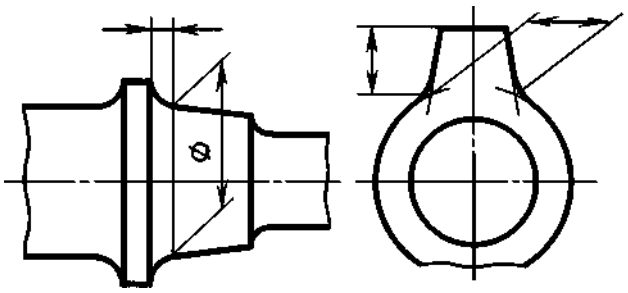
(Введен дополнительно, Изм. № 2).

2.5. Размерную линию с обоих концов ограничивают стрелками, упирающимися в соответствующие линии, кроме случаев, приведенных в пп. 2.16, 2.17, 2.20 и 2.21, и при нанесении линии радиуса, ограниченной стрелкой со стороны определяемой дуги или скругления.

На строительных чертежах взамен стрелок допускается применять засечки на пересечении размерных и выносных линий, при этом размерные линии должны выступать за крайние выносные линии на 1...3 мм.

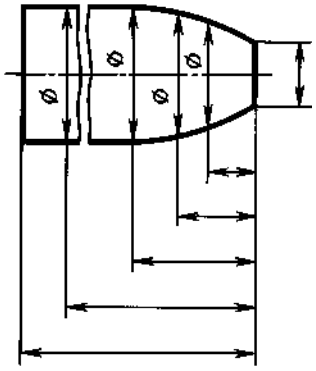
Черт. 14а

2.6. В случаях, показанных на черт. 15, размерную и выносные линии проводят так, чтобы они вместе с измеряемым отрезком образовали параллелограмм.

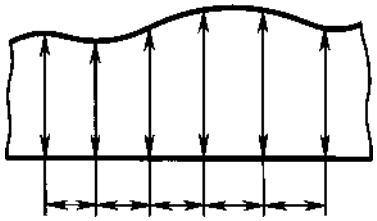


Черт. 15

2.7. Допускается проводить размерные линии непосредственно к линиям видимого контура, осевым, центровым и другим линиям (черт. 16 и 17).



Черт. 16



Черт. 17

2.8. Размерные линии предпочтительно наносить вне контура изображения.

2.9. Выносные линии должны выходить за концы стрелок размерной линии на 1...5 мм.

2.10. Минимальные расстояния между параллельными размерными линиями должны быть 7 мм, а между размерной и линией контура — 10 мм и выбраны в зависимости от размеров изображения и насыщенности чертежа.

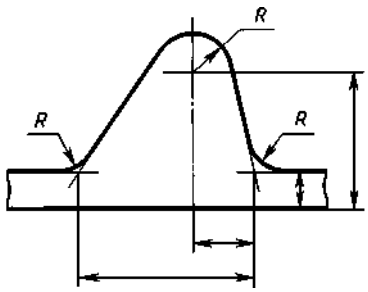
(Измененная редакция, Изм. № 2).

2.11. Необходимо избегать пересечения размерных и выносных линий (см. черт. 16).

2.12. Не допускается использовать линии контура, осевые, центровые и выносные линии в качестве размерных.

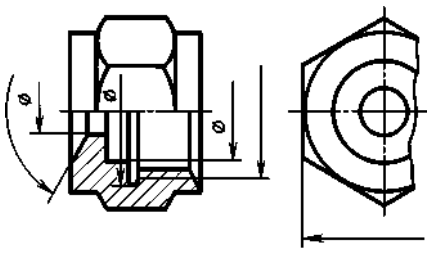
2.13. Выносные линии проводят от линий видимого контура, за исключением случаев, указанных в пп. 2.14 и 2.15, и случаев, когда при нанесении размеров на невидимом контуре отпадает необходимость в вычерчивании дополнительного изображения.

2.14. Размеры контура криволинейного профиля наносят, как показано на черт. 16 и 17.



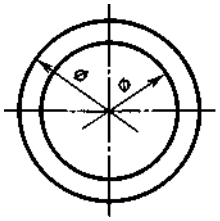
Черт. 18

2.15. Если надо показать координаты вершины скругляемого угла или центра дуги скругления, то выносные линии проводят от точки пересечения сторон скругляемого угла или центра дуги скругления (черт. 18).



Черт. 19

2.16. Если вид или разрез симметричного предмета или отдельных симметрично расположенных элементов изображают только до оси симметрии или с обрывом, то размерные линии, относящиеся к этим элементам, проводят с обрывом, и обрыв размерной линии делают дальше оси или линии обрыва предмета (черт. 19).



Черт. 20

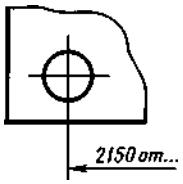
На строительных чертежах в подобных случаях все размеры допускается указывать только до оси симметрии, а размерные линии на пересечении с осью симметрии ограничивать крестиком из засечек.

2.17. Размерные линии допускается проводить с обрывом в следующих случаях:

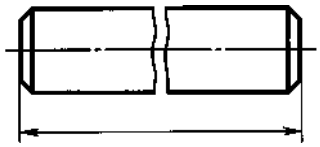
а) при указании размера диаметра окружности независимо от того, изображена ли окружность полностью или частично; при этом обрыв размерной линии делают дальше центра окружности (черт. 20);

б) при нанесении размеров от базы, не изображенной на данном чертеже (черт. 21).

2.18. При изображении изделия с разрывом размерную линию не прерывают (черт. 22).



Черт. 21

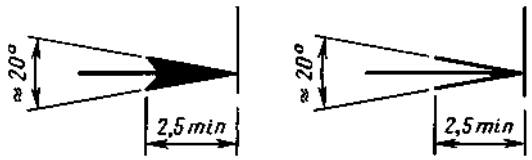


Черт. 22

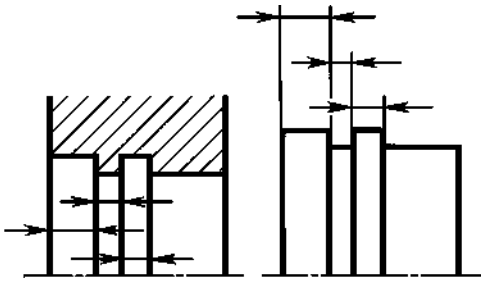
2.19. Величины элементов стрелок размерных линий выбирают в зависимости от толщины линий видимого контура и вычерчивают их приблизительно одинаковыми на всем чертеже. Форма стрелки и примерное соотношение ее элементов показаны на черт. 23.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

2.20. Если длина размерной линии недостаточна для размещения на ней стрелок, то размерную линию продолжают за выносные линии (или соответственно за контурные, осевые, центровые и т.д.) и стрелки наносят, как показано на черт. 24.



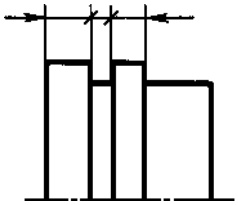
Черт. 23



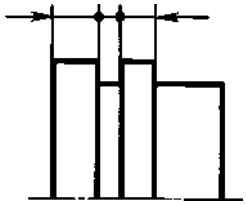
Черт. 24

2.21. При недостатке места для стрелок на размерных линиях, расположенных цепочкой, стрелки допускается заменять засечками, наносимыми под углом 45 ° к размерным линиям (черт. 25); или четко наносимыми точками (черт. 26).

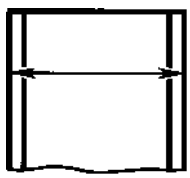
2.22. При недостатке места для стрелки из-за близко расположенной контурной или выносной линии последние допускается прерывать (черт. 24 и 27).



Черт. 25

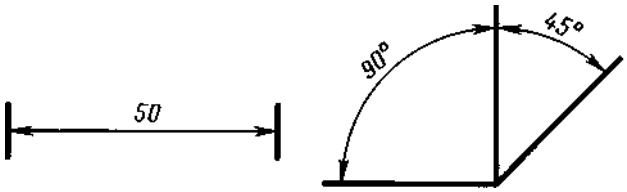


Черт. 26



Черт. 27

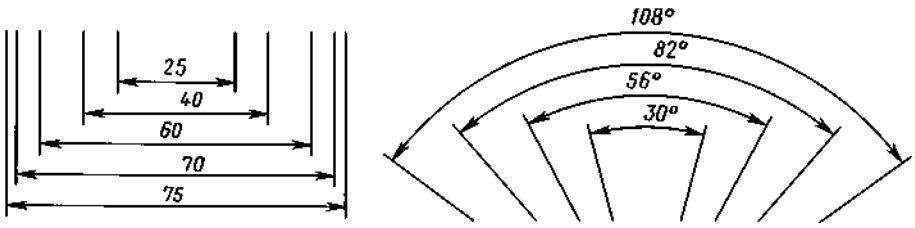
2.23. Размерные числа наносят над размерной линией возможно ближе к ее середине (черт. 28).



Черт. 28

2.24. При нанесении размера диаметра внутри окружности размерные числа смещают относительно середины размерных линий.

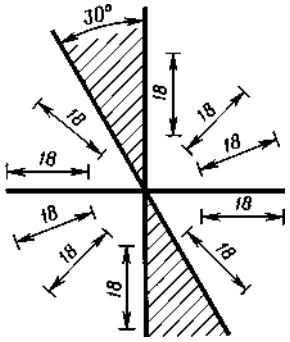
2.25. При нанесении нескольких параллельных или концентричных размерных линий на небольшом расстоянии друг от друга размерные числа над ними рекомендуется располагать в шахматном порядке (черт. 29).



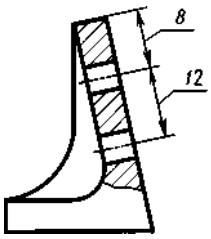
Черт. 29

2.26. Размерные числа линейных размеров при различных наклонах размерных линий располагают, как показано на черт. 30.

Если необходимо нанести размер в заштрихованной зоне, соответствующее размерное число наносят на полке линии-выноски (черт. 31).



Черт. 30

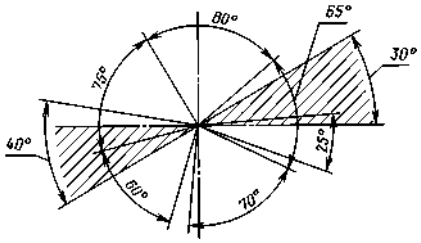


Черт. 31

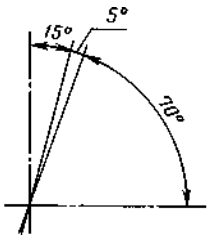
2.27. Угловые размеры наносят так, как показано на черт. 32. В зоне, расположенной выше горизонтальной осевой линии, размерные числа помещают над размерными линиями со стороны их выпуклости; в зоне, расположенной ниже горизонтальной осевой линии — со стороны вогнутости размерных линий. В заштрихованной зоне наносить размерные числа не рекомендуется. В этом случае размерные числа указывают на горизонтально нанесенных полках.

Для углов малых размеров при недостатке места размерные числа помещают на полках линий-выносок в любой зоне (черт. 33).

2.28. На строительных чертежах допускается линейные и угловые размерные числа и надписи наносить без полок линий-выносок.



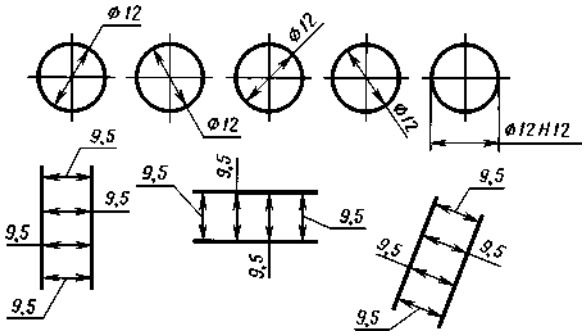
Черт. 32



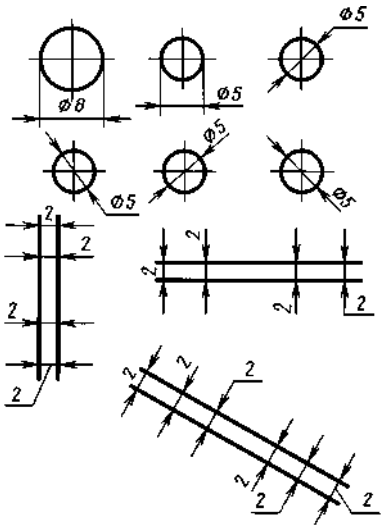
Черт. 33

2.29. Если для написания размерного числа недостаточно места над размерной линией, то размеры наносят, как показано на черт. 34; если недостаточно места для нанесения стрелок, то их наносят, как показано на черт. 35.

Способ нанесения размерного числа при различных положениях размерных линий (стрелок) на чертеже определяется наибольшим удобством чтения.



Черт. 34

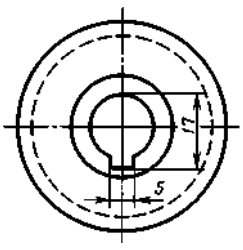


Черт. 35

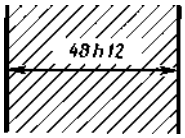
2.30. Размерные числа и предельные отклонения не допускается разделять или пересекать какими бы то ни было линиями чертежа. Не допускается разрывать линию контура для нанесения размерного числа и наносить размерные числа в местах пересечения размерных, осевых или центровых линий. В месте нанесения размерного числа осевые, центровые линии и линии штриховки прерывают (черт. 36 и 37).

2.29, 2.30. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

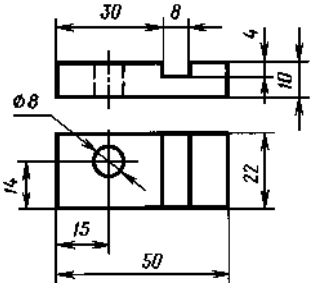
2.31. Размеры, относящиеся к одному и тому же конструктивному элементу (пазу, выступу, отверстию и т.п.), рекомендуется группировать в одном месте, располагая их на том изображении, на котором геометрическая форма данного элемента показана наиболее полно (черт. 38).



Черт. 36



Черт. 37



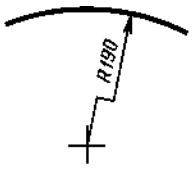
Черт.38

2.32. При нанесении размера радиуса перед размерным числом помещают прописную букву *R*.

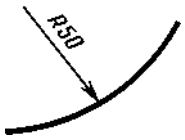
2.33. Если при нанесении размера радиуса дуги окружности необходимо указать размер, определяющий положение ее центра, то последний изображают в виде пересечения центровых или выносных линий.

При большой величине радиуса центр допускается приближать к дуге, в этом случае размерную линию радиуса показывают с изломом под углом 90 ° (черт. 39).

2.34. Если не требуется указывать размеры, определяющие положение центра дуги окружности, то размерную линию радиуса допускается не доводить до центра и смещать ее относительно центра (черт. 40).



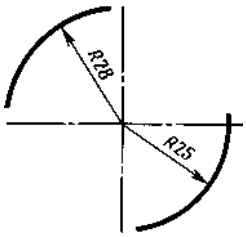
Черт. 39



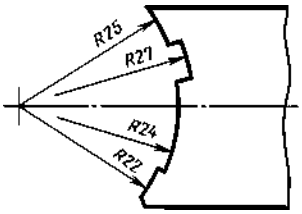
Черт. 40

2.35. При проведении нескольких радиусов из одного центра размерные линии любых двух радиусов не располагают на одной прямой (черт. 41).

При совпадении центров нескольких радиусов их размерные линии допускается не доводить до центра, кроме крайних (черт. 41*а*).

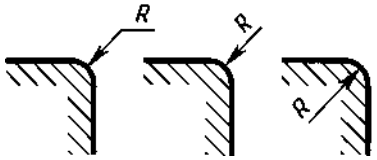


Черт. 41

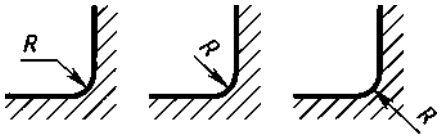


Черт. 41а

2.36. Размеры радиусов наружных скруглений наносят, как показано на черт. 42, внутренних скруглений — на черт. 43.



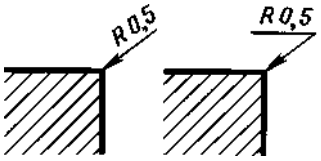
Черт. 42



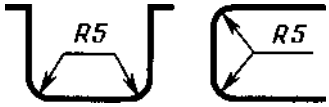
Черт. 43

Радиусы скругления, размер которых в масштабе чертежа 1 мм и менее, на чертеже не изображают и размеры их наносят, как показано на черт. 43*а*.

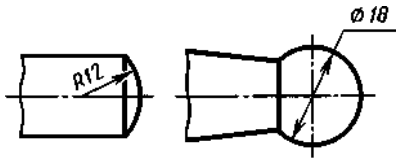
Способ нанесения размерных чисел при различных положениях размерных линий (стрелок) на чертеже определяется наибольшим удобством чтения. Размеры одинаковых радиусов допускается указывать на общей полке, как показано на черт. 43*б*.



Черт. 43а



Черт. 43б



Черт. 44

Если радиусы скруглений, сгибов и т.п. на всем чертеже одинаковы или какой-либо радиус является преобладающим, то вместо нанесения размеров этих радиусов непосредственно на изображении рекомендуется в технических требованиях делать запись типа: «Радиусы скруглений 4 мм»; «Внутренние радиусы сгибов 10 мм»; «Неуказанные радиусы 8 мм» и т.п.

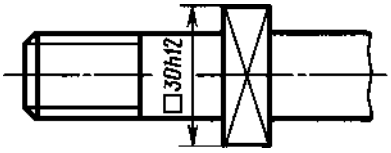
2.35, 2.36. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

2.37. При указании размера диаметра (во всех случаях) перед размерным числом наносят знак «∅».

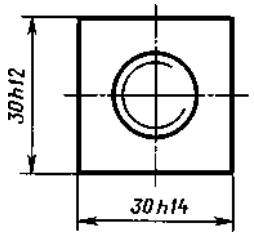
2.38. Перед размерным числом диаметра (радиуса) сферы также наносят знак ∅ (*R*) без надписи «Сфера» (черт. 44). Если на чертеже трудно отличить сферу от других поверхностей, то перед размерным числом диаметра (радиуса) допускается наносить слово «Сфера» или знак ○, например, «Сфера ∅18, ○ *R*12».

Диаметр знака сферы равен размеру размерных чисел на чертеже.

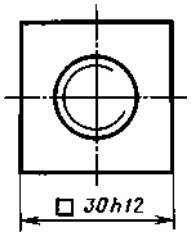
2.39. Размеры квадрата наносят, как показано на черт. 45, 46 и 46*а*.



Черт. 45



Черт. 46

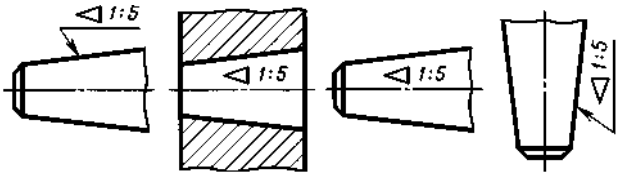


Черт. 46а

Высота знака □ должна быть равна высоте размерных чисел на чертеже.

2.38, 2.39. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

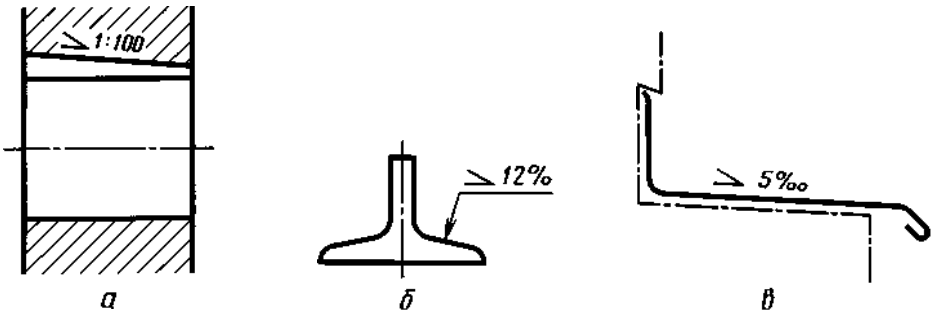
2.40. Перед размерным числом, характеризующим конусность, наносят знак « ◁ », острый угол которого должен быть направлен в сторону вершины конуса (черт. 47).



Черт. 47

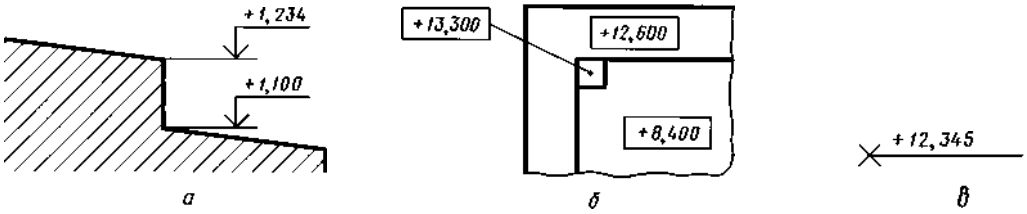
Знак конуса и конусность в виде соотношения следует наносить над осевой линией или на полке линии-выноски.

2.41. Уклон поверхности следует указывать непосредственно у изображения поверхности уклона или на полке линии-выноски в виде соотношения (черт. 48*а*), в процентах (черт. 48*б*) или в промилле (черт. 48*в*). Перед размерным числом, определяющим уклон, наносят знак «>», острый угол которого должен быть направлен в сторону уклона.



Черт. 48

2.42. Отметки уровней (высоты, глубины) конструкции или ее элемента от какого-либо отсчетного уровня, принимаемого за «нулевой» на виде и разрезе, помещают на выносных линиях (или на линиях контура) и обозначают знаком «↓», выполненным сплошными тонкими линиями, длина штрихов 2—4 мм под углом 45 ° к выносной линии или линии контура (черт. 49*а*), на виде сверху их следует наносить в рамке непосредственно на изображении или на линии-выноске (черт. 49*б*), или как показано на черт. 49*в*.

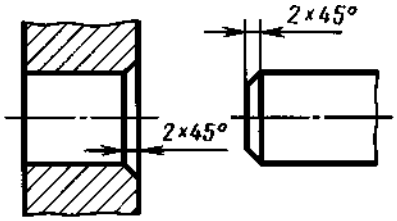


Черт. 49

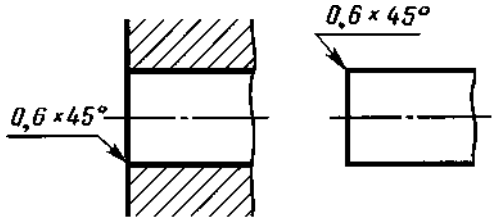
Отметки уровней указывают в метрах с точностью до третьего десятичного знака, без обозначения единицы измерения.

2.43. Размеры фасок под углом 45 ° наносят, как показано на черт. 50.

Допускается указывать размеры не изображенной на чертеже фаски под углом 45 °, размер которой в масштабе чертежа 1 мм и менее, на полке линии-выноски, проведенной от грани (черт. 50*а*).

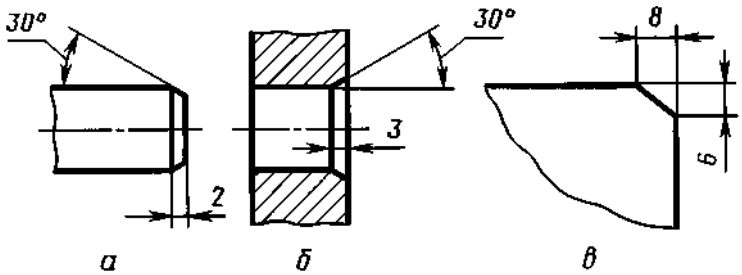


Черт. 50



Черт. 50а

Размеры фасок под другими углами указывают по общим правилам — линейными угловыми размерами (черт. 51*а* и *б*) или двумя линейными размерами (черт. 51*в*).

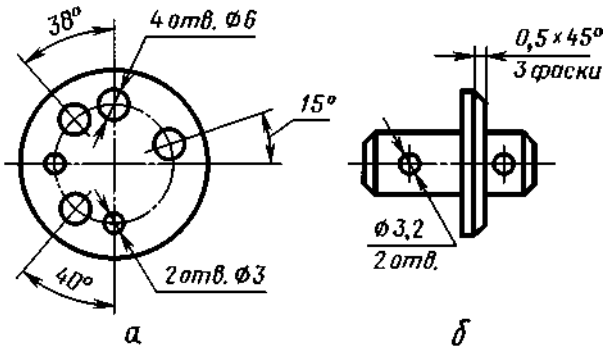


Черт. 51

2.40—2.43. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

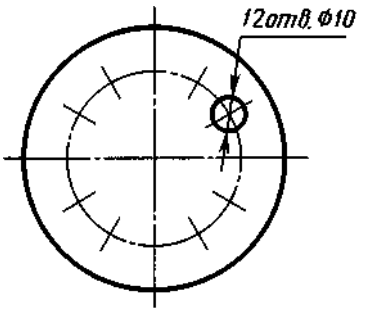
2.44. Размеры нескольких одинаковых элементов изделия, как правило, наносят один раз с указанием на полке линии-выноски количества этих элементов (черт. 52*а*).

Допускается указывать количество элементов, как показано на черт. 52*б*.

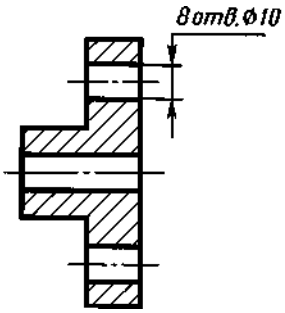


Черт. 52

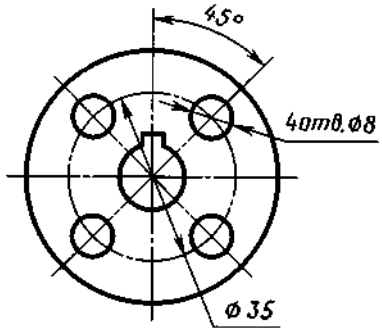
2.45. При нанесении размеров элементов, равномерно расположенных по окружности изделия (например, отверстий), вместо угловых размеров, определяющих взаимное расположение элементов, указывают только их количество (черт. 53—55).



Черт. 53



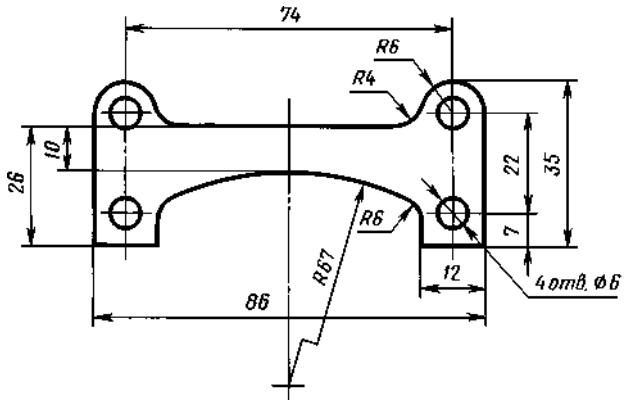
Черт. 54



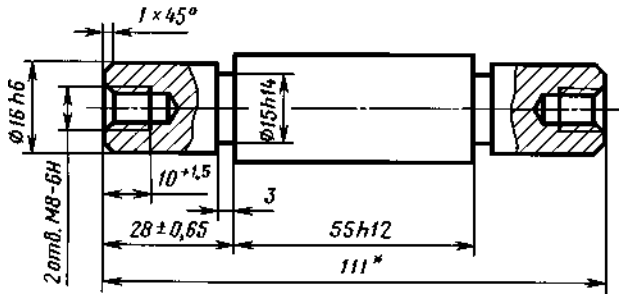
Черт. 55

2.46. Размеры двух симметрично расположенных элементов изделия (кроме отверстий) наносят один раз без указания их количества, группируя, как правило, в одном месте все размеры (черт. 56 и 57).

Количество одинаковых отверстий всегда указывают полностью, а их размеры — только один раз.



Черт. 56



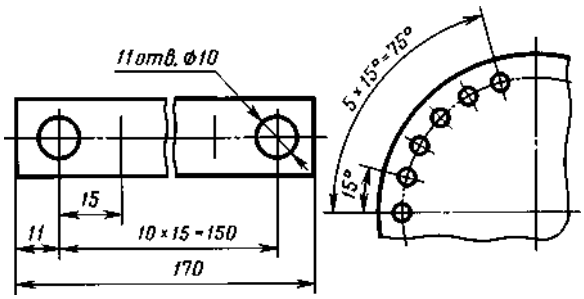
* Размеры для справок.

Черт. 57

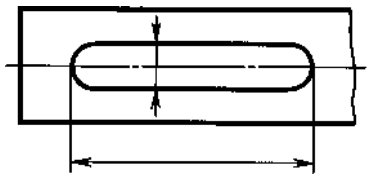
(Измененная редакция, Изм. № 2).

2.47. При нанесении размеров, определяющих расстояние между равномерно расположенными одинаковыми элементами изделия (например, отверстиями), рекомендуется вместо размерных цепей наносить размер между соседними элементами и размер между крайними элементами в виде произведения количества промежутков между элементами на размер промежутка (черт. 58).

2.47а. Допускается не наносить на чертеже размеры радиуса дуги окружности сопрягающихся параллельных линий (черт. 58*а*).



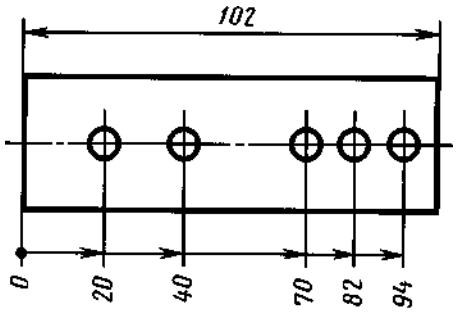
Черт. 58



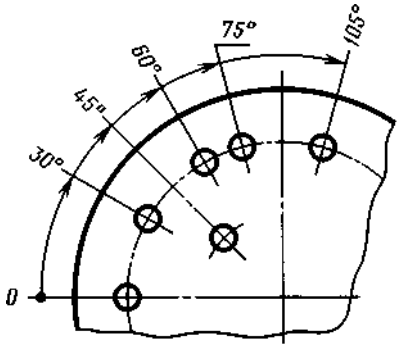
Черт. 58а

(Введен дополнительно, Изм. № 2).

2.48. При большом количестве размеров, нанесенных от общей базы, допускается наносить линейные и угловые размеры, как показано на черт. 59 и 60, при этом проводят общую размерную линию от отметки «0» и размерные числа наносят в направлении выносных линий у их концов.

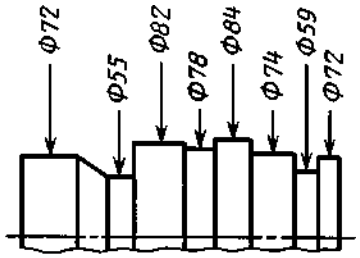


Черт. 59



Черт. 60

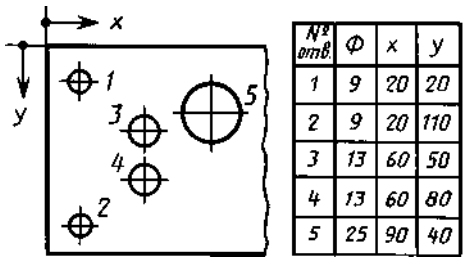
2.48а. Размеры диаметров цилиндрического изделия сложной конфигурации допускается наносить, как показано на черт. 60*а*.



Черт. 60а

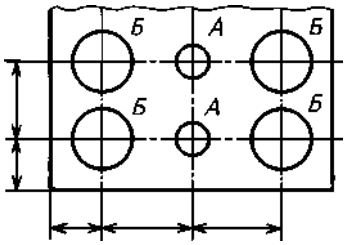
(Введен дополнительно, Изм. № 2).

2.49. При большом количестве однотипных элементов изделия, неравномерно расположенных на поверхности, допускается указывать их размеры в сводной таблице, при этом применяется координатный способ нанесения отверстий с обозначением их арабскими цифрами (черт. 61) или обозначение однотипных элементов прописными буквами (черт. 61*а*).



№ отв.	Ф	x	y
1	9	20	20
2	9	20	110
3	13	60	50
4	13	60	80
5	25	90	40

Черт. 61

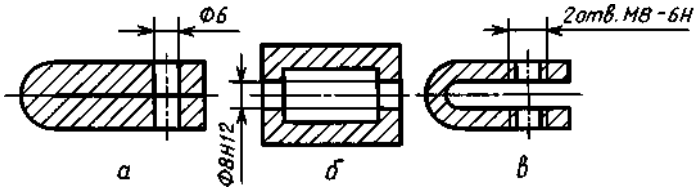


Черт. 61а

Обозначение отверстий	*Кол.*	*Размер, мм*
А	*2*	*3*
Б	*4*	*6,5*

2.50. Одинаковые элементы, расположенные в разных частях изделия (например, отверстия), рассматривают как один элемент, если между ними нет промежутка (черт. 62*а*) или если эти элементы соединены тонкими сплошными линиями (черт. 62*б*).

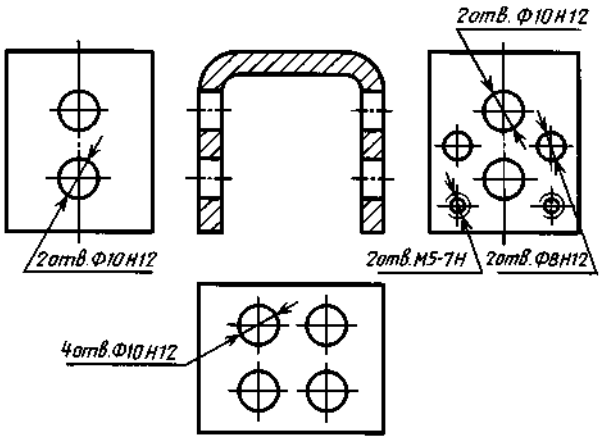
При отсутствии этих условий указывают полное количество элементов (черт. 62*в*).



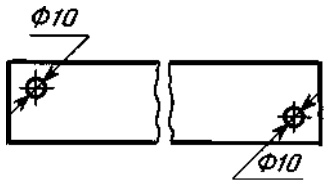
Черт. 62

2.51. Если одинаковые элементы изделия (например, отверстия) расположены на разных поверхностях и показаны на разных изображениях, то количество этих элементов записывают отдельно для каждой поверхности (черт. 63).

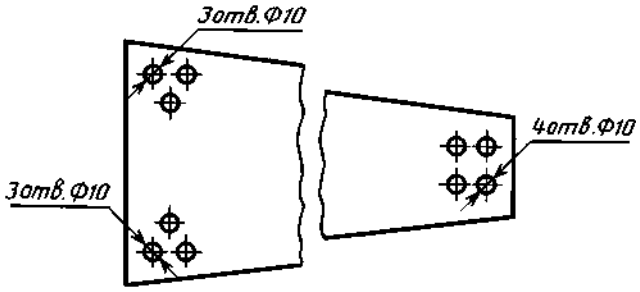
Допускается повторять размеры одинаковых элементов изделия или их групп (в том числе отверстий), лежащих на одной поверхности, только в том случае, когда они значительно удалены друг от друга и не увязаны между собой размерами (черт. 64 и 65).



Черт. 63



Черт. 64



Черт. 65

2.49—2.51. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

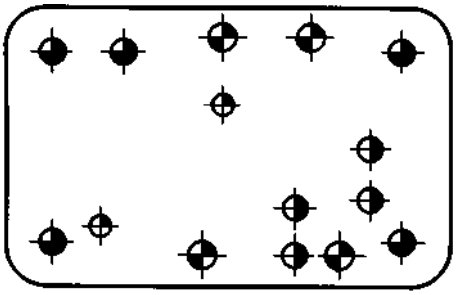
2.52. Если на чертеже показано несколько групп близких по размерам отверстий, то рекомендуется отмечать одинаковые отверстия одним из условных знаков, приведенных на черт. 66. Допускается применять и другие условные знаки.

Черт. 66

Отверстия обозначают условными знаками на том изображении, на котором указаны размеры, определяющие положение этих отверстий.

На строительных чертежах допускается одинаковые группы отверстий обводить сплошной тонкой линией с поясняющей надписью.

2.53. При обозначении одинаковых отверстий условными знаками количество отверстий и их размеры допускается указывать в таблице (черт. 67).

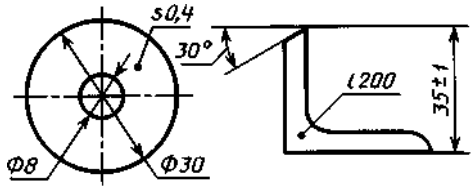


Обозначение	Количество	Размеры	Шероховатость поверхности
⊕	2	Ф5Н7	3,2
◐	4	Ф6Н12	12,5
●	5	Ф6,5	12,5
⊕	4	Ф7	12,5

Черт. 67

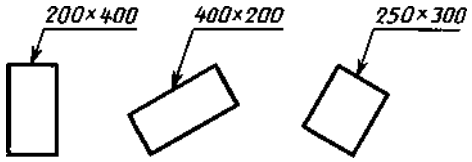
(Измененная редакция, Изм. № 2).

2.54. При изображении детали в одной проекции размер ее толщины или длины наносят, как показано на черт. 68.



Черт. 68

2.55. Размеры детали или отверстия прямоугольного сечения могут быть указаны на полке линии-выноски размерами сторон через знак умножения. При этом на первом месте должен быть указан размер той стороны прямоугольника, от которой проводится линия-выноска (черт. 68*а*).



Черт. 68а

(Измененная редакция, Изм. № 2).

3. НАНЕСЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ РАЗМЕРОВ

3.1. Предельные отклонения размеров следует указывать непосредственно после номинальных размеров. Предельные отклонения линейных и угловых размеров относительно низкой точности допускается не указывать непосредственно после номинальных размеров, а оговаривать общей записью в технических требованиях чертежа при условии, что эта запись однозначно определяет значения и знаки предельных отклонений.

Общая запись о предельных отклонениях размеров с неуказанными допусками должна содержать условные обозначения предельных отклонений линейных размеров в соответствии с ГОСТ 25346 (для отклонений по квалитетам) или по ГОСТ 25670 (для отклонений по классам точности). Симметричные предельные отклонения, назначаемые по квалитетам, следует обозначать $\pm \frac{IT}{2}$ с указанием номера квалитета.

Обозначения односторонних предельных отклонений по квалитетам, назначаемых только для круглых отверстий и валов (вариант 4 по ГОСТ 25670) дополняются знаком диаметра (∅).

Примеры общих записей, соответствующие вариантам по ГОСТ 25670 для 14 квалитета и (или) класса точности «средний», приведены в табл. 1:

Таблица 1

Номер варианта	Пример записи условными обозначениями
1.	$H14,\ h14,\ \pm\frac{t_2}{2}$ или $H14,\ h14,\ \pm\frac{IT14}{2}$
2.	$+t_2,\ -t_2,\ \pm\frac{t_2}{2}$
3.	$\pm\frac{t_2}{2}$ или $\pm\frac{IT14}{2}$
4.	$\varnothing H14,\ \varnothing h14,\ \pm\frac{t_2}{2}$ или $\varnothing H14,\ \varnothing h14,\ \pm\frac{IT14}{2}$

Примечания:

1. Допускается записи о неуказанных предельных отклонениях размеров дополнять поясняющими словами, например, «Неуказанные предельные отклонения размеров $H14,\ h14,\ \pm\frac{t_2}{2}$».

2. Если технические требования на чертеже состоят из одного пункта, содержащего запись о неуказанных предельных отклонениях размеров, или эта запись приводится в текстовых документах, то она должна обязательно сопровождаться поясняющими словами, например, «Неуказанные предельные отклонения размеров $\pm\frac{t_2}{2}$».

(Измененная редакция, Изм. № 2).

3.1*а*. Неуказанные предельные отклонения радиусов закруглений, фасок и углов не оговариваются отдельно, а должны соответствовать приведенным в ГОСТ 25670 в соответствии с квалитетом или классом точности неуказанных предельных отклонений линейных размеров.

Если все предельные отклонения линейных размеров указаны непосредственно после номинальных размеров (общая запись отсутствует), то неуказанные предельные отклонения радиусов закруглений, фасок и углов должны соответствовать приведенным в ГОСТ 25670 для квалитетов от 12 до 16 и на чертеже не оговариваются.

(Введен дополнительно, Изм. № 2).

3.2. Предельные отклонения линейных размеров указывают на чертежах условными обозначениями полей допусков в соответствии с ГОСТ 25346, например: 18*H*7, 12*e*8 или числовыми значениями, например: $18^{+0,018}\ 12^{-0,032}_{-0,059}$, или условными обозначениями полей допусков с указанием справа в скобках их числовых значений например: $18H7^{(+0,018)}$, $12e8\ (^{-0,032}_{-0,059})$.

Таблица 2

мм

Размер	Пред. откл.
18*H*7	+0,018
12*e*8	—0,032 —0,059

Допускается числовые значения предельных отклонений указывать в таблице (табл. 2), расположенной на свободном поле чертежа.

При указании номинальных размеров буквенными обозначениями поля допусков должны быть указаны после тире, например, *D*—*H*11.

3.3. При указании предельных отклонений условными обозначениями обязательно и указание их числовых значений в следующих случаях:

а) при назначении предельных отклонений (установленных стандартами на допуски и посадки) размеров, не включенных в ряды нормальных линейных размеров по ГОСТ 6636, например: 41,5 $H7^{(+0,025)}$;

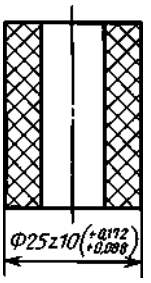
б) при назначении предельных отклонений, условные обозначения которых не предусмотрены в ГОСТ 25347, например, для пластмассовой детали с предельными отклонениями по ГОСТ 25349 (черт. 69);

в) при назначении предельных отклонений размеров уступов с несимметричным полем допуска (черт. 70, 71);

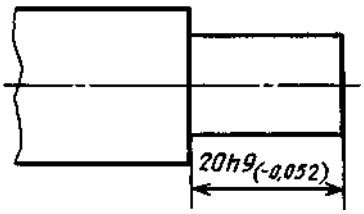
г) **(Исключен, Изм. № 2).**

3.4. Предельные отклонения угловых размеров указывают только числовыми значениями (черт. 72).

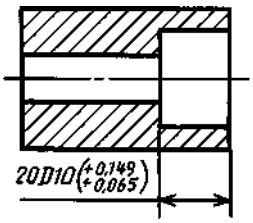
3.5. При записи предельных отклонений числовыми значениями верхние отклонения помещают над нижними. Предельные отклонения, равные нулю, не указывают, например: $60^{+0,014}_{-0,032}$; $60^{-0,100}_{-0,174}$; $60^{+0,19}$; $60_{-0,19}$.



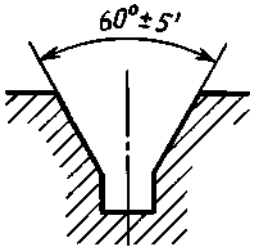
Черт. 69



Черт. 70



Черт. 71



Черт. 72

При симметричном расположении поля допуска абсолютную величину отклонений указывают один раз со знаком ±; при этом высота цифр, определяющих отклонения, должна быть равна высоте шрифта номинального размера, например: 60±0,23.

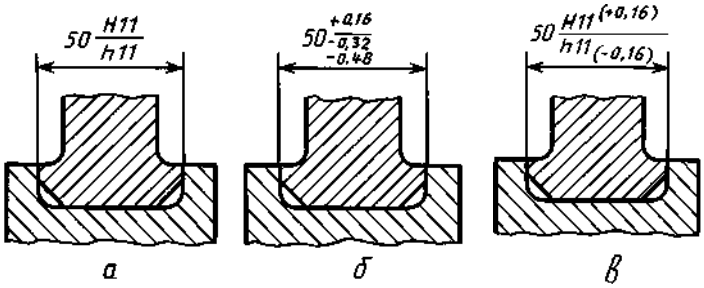
3.6. Предельные отклонения, указываемые числовыми значениями, выраженными десятичной дробью, записывают до последней значащей цифры включительно, выравнивая количество знаков в верхнем и нижнем отклонении добавлением нулей,например: $10^{+0,15}_{-0,30}$; $35^{-0,080}_{-0,142}$.

3.7. Предельные отклонения размеров деталей, изображенных на чертеже в сборе, указывают одним из следующих способов:

а) в виде дроби, в числителе которой указывают условное обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе — условное обозначение поля допуска вала, например: $50\frac{H11}{h11}$ или $50H11/h11$ (черт. 73*а*);

б) в виде дроби, в числителе которой указывают числовые значения предельных отклонений отверстия, а в знаменателе — числовые значения предельных отклонений вала (черт. 73*б*);

$б_1$) в виде дроби, в числителе которой указывают условное обозначение поля допуска отверстия с указанием справа в скобках его числового значения, а в знаменателе — условное обозначение поля допуска вала с указанием справа в скобках его числового значения (черт. 73*в*);

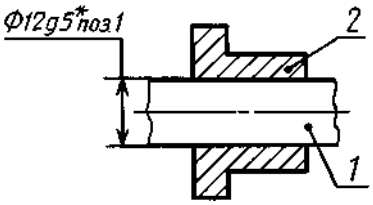


Черт. 73

в) в виде записи, в которой указывают предельные отклонения только одной из сопрягаемых деталей. В этом случае необходимо пояснить, к какой детали относятся эти отклонения (черт. 74).

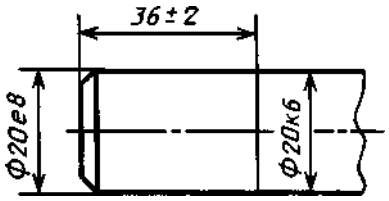
3.8. Когда для участков поверхности с одним номинальным размером назначают разные предельные отклонения, границу между ними наносят сплошной тонкой линией, а номинальный размер указывают с соответствующими предельными отклонениями для каждого участка отдельно (черт. 75).

Через заштрихованную часть изображения линию границы между участками проводить не следует (черт. 75*а*).

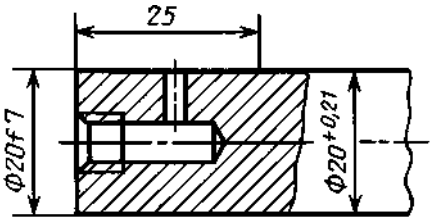


* Размеры для справок.

Черт. 74



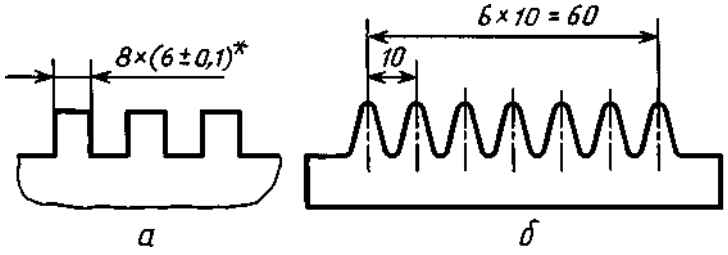
Черт. 75



Черт. 75а

3.2—3.8. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

3.9. Если необходимо ограничить колебания размера одинаковых элементов одной детали в пределах части поля допуска (черт. 76*а*) или необходимо ограничить величину накопленной погрешности расстояния между повторяющимися элементами (черт. 76*б*), то эти данные указывают в технических требованиях.

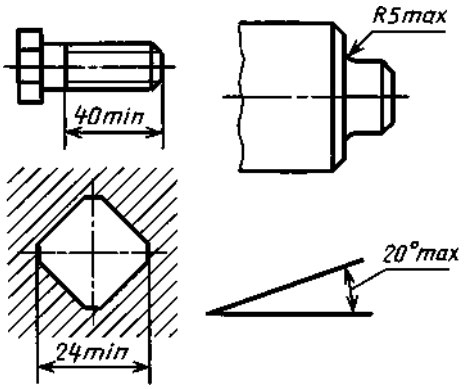


* Разность размеров 0,1 мм.

Предельные отклонения расстояния между любыми несмежными зубьями ±0,1 мм.

Черт. 76

3.10. Когда необходимо указать только один предельный размер (второй ограничен в сторону увеличения или уменьшения каким-либо условием), после размерного числа указывают соответственно max или min (черт. 77).



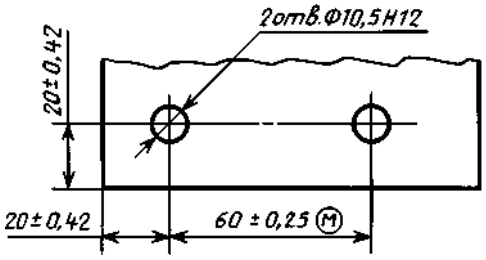
Черт. 77

Указывать предельные размеры допускается также на сборочных чертежах для зазоров, натягов, мертвых ходов и т.п., например: «Осевое смещение кулачка выдержать в пределах 0,6—1,4 мм».

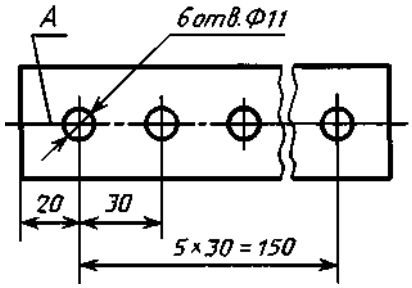
3.11. Предельные отклонения расположения осей отверстий можно указывать двумя способами:

а) позиционными допусками осей отверстий в соответствии с требованиями ГОСТ 2.308;

б) предельными отклонениями размеров, координирующих оси (черт. 78—80).



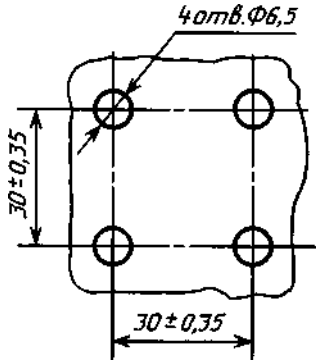
Черт. 78



1. Предельные отклонения размеров между осями двух любых отв. ±0,35 мм.

2. Смещение осей от плоскости А не более 0,18 мм.

Черт. 79



Предельные отклонения размеров по диагонали между осями двух любых отв. ±0,5 мм.

Черт. 80

Если допуски расположения осей зависимые, то после предельных отклонений размеров, координирующих оси, следует указывать знак зависимого допуска Ⓜ.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

3. ВЗАМЕН ГОСТ 3458—59, ГОСТ 9171—59, ГОСТ 5292—60 в части разд. III

4. ССЫЛОЧНЫЕ НОРМАТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ДОКУМЕНТЫ

Обозначение НТД, на который дана ссылка	Номер пункта, перечисления
ГОСТ 2.308—79	3.11, перечисление а
ГОСТ 2.414—75	1.1
ГОСТ 2.417—91	1.1
ГОСТ 2.419—68	1.1
ГОСТ 6636—69	3.3, перечисление а
ГОСТ 25346—89	3.1, 3.2
ГОСТ 25347—82	3.3, перечисление б
ГОСТ 25349—88	3.3, перечисление б
ГОСТ 25670—83	3.1, 3.1а

5. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменениями № 2, 3, утвержденными в июне 1983 г., сентябре 1987 г. (ИУС 9—83, 12—87)

УДК 744.43:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

УКАЗАНИЕ НА ЧЕРТЕЖАХ ДОПУСКОВ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Unified system for design documentation.
Representation of limits of forms and
surface lay-out on drawings

ГОСТ 2.308—79*

Взамен ГОСТ 2.308—68

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 4 января 1979 г. № 31 срок введения установлен

с 01.01.80

Настоящий стандарт устанавливает правила указания допусков формы и расположения поверхностей на чертежах изделий всех отраслей промышленности.

Термины и определения допусков формы и расположения поверхностей — по ГОСТ 24642—81.

Числовые значения допусков формы и расположения поверхностей — по ГОСТ 24643—81.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 368—76.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

1.1. Допуски формы и расположения поверхностей указывают на чертежах условными обозначениями.

Вид допуска формы и расположения поверхностей должен быть обозначен на чертеже знаками (графическими символами), приведенными в таблице.

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

** Издание (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в августе 1984 г. (ИУС 12—84)*

Группа допусков	Вид допуска	Знак
Допуск формы	Допуск прямолинейности	
	Допуск плоскостности	
	Допуск круглости	
	Допуск цилиндричности	
	Допуск профиля продольного сечения	
Допуск расположения	Допуск параллельности	
	Допуск перпендикулярности	
	Допуск наклона	
	Допуск соосности	
	Допуск симметричности	
	Позиционный допуск	
	Допуск пересечения осей	
Суммарные допуски формы и расположения	Допуск радиального биения Допуск торцового биения Допуск биения в заданном направлении	
	Допуск полного радиального биения	
	Допуск полного торцового биения	
	Допуск формы заданного профиля	
	Допуск формы заданной поверхности	

Формы и размеры знаков приведены в приложении 1.

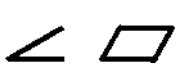
Примеры указания на чертежах допусков формы и расположения поверхностей приведены в приложении 2.

Примечание. Суммарные допуски формы и расположения поверхностей, для которых не установлены отдельные графические знаки, обозначают знаками составных допусков в следующей последовательности: знак допуска расположения, знак допуска формы.

Например:

— знак суммарного допуска параллельности и плоскостности;

— знак суммарного допуска перпендикулярности и плоскостности;

 — знак суммарного допуска наклона и плоскостности.

1.2. Допуск формы и расположения поверхностей допускается указывать текстом в технических требованиях, как правило, в том случае, если отсутствует знак вида допуска.

1.3. При указании допуска формы и расположения поверхностей в технических требованиях текст должен содержать:

вид допуска;

указание поверхности или другого элемента, для которого задается допуск (для этого используют буквенное обозначение или конструктивное наименование, определяющее поверхность);

числовое значение допуска в миллиметрах;

указание баз, относительно которых задается допуск (для допусков расположения и суммарных допусков формы и расположения);

указание о зависимых допусках формы или расположения (в соответствующих случаях).

1.4. При необходимости нормирования допусков формы и расположения, не указанных на чертеже числовыми значениями и не ограничиваемых другими указанными в чертеже допусками формы и расположения, в технических требованиях чертежа должна быть приведена общая запись о неуказанных допусках формы и расположения со ссылкой на ГОСТ 25069—81 или другие документы, устанавливающие неуказанные допуски формы и расположения.

Например: 1. Неуказанные допуски формы и расположения — по ГОСТ 25069—81.

2. Неуказанные допуски соосности и симметричности — по ГОСТ 25069—81.

(Введен дополнительно, Изм. № 1).

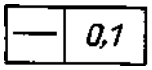
2. НАНЕСЕНИЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ ДОПУСКОВ

2.1. При условном обозначении данные о допусках формы и расположения поверхностей указывают в прямоугольной рамке, разделенной на две и более части (черт. 1, 2), в которых помещают:

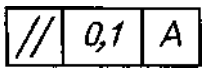
в первой — знак допуска по таблице;

во второй — числовое значение допуска в миллиметрах;

в третьей и последующих — буквенное обозначение базы (баз) или буквенное обозначение поверхности, с которой связан допуск расположения (пп. 3.7; 3.9).



Черт. 1



Черт. 2

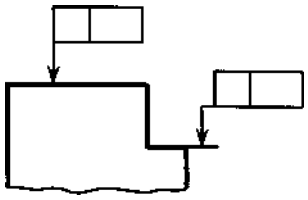
2.2. Рамки следует выполнять сплошными тонкими линиями. Высота цифр, букв и знаков, вписываемых в рамки, должна быть равна размеру шрифта размерных чисел.

Графическое изображение рамки приведено в приложении 1.

2.3. Рамку располагают горизонтально. В необходимых случаях допускается вертикальное расположение рамки.

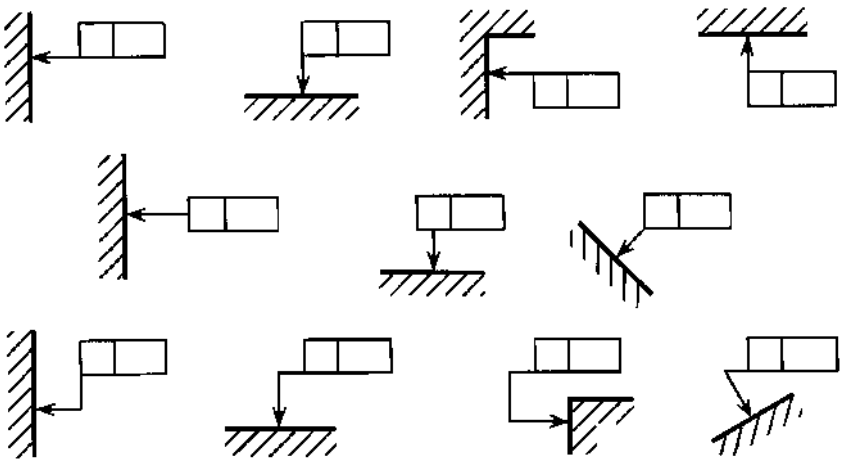
Не допускается пересекать рамку какими-либо линиями.

2.4. Рамку соединяют с элементом, к которому относится допуск, сплошной тонкой линией, заканчивающейся стрелкой (черт. 3).



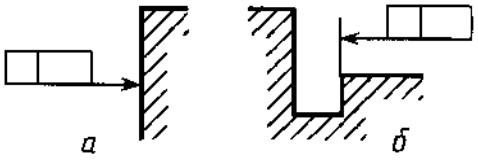
Черт. 3

Соединительная линия может быть прямой или ломаной, но направление отрезка соединительной линии, заканчивающегося стрелкой, должно соответствовать направлению измерения отклонения. Соединительную линию отводят от рамки, как показано на черт. 4.



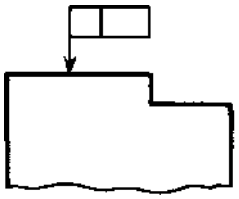
Черт. 4

В необходимых случаях допускается:
проводить соединительную линию от второй (последней) части рамки (черт. 5*а*);
заканчивать соединительную линию стрелкой и со стороны материала детали (черт. 5*б*).

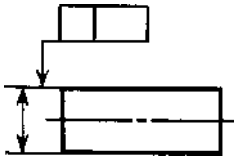


Черт. 5

2.5. Если допуск относится к поверхности или ее профилю, то рамку соединяют с контурной линией поверхности или ее продолжением, при этом соединительная линия не должна быть продолжением размерной линии (черт. 6, 7).

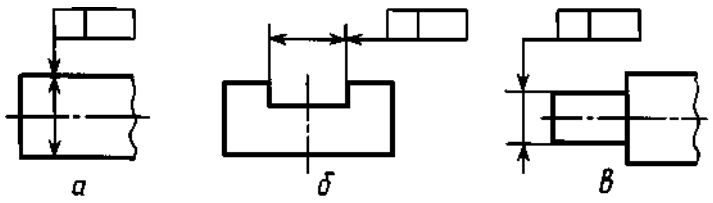


Черт. 6



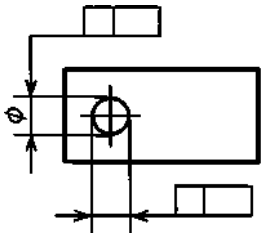
Черт. 7

2.6. Если допуск относится к оси или плоскости симметрии, то соединительная линия должна быть продолжением размерной линии (черт. 8*а*, *б*). При недостатке места стрелку размерной линии допускается совмещать со стрелкой соединительной линии (черт. 8*в*).

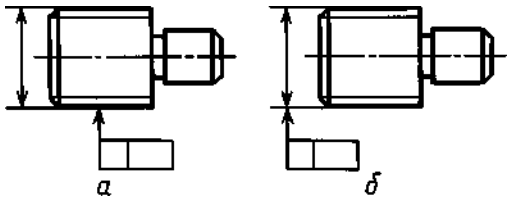


Черт. 8

Если размер элемента уже указан один раз, то на других размерных линиях данного элемента, используемых для условного обозначения допуска формы и расположения, его не указывают. Размерную линию без размера следует рассматривать как составную часть условного обозначения допуска формы или расположения (черт. 9).



Черт. 9

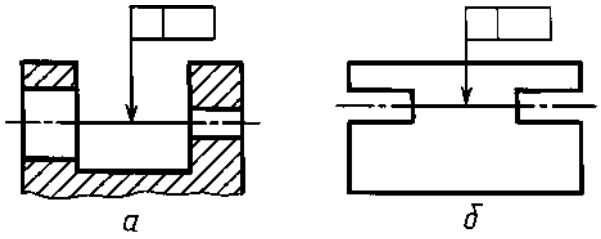


Черт. 10

2.7. Если допуск относится к боковым сторонам резьбы, то рамку соединяют с изображением в соответствии с черт. 10*а*.

Если допуск относится к оси резьбы, то рамку соединяют с изображением в соответствии с черт. 10*б*.

2.8. Если допуск относится к общей оси (плоскости симметрии) и из чертежа ясно, для каких поверхностей данная ось (плоскость симметрии) является общей, то рамку соединяют с осью (плоскостью симметрии) (черт. 11*а, б*).



Черт. 11

2.9. Перед числовым значением допуска следует указывать:

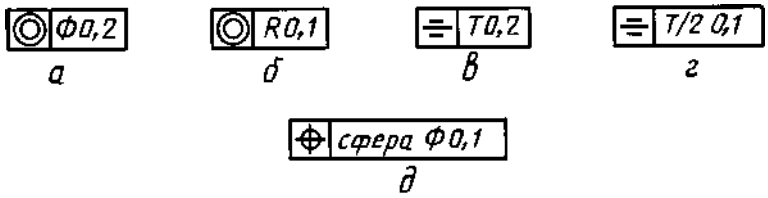
символ ∅, если круговое или цилиндрическое поле допуска указывают диаметром (черт. 12*а*);

символ *R*, если круговое или цилиндрическое поле допуска указывают радиусом (черт. 12*б*);

символ *T*, если допуски симметричности, пересечения осей, формы заданного профиля и заданной поверхности, а также позиционные допуски (для случая, когда поле позиционного допуска ограничено двумя параллельными прямыми или плоскостями) указывают в диаметральном выражении (черт. 12*в*);

символ *T/2* для тех же видов допусков, если их указывают в радиусном выражении (черт. 12*г*);

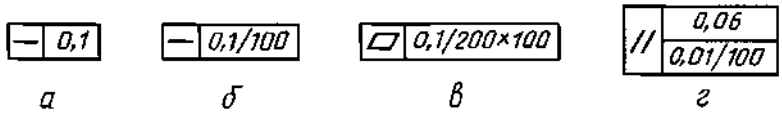
слово «сфера» и символы ∅ или *R*, если поле допуска сферическое (черт. 12*д*).



Черт. 12

2.10. Числовое значение допуска формы и расположения поверхностей, указанное в рамке (черт. 13*а*), относится ко всей длине поверхности. Если допуск относится к любому участку поверхности заданной длины (или площади), то заданную длину (или площадь) указывают рядом с допуском и отделяют от него наклонной линией (черт. 13 *б, в*), которая не должна касаться рамки.

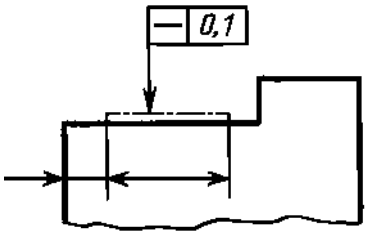
Если необходимо назначить допуск на всей длине поверхности и на заданной длине, то допуск на заданной длине указывают под допуском на всей длине (черт. 13*г*).



Черт. 13

(Измененная редакция, Изм. № 1).

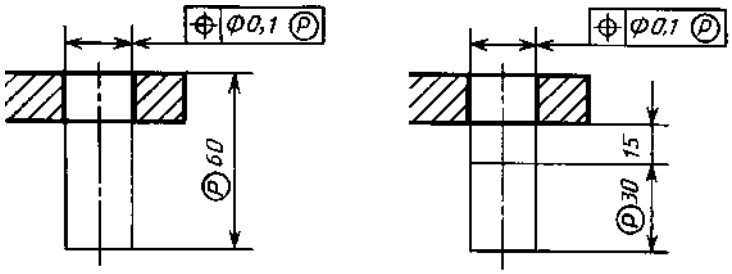
2.11. Если допуск должен относиться к участку, расположенному в определенном месте элемента, то этот участок обозначают штрихпунктирной линией и ограничивают размерами согласно черт. 14.



Черт. 14

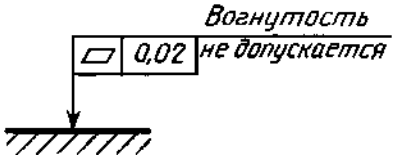
2.12. Если необходимо задать выступающее поле допуска расположения, то после числового значения допуска указывают символ Ⓟ.

Контур выступающей части нормируемого элемента ограничивают тонкой сплошной линией, а длину и расположение выступающего поля допуска — размерами (черт. 15).



Черт. 15

2.13. Надписи, дополняющие данные, приведенные в рамке допуска, следует наносить над рамкой, под ней или как показано на черт. 16.



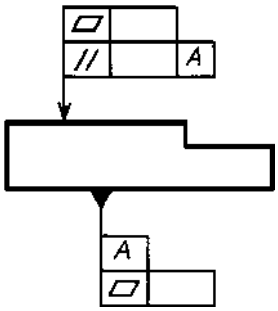
Черт. 16

(Измененная редакция, Изм. № 1).

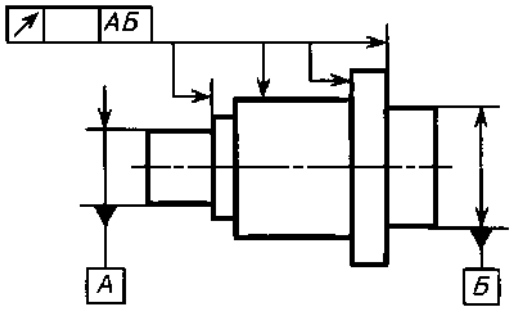
2.14. Если для одного элемента необходимо задать два разных вида допуска, то допускается рамки объединять и располагать их согласно черт. 17 (верхнее обозначение).

Если для поверхности требуется указать одновременно условное обозначение допуска формы или расположения и ее буквенное обозначение, используемое для нормирования другого допуска, то рамки с обоими условными обозначениями допускается располагать рядом на соединительной линии (черт. 17, нижнее обозначение).

2.15. Повторяющиеся одинаковые или разные виды допусков, обозначаемые одним и тем же знаком, имеющие одинаковые числовые значения и относящиеся к одним и тем же базам, допускается указывать один раз в рамке, от которой отходит одна соединительная линия, разветвляемая затем ко всем нормируемым элементам (черт. 18).



Черт. 17



Черт. 18

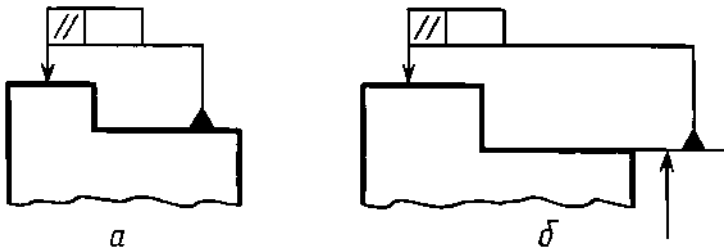
2.16. Допуски формы и расположения симметрично расположенных элементов на симметричных деталях указывают один раз.

3. ОБОЗНАЧЕНИЕ БАЗ

3.1. Базы обозначают зачерненным треугольником, который соединяют при помощи соединительной линии с рамкой. При выполнении чертежей с помощью выводных устройств ЭВМ допускается треугольник, обозначающий базу, не зачернять.

Треугольник, обозначающий базу, должен быть равносторонним, высотой, приблизительно равной размеру шрифта размерных чисел.

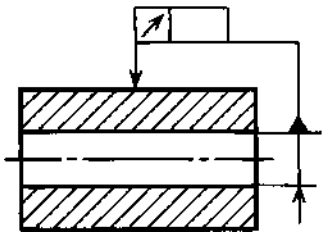
3.2. Если базой является поверхность или ее профиль, то основание треугольника располагают на контурной линии поверхности (черт. 19*а*) или на ее продолжении (черт. 19*б*). При этом соединительная линия не должна быть продолжением размерной линии.



Черт. 19

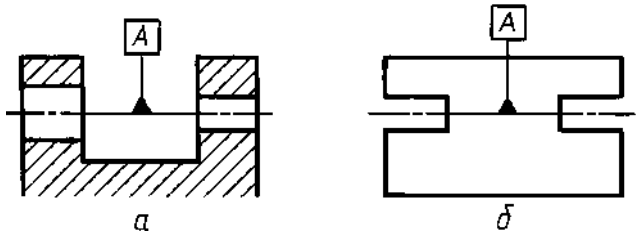
3.3. Если базой является ось или плоскость симметрии, то треугольник располагают на конце размерной линии (черт. 18).

В случае недостатка места стрелку размерной линии допускается заменять треугольником, обозначающим базу (черт. 20).



Черт. 20

Если базой является общая ось (черт. 21*а*) или плоскость симметрии (черт. 21*б*) и из чертежа ясно, для каких поверхностей ось (плоскость симметрии) является общей, то треугольник располагают на оси.

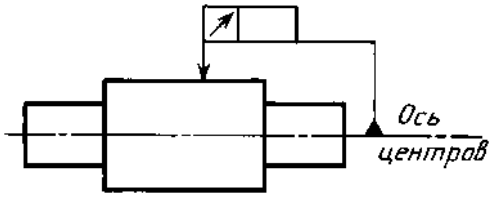


Черт. 21

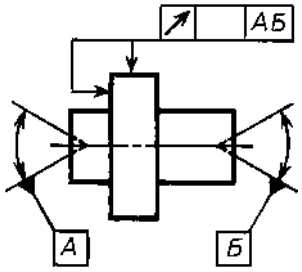
(Измененная редакция, Изм. № 1).

3.4. Если базой является ось центровых отверстий, то рядом с обозначением базовой оси делают надпись «Ось центров» (черт. 22).

Допускается обозначать базовую ось центровых отверстий в соответствии с черт. 23.



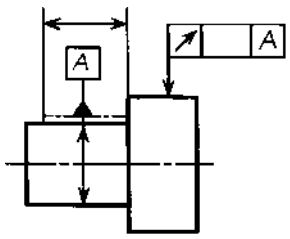
Черт. 22



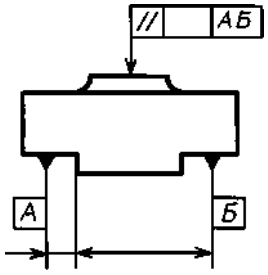
Черт. 23

3.5. Если базой является определенная часть элемента, то ее обозначают штрихпунктирной линией и ограничивают размерами в соответствии с черт. 24.

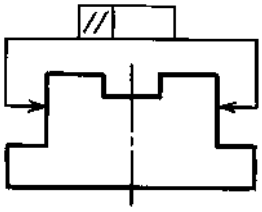
Если базой является определенное место элемента, то оно должно быть определено размерами согласно черт. 25.



Черт. 24



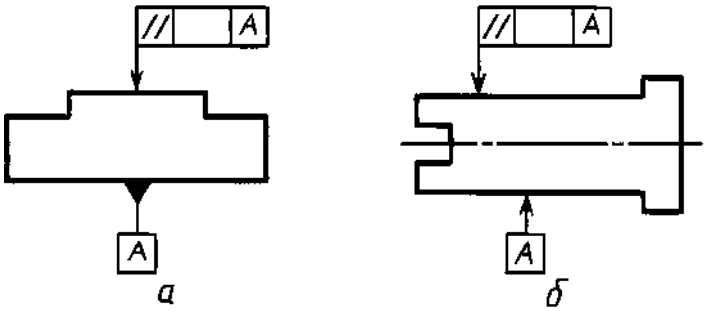
Черт. 25



Черт. 26

3.6. Если нет необходимости выделять как базу ни одну из поверхностей, то треугольник заменяют стрелкой (черт. 26).

3.7. Если соединение рамки с базой или другой поверхностью, к которой относится отклонение расположения, затруднительно, то поверхность обозначают прописной буквой, вписываемой в третью часть рамки. Эту же букву вписывают в рамку, которую соединяют с обозначаемой поверхностью линией, заканчивающейся треугольником, если обозначают базу (черт. 27*а*), или стрелкой, если обозначаемая поверхность не является базой (черт. 27*б*). При этом букву следует располагать параллельно основной надписи.

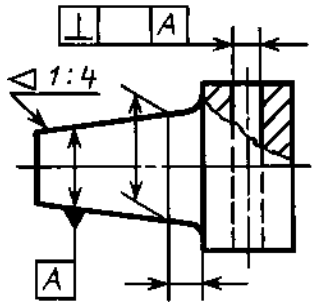


Черт. 27

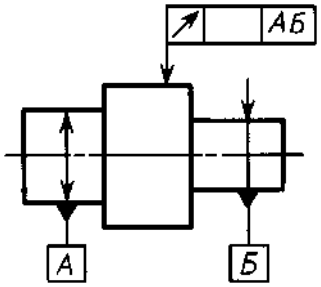
3.8. Если размер элемента уже указан один раз, то на других размерных линиях данного элемента, используемых для условного обозначения базы, его не указывают. Размерную линию без размера следует рассматривать как составную часть условного обозначения базы (черт. 28).

3.9. Если два или несколько элементов образуют объединенную базу и их последовательность не имеет значения (например, они имеют общую ось или плоскость симметрии), то каждый элемент обозначают самостоятельно и все буквы вписывают подряд в третью часть рамки (черт. 25, 29).

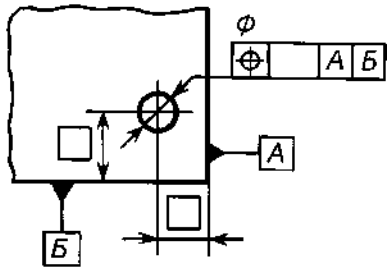
3.10. Если необходимо задать допуск расположения относительно комплекта баз, то буквенные обозначения баз указывают в самостоятельных частях (третьей и далее) рамки. В этом случае базы записывают в порядке убывания числа степеней свободы, лишаемых ими (черт. 30).



Черт. 28



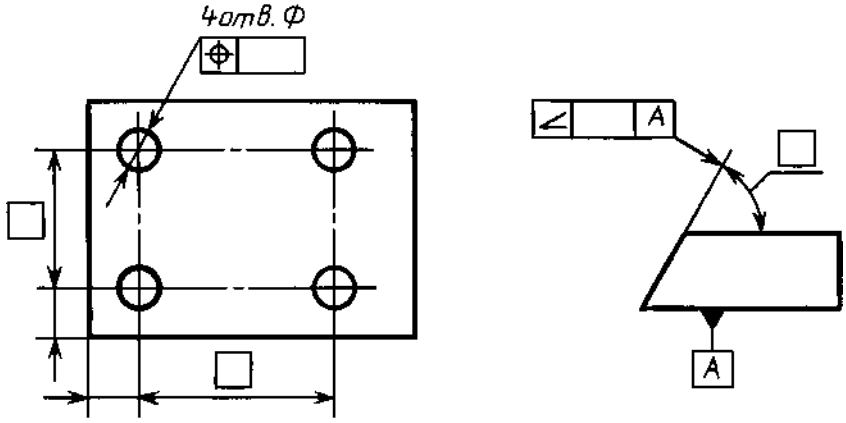
Черт. 29



Черт. 30

4. УКАЗАНИЯ НОМИНАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ

4.1. Линейные и угловые размеры, определяющие номинальное расположение и (или) номинальную форму элементов, ограничиваемых допуском, при назначении позиционного допуска, допуска наклона, допуска формы заданной поверхности или заданного профиля, указывают на чертежах без предельных отклонений и заключают в прямоугольные рамки (черт. 31).



Черт. 31

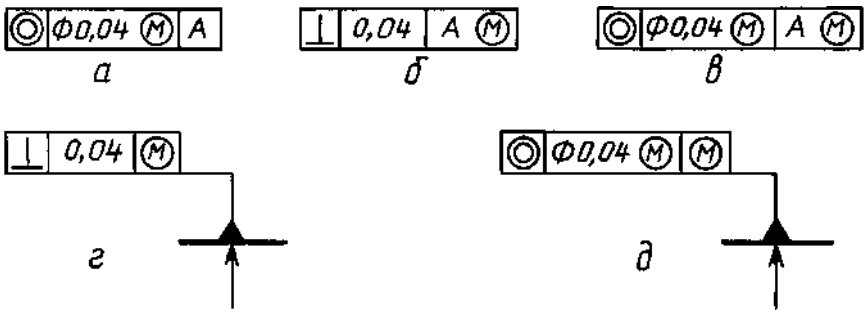
5. ОБОЗНАЧЕНИЕ ЗАВИСИМЫХ ДОПУСКОВ

5.1. Зависимые допуски формы и расположения обозначают условным знаком Ⓜ, который помещают:

после числового значения допуска, если зависимый допуск связан с действительными размерами рассматриваемого элемента (черт. 32*а*);

после буквенного обозначения базы (черт. 32*б*) или без буквенного обозначения в третьей части рамки (черт. 32*г*), если зависимый допуск связан с действительными размерами базового элемента;

после числового значения допуска и буквенного обозначения базы (черт. 32*в*) или без буквенного обозначения (черт. 32*д*), если зависимый допуск связан с действительными размерами рассматриваемого и базового элементов.

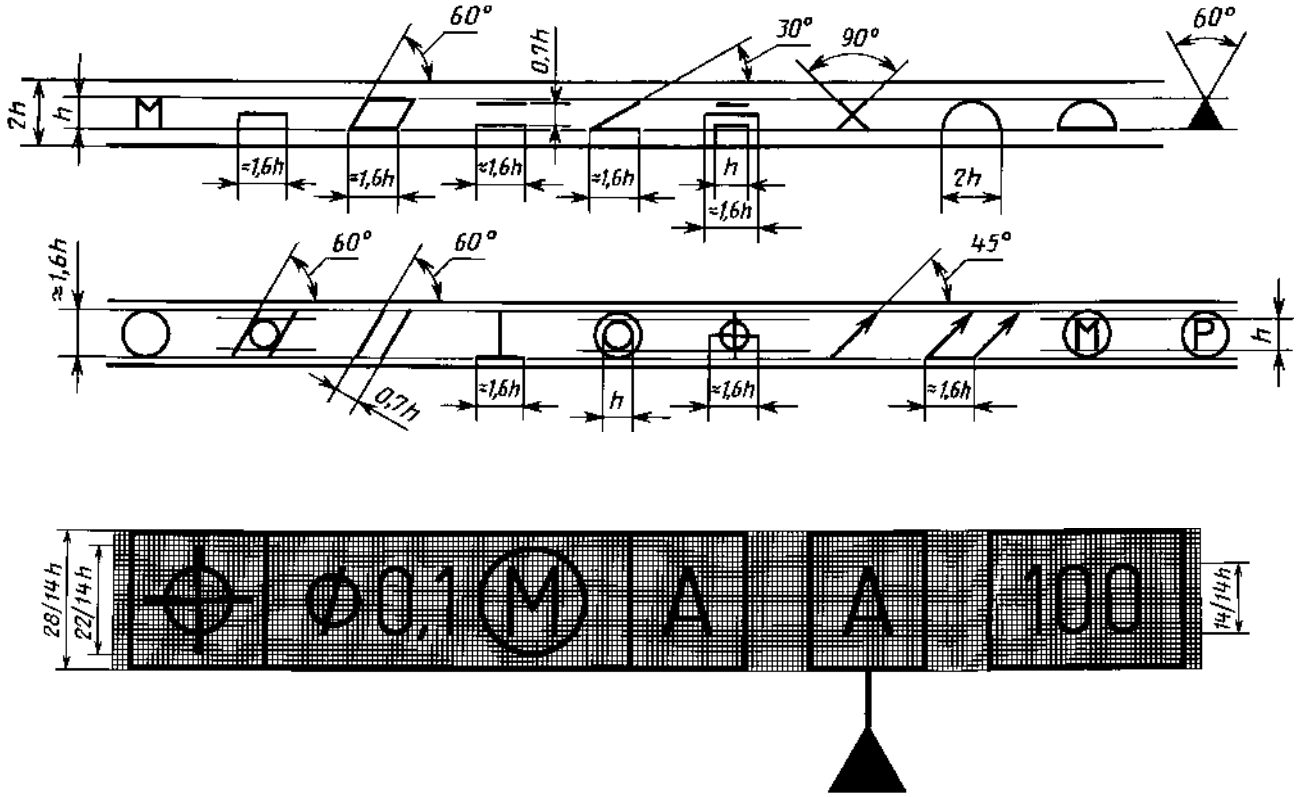


Черт. 32

5.2. Если допуск расположения или формы не указан как зависимый, то его считают независимым.

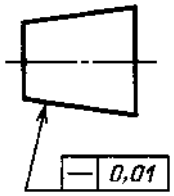
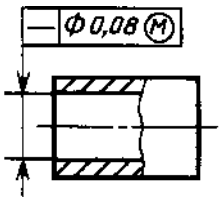
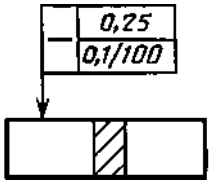
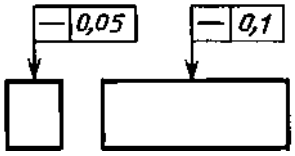
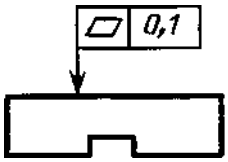
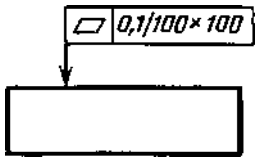
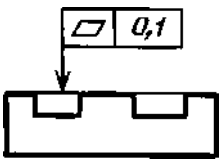
ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Обязательное

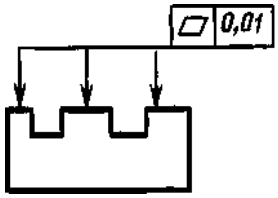
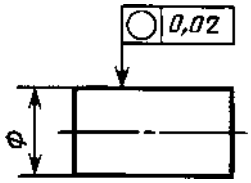
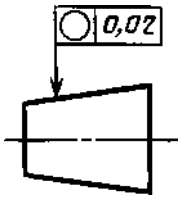
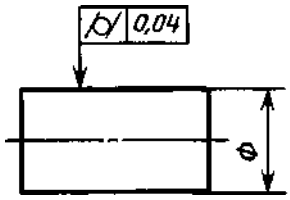
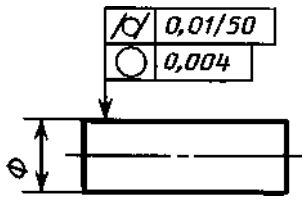
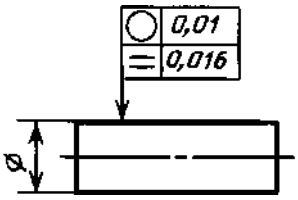
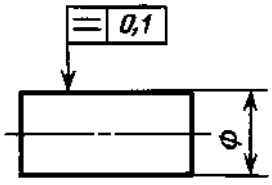
ФОРМА И РАЗМЕРЫ ЗНАКОВ

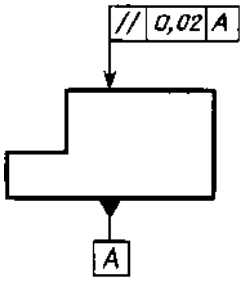
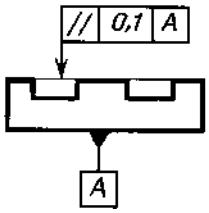
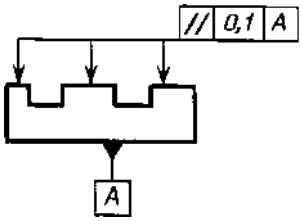
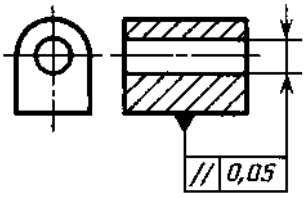
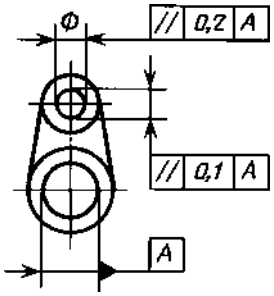
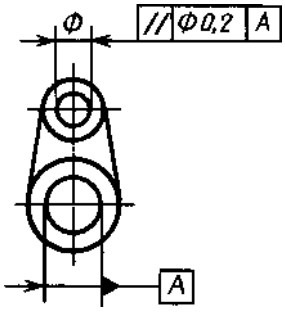


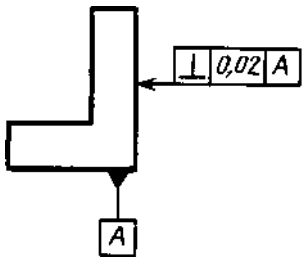
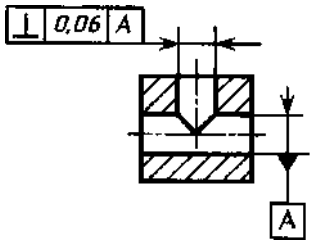
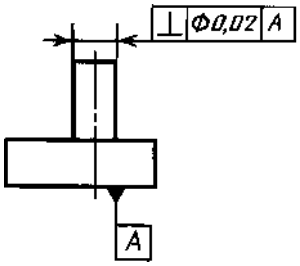
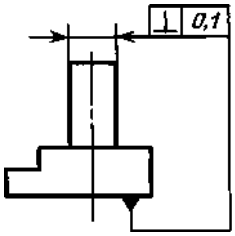
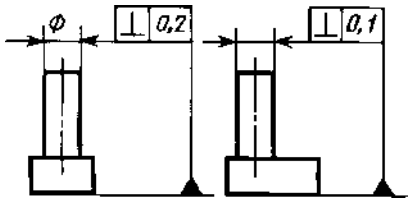
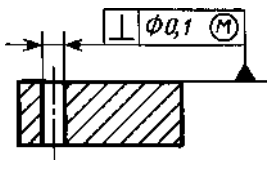
ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

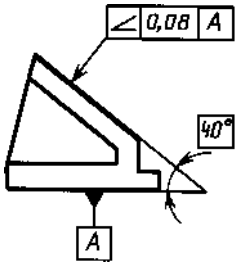
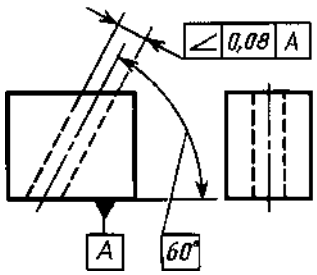
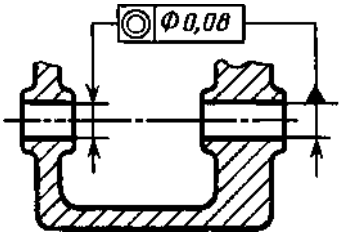
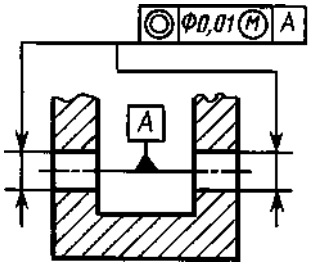
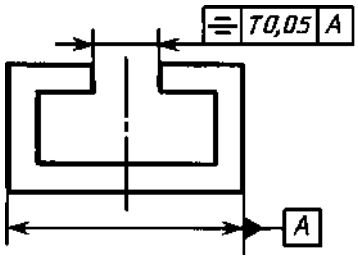
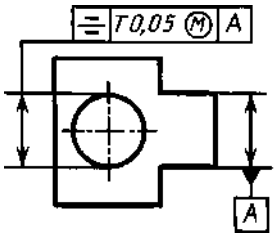
ПРИМЕРЫ УКАЗАНИЯ НА ЧЕРТЕЖАХ ДОПУСКОВ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

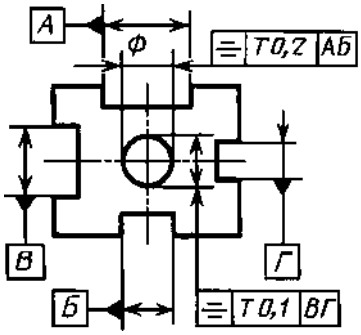
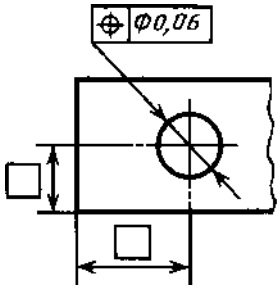
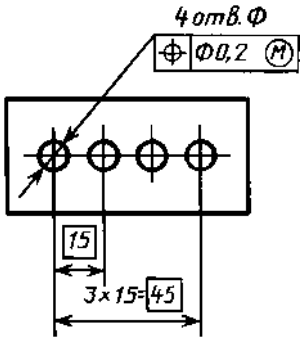
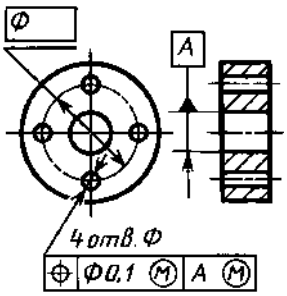
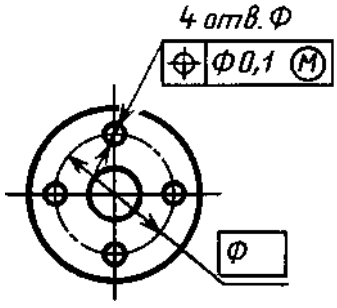
Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
1. Допуск прямолинейности		Допуск прямолинейности образующей конуса 0,01 мм
		Допуск прямолинейности оси отверстия ∅ 0,08 мм (допуск зависимый)
		Допуск прямолинейности поверхности 0,25 мм на всей длине и 0,1 мм на длине 100 мм.
		Допуск прямолинейности поверхности в поперечном направлении 0,05 мм, в продольном направлении 0,1 мм.
2. Допуск плоскостности		Допуск плоскостности поверхности 0,1 мм.
		Допуск плоскостности поверхности 0,1 мм на площади 100 × 100 мм.
		Допуск плоскостности поверхностей относительно общей прилегающей плоскости 0,1 мм.

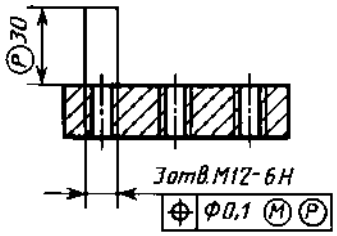
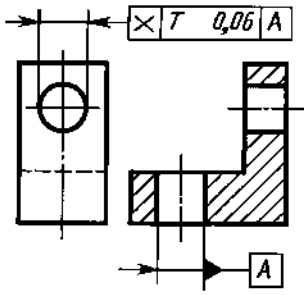
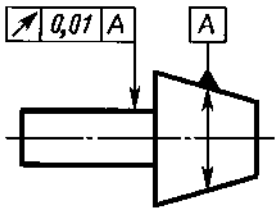
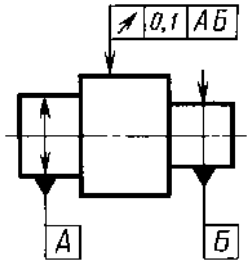
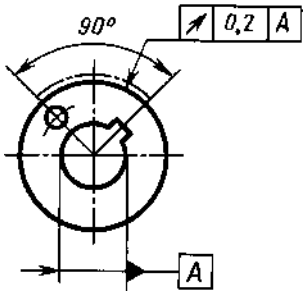
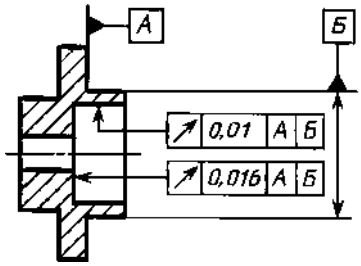
Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
		Допуск плоскостности каждой поверхности 0,01 мм.
3. Допуск круглости		Допуск круглости вала 0,02 мм.
		Допуск круглости конуса 0,02 мм.
4. Допуск цилиндричности		Допуск цилиндричности вала 0,04 мм.
		Допуск цилиндричности вала 0,01 мм на длине 50 мм. Допуск круглости вала 0,004 мм.
5. Допуск профиля продольного сечения		Допуск круглости вала 0,01 мм. Допуск профиля продольного сечения вала 0,016 мм.
		Допуск профиля продольного сечения вала 0,1 мм.

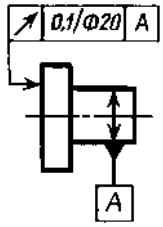
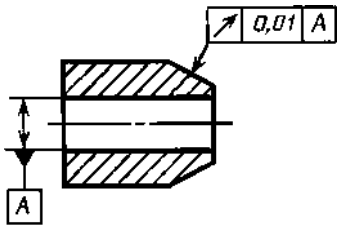
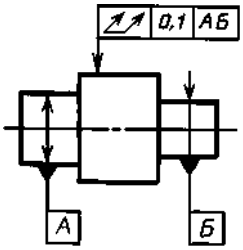
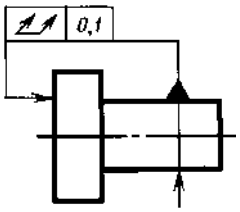
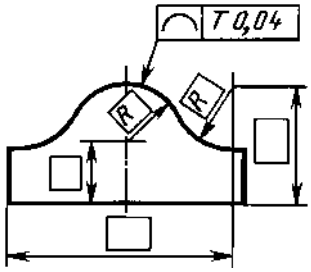
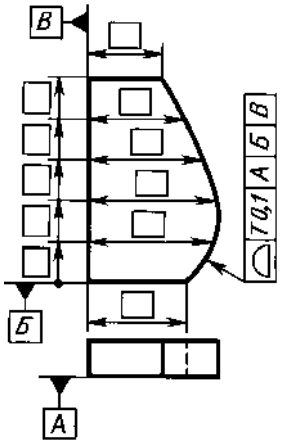
Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
6. Допуск параллельности		Допуск параллельности поверхности относительно поверхности *А* 0,02 мм.
		Допуск параллельности общей прилегающей плоскости поверхностей относительно поверхности *А* 0,1 мм.
		Допуск параллельности каждой поверхности относительно поверхности *А* 0,1 мм.
		Допуск параллельности оси отверстия относительно основания 0,05 мм.
		Допуск параллельности осей отверстий в общей плоскости 0,1 мм. Допуск перекоса осей отверстий 0,2 мм. База — ось отверстия *А*.
		Допуск параллельности оси отверстия относительно оси отверстия *А*∅0,2 мм

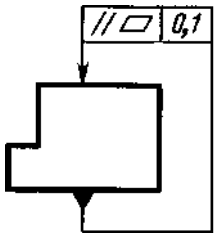
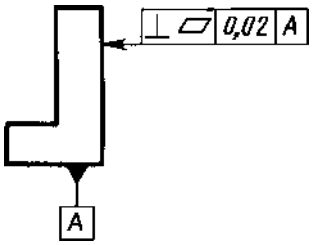
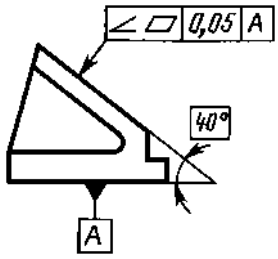
Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
7. Допуск перпендикулярности		Допуск перпендикулярности поверхности относительно поверхности *А* 0,02 мм.
		Допуск перпендикулярности оси отверстия относительно оси отверстия *А* 0,06 мм.
		Допуск перпендикулярности оси выступа относительно поверхности *А*∅0,02 мм.
		Допуск перпендикулярности оси выступа относительно основания 0,1 мм.
		Допуск перпендикулярности оси выступа в поперечном направлении 0,2 мм, в продольном направлении 0,1 мм. База — основание
		Допуск перпендикулярности оси отверстия относительно поверхности ∅0,1 мм (допуск зависимый).

Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
8. Допуск наклона		Допуск наклона поверхности относительно поверхности *А* 0,08 мм.
		Допуск наклона оси отверстия относительно поверхности *А* 0,08 мм.
9. Допуск соосности		Допуск соосности отверстия относительно отверстия ∅0,08 мм.
		Допуск соосности двух отверстий относительно их общей оси ∅0,01 мм (допуск зависимый).
10. Допуск симметричности		Допуск симметричности паза *Т* 0,05 мм. База — плоскость симметрии поверхностей *А*.
		Допуск симметричности отверстия *Т* 0,05 мм (допуск зависимый). База — плоскость симметрии поверхностей *А*.

Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
		Допуск симметричности оси отверстия относительно общей плоскости симметрии пазов *АБ* *Т* 0,2 мм и относительно общей плоскости симметрии пазов *ВГ* *Т* 0,1 мм.
11. Позиционный допуск		Позиционный допуск оси отверстия ∅0,06 мм.
		Позиционный допуск осей отверстий ∅0,2 мм (допуск зависимый).
		Позиционный допуск осей 4-х отверстий ∅0,1 мм (допуск зависимый). База — ось отверстия *А* (допуск зависимый).
		Позиционный допуск 4-х отверстий ∅0,1 мм (допуск зависимый).

Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
		Позиционный допуск 3-х резьбовых отверстий ∅0,1 мм (допуск зависимый) на участке, расположенном вне детали и выступающем на 30 мм от поверхности.
12. Допуск пересечения осей		Допуск пересечения осей отверстий *Т* 0,06 мм
13. Допуск радиального биения		Допуск радиального биения вала относительно оси конуса 0,01 мм.
		Допуск радиального биения поверхности относительно общей оси поверхностей *А* и *Б* 0,1 мм.
		Допуск радиального биения участка поверхности относительно оси отверстия *А* 0,2 мм
		Допуск радиального биения отверстия 0,01 мм. Первая база — поверхность *А*. Вторая база — ось поверхности *Б*. Допуск торцового биения относительно тех же баз 0,016 мм.

Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
14. Допуск торцового биения		Допуск торцового биения на диаметре 20 мм относительно оси поверхности *А* 0,1 мм.
15. Допуск биения в заданном направлении		Допуск биения конуса относительно оси отверстия *А* в направлении, перпендикулярном к образующей конуса 0,01 мм.
16. Допуск полного радиального биения		Допуск полного радиального биения относительно общей оси поверхностей *А* и *Б* 0,1 мм.
17. Допуск полного торцового биения		Допуск полного торцового биения поверхности относительно оси поверхности 0,1 мм.
18. Допуск формы заданного профиля		Допуск формы заданного профиля *Т* 0,04 мм.
19. Допуск формы заданной поверхности		Допуск формы заданной поверхности относительно поверхностей *А*, *Б*, *В*, *Т* 0,1 мм.

Вид допуска	Указания допусков формы и расположения условным обозначением	Пояснение
20. Суммарный допуск параллельности и плоскостности		Суммарный допуск параллельности и плоскостности поверхности относительно основания 0,1 мм.
21. Суммарный допуск перпендикулярности и плоскостности		Суммарный допуск перпендикулярности и плоскостности поверхности относительно основания 0,02 мм.
22. Суммарный допуск наклона и плоскостности		Суммарный допуск наклона и плоскостности поверхности относительно основания 0,05 мм.

Примечания:

1. В приведенных примерах допуски соосности, симметричности, позиционные, пересечения осей, формы заданного профиля и заданной поверхности указаны в диаметральном выражении.

Допускается указывать их в радиусном выражении, например:

В ранее выпущенной документации допуски соосности, симметричности, смещения осей от номинального расположения (позиционного допуска), обозначенные соответственно знаками ⌐ ; ÷ ; + или текстом в технических требованиях, следует понимать как допуски в радиусном выражении.

2. Указание допусков формы и расположения поверхностей в текстовых документах или в технических требованиях чертежа следует приводить по аналогии с текстом пояснений к условным обозначениям допусков формы и расположения, приведенным в настоящем приложении.

При этом поверхности, к которым относятся допуски формы и расположения или которые приняты за базу, следует обозначать буквами или приводить их конструкторские наименования.

Допускается вместо слов «допуск зависимый» указывать знак Ⓜ и вместо указаний перед числовым значением символа ∅; *R*; *T*; *T/2* запись текстом, например, «позиционный допуск оси 0,1 мм в диаметральном выражении» или «допуск симметричности 0,12 мм в радиусном выражении».

3. Во вновь разрабатываемой документации запись в технических требованиях о допусках овальности, конусообразности, бочкообразности и седлообразности должна быть, например, следующей: «Допуск овальности поверхности *A* 0,2 мм (полуразность диаметров)».

В технической документации, разработанной до 1 января 1980 г., предельные значения овальности, конусообразности, бочкообразности и седлообразности определяют как разность наибольшего и наименьшего диаметров.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

УДК 744:62-408.8:003.62:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ОБОЗНАЧЕНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Designations system for design documentation.
Designations of surface finish

ГОСТ 2.309—73*

Взамен ГОСТ 2.309—68

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 9 ноября 1973 г. № 2604 срок введения установлен

с 01.01.75

Настоящий стандарт устанавливает обозначения шероховатости поверхностей и правила нанесения их на чертежах изделий всех отраслей промышленности.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 1632—79 и стандарту ИСО 1302—78.

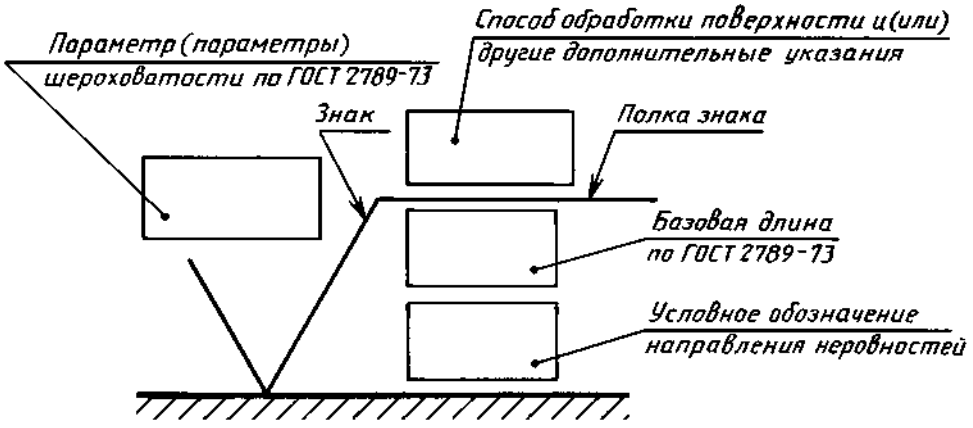
(Измененная редакция, Изм. № 1).

1. ОБОЗНАЧЕНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.1. Шероховатость поверхностей обозначают на чертеже для всех выполняемых по данному чертежу поверхностей изделия, независимо от методов их образования, кроме поверхностей, шероховатость которых не обусловлена требованиями конструкции.

1.2. Структура обозначения шероховатости поверхности приведена на черт. 1.

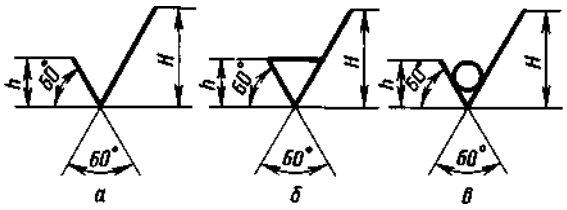
При наличии в обозначении шероховатости только значения параметра (параметров) применяют знак без полки.



Черт.1

1.3. В обозначении шероховатости поверхности применяют один из знаков, изображенных на черт. 2.

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1,2,утвержденными в июне 1980 г.,августе 1984 г. (ИУС 11—80,12—84)*



Черт.2

Высота *h* должна быть приблизительно равна применяемой на чертеже высоте цифр размерных чисел. Высота *H* равна (1,5. . .3) *h*. Толщина линий знаков должна быть приблизительно равна половине толщины сплошной основной линии, применяемой на чертеже.

В обозначении шероховатости поверхности, способ обработки которой конструктором не устанавливается, применяют знак $\sqrt{}$ (черт. 2*а*).

В обозначении шероховатости поверхности, которая должна быть образована только удалением слоя материала, применяют знак $\sqrt{}$ (черт. 2*б*).

В обозначении шероховатости поверхности, которая должна быть образована без удаления слоя материала, применяют знак $\sqrt{}$ (черт. 2*в*) с указанием значения параметра шероховатости.

1.4. Поверхности детали, изготовляемой из материала определенного профиля и размера, не подлежащие по данному чертежу дополнительной обработке, должны быть отмечены знаком $\sqrt{}$ без указания параметра шероховатости.

Состояние поверхности, обозначенной знаком $\sqrt{}$, должно соответствовать требованиям, установленным соответствующим стандартом или техническими условиями, или другим документом, причем на этот документ должна быть приведена ссылка, например, в виде указания сортамента материала в графе *3* основной надписи чертежа по ГОСТ 2.104—68.

1.5. Значение параметра шероховатости по ГОСТ 2789—73 указывают в обозначении шероховатости:

для параметра *Ra* — без символа, например, 0,4:

для остальных параметров — после соответствующего символа, например: *Rmax* 6,3; *Sm* 0,63; t_{50} 70; *S* 0,032; *Rz* 50.

Примечание. В примере t_{50} 70 указана относительная опорная длина профиля $t_p = 70$ % при уровне сечения профиля $p = 50$ %.

1.2—1.5. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

1.5а. При указании наибольшего значения параметра шероховатости в обозначении приводят параметр шероховатости без предельных отклонений, например: $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{Rz\,50}$.

1.5б. При указании наименьшего значения параметра шероховатости после обозначения параметра следует указывать «min», например: $\sqrt{3{,}2\,min}$; $\sqrt{Rz\,50\,min}$.

1.5а, 1.5б. **(Введены дополнительно, Изм. № 2).**

1.6. При указании диапазона значений параметра шероховатости поверхности в обозначении шероховатости приводят пределы значений параметра, размещая их в две строки, например:

$\begin{matrix}0{,}8\\0{,}4\end{matrix}$; $\begin{matrix}Rz\ 0{,}10\\0{,}05\end{matrix}$; $\begin{matrix}Rmax\ 0{,}80\\0{,}32\end{matrix}$; $\begin{matrix}t_{50}\ 70\\50\end{matrix}$ и т. п.

В верхней строке приводят значение параметра, соответствующее более грубой шероховатости.

1.7. При указании номинального значения параметра шероховатости поверхности в обозначении приводят это значение с предельными отклонениями по ГОСТ 2789—73, например:

$1 + 20$ %; $Rz\ 100_{-10\ \%}$; $Sm\ 0{,}63^{+20\ \%}$; $t_{50}\ 70 \pm 40$ % и т. п.

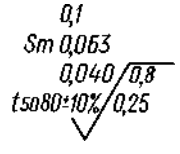
1.6, 1.7. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

1.8. При указании двух и более параметров шероховатости поверхности в обозначении шероховатости значения параметров записывают сверху вниз в следующем порядке (см. черт. 3):

параметр высоты неровностей профиля,

параметр шага неровностей профиля,

относительная опорная длина профиля.

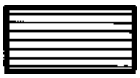
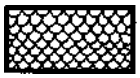
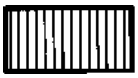
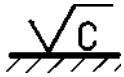
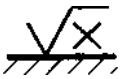
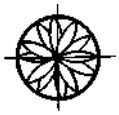


Черт.3

1.9. При нормировании требований к шероховатости поверхности параметрами *Ra*, *Rz*, *Rmax* базовую длину в обозначении шероховатости не приводят, если она соответствует указанной в приложении 1 ГОСТ 2789—73 для выбранного значения параметра шероховатости.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.10. Условные обозначения направления неровностей должны соответствовать приведенным в таблице. Условные обозначения направления неровностей приводят на чертеже при необходимости.

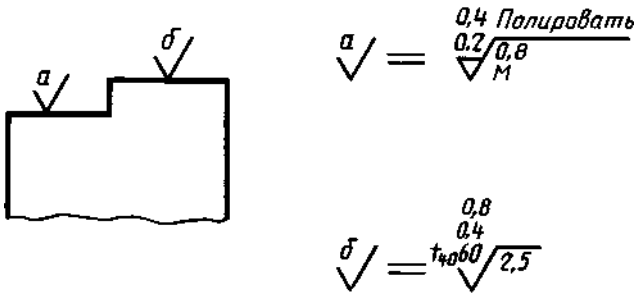
Типы направления неровностей	Обозначение	Типы направления неровностей	Обозначение
			
			
			

Высота знака условного обозначения направления неровностей должна быть приблизительно равна *h*. Толщина линий знака должна быть приблизительно равна половине толщины сплошной основной линии.

1.11. Вид обработки поверхности указывают в обозначении шероховатости только в случаях, когда он является единственным, применимым для получения требуемого качества поверхности (черт. 4).

Черт.4

1.12. Допускается применять упрощенное обозначение шероховатости поверхностей с разъяснением его в технических требованиях чертежа по примеру, указанному на черт. 5.

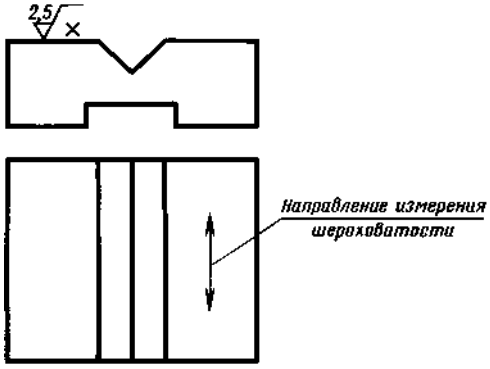


Черт.5

В упрощенном обозначении используют знак $\sqrt{}$ и строчные буквы русского алфавита в алфавитном порядке, без повторений и, как правило, без пропусков.

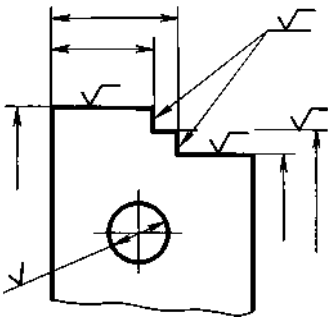
(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.13. Если направление измерения шероховатости должно отличаться от предусмотренного ГОСТ 2789—73, его указывают на чертеже по примеру, приведенному на черт. 6.



Черт.6

2. ПРАВИЛА НАНЕСЕНИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ЧЕРТЕЖАХ



Черт.7

2.1. Обозначения шероховатости поверхностей на изображении изделия располагают на линиях контура, выносных линиях (по возможности ближе к размерной линии) или на полках линий-выносок.

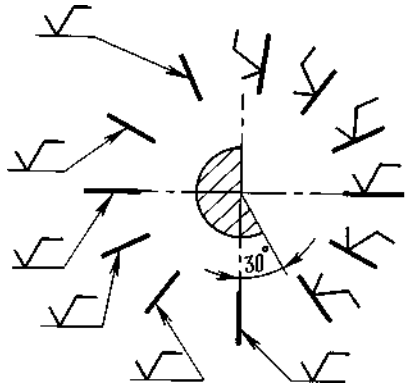
Допускается при недостатке места располагать обозначения шероховатости на размерных линиях или на их продолжениях, а также разрывать выносную линию (черт. 7).

2.2. На линии невидимого контура допускается наносить обозначение шероховатости только в случаях, когда от этой линии нанесен размер.

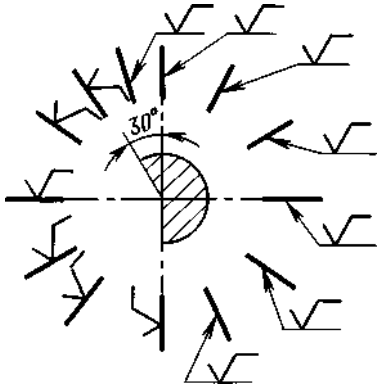
2.3. Обозначения шероховатости поверхности, в которых знак имеет полку, располагают относительно основной надписи чертежа так, как показано на черт. 8 и 9.

2.4. Обозначения шероховатости поверхности, в которых знак не имеет полки, располагают относительно основной надписи чертежа так, как показано на черт. 10.

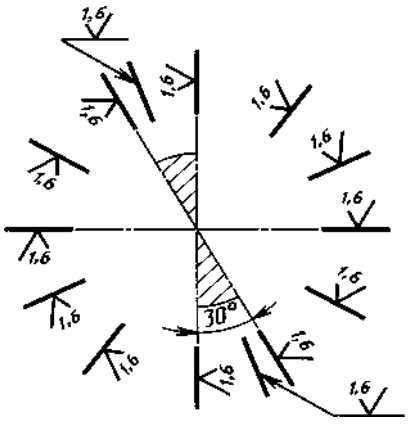
2.5. При изображении изделия с разрывом обозначение шероховатости наносят только на одной части изображения, по возможности ближе к месту указания размеров (черт. 11).



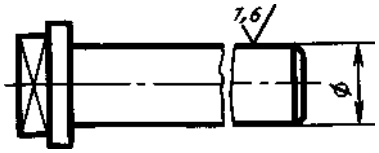
Черт.8



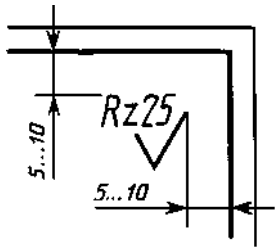
Черт.9



Черт.10



Черт.11



Черт.12

2.6. При указании одинаковой шероховатости для всех поверхностей изделия обозначение шероховатости помещают в правом верхнем углу чертежа и на изображении не наносят (черт. 12).

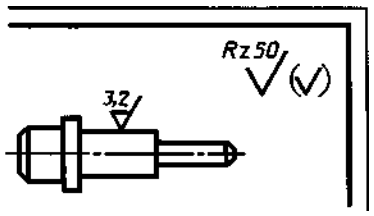
Размеры и толщина линий знака в обозначении шероховатости, вынесенном в правый верхний угол чертежа, должны быть приблизительно в 1,5 раза больше, чем в обозначениях, нанесенных на изображении.

П р и м е ч а н и е. При расположении поверхности в заштрихованной зоне обозначение наносят только на полке линии-выноски.

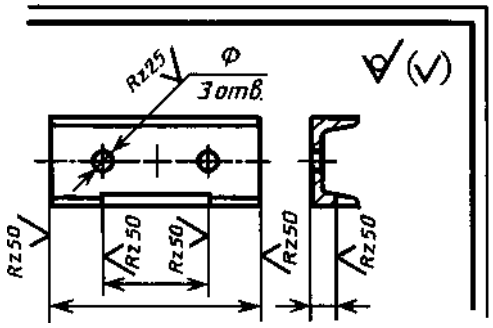
2.7. Обозначение шероховатости, одинаковой для части поверхностей изделия, может быть помещено в правом верхнем углу чертежа (черт. 13, 14) вместе с условным обозначением $(\surd)$. Это означает, что все поверхности, на которых на изображении не нанесены обозначения шероховатости или знак $\surd$, должны иметь шероховатость, указанную перед условным обозначением $(\surd)$.

Размеры знака, взятого в скобки, должны быть одинаковыми с размерами знаков, нанесенных на изображении.

П р и м е ч а н и е . Не допускается обозначение шероховатости или знак $\surd$ выносить в правый верхний угол чертежа при наличии в изделии поверхностей, шероховатость которых не нормируется.



Черт.13

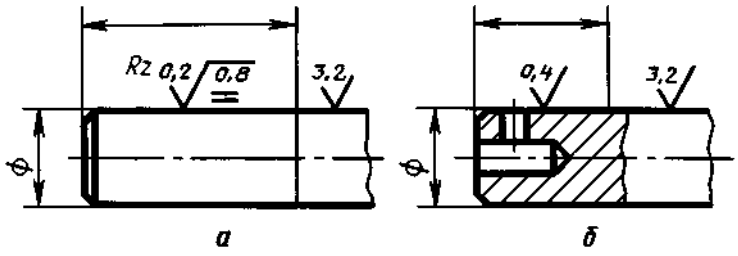


Черт.14

2.8. Обозначение шероховатости поверхностей повторяющихся элементов изделия (отверстий, пазов, зубьев и т. п.), количество которых указано на чертеже, а также обозначение шероховатости одной и той же поверхности наносят один раз, независимо от числа изображений.

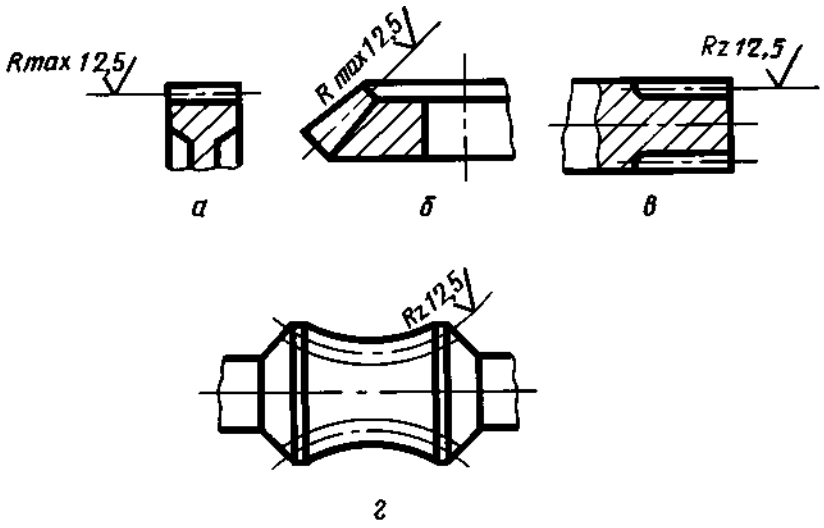
Обозначения шероховатости симметрично расположенных элементов симметричных изделий наносят один раз.

2.9. Если шероховатость одной и той же поверхности различна на отдельных участках, то эти участки разграничивают сплошной тонкой линией с нанесением соответствующих размеров и обозначений шероховатости (черт. 15*а*). Через заштрихованную зону линию границы между участками не проводят (черт. 15*б*).



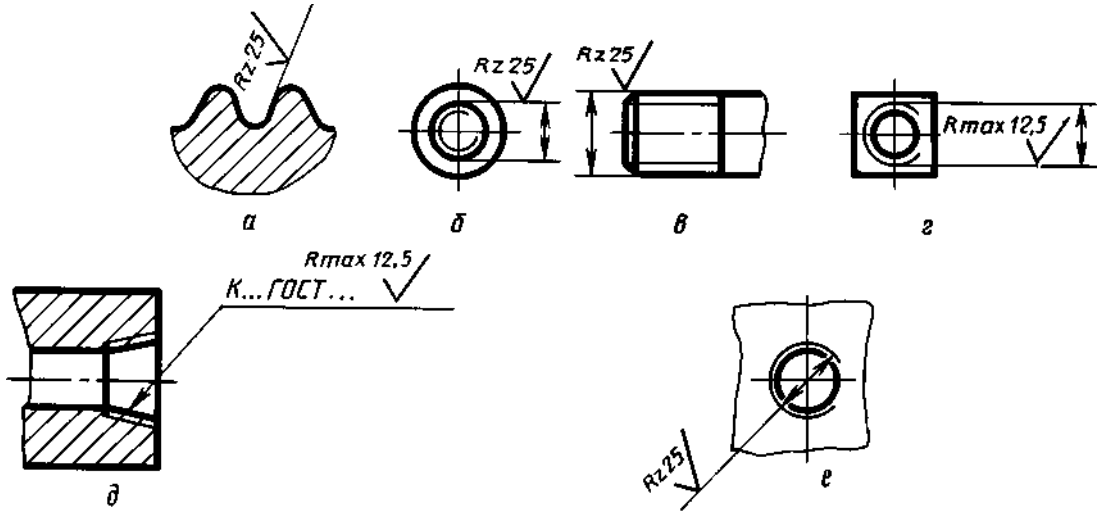
Черт.15

2.10. Обозначение шероховатости рабочих поверхностей зубьев зубчатых колес, эвольвентных шлицев и т. п., если на чертеже не приведен их профиль, условно наносят на линии делительной поверхности (черт. 16*а, б, в*), а для глобоидных червяков и сопряженных с ними колес — на линии расчетной окружности (черт. 16*г*).



Черт.16

2.11. Обозначение шероховатости поверхности профиля резьбы наносят по общим правилам при изображении профиля (черт. 17*а*) или условно на выносной линии для указания размера резьбы (черт. 17*б, в, г, д*), на размерной линии или на ее продолжении (черт. 17*е*).



Черт.17

2.4—2.11. **(Измененная редакция, Изм. № 2).**

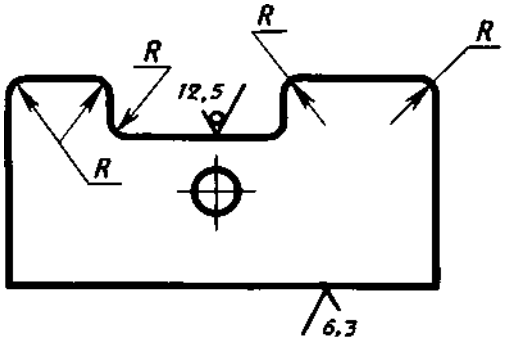
2.12. Если шероховатость поверхностей, образующих контур, должна быть одинаковой, обозначение шероховатости наносят один раз в соответствии с черт. 18*а, б*. Диаметр вспомогательного знака ○ — 4 . . . 5 мм.

В обозначении одинаковой шероховатости поверхностей, плавно переходящих одна в другую, знак ○ не приводят (черт. 19).

а) для знака с полкой

б) для знака без полки

Черт.18

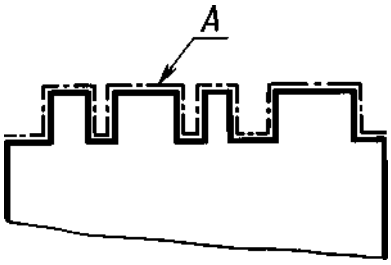


Черт.19

(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

2.13. Обозначение одинаковой шероховатости поверхности сложной конфигурации допускается приводить в технических требованиях чертежа со ссылкой на буквенное обозначение поверхности, например: «шероховатость поверхности А – $\overset{1,6}{\nabla}$ ». При этом буквенное обозначение поверхности наносят на полке линии-выноски, проведенной от утолщенной штрихпунктирной линии, которой обводят поверхность на расстоянии 0,8 . . . 1 мм от линии контура (черт. 20).

(Измененная редакция, Изм. № 2).



Черт.20

ИЗМЕНЕНИЯ, ВНЕСЕННЫЕ В МЕЖГОСУДАРСТВЕННЫЕ СТАНДАРТЫ

01 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ТЕРМИНОЛОГИЯ. СТАНДАРТИЗАЦИЯ. ДОКУМЕНТАЦИЯ

МКС 01.080.30
Группа Т52

Изменение № 3 ГОСТ 2.309—73 Единая система конструкторской документации. Обозначения шероховатости поверхностей

Принято Межгосударственным советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 21 от 28.05.2002)

Зарегистрировано Бюро по стандартам МГС № 4180

За принятие изменения проголосовали национальные органы по стандартизации следующих государств: AM, BY, KZ, KG, MD, RU, TJ, UZ, UA [коды альфа-2 по МК (ИСО 3166) 004]

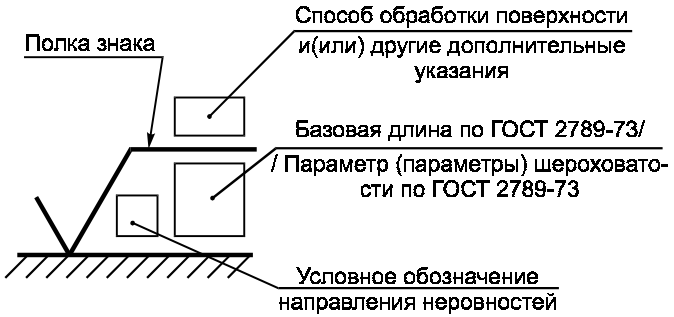
Вводная часть. Второй абзац изложить в новой редакции:

«Стандарт полностью соответствует стандарту ИСО 1302».

Пункт 1.2. Второй абзац изложить в новой редакции:

«При применении знака без указания параметра и способа обработки его изображают без полки»;

чертеж 1 заменить новым:



Черт. 1

(Продолжение см. с. 6)

Пункт 1.3. Первый абзац. Заменить значение: (1,5 . . . 3) *h* на (1,5 . . . 5) *h*.

Пункт 1.5 после слов «в обозначении шероховатости» изложить в новой редакции (кроме примечания): «после соответствующего символа, например: *Ra* 0,4 ; *R*max 6,3; *Sm* 0,63; t_{50} 70; *S* 0,032; *Rz* 50».

Пункт 1.5а. Заменить обозначения шероховатости: 0,4 ; Rz 50 на Ra 0,4 ; Rz 50 .

Пункт 1.5б. Заменить обозначения шероховатости: 3,2min ; Rz 50min на Ra 3,2min ; Rz 50min .

Пункт 1.6. Заменить обозначение: $^{0,8}_{0,4}$ на *Ra* $^{0,8}_{0,4}$.

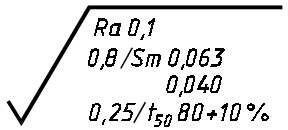
Пункт 1.7. Заменить обозначение: 1+20 % на *Ra* 1+20 %.

Пункт 1.8. Чертеж 3 заменить новым:

«параметр высоты неровностей профиля

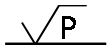
параметр шага неровностей профиля

относительная опорная длина профиля

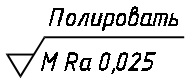


Черт. 3».

Пункт 1.10. Таблицу дополнить обозначением:

Типы направления неровностей	Обозначение
	

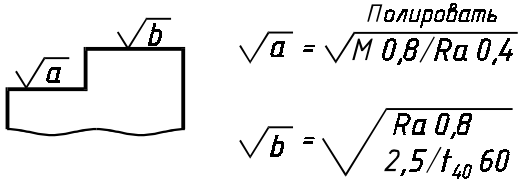
Пункт 1.11. Чертеж 4 заменить новым:



Черт. 4

(Продолжение см. с. 7)

Пункт 1.12. Чертеж 5 заменить новым:



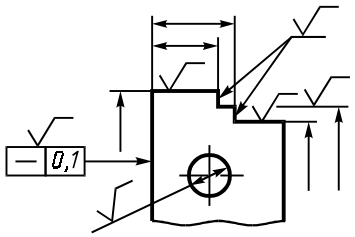
Черт. 5

Пункт 1.13. Чертеж 6. Заменить обозначение: 2,5 x на x Ra 2,5 .

Пункт 2.1. Второй абзац изложить в новой редакции:

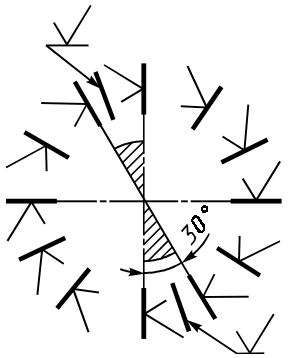
«Допускается при недостатке места располагать обозначение шероховатости на размерных линиях или на их продолжениях, на рамке допуска формы, а также разрывать выносную линию (черт. 7)»;

чертеж 7 заменить новым:



Черт. 7

Пункт 2.4. Чертеж 10 заменить новым:



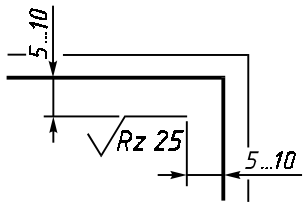
Черт. 10

(Продолжение см. с. 8)

Пункт 2.5. Чертеж 11. Заменить обозначение шероховатости:

1,6 на Ra 1,6 .

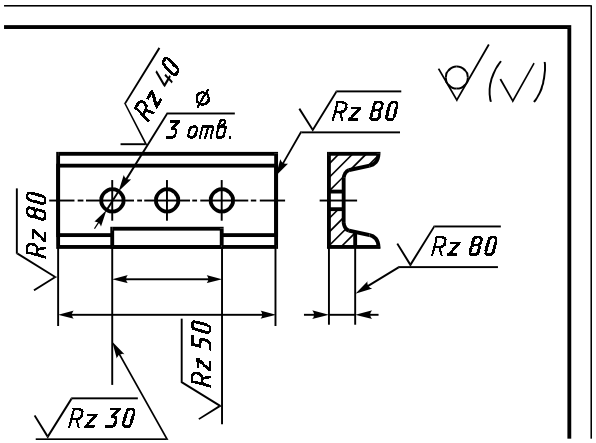
Пункт 2.6. Чертеж 12 заменить новым:



Черт. 12

Пункт 2.7. Чертеж 13. Заменить обозначение шероховатости: 3,2 на Ra 3,2 , Rz 50 (√) на Rz 50 (√) ;

чертеж 14 заменить новым:



Черт. 14

Пункт 2.9. Чертеж 15, а. Заменить обозначение шероховатости:

Rz 0,2 0,8 на =0,8/Rz 0,2 ; 3,2 на Ra 3,2 ;

(Продолжение см. с. 9)

0,4 на Ra 0,4 ; 3,2 на Ra 3,2 .

Пункт 2.10. Чертеж 16. Заменить обозначение шероховатости:

Rmax 12,5 на Rmax 12,5 (2 раза) ; Rz 12,5 на Rz 12,5 (2 раза) .

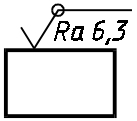
Пункт 2.11. Чертеж 17. Заменить обозначение шероховатости:

Rz 25 на Rz 25 (4 раза) ; Rmax 12,5 на Rmax 12,5 (2 раза) .

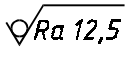
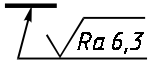
(Продолжение см. с. 10)

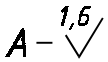
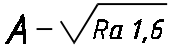
(Продолжение изменения № 3 к ГОСТ 2.309—73)

Пункт 2.12. Чертеж 18 заменить новым:



Черт. 18

чертеж 19. Заменить обозначение шероховатости: на  ; на  .

Пункт 2.13. Заменить обозначение:  на  .

(ИУС № 3 2003 г.)

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

НАНЕСЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖАХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ПОКРЫТИЙ, ТЕРМИЧЕСКОЙ И ДРУГИХ ВИДОВ ОБРАБОТКИ

ГОСТ 2.310—68

Unified system for design documentation.
Marking of designations of coverings, heat treatment and other types of treatment on engineering drawings

Дата введения 01.01.71

Настоящий стандарт устанавливает правила нанесения на чертежи изделий всех отраслей промышленности обозначений покрытий (защитных, декоративных, электроизоляционных, износоустойчивых и т. п.), а также показателей свойств материалов, получаемых в результате термической и других видов обработки (химико-термической, наклепа и т. п.).

(Измененная редакция, Изм. № 3).

1. ПРАВИЛА НАНЕСЕНИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ ПОКРЫТИЙ

1.1. Обозначение покрытия —по ГОСТ 9.306 и ГОСТ 9.032 или отраслевому стандарту или все данные, необходимые для выполнения нестандартизованного покрытия, приводят в технических требованиях чертежа после слова «Покрытие».

1.2. В технических требованиях чертежа после обозначения покрытия приводят данные о материалах покрытия (марку и обозначение стандарта или технических условий), указанных в обозначении.

1.1, 1.2. **(Измененная редакция, Изм. № 1).**

1.3. **(Исключен, Изм. № 1).**

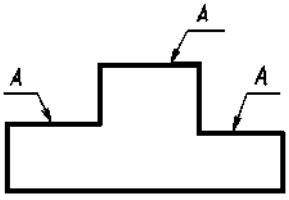
1.4. Если на все поверхности изделия должно быть нанесено одно и то же покрытие, то запись делают по типу: «Покрытие...».

1.5. Если должны быть нанесены покрытия на поверхности, которые можно обозначить буквами или однозначно определить (наружная или внутренняя поверхности и т. п.), то запись делают по типу: «Покрытие поверхностей *А* . . . »; «Покрытие наружных поверхностей . . . ».

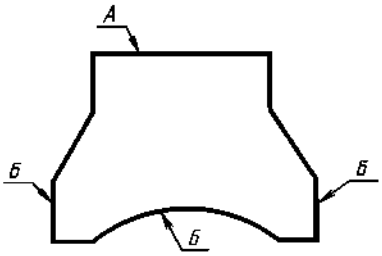
1.6. При нанесении одинакового покрытия на несколько поверхностей их обозначают одной буквой и запись делают по типу: «Покрытие поверхностей *А* . . . » (черт. 1).

1.7. При нанесении различных покрытий на несколько поверхностей изделия их обозначают разными буквами (черт. 2) и запись делают по типу: «Покрытие поверхности *А* . . . , поверхностей *Б* . . . ».

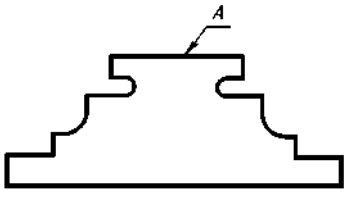
1.8. Если одно и то же покрытие наносят на большее количество поверхностей изделия, а на остальные поверхности наносят другое покрытие или их оставляют без покрытия, то последние обозначают буквами (черт. 3) и запись делают по типу: «Покрытие поверхности А... , остальных...» или «Покрытие... , кроме поверхности *А*».



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3

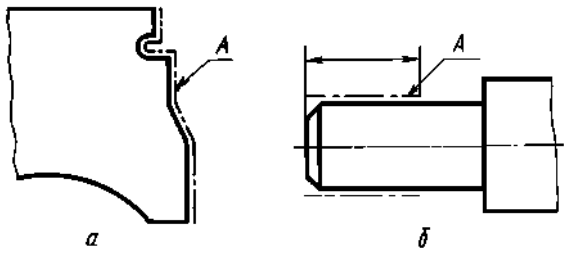
Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

1.9. Если необходимо нанести покрытие на поверхность сложной конфигурации или на часть поверхности, которую нельзя однозначно определить, то такие поверхности обводят штрихпунктирной утолщенной линией на расстоянии 0,8 ... 1 мм от контурной линии, обозначают их одной буквой и проставляют размеры, определяющие положение этих поверхностей; запись делают по типу: «Покрытие поверхности *А*...» (черт. 4).

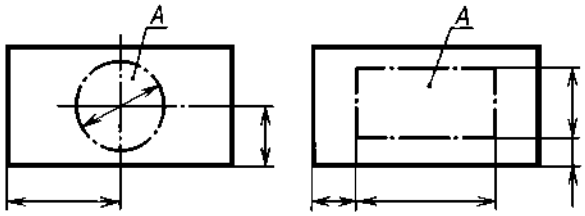
Размеры, определяющие положение поверхности, на которую должно быть нанесено покрытие, допускается не проставлять, если они ясны из чертежа (см. черт. 4*а*).

(Измененная редакция, Изм. № 2).

1.10. Участки поверхности, подлежащие покрытию, отмечают, как показано на черт. 5, с указанием размеров, определяющих положение этих участков.



Черт. 4



Черт. 5

2. ПРАВИЛА НАНЕСЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

2.1. На чертежах изделий, подвергаемых термической и другим видам обработки, указывают показатели свойств материалов, полученных в результате обработки, например: твердость (HRC, HRB, HRA, HB, HV), предел прочности ($\sigma_в$), предел упругости ($\sigma_у$), ударная вязкость ($a_к$) и т. п.

Глубину обработки обозначают буквой *h*.

Величины глубины обработки и твердости материалов на чертежах указывают предельными значениями: «от ... до», например: *h* 0,7 ... 0,9; 40 ... 46 HRC.

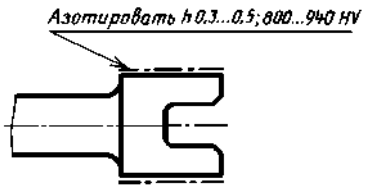
В технически обоснованных случаях допускается указывать номинальные значения этих величин с предельными отклонениями, например, *h* 0,8±0,1; (43±3) HRC.

Допускается указывать значения показателей свойств материалов со знаками ≥ или ≤, например: $\sigma_в \geq 1500$ кгс/см^2, твердость ≥ 780 HV и т. п.

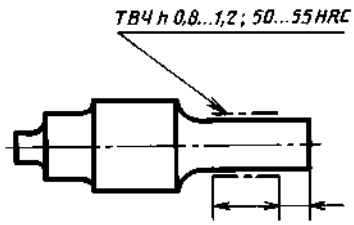
2.2. Допускается на чертежах указывать виды обработки, результаты которых не подвергаются контролю, например отжиг, а также виды обработки, если они являются единственными, гарантирующими требуемые свойства материала и долговечность изделия. В этих случаях наименование обработки указывают словами или условными сокращениями, принятыми в научно-технической литературе (черт. 6, 7).

2.1, 2.2. **(Измененная редакция, Изм. № 2, 4).**

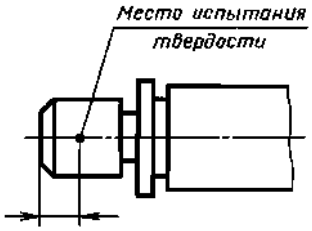
2.3. При необходимости в зоне требуемой твердости указывают место испытания твердости (черт. 8).



Черт. 6



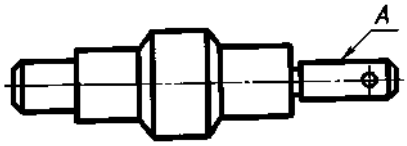
Черт. 7



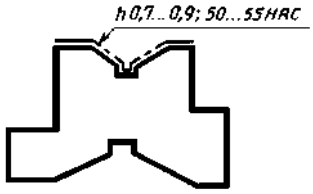
Черт. 8

2.4. Если все изделие подвергают одному виду обработки, то в технических требованиях делают запись: «40 ... 45 HRC» или «Цементировать *h* 0,7 ... 0,9 мм; 58 ... 62 HRC» или «Отжечь» и т. п.

2.5. Если большую часть поверхностей изделия подвергают одному виду обработки, а остальные поверхности другому виду обработки или предохраняют от нее, то в технических требованиях делают запись по типу: «40 ... 45 HRC, кроме поверхности *А*» (черт. 9) или «30 ... 35 HRC, кроме места, обозначенного особо» (черт. 10).

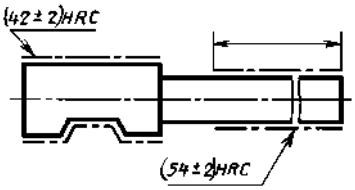


Черт. 9

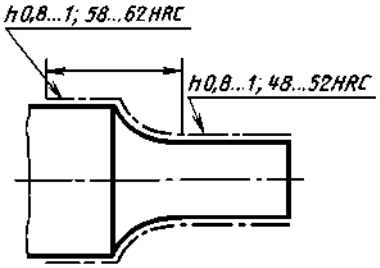


Черт. 10

2.6. Если обработке подвергают отдельные участки изделия, то показатели свойств материала и, при необходимости, способ получения этих свойств указывают на полках линий-выносок, а участки изделия, которые должны быть обработаны, отмечают штрихпунктирной утолщенной линией, проводимой на расстоянии 0,8 ... 1 мм от них, с указанием размеров, определяющих поверхности (черт. 11, 12).



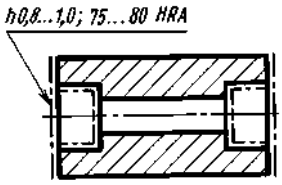
Черт. 11



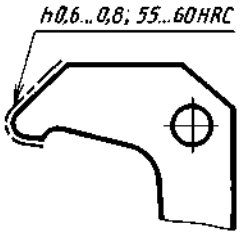
Черт. 12

Размеры, определяющие поверхности, подвергаемые обработке, допускается не проставлять, если они ясны из данных чертежа (черт. 13, 14).

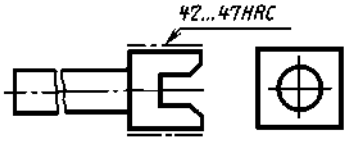
2.7. Поверхности изделия, подвергаемые обработке, отмечают штрихпунктирной утолщенной линией на той проекции, на которой они ясно определены (черт. 15).



Черт. 13



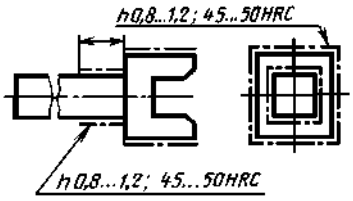
Черт. 14



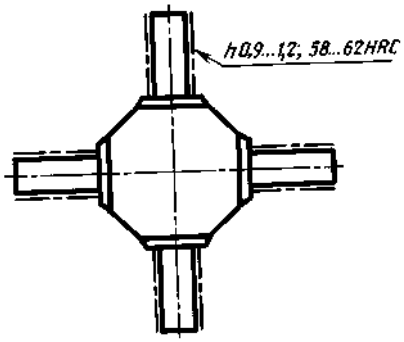
Черт. 15

Допускается отмечать эти поверхности и на других проекциях, при этом надпись с показателями свойств материала, относящимися к одной и той же поверхности, наносят один раз (черт. 16).

2.8. При одинаковой обработке симметричных участков или поверхностей изделия отмечают штрихпунктирной утолщенной линией все поверхности, подвергаемые обработке, а показатели свойств материала указывают один раз (черт. 13, 17).



Черт. 16



Черт. 17

2.4—2.8. **(Измененная редакция, Изм. № 2, 4).**

2.9. При наличии на изделии участков поверхностей с различными требованиями к свойствам материала эти требования указывают отдельно для каждого участка (см. черт. 11, 12).

2.10. Если надписи с указанием свойств материала и размеры, определяющие поверхности, подвергаемые обработке, затрудняют чтение чертежа, то допускается приводить их на дополнительном упрощенном изображении.

2.9, 10. **(Измененная редакция, Изм. № 4).**

2.11. При обработке поверхностей или участков изделия, определяемых термином или техническим понятием (например, рабочая часть или хвостовик режущего инструмента, поверхности зубьев, зубчатого колеса или поверхности, обозначенные буквами, и т. п.), допускается (если это не приведет к неоднозначному пониманию чертежа) не отмечать их штрихпунктирной утолщенной линией, а в технических требованиях делать запись по типу: «Хвостовик *h* 0,8 ... 1 мм; 48 ... 52 HRC». «Поверхность *A*—45 ... 50 HRC».

(Измененная редакция, Изм. № 2, 4).

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР от 05.06.68 № 830

Изменение № 4 принято Межгосударственным Советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 15 от 28.05.99)

За принятие проголосовали

Наименование государства	Наименование государственного органа по стандартизации
Азербайджанская Республика	Азгосстандарт
Республика Армения	Армгосстандарт
Республика Беларусь	Госстандарт Беларуси
Грузия	Грузстандарт
Республика Казахстан	Госстандарт Республики Казахстан
Киргизская Республика	Киргизстандарт
Республика Молдова	Молдовастандарт
Российская Федерация	Госстандарт России
Республика Таджикистан	Таджикгосстандарт
Туркменистан	Главная государственная инспекция Туркменистана
Республика Узбекистан	Узгосстандарт
Украина	Госстандарт Украины

3. ВЗАМЕН ГОСТ 2940—63 в части пп. 15—17

4. ССЫЛОЧНЫЕ НОРМАТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ДОКУМЕНТЫ

Обозначение НТД, на который дана ссылка	Номер пункта
ГОСТ 9.032—74	1.1
ГОСТ 9.306—85	1.1

5. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, 3, 4, утвержденными в феврале 1973 г., августе 1984 г., октябре 1987 г., январе 2000 г. (ИУС № 4—73, 12—84, 1—88, 4—2000)

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕЗЬБЫ

ГОСТ 2.311—68

Unified system for design documentation.
Image of screw

Дата введения 01.01.71

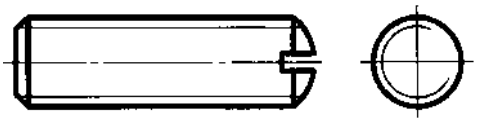
1. Настоящий стандарт устанавливает правила изображения и нанесения обозначения резьбы на чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт соответствует СТ СЭВ 284—76.

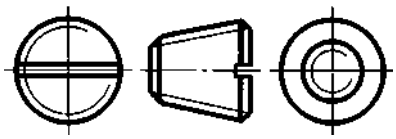
2. Резьбу изображают:

а) на стержне — сплошными основными линиями по наружному диаметру резьбы и сплошными тонкими линиями — по внутреннему диаметру.

На изображениях, полученных проецированием на плоскость, параллельную оси стержня, сплошную тонкую линию по внутреннему диаметру резьбы проводят на всю длину резьбы без сбега, а на видах, полученных проецированием на плоскость, перпендикулярную к оси стержня, по внутреннему диаметру резьбы проводят дугу, приблизительно равную $^3/_4$ окружности, разомкнутую в любом месте (черт. 1, 2);



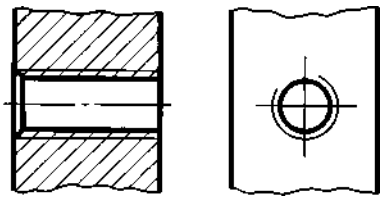
Черт.1



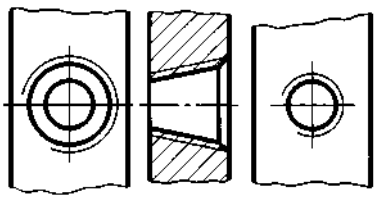
Черт.2

б) в отверстии — сплошными основными линиями по внутреннему диаметру резьбы и сплошными тонкими линиями — по наружному диаметру.

На разрезах, параллельных оси отверстия, сплошную тонкую линию по наружному диаметру резьбы проводят на всю длину резьбы без сбега, а на изображениях, полученных проецированием на плоскость, перпендикулярную к оси отверстия, по наружному диаметру резьбы проводят дугу, приблизительно равную $^3/_4$ окружности, разомкнутую в любом месте (черт. 3, 4).

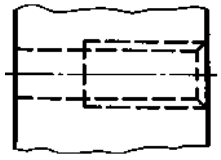


Черт.3



Черт.4

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

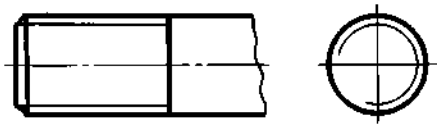


Черт.5

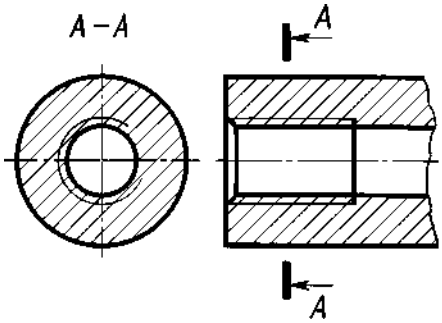
Сплошную тонкую линию при изображении резьбы наносят на расстоянии не менее 0,8 мм от основной линии и не более величины шага резьбы.

3. Резьбу, показываемую как невидимую, изображают штриховыми линиями одной толщины по наружному и по внутреннему диаметру (черт. 5).

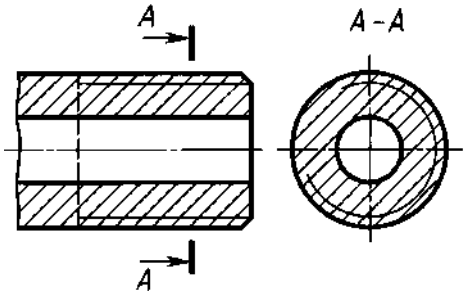
4. Линию, определяющую границу резьбы, наносят на стержне и в отверстии с резьбой в конце полного профиля резьбы (до начала сбега). Границу резьбы проводят до линии наружного диаметра резьбы и изображают сплошной основной или штриховой линией, если резьба изображена как невидимая (черт. 6—8).



Черт.6



Черт.7



Черт.8

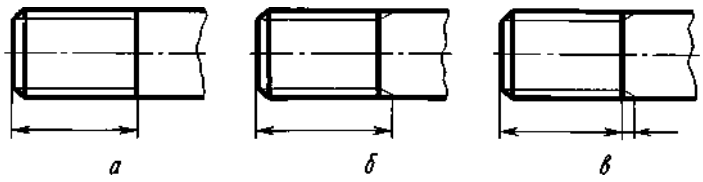
5. Штриховку в разрезах и сечениях проводят до линии наружного диаметра резьбы на стержнях и до линии внутреннего диаметра в отверстии, т.е. в обоих случаях до сплошной основной линии (см. черт. 3, 4, 7, 8).

6. Размер длины резьбы с полным профилем (без сбега) на стержне и в отверстии указывают, как показано на черт. 9*а* и 10*а*.

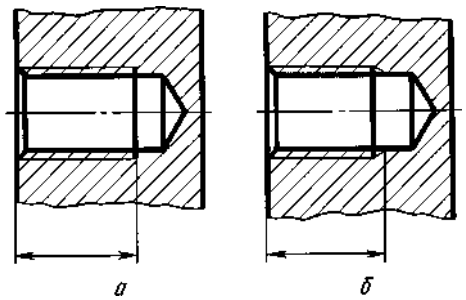
Размер длины резьбы (со сбегом) указывают, как показано на черт. 9*б* и 10*б*.

При необходимости указания величины сбега на стержне размеры наносят, как показано на черт. 9*в*.

Сбег резьбы изображают сплошной тонкой прямой линией, как показано на черт. 9*б, в* и 10*б*.



Черт.9



Черт.10

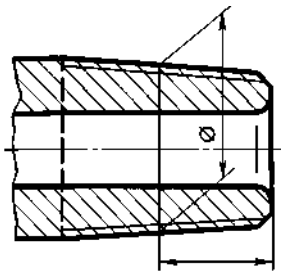
Недорез резьбы, выполненной до упора, изображают, как показано на черт. 11*а* и *в*.
Допускается изображать недорез резьбы, как показано на черт. 11*б* и *г*.

Черт.11

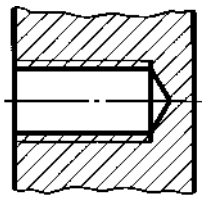
(Измененная редакция, Изм. № 1).

7. Основную плоскость конической резьбы на стержне, при необходимости, указывают тонкой сплошной линией, как показано на черт. 12.

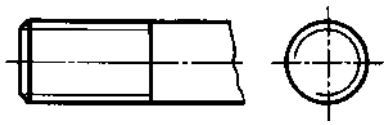
8. На чертежах, по которым резьбу не выполняют, конец глухого резьбового отверстия допускается изображать, как показано на черт. 13 и 14, даже при наличии разности между глубиной отверстия под резьбу и длиной резьбы.



Черт.
12

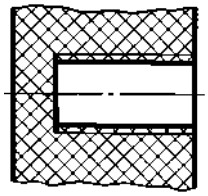


Черт.
13

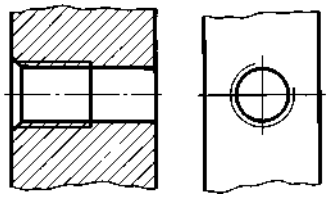


Черт.
14

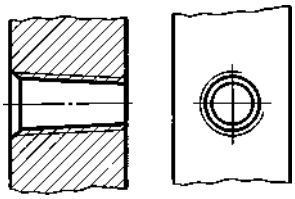
9. Фаски на стержне с резьбой и в отверстии с резьбой, не имеющие специального конструктивного назначения, в проекции на плоскость, перпендикулярную к оси стержня или отверстия, не изображают (черт. 15—17). Сплошная тонкая линия изображения резьбы на стержне должна пересекать линию границы фаски (см. черт. 15).



Черт.
15

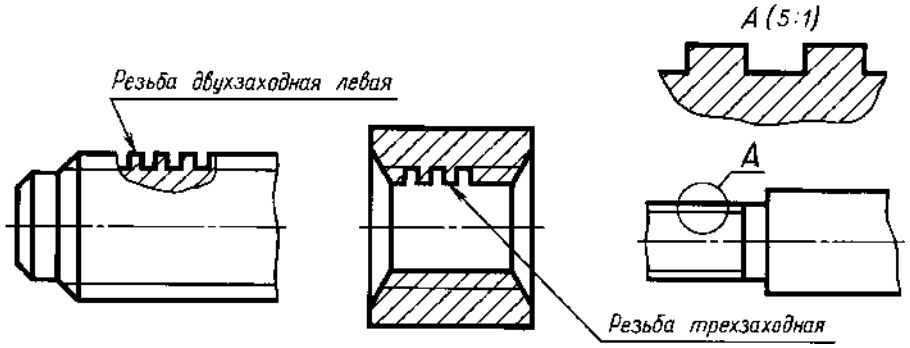


Черт.
16



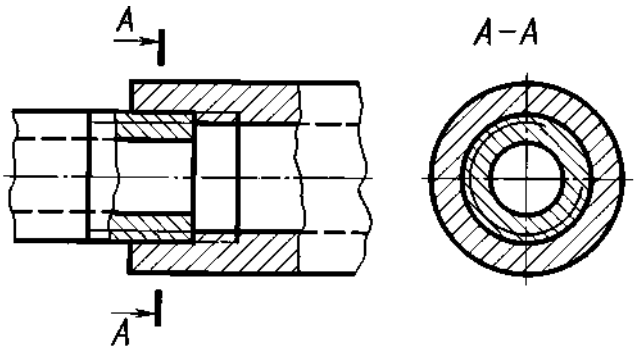
Черт.
17

10. Резьбу с нестандартным профилем показывают одним из способов, изображенных на черт. 18, со всеми необходимыми размерами и предельными отклонениями. Кроме размеров и предельных отклонений резьбы, на чертеже указывают дополнительные данные о числе заходов, о левом направлении резьбы и т.п. с добавлением слова «Резьба».

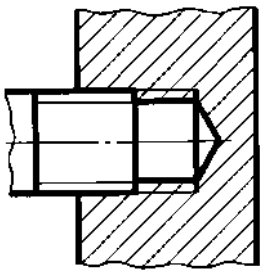


Черт.18

11. На разрезах резьбового соединения в изображении на плоскости, параллельной к его оси, в отверстии показывают только часть резьбы, которая не закрыта резьбой стержня (черт. 19, 20).

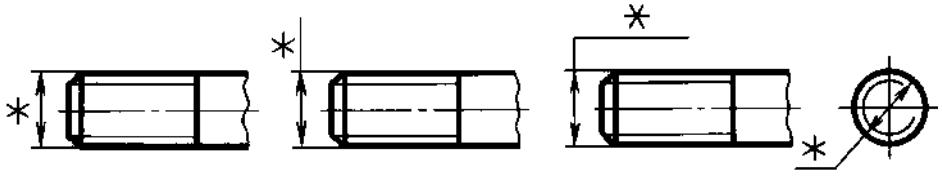


Черт.19

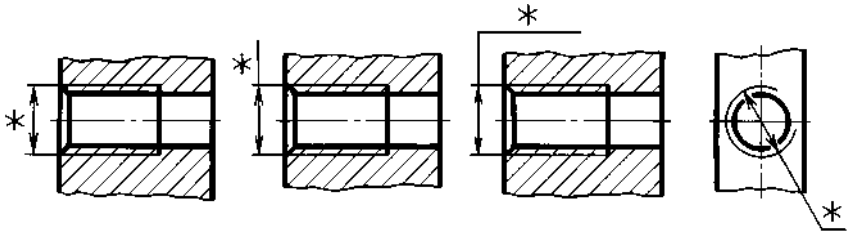


Черт.20

12. Обозначения резьб указывают по соответствующим стандартам на размеры и предельные отклонения резьб и относят их для всех резьб, кроме конических и трубной цилиндрической, к наружному диаметру, как показано на черт. 21, 22.

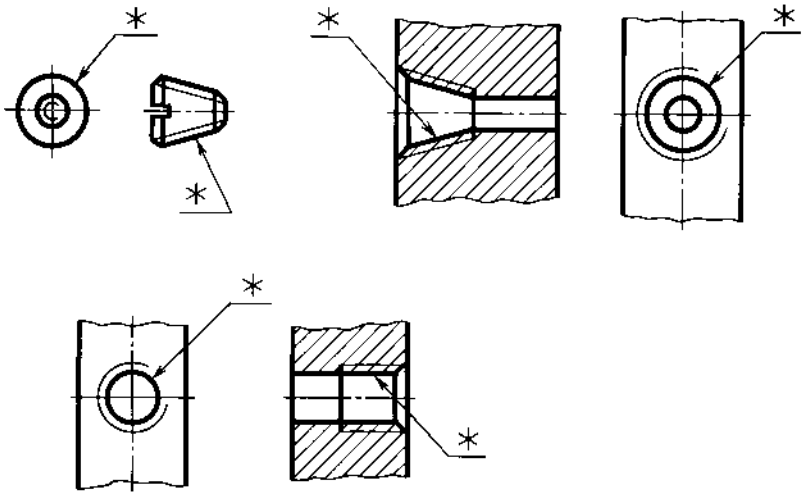


Черт.21



Черт.22

Обозначения конических резьб и трубной цилиндрической резьбы наносят, как показано на черт. 23.



Черт.23

Примечание. Знаком «*» отмечены места нанесения обозначения резьбы.

13. Специальную резьбу со стандартным профилем обозначают сокращенно Сп и условным обозначением резьбы.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.

3. Стандарт соответствует СТ СЭВ 284—76

4. ВЗАМЕН ГОСТ 3459—59

5. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в апреле 1987 г. (ИУС 7—87)

УДК 744:621.791.053:003.62:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

УСЛОВНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ШВОВ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Unified system for design documentation.
Symbolic designations and representations of welds and welded joints

ГОСТ 2.312—72*

Взамен ГОСТ 2.312—68

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 10 мая 1972 г. № 935 срок введения установлен

с 01.01.73

Настоящий стандарт устанавливает условные изображения и обозначения швов сварных соединений в конструкторских документах изделий всех отраслей промышленности, а также в строительной документации, в которой не использованы изображения и обозначения, применяемые в строительстве.

1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ШВОВ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

1.1. Шов сварного соединения, независимо от способа сварки, условно изображают:

видимый — сплошной основной линией (черт. 1*а*, *в*);

невидимый — штриховой линией (черт. 1*г*).

Видимую одиночную сварную точку, независимо от способа сварки, условно изображают знаком «+» (черт. 1*б*), который выполняют сплошными линиями (черт. 2).

Невидимые одиночные точки не изображают.

От изображения шва или одиночной точки проводят линию-выноску, заканчивающуюся односторонней стрелкой (см. черт. 1). Линию-выноску предпочтительно проводить от изображения видимого шва.

1.2. На изображение сечения многопроходного шва допускается наносить контуры отдельных проходов, при этом их необходимо обозначать прописными буквами русского алфавита (черт. 3).

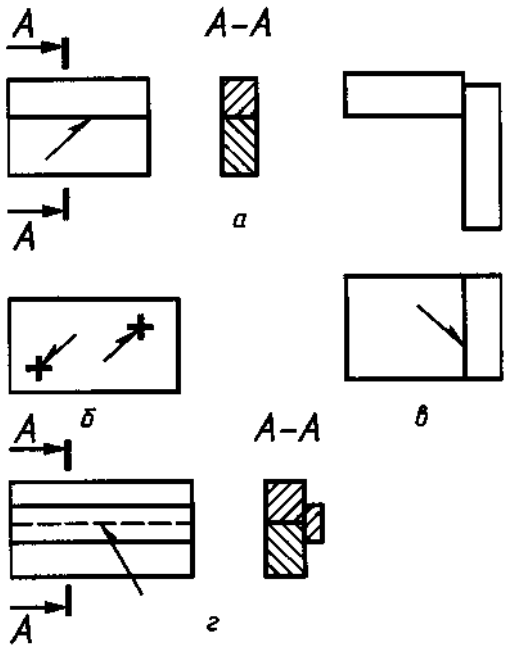
1.3. Шов, размеры конструктивных элементов которого стандартами не установлены (нестандартный шов), изображают с указанием размеров конструктивных элементов, необходимых для выполнения шва по данному чертежу (черт. 4).

Границы шва изображают сплошными основными линиями, а конструктивные элементы кромок в границах шва — сплошными тонкими линиями.

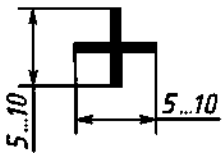
Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

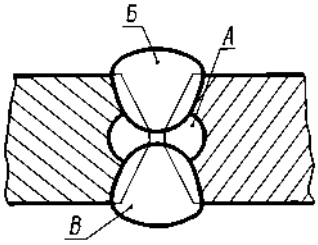
** Издание (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в июле 1991 г. (ИУС 10—91)*



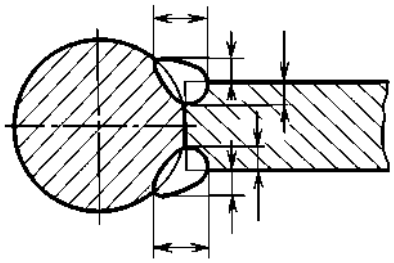
Черт. 1



Черт. 2



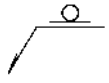
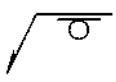
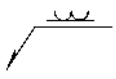
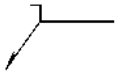
Черт. 3



Черт. 4

2. УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ШВОВ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

2.1. Вспомогательные знаки для обозначения сварных швов приведены в таблице.

Вспомогательный знак	Значение вспомогательного знака	Расположение вспомогательного знака относительно полки линии-выноски, проведенной от изображения шва	
		с лицевой стороны	с оборотной стороны
	Усиление шва снять		
	Наплывы и неровности шва обработать с плавным переходом к основному металлу		
	Шов выполнить при монтаже изделия, т. е. при установке его по монтажному чертежу на месте применения		

Продолжение

Вспомогательный знак	Значение вспомогательного знака	Расположение вспомогательного знака относительно полки линии-выноски, проведенной от изображения шва	
		с лицевой стороны	с оборотной стороны
	Шов прерывистый или точечный с цепным расположением Угол наклона линии ≈ 60°		
Z	Шов прерывистый или точечный с шахматным расположением		
	Шов по замкнутой линии. Диаметр знака — 3 . . . 5 мм		
	Шов по незамкнутой линии. Знак применяют, если расположение шва ясно из чертежа		

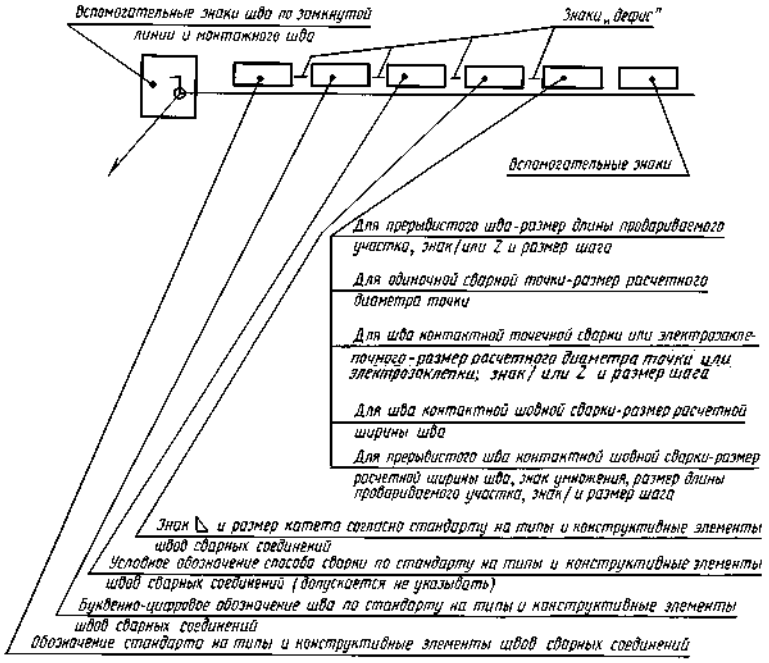
Примечания:

1. За лицевую сторону одностороннего шва сварного соединения принимают сторону, с которой производят сварку.
2. За лицевую сторону двустороннего шва сварного соединения с несимметрично подготовленными кромками принимают сторону, с которой производят сварку основного шва.
3. За лицевую сторону двустороннего шва сварного соединения с симметрично подготовленными кромками может быть принята любая сторона.

В условном обозначении шва вспомогательные знаки выполняют сплошными тонкими линиями.

Вспомогательные знаки должны быть одинаковой высоты с цифрами, входящими в обозначение шва.

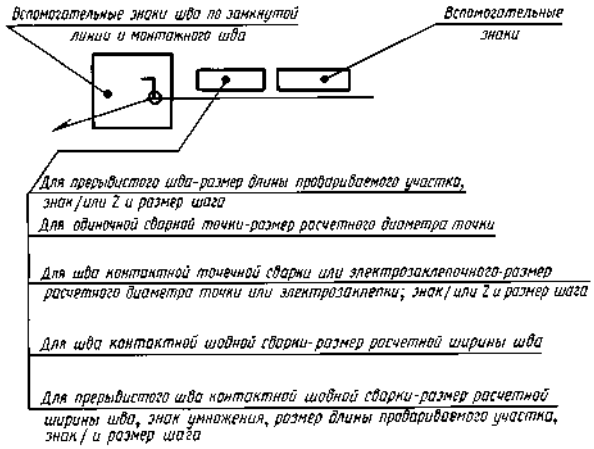
2.2. Структура условного обозначения стандартного шва или одиночной сварной точки приведена на схеме (черт. 5).



Черт. 5

Знак выполняют сплошными тонкими линиями. Высота знака должна быть одинаковой с высотой цифр, входящих в обозначение шва.

2.3. Структура условного обозначения нестандартного шва или одиночной сварной точки приведена на схеме (черт. 6).



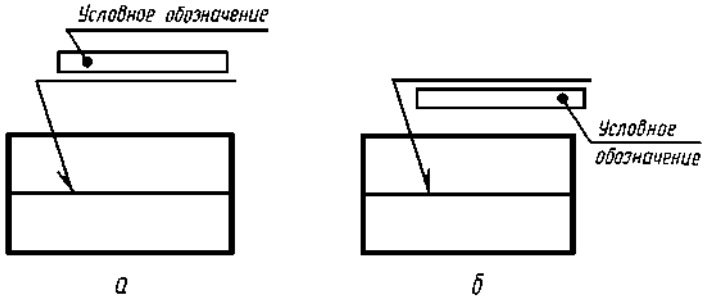
Черт. 6

В технических требованиях чертежа или таблицы швов указывают способ сварки, которым должен быть выполнен нестандартный шов.

2.4. Условное обозначение шва наносят:

а) на полке линии-выноски, проведенной от изображения шва с лицевой стороны (черт. 7*а*);

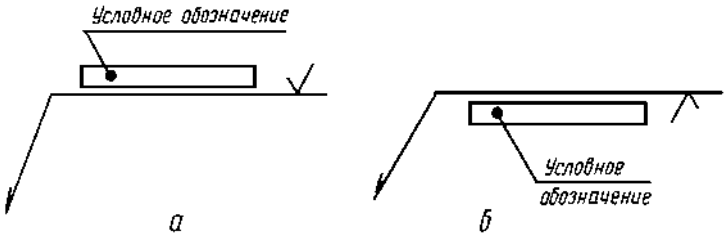
б) под полкой линии-выноски, проведенной от изображения шва с оборотной стороны (черт. 7*б*).



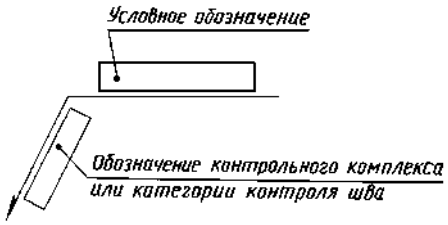
Черт. 7

2.5. Обозначение шероховатости механически обработанной поверхности шва наносят на полке или под полкой линии-выноски после условного обозначения шва (черт. 8), или указывают в таблице швов, или приводят в технических требованиях чертежа, например: «Параметр шероховатости поверхности сварных швов...»

Примечание. Содержание и размеры граф таблицы швов настоящим стандартом не регламентируются.



Черт. 8



Черт. 9

2.6. Если для шва сварного соединения установлен контрольный комплекс или категория контроля шва, то их обозначение допускается помещать под линией-выноской (черт. 9).

В технических требованиях или таблице швов на чертеже приводят ссылку на соответствующий нормативно-технический документ.

2.7. Сварочные материалы указывают на чертеже в технических требованиях или таблице швов.

Допускается сварочные материалы не указывать.

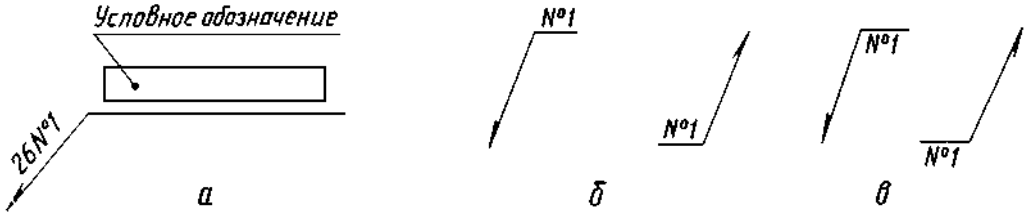
2.8. При наличии на чертеже одинаковых швов обозначение наносят у одного из изображений, а от изображений остальных одинаковых швов проводят линии-выноски с полками. Всем одинаковым швам присваивают один порядковый номер, который наносят:

а) на линии-выноске, имеющей полку с нанесенным обозначением шва (черт. 10 *а*);

б) на полке линии-выноски, проведенной от изображения шва, не имеющего обозначения, с лицевой стороны (черт. 10 *б*);

в) под полкой линии-выноски, проведенной от изображения шва, не имеющего обозначения, с оборотной стороны (черт. 10 *в*).

Количество одинаковых швов допускается указывать на линии-выноске, имеющей полку с нанесенным обозначением (см. черт. 10 *а*).



Черт. 10

Примечание. Швы считают одинаковыми, если:
одинаковы их типы и размеры конструктивных элементов в поперечном сечении;
к ним предъявляют одни и те же технические требования.

2.9. Примеры условных обозначений швов сварных соединений приведены в приложениях 1 и 2.

3. УПРОЩЕНИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ ШВОВ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

3.1. При наличии на чертеже швов, выполняемых по одному и тому же стандарту, обозначение стандарта указывают в технических требованиях чертежа (запись по типу: «Сварные швы... по...») или таблице.

3.2. Допускается не присваивать порядковый номер одинаковым швам, если все швы на чертеже одинаковы и изображены с одной стороны (лицевой или оборотной). При этом швы, не имеющие обозначения, отмечают линиями-выносками без полок (черт. 11).

Черт. 11

3.3. На чертеже симметричного изделия, при наличии на изображении оси симметрии, допускается отмечать линиями-выносками и обозначать швы только на одной из симметричных частей изображения изделия.

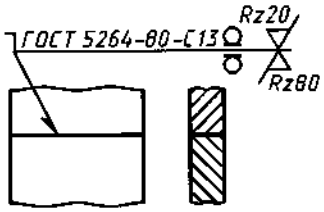
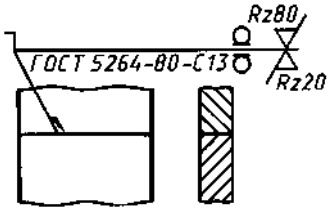
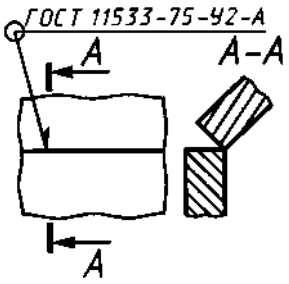
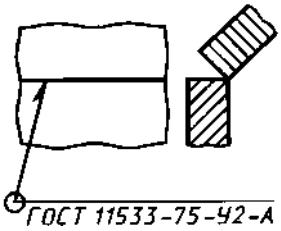
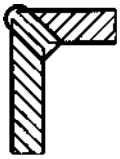
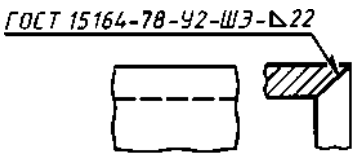
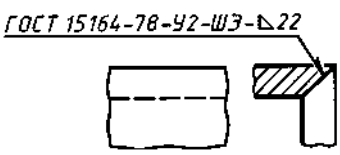
3.4. На чертеже изделия, в котором имеются одинаковые составные части, привариваемые одинаковыми швами, эти швы допускается отмечать линиями-выносками и обозначать только у одного из изображений одинаковых частей (предпочтительно у изображения, от которого приведена линия-выноска с номером позиции).

3.5. Допускается не отмечать на чертеже швы линиями-выносками, а приводить указания по сварке записью в технических требованиях чертежа, если эта запись однозначно определяет места сварки, способы сварки, типы швов сварных соединений и размеры их конструктивных элементов в поперечном сечении и расположение швов.

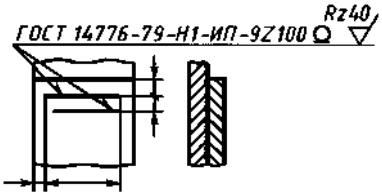
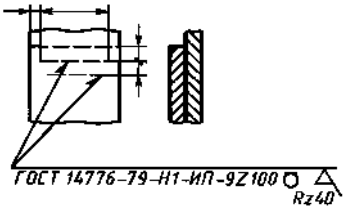
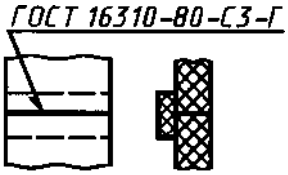
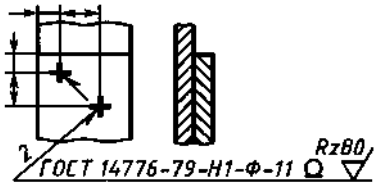
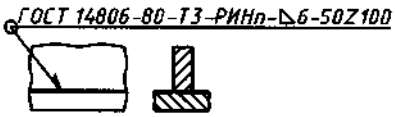
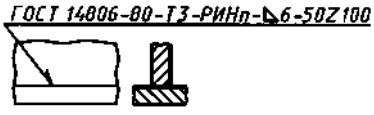
3.6. Одинаковые требования, предъявляемые ко всем швам или группе швов, приводят один раз — в технических требованиях или таблице швов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

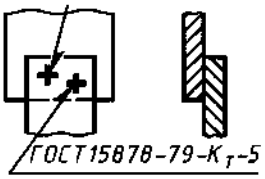
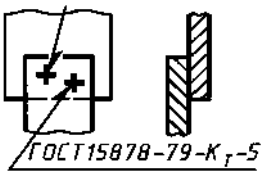
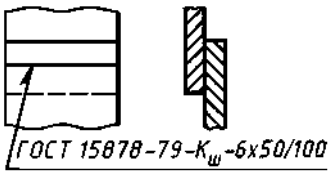
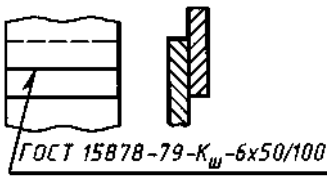
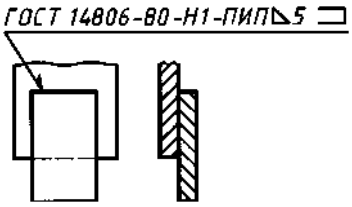
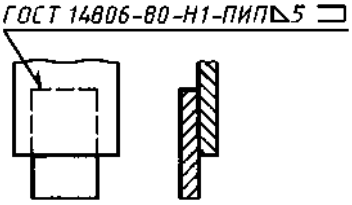
ПРИМЕРЫ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ СТАНДАРТНЫХ ШВОВ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Характеристика шва	Форма поперечного сечения шва	Условное обозначение шва, изображенного на чертеже	
		с лицевой стороны	с оборотной стороны
Шов стыкового соединения с криволинейным скосом одной кромки, двусторонний, выполняемый дуговой ручной сваркой при монтаже изделия. Усиление снято с обеих сторон. Параметр шероховатости поверхности шва: с лицевой стороны — *Rz* 20 мкм; с оборотной стороны — *Rz* 80 мкм			
Шов углового соединения без скоса кромок, двусторонний, выполняемый автоматической дуговой сваркой под флюсом по замкнутой линии			
Шов углового соединения со скосом кромок, выполняемый электрошлаковой сваркой проволочным электродом. Катет шва 22 мм			

Продолжение

Характеристика шва	Форма поперечного сечения шва	Условное обозначение шва, изображенного на чертеже	
		с лицевой стороны	с оборотной стороны
Шов точечный соединения внахлестку, выполняемый дуговой сваркой в инертных газах плавящимся электродом. Расчетный диаметр точки 9 мм. Шаг 100 мм. Расположение точек шахматное. Усиление должно быть снято. Параметр шероховатости обработанной поверхности *Rz* 40 мкм.			
Шов стыкового соединения без скоса кромок, односторонний, на остающейся подкладке, выполняемый сваркой нагретым газом с присадочным прутком			
Одиночные сварные точки соединения внахлестку, выполняемые дуговой сваркой под флюсом. Диаметр электрозаклепки 11 мм. Усиление должно быть снято. Параметр шероховатости обработанной поверхности *Rz* 80 мкм.			—
Шов таврового соединения без скоса кромок, двусторонний, прерывистый с шахматным расположением, выполняемый ручной дуговой сваркой в инертных газах неплавящимся электродом с присадочным металлом по замкнутой линии Катет шва 6 мм. Длина провариваемого участка 50 мм. Шаг 100 мм.			

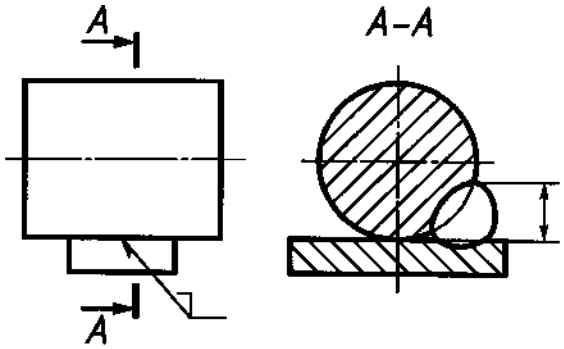
Продолжение

Характеристика шва	Форма поперечного сечения шва	Условное обозначение шва, изображенного на чертеже	
		с лицевой стороны	с оборотной стороны
Одиночные сварные точки соединения внахлестку, выполняемые контактной точечной сваркой. Расчетный диаметр литого ядра точки 5 мм			
Шов соединения внахлестку прерывистый, выполняемый контактной шовной сваркой. Ширина литой зоны шва 6 мм. Длина провариваемого участка 50 мм. Шаг 100 мм.			
Шов соединения внахлестку без скоса кромок, односторонний, выполняемый дуговой полуавтоматической сваркой в инертных газах плавящимся электродом. Шов по незамкнутой линии. Катет шва 5 мм.			

(Измененная редакция, Изм. № 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

ПРИМЕР УСЛОВНОГО ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕСТАНДАРТНОГО ШВА СВАРНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Характеристика шва	Условное изображение и обозначение шва на чертеже
Шов соединения без скоса кромок, односторонний, выполняемый ручной дуговой сваркой при монтаже изделия	

Примечание. В технических требованиях делают следующее указание: «Сварка ручная дуговая».

УДК 744.43:621:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

УСЛОВНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕРАЗЪЕМНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Unified system for design documentation.
Symbolic designations and representations of dead joints

ГОСТ 2.313—82

Взамен ГОСТ 2.313—68

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 30 декабря 1982 г. № 5294 срок введения установлен

с 01.01.84

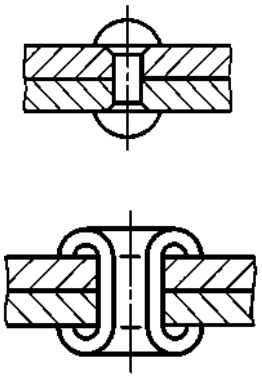
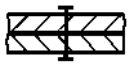
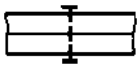
Настоящий стандарт устанавливает условные изображения и обозначения соединений, получаемых клепкой, пайкой, склеиванием, сшиванием и металлическими скобками, на чертежах всех отраслей промышленности и строительства, кроме чертежей строительных металлических конструкций.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 138—81.

1. СОЕДИНЕНИЯ КЛЕПАНЫЕ

1.1. Примеры условного изображения соединений, получаемых клепкой, приведены в табл. 1.

Таблица 1

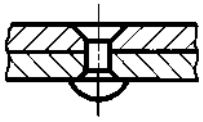
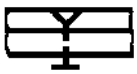
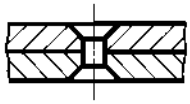
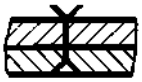
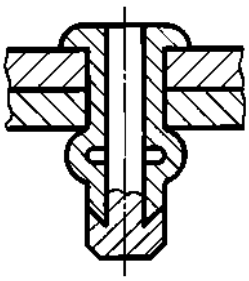
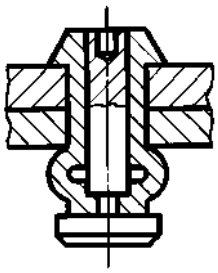
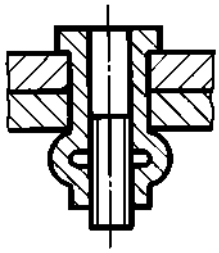
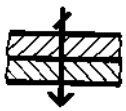
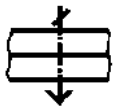
Вид соединения	Изображение	Условное обозначение	
		в сечении	на виде
1. Заклепкой с полукруглой, плоской, скругленной головкой и с полукруглой, плоской, скругленной замыкающей головкой			

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

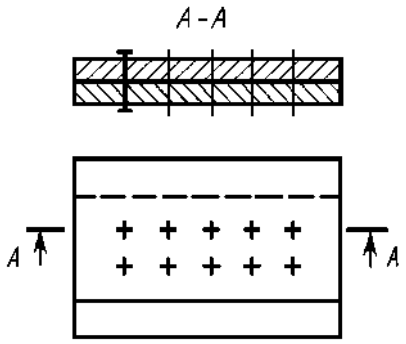
Переиздание. Июль 2001 г.

Продолжение табл. 1

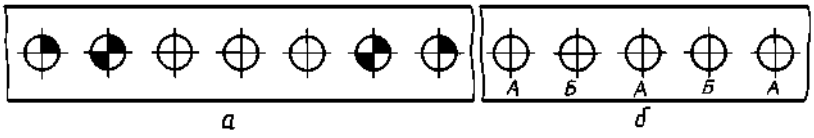
Вид соединения	Изображение	Условное обозначение	
		в сечении	на виде
2. Заклепкой с потайной головкой и с полукруглой, плоской, скругленной замыкающей головкой			
3. Заклепкой с потайной головкой и с потайной замыкающей головкой			
4. Заклепкой с полупотайной головкой и с потайной замыкающей головкой			
5. Заклепками специальными	  		

1.2. Если предмет, изображенный на сборочном чертеже, имеет ряд однотипных соединений с заклепками одного типа и с одинаковыми размерами, то заклепки, входящие в соединение, следует показать условно в одном-двух местах каждого соединения, а в остальных — центровыми или осевыми линиями (черт. 1).

1.3. Если на чертеже необходимо показать несколько групп заклепок различных типов и размеров, то рекомендуется отмечать одинаковые заклепки одним и тем же условным знаком (черт. 2*а*) или одинаковыми буквами (черт. 2*б*).



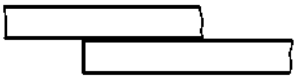
Черт. 1



Черт. 2

2. СОЕДИНЕНИЯ ПАЯНЫЕ И КЛЕЕНЫЕ

2.1. В соединениях, получаемых пайкой и склеиванием, место соединения элементов следует изображать сплошной линией толщиной 2*s* (черт. 3).

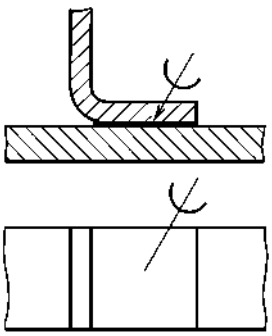


Черт. 3

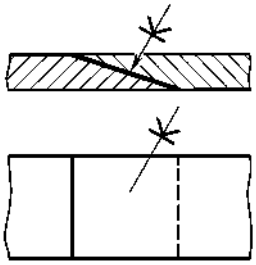
2.2. Для обозначения паяного и клееного соединения следует применять условный знак, который наносят на линии-выноске сплошной основной линией:

— для пайки (черт. 4, 6, 8);

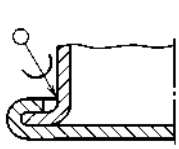
— для склеивания (черт. 5, 7, 9).



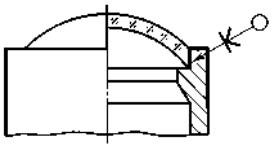
Черт. 4



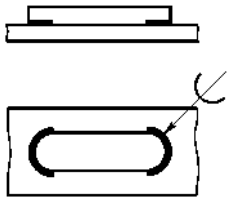
Черт. 5



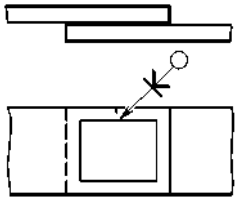
Черт. 6



Черт. 7



Черт. 8



Черт. 9

2.3. Швы, выполняемые по замкнутой линии, следует обозначать окружностью диаметром от 3 до 5 мм, выполняемой тонкой линией (черт. 6, 7, 9).

2.4. Швы, ограниченные определенным участком, следует обозначать, как показано на черт. 8.

2.5. На изображении паяного соединения при необходимости следует указывать размеры шва и обозначение шероховатости поверхности.

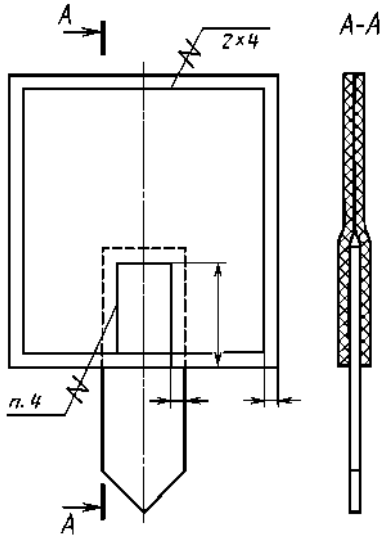
2.6. Обозначение припоя или клея (клеящего вещества) по соответствующему стандарту или техническим условиям следует приводить в технических требованиях чертежа записью по типу: «ПОС 40 ГОСТ...» или «Клей БФ-2 ГОСТ...».

При необходимости в том же пункте технических требований следует приводить требования к качеству шва. Ссылку на номер пункта следует помещать на полке линии-выноски, проведенной от изображения шва.

2.7. При выполнении швов припоями или клеями различных марок всем швам, выполняемым одним и тем же материалом, следует присваивать один порядковый номер, который следует наносить на линии-выноске. При этом в технических требованиях материал следует указывать записью по типу:

«ПОС 4 ГОСТ... (№ 1), ПМЦ 36 ГОСТ... (№ 2), клей БФ-2 ГОСТ... (№ 3)».

3. СОЕДИНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ СШИВАНИЕМ



Черт. 10

3.1. Соединения, получаемые сшиванием, следует изображать на чертежах тонкой сплошной линией и обозначать условным знаком, выполненным сплошной основной линией и нанесенным на линии-выноске (черт. 10).

3.2. Обозначение материала (ниток и т. п.) по соответствующему стандарту или техническим условиям, а также, при необходимости, сведения, характеризующие шов, в том числе количество ниток и размер стежка, следует приводить в технических требованиях чертежа. Ссылку на номер пункта следует помещать на полке линии-выноски, проведенной от изображения шва (черт. 10).

3.3. Если соединение имеет несколько рядов швов, то на чертеже следует изображать только один шов, расположенный ближе к краю. Количество швов и расстояние между ними следует указывать под полкой линии-выноски (черт. 10).

4. СОЕДИНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СКОБОК

4.1. Соединение, получаемое при помощи металлических скобок, следует обозначать условным знаком, выполненным сплошной основной линией и нанесенным на линии-выноске:

— для соединений, выполняемых внахлестку;

— для угловых соединений.

Линия-выноска подводится к соединению со стороны расположения скобок.

4.2. При изображении ряда металлических скобок следует изображать только крайние скобки, соединяемые между собой сплошной тонкой линией.

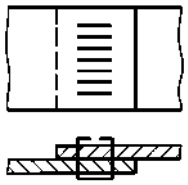
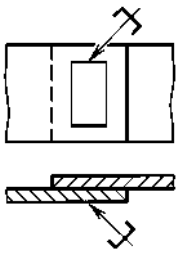
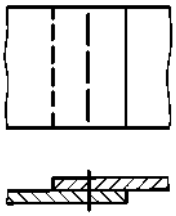
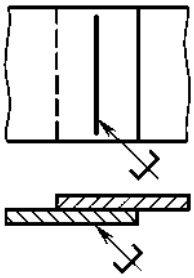
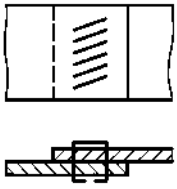
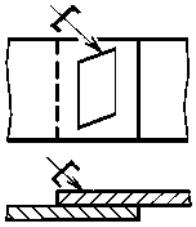
4.3. Соединение, выполняемое по замкнутой линии, следует обозначать в соответствии с требованием п. 2.3.

4.4. Дополнительные сведения, характеризующие соединение, например, параметры скобки и расстояние между ними, при необходимости, следует приводить в технических требованиях чертежа.

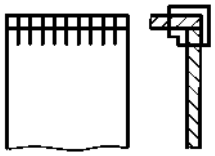
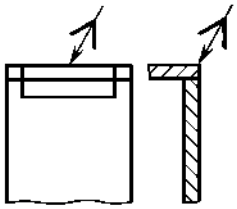
4.5. Если соединение образуется несколькими рядами скобок, то на чертеже следует изобразить один ряд, расположенный ближе к краю, а на полке линии-выноски указать количество рядов и расстояние между ними.

4.6. Примеры изображения и обозначения соединений, выполненных при помощи металлических скобок, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Соединение	Изображение	Условное изображение
1. С параллельным расположением скобок		
2. С последовательным расположением скобок		
3. С параллельным наклонным расположением скобок		

Продолжение табл. 2

Соединение	Изображение	Условное изображение
4. Угловое с параллельным расположением скобок		

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

УКАЗАНИЯ НА ЧЕРТЕЖАХ О МАРКИРОВАНИИ И КЛЕЙМЕНИИ ИЗДЕЛИЙ

Unified system for design documentation.
Instructions for marking and stamping articles

ГОСТ 2.314—68*

Взамен ГОСТ 5292—60 в части п. 6

Утвержден Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.
Срок введения установлен

с 01.01.71

1. Настоящий стандарт устанавливает правила нанесения на чертежи указаний о маркировании и клеймении изделий всех отраслей промышленности.

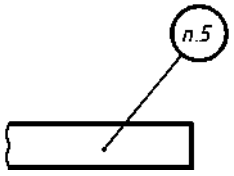
Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 648—77.

(Измененная редакция, Изм. № 2).

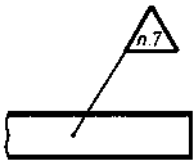
2. Указания о маркировании и клеймении помещают в технических требованиях чертежа и начинают словами: «Маркировать...» или «Клеймить...».

Указания о клеймении на чертежах помещают только в тех случаях, когда необходимо предусмотреть на изделии определенное место клеймения, размеры и способ нанесения клейма.

3. Место нанесения маркировки или клейма на изображении изделия отмечают точкой и соединяют ее линией-выноской со знаками маркирования или клеймения, которые располагают вне изображения. Знак маркирования — окружность диаметром 10 ... 15 мм (черт. 1), знак клеймения — равносторонний треугольник высотой 10 ... 15 мм (черт. 2).



Черт. 1



Черт. 2

Внутри знака помещают номер соответствующего пункта технических требований, в котором приведены указания о маркировании и клеймении.

Знаки маркирования и клеймения выполняют сплошными основными линиями.

4. Если маркированию или клеймению подлежат определенные части изделий (головка болта, торец вала и т. п.), то знаки маркирования или клеймения на чертеж не наносят, а место нанесения маркировки или клейма указывают в технических требованиях.

5. Если указания о маркировании и клеймении помещают в технических условиях на изделие, то на чертеже изделия делают следующую запись: «Маркировать по ТУ...».

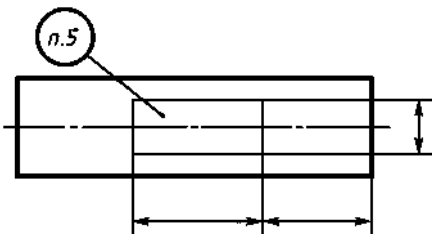
6. Если маркировка и клеймо необходимы, но нанесение их на изделие нецелесообразно или невозможно по конструктивным соображениям, то в технических требованиях помещают соответствующее указание, например: «Маркировать... на бирке» или «Клеймить... на бирке».

7. При необходимости ограничить участок поверхности для нанесения маркировки или клейма наносят сплошной тонкой линией границы участка и указывают его размеры (черт. 3) или изображают маркировку, или клеймо, наносимые на изделие.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в октябре 1969 г., августе 1980 г. (ИУС 11—69, 10—80)*



Черт. 3

8. Указания о маркировании и клеймении должны определять:

а) содержание маркировки и клейма;

б) место нанесения;

в) способ нанесения (при необходимости);

г) размер шрифта (при необходимости).

9. С целью сокращения объема надписей на чертеже допускается указания о содержании и способе нанесения маркировки или клейма приводить буквенными обозначениями, установленными приложением 1 к настоящему стандарту.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Рекомендуемое

ОБОЗНАЧЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ И СПОСОБОВ НАНЕСЕНИЯ МАРКИРОВКИ И КЛЕЙМ

1. Содержание маркировки указывают буквенными обозначениями, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Содержание маркировки	Обозначение
Товарный знак, наименование предприятия-изготовителя	Т
Индекс изделия	Ш
Обозначение изделия по основному конструкторскому документу	Ч
Заводской номер изделия*	Н
Марка материала	М
Номер плавки, порядковый номер в плавке	П
Технические данные	Х
Группа селективности	С
Знаки полярности, направления вращения, направления потока среды и др. данные, необходимые для монтажа	З
Дата изготовления	Д
Цена изделия	Ц

* Под номером изделия понимается также номер партии или серии.

2. Содержание клейма указывают буквенными обозначениями, приведенными в табл. 2.

Таблица 2

Содержание клейма	Обозначение
Испытания (контроль): механические, гидравлические, пневматические, электрические, на твердость и др.	И
Окончательная приемка	К

3. Способы нанесения маркировки или клейма указывают буквенными обозначениями, приведенными в табл. 3.

Таблица 3

Способ нанесения маркировки или клейма	Обозначение	Способ нанесения маркировки или клейма	Обозначение
Ударный	у	Краской	к
Гравированием	г	Литьем или давлением (прессованием, штамповкой и т. п.)	л
Травлением	т		

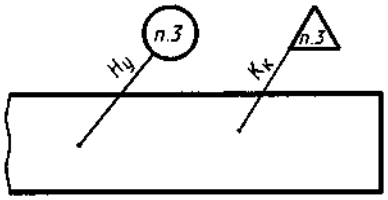
Примечание. Если маркировка или клеймо могут быть нанесены любым способом, то способ нанесения не указывают.

4. Обозначения и способы нанесения маркировки и клейма указывают на наклонном участке линии-выноски.

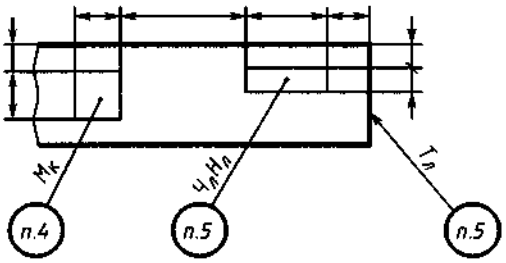
ПРИМЕР НАНЕСЕНИЯ на чертеже обозначений заводского номера изделия ударным способом и клейма окончательной приемки краской при наличии в технических условиях на изделие всех данных о маркировании и клеймении приведен на черт. 1.

При этом в технических требованиях чертежа делают запись по типу: «3. Маркировать и клеймить по ТУ...».

ПРИМЕР НАНЕСЕНИЯ на чертеже обозначений марки материала — краской, обозначения изделия, заводского номера его и товарного знака — литейным способом, при необходимости указания на чертеже отсутствующих в технических условиях данных о месте, способе нанесения и шрифте маркировки, приведен на черт. 2.



Черт. 1



Черт. 2

При этом в технических требованиях чертежа делают запись по типу:

а) если маркировки выполняются разным шрифтом, —

«4. Маркировать по ТУ . . . шрифтом . . . ГОСТ . . .» .

5. Маркировать по ТУ . . . , Чл — шрифтом . . . ГОСТ . . . Нл — шрифтом . . . ГОСТ . . . ».

«6. Маркировать по ТУ . . . шрифтом . . . ГОСТ . . .» :

б) если маркировки выполняются одним шрифтом, —

«4. Маркировать по ТУ . . . шрифтом . . . ГОСТ . . . ».

(Введено дополнительно, Изм. № 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Маркирование — нанесение на изделие знаков, характеризующих это изделие.

Маркировка — совокупность знаков, характеризующих изделие, например: обозначение, шифр, номер партии (серии), порядковый номер, дата изготовления, товарный знак предприятия-изготовителя, марка материала, группа селективности, монтажные или транспортные знаки и т. п.

Клеймение — нанесение на изделие знаков, удостоверяющих его качество.

Клеймо — знак, удостоверяющий качество изделия.

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ИЗОБРАЖЕНИЯ УПРОЩЕННЫЕ И УСЛОВНЫЕ КРЕПЕЖНЫХ ДЕТАЛЕЙ

Unified system for design documentation.
Simplified and symbolic designations of fasteners

ГОСТ 2.315—68*

Взамен ГОСТ 3465—52

Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР от декабря 1967 г. срок введения установлен

с 01.01.71

1. Настоящий стандарт устанавливает упрощенные и условные изображения крепежных деталей на сборочных чертежах и чертежах общих видов всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 1978—79.

2. На сборочных чертежах и чертежах общих видов изображение крепежных деталей (упрощенное или условное) выбирают в зависимости от назначения и масштаба чертежа.

Крепежные детали, у которых на чертеже диаметры стержней равны 2 мм и менее, изображают условно. Размер изображения должен давать полное представление о характере соединения.

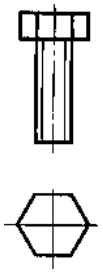
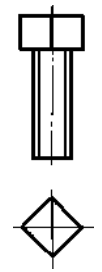
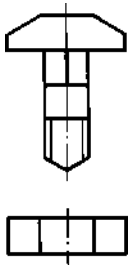
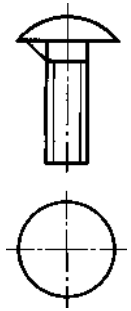
3. Упрощенные и условные изображения крепежных деталей должны соответствовать указанным в табл. 1.

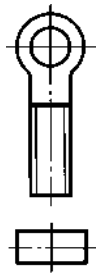
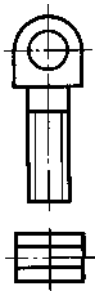
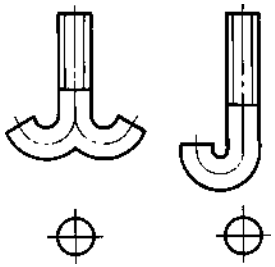
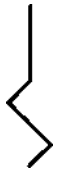
Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в декабре 1980 г., апреле 1998 г. (ИУС 3—81, 7—98)*

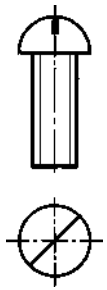
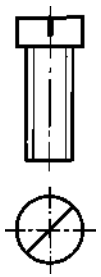
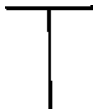
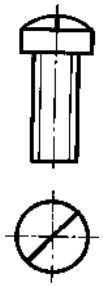
Таблица 1

Продолжение табл. 1

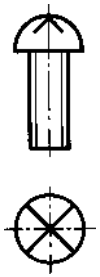
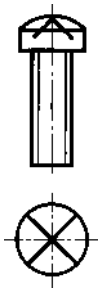
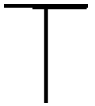
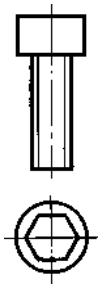
Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
1. Болты и винты:		
с шестигранной головкой		
с квадратной головкой		
с молоткообразной головкой		
2. Болты: с полукруглой головкой и усом		

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
откидные с круглой головкой		
откидные с вилкой		
фундаментные		

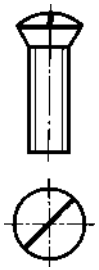
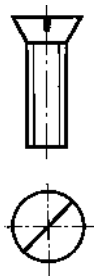
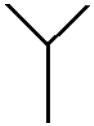
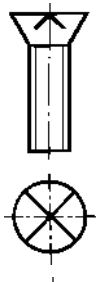
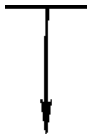
Продолжение табл. 1

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
3. Винты:		
с полукруглой головкой		
с цилиндрической головкой		
с цилиндрической головкой и сферой		

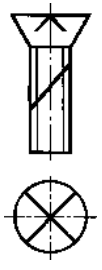
Продолжение табл. 1

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
с полукруглой головкой и крестообразным шлицем		
с цилиндрической головкой, сферой и крестообразным шлицем		
с цилиндрической головкой и шестигранным углублением под ключ		

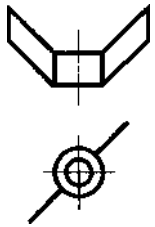
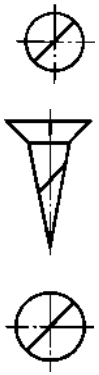
Продолжение табл. 1

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
с полупотайной головкой		
с потайной головкой		
с потайной головкой и крестообразным шлицем		
с цилиндрической головкой саморежущие		

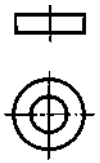
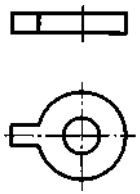
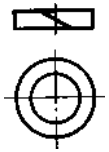
Продолжение табл. 1

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
с потайной головкой и крестообразным шлицем саморежущие		
4. Гайки:		
круглые		
шестигранные		
шестигранные прорезные и корончатые		

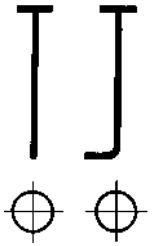
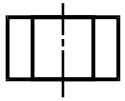
Продолжение табл. 1

Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
гайки-барашки		
5. Шурупы:		
с полукруглой головкой		
с потайной головкой		
с полупотайной головкой		

Продолжение табл. 1

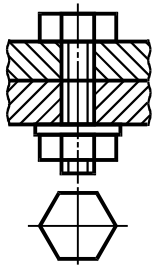
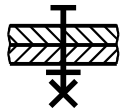
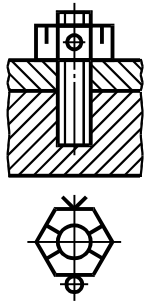
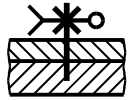
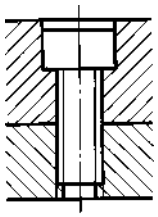
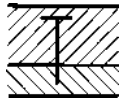
Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
6. Шпильки		
7. Шайбы:		
простые, стопорные и т. д.		
стопорные с язычком		
пружинные		

Окончание табл. 1

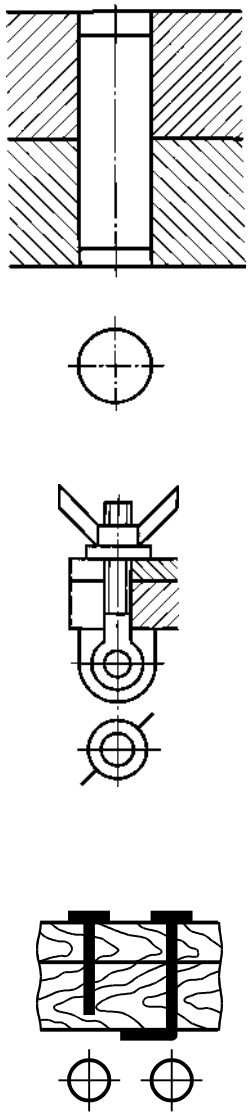
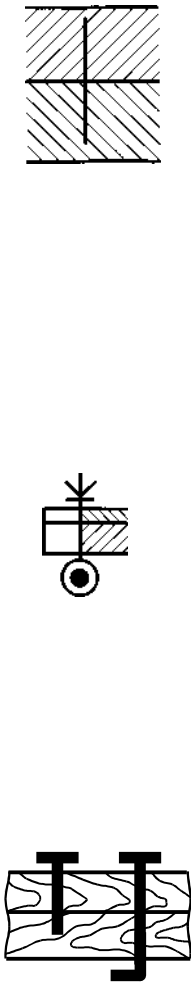
Наименование	Изображение	
	упрощенное	условное
8. Штифты: цилиндрические		
конические		
9. Гвозди		
10. Шплинты		
11. Резьбовые вставки		

4. Примеры упрощенных и условных изображений крепежных деталей в соединениях даны в табл. 2.

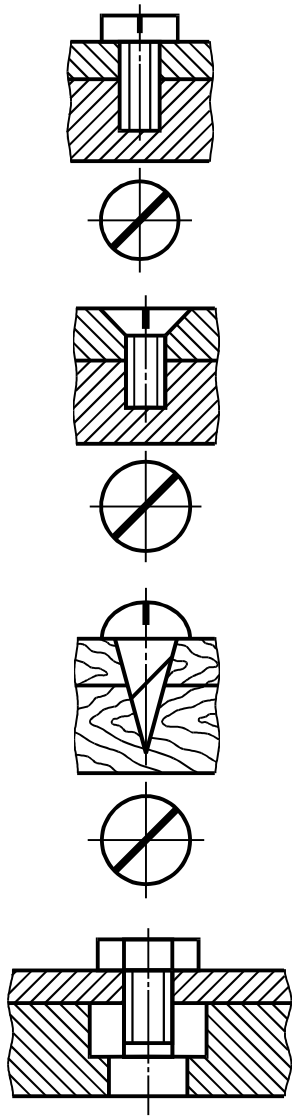
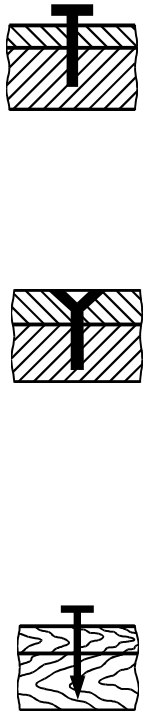
Таблица 2

Изображение	
упрощенное	условное
	
	
	

Продолжение табл. 2

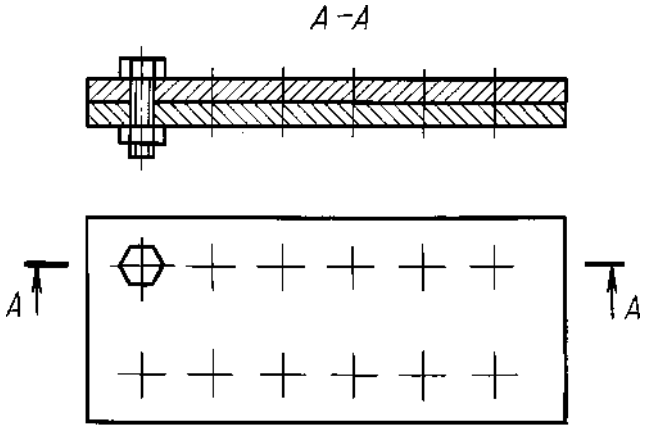
Изображение	
упрощенное	условное
	

Окончание табл. 2

Изображение	
упрощенное	условное
	

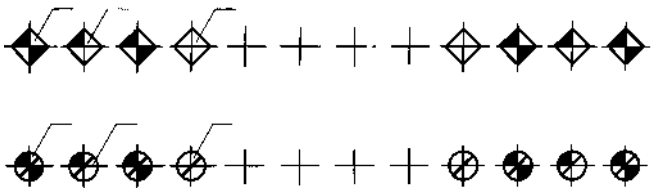
3, 4. **(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).**

5. Если предмет, изображенный на сборочном чертеже, имеет ряд однотипных соединений, то крепежные детали, входящие в эти соединения, следует показывать условно или упрощенно в одном-двух местах каждого соединения, а в остальных — центровыми или осевыми линиями (черт. 1).



Черт. 1

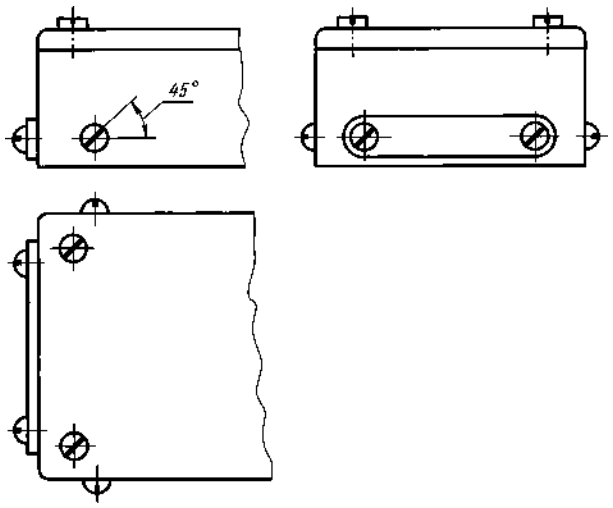
6. Если на чертеже имеется несколько групп крепежных деталей, различных по типам и размерам, то вместо нанесения повторяющихся номеров позиций рекомендуется одинаковые крепежные детали обозначать условными знаками, а номер позиции наносить только один раз (черт. 2).



Черт. 2

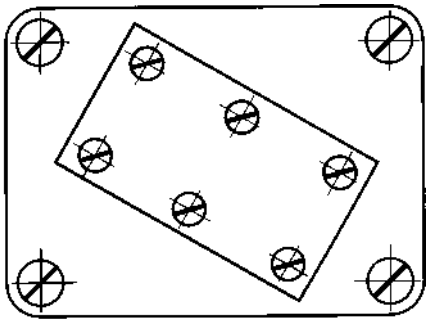
В строительных чертежах допускается одинаковые группы крепежных деталей обводить сплошной тонкой линией с поясняющей надписью на полке линии-выноски; при этом преобладающие крепежные детали не обводят и не оговаривают в общих указаниях к чертежу.

7. Шлицы на головках крепежных деталей следует изображать одной сплошной линией, как показано на черт. 3: на одном виде — по оси крепежной детали, на другом — под углом 45° к рамке чертежа.



Черт. 3

Если линия шлица, проведенная под углом 45° к рамке чертежа, совпадает с центровой линией или близка по направлению к ней, то линия шлица проводится под углом 45° к центровой линии (черт. 4).



Черт. 4

Изменение № 2 принято Межгосударственным Советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 12 от 21.11.97)

За принятие изменения проголосовали:

Наименование государства	Наименование национального органа стандартизации
Азербайджанская Республика	Азгосстандарт
Республика Армения	Армгосстандарт
Республика Казахстан	Госстандарт Республики Казахстан
Киргизская Республика	Киргизстандарт
Республика Молдова	Молдовастандарт
Российская Федерация	Госстандарт России
Республика Таджикистан	Таджикгосстандарт
Туркменистан	Главная государственная инспекция Туркменистана
Республика Узбекистан	Узгосстандарт
Украина	Госстандарт Украины

УДК 62(084.11):006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ПРАВИЛА НАНЕСЕНИЯ НА ЧЕРТЕЖАХ НАДПИСЕЙ, ТЕХНИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ И ТАБЛИЦ

Unified system for design documentation.
Rules for placing of inscriptions, technical data and tables on drawings

ГОСТ 2.316—68*
Взамен ГОСТ 5292—60 в части разд. VI и приложения, ГОСТ 3453—59 в части разд. VI

Утвержден Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР в декабре 1967 г.
Срок введения установлен

с 01.01.71

1. Настоящий стандарт устанавливает правила нанесения надписей, технических требований и таблиц на чертежи изделий всех отраслей промышленности.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 856—78, СТ СЭВ 6306—88.

(Измененная редакция, Изм. № 1, 2).

2. Кроме изображения предмета с размерами и предельными отклонениями, чертеж может содержать:

а) текстовую часть, состоящую из технических требований и (или) технических характеристик;

б) надписи с обозначением изображений, а также относящиеся к отдельным элементам изделия;

в) таблицы с размерами и другими параметрами, техническими требованиями, контрольными комплексами, условными обозначениями и т. д.

3. Выполнение основной надписи чертежа должно производиться в соответствии с требованиями ГОСТ 2.104—68 и ГОСТ 2.109—73.

4. Текстовую часть, надписи и таблицы включают в чертеж в тех случаях, когда содержащиеся в них данные, указания и разъяснения невозможно или нецелесообразно выразить графически или условными обозначениями.

5. Содержание текста и надписей должно быть кратким и точным. В надписях на чертежах не должно быть сокращений слов, за исключением общепринятых, а также установленных в стандартах и указанных в приложении к настоящему стандарту.

6. Текст на поле чертежа, таблицы, надписи с обозначением изображений, а также надписи, связанные непосредственно с изображением, как правило, располагают параллельно основной надписи чертежа.

7. Около изображений на полках линий-выносок наносят только краткие надписи, относящиеся непосредственно к изображению предмета, например, указания о количестве конструктивных элементов (отверстий, канавок и т. п.), если они не внесены в таблицу, а также указания лицевой стороны, направления проката, волокон и т. п.

8. Линию-выноску, пересекающую контур изображения и не отводимую от какой-либо линии, заканчивают точкой (черт. 1*а*).

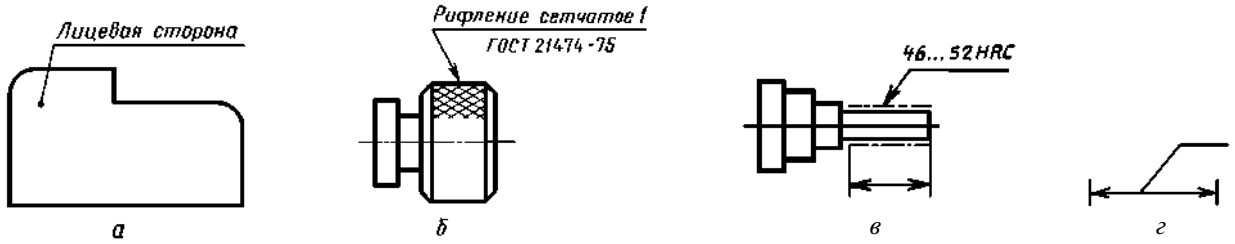
Линию-выноску, отводимую от линий видимого и невидимого контура, а также от линий, обозначающих поверхности, заканчивают стрелкой (черт. 1б, *в*).

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★

** Издание (июль 2001 г.) с Изменениями № 1, 2, утвержденными в июле 1980 г., марте 1989 г. (ИУС 11—80, 7—89)*

На конце линии-выноски, отводимой от всех других линий, не должно быть ни стрелки, ни точки (черт. 1*г*).

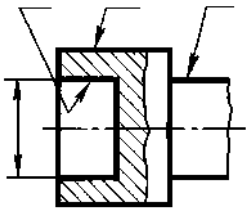


Черт. 1

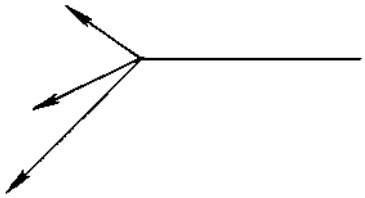
(Измененная редакция, Изм. № 1).

9. Линии-выноски должны не пересекаться между собой, быть непараллельными линиям штриховки (если линия-выноска проходит по заштрихованному полю) и не пересекать, по возможности, размерные линии и элементы изображения, к которым не относится помещенная на полке надпись.

Допускается выполнять линии-выноски с одним изломом (черт. 2), а также проводить от одной полки две и более линии-выноски (черт. 3).



Черт. 2



Черт. 3

10. Надписи, относящиеся непосредственно к изображению, могут содержать не более двух строк, располагаемых над полкой линии-выноски и под ней.

11. Текстовую часть, помещенную на поле чертежа, располагают над основной надписью.

Между текстовой частью и основной надписью не допускается помещать изображения, таблицы и т. п.

На листах формата более 11 допускается размещение текста в две и более колонки. Ширина колонки должна быть не более 185 мм.

На чертеже оставляют место для продолжения таблицы изменений.

12. На чертеже изделия, для которого стандартом установлена таблица параметров (например, зубчатого колеса, червяка и т. п.), ее помещают по правилам, установленным соответствующим стандартом. Все другие таблицы размещают на свободном месте поля чертежа справа от изображения или ниже его и выполняют по ГОСТ 2.105—95.

13. Технические требования на чертеже излагают, группируя вместе однородные и близкие по своему характеру требования, по возможности в следующей последовательности:

а) требования, предъявляемые к материалу, заготовке, термической обработке и к свойствам материала готовой детали (электрические, магнитные, диэлектрические, твердость, влажность, гигроскопичность и т. д.), указание материалов-заменителей;

б) размеры, предельные отклонения размеров, формы и взаимного расположения поверхностей, массы и т. п.;

в) требования к качеству поверхностей, указания об их отделке, покрытии;

г) зазоры, расположение отдельных элементов конструкции;

д) требования, предъявляемые к настройке и регулированию изделия;

е) другие требования к качеству изделий, например: бесшумность, виброустойчивость, самоторможение и т. д.;

ж) условия и методы испытаний;

з) указания о маркировании и клеймении;

и) правила транспортирования и хранения;

к) особые условия эксплуатации;

л) ссылки на другие документы, содержащие технические требования, распространяющиеся на данное изделие, но не приведенные на чертеже.

14. Пункты технических требований должны иметь сквозную нумерацию. Каждый пункт технических требований записывают с новой строки.

15. Заголовок «Технические требования» не пишут.

16. В случае, если необходимо указать техническую характеристику изделия, ее размещают отдельно от технических требований, с самостоятельной нумерацией пунктов, на свободном поле чертежа под заголовком «Техническая характеристика». При этом над техническими требованиями помещают заголовок «Технические требования». Оба заголовка не подчеркивают.

17. При выполнении чертежа на двух и более листах текстовую часть помещают только на первом листе независимо от того, на каких листах находятся изображения, к которым относятся указания, приведенные в текстовой части.

Надписи, относящиеся к отдельным элементам предмета и наносимые на полках линий-выносок, помещают на тех листах чертежа, на которых они являются наиболее необходимыми для удобства чтения чертежа.

18. Для обозначения на чертеже изображений (видов, разрезов, сечений), поверхностей, размеров и других элементов изделия применяют прописные буквы русского алфавита, за исключением букв Й, О, Х, Ъ, Ы, Ь.

Буквенные обозначения присваивают в алфавитном порядке без повторения и, как правило, без пропусков, независимо от количества листов чертежа. Предпочтительно обозначать сначала изображения.

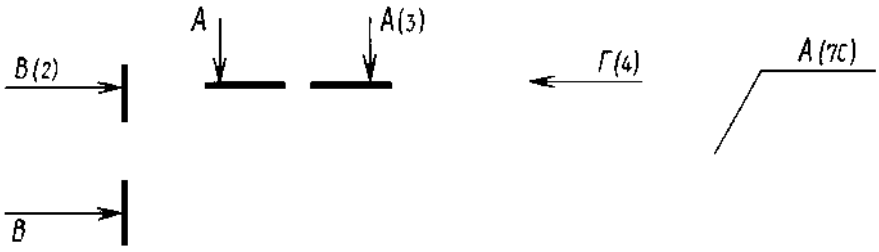
В случае недостатка букв применяют цифровую индексацию, например: «А»; «$А_1$»; «$А_2$»; «Б—Б»; «$Б_1$—$Б_1$»; «$Б_2$—$Б_2$».

19. Размер шрифта буквенных обозначений должен быть больше размера цифр размерных чисел, применяемых на том же чертеже, приблизительно в два раза.

20. Масштаб изображения на чертеже, отличающийся от указанного в основной надписи, указывают непосредственно после надписи, относящейся к изображению, например:

А — А (1:1); Б (5:1); А (2:1).

Если на чертеже отыскание дополнительных изображений (сечений, разрезов, дополнительных видов, выносных элементов) затруднено вследствие большой насыщенности чертежа или выполнения его на двух и более листах, то у обозначения дополнительных изображений указывают номера листов или обозначения зон, на которых эти изображения помещены (черт. 4).



Черт. 4

В этих случаях над дополнительными изображениями у их обозначений указывают номера листов или обозначения зон, на которых дополнительные изображения отмечены (черт. 5).

Черт. 5

21. Таблицы, помещенные на чертеже, нумеруют в пределах чертежа при наличии ссылок на них в технических требованиях. При этом над таблицей справа ставят слово «Таблица» с порядковым номером (без знака №).

Если на чертеже только одна таблица, то ее не нумеруют и слово «Таблица» не пишут.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ДОПУСКАЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ СЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ОСНОВНЫХ НАДПИСЯХ, ТЕХНИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЯХ И ТАБЛИЦАХ НА ЧЕРТЕЖАХ И СПЕЦИФИКАЦИЯХ

Полное наименование	Сокращение	Полное наименование	Сокращение
Без чертежа	БЧ	Плоскость	плоск.
Ведущий	Вед.*	Поверхность	поверхн.
Верхнее отклонение	верхн. откл.	Подлинник	подл.
Взамен	взам.	Подпись	подп.*
Внутренний	внутр.	Позиция	поз.
Главный	Гл.*	Покупка, покупной	покуп.
Глубина	глуб.	По порядку	п/п
Деталь	дет.	Правый	прав.
Длина	дл.	Предельное отклонение	пред. откл.
Документ	докум.	Приложение	прилож.
Дубликат	дубл.	Примечание	примеч.
Заготовка	загот.	Проверил	Пров.
Зенковка, зенковать	зенк.	Пункт	п.
Извещение	изв.	Пункты	пп.
Изменение	изм.	Разработал	Разраб.*
Инвентарный	инв.	Рассчитал	Рассч.*
Инженер	Инж.*	Регистрация, регистрационный	регистр.
Инструмент	инстр.		
Исполнение	исполн.	Руководитель	Рук.*
Класс (точности, чистоты)	кл.	Сборочный чертеж	сб. черт.
Количество	кол.	Свыше	св.
Конический	конич.	Сечение	сеч.
Конструктор	Констр.*	Специальный	спец.
Конструкторский отдел	КО*	Спецификация	специф.
Конструкторское бюро	КБ*	Справочный	справ.
Конусность	конусн.	Стандарт, стандартный	станд.
Конусообразность	конусообр.	Старший	Ст.*
Лаборатория	лаб.*	Страница	стр.
Левый	лев.	Таблица	табл.
Литера	лит.	Твердость	тв.
Металлический	металл.	Теоретический	теор.
Металлург	Мет.*	Технические требования	ТТ
Механик	Мех.*	Технические условия	ТУ
Наибольший	наиб.	Техническое задание	ТЗ
Наименьший	наим.	Технолог	Техн.*
Наружный	нар.	Технологический контроль	Т. контр.*
Начальник	Нач.*	Ток высокой частоты	ТВЧ
Нормоконтроль	Н. контр.	Толщина	толщ.
Нижнее отклонение	нижн. откл.	Точность, точный	точн.
Номинальный	номин.	Утвердил	Утв.
Обеспечить	обеспеч.	Условное давление	усл. давл.
Обработка, обрабатывать	обраб.	Условный проход	усл. прох.
Отверстие	отв.	Химический	хим.
Отверстие центровое	отв. центр.	Цементация, цементировать	цемент.
Относительно	относит.	Центр масс	Ц. М.
Отдел	отд.*	Цилиндрический	цилиндр.
Отклонение	откл.	Чертеж	черт.
Первичная применяемость	перв. примен.*	Шероховатость	шерох.
		Экземпляр	экз.

Примечания:
1. Сокращения, отмеченные знаком «*», применяют только в основной надписи.
2. Сокращение «табл.» применяют в тексте только в тех случаях, когда таблицы имеют номера.

МКС 01.080.30
Группа Т52

Изменение № 3 ГОСТ 2.316—68 Единая система конструкторской документации. Правила нанесения на чертежах надписей, технических требований и таблиц

Принято Межгосударственным советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 1 по переписке от 17.01.2002)

Зарегистрировано Бюро по стандартам МГС № 4046

За принятие изменения проголосовали национальные органы по стандартизации следующих государств: AZ, AM, BY, KZ, KG, MD, RU, TJ, TM, UZ [коды альфа-2 по МК (ИСО 3166) 004]

Пункт 1. Второй абзац исключить.

Пункт 11. Третий абзац. Заменить обозначение формата: 11 на А4.

Пункт 18 дополнить абзацем:

«Буквенные обозначения не подчеркивают».

Пункт 21 исключить.

Приложение. Исключить наименование: «Таблица», «табл.»;

заменить сокращение: «стр.» на «с.»;

примечания изложить в новой редакции:

«П р и м е ч а н и е. Сокращения, отмеченные знаком «*», применяют только в основной надписи».

(ИУС № 3 2003 г.)

УДК 744.4:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Unified system for design documentation.
Axonometric projections

ГОСТ 2.317—69*

Взамен ГОСТ 2.305—68 в части приложения

Постановлением Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР от 14 октября 1969 г. № 1118 срок введения установлен

с 01.01.71

Настоящий стандарт устанавливает аксонометрические проекции, применяемые в чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 1979—79.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

1.1. Изометрическая проекция

1.1.1. Положение аксонометрических осей приведено на черт. 1.

1.1.2. Коэффициент искажения по осям *x*, *y*, *z* равен 0,82.

Изометрическую проекцию для упрощения, как правило, выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*, т. е. приняв коэффициент искажения равным 1.

1.1.3. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в эллипсы (черт. 2).

Если изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*, то большая ось эллипсов *1*, *2*, *3* равна 1,22, а малая ось — 0,71 диаметра окружности.

Если изометрическую проекцию выполняют с искажением по осям *x*, *y*, *z*, то большая ось эллипсов *1*, *2*, *3* равна диаметру окружности, а малая ось — 0,58 диаметра окружности.

1.1.4. Пример изометрической проекции детали приведен на черт. 3.

1.2. Диметрическая проекция

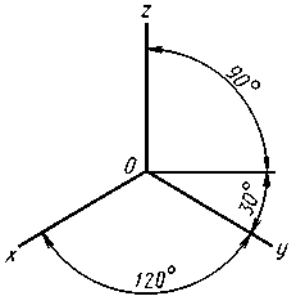
1.2.1. Положение аксонометрических осей приведено на черт. 4.

1.2.2. Коэффициент искажения по оси *y* равен 0,47, а по осям *x* и *z* — 0,94.

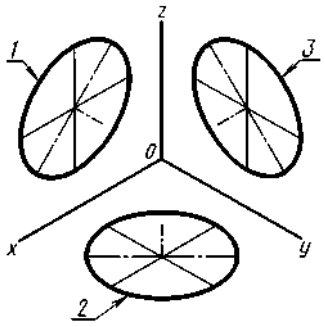
Диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям *x* и *z* и с коэффициентом искажения 0,5 по оси *y*.

Издание официальное ★ **Перепечатка воспрещена**

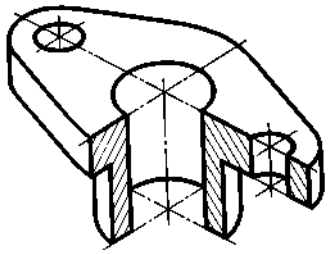
** Издание (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в августе 1980 г. (ИУС 11—80)*



Черт. 1



1 — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *y*);
2 — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *z*);
3 — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *x*).



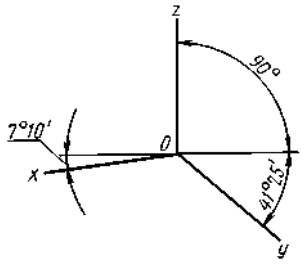
Черт. 3

1.2.3. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в эллипсы (черт. 5).

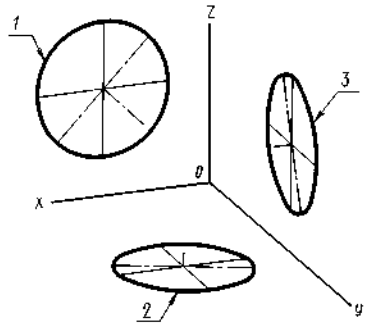
Если диметрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x* и *z*, то большая ось эллипсов *1*, *2*, *3* равна 1,06 диаметра окружности, а малая ось эллипса *1* — 0,95, эллипсов *2* и *3* — 0,35 диаметра окружности.

Если диметрическую проекцию выполняют с искажением по осям *x* и *z*, то большая ось эллипсов *1*, *2*, *3* равна диаметру окружности, а малая ось эллипса *1* — 0,9, эллипсов *2* и *3* — 0,33 диаметра окружности.

1.2.4. Пример диметрической проекции детали приведен на черт. 6.

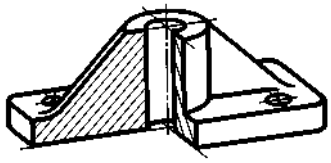


Черт. 4



1 — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *y*); *2* — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *z*); *3* — эллипс (большая ось расположена под углом 90 ° к оси *x*).

Черт. 5



Черт. 6

2. КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

2.1. Фронтальная изометрическая проекция

2.1.1. Положение аксонометрических осей приведено на черт. 7.

Допускается применять фронтальные изометрические проекции с углом наклона оси *y* 30 и 60 °.

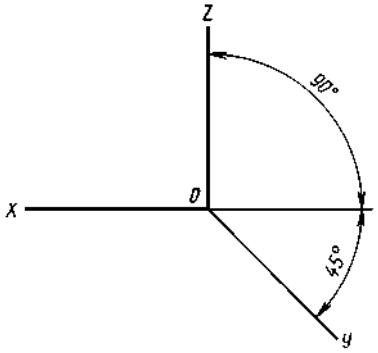
2.1.2. Фронтальную изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x*, *y*, *z*.

2.1.3. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций,

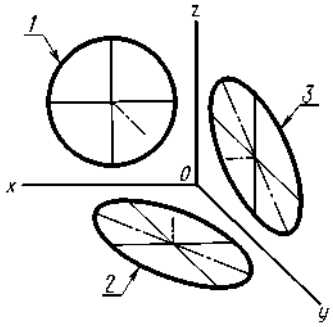
проецируются на аксонометрическую плоскость в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, — в эллипсы (черт. 8).

Большая ось эллипсов *2* и *3* равна 1,3, а малая ось — 0,54 диаметра окружности.

2.1.4. Пример фронтальной изометрической проекции детали приведен на черт. 9.

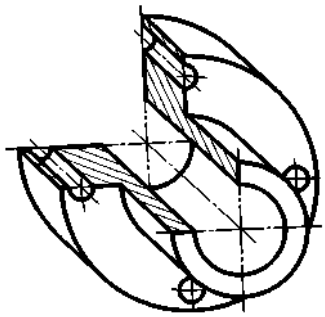


Черт. 7



1 — окружность; *2* — эллипс (большая ось составляет с осью *x* угол 22°30′); *3* — эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 22°30′).

Черт. 8



Черт. 9

2.2. Горизонтальная изометрическая проекция

2.2.1. Положение аксонометрических осей приведено на черт. 10.

Допускается применять горизонтальные изометрические проекции с углом наклона оси *y* 45 и 60 °, сохраняя угол между осями *x* и *y* 90 °.

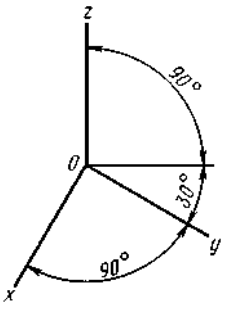
2.2.2. Горизонтальную изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям *x*, *y* и *z*.

2.2.3. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной и профильной плоскостям проекций — в эллипсы (черт. 11).

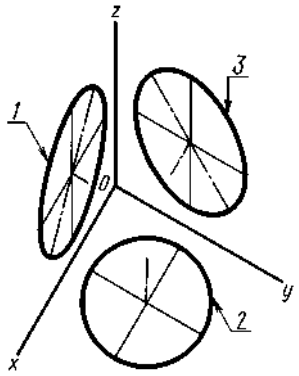
Большая ось эллипса *1* равна 1,37, а малая ось — 0,37 диаметра окружности.

Большая ось эллипса *3* равна 1,22, а малая ось — 0,71 диаметра окружности.

2.2.4. Пример горизонтальной изометрической проекции приведен на черт. 12.

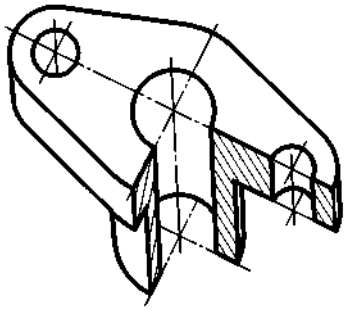


Черт. 10



1 — эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 15 °); *2* — окружность; *3* — эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 30 °)

Черт. 11



Черт. 12

2.3. Фронтальная диметрическая проекция

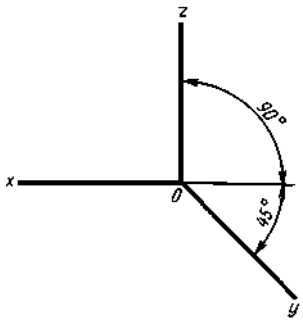
2.3.1. Положение аксонометрических осей приведено на черт. 13.

Допускается применять фронтальные диметрические проекции с углом наклона оси *y* 30 и 60 °.

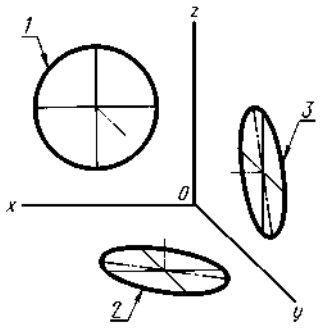
Коэффициент искажения по оси *y* равен 0,5, а по осям *x* и *z* — 1.

2.3.2. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость проекций в окружности, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, — в эллипсы (черт. 14). Большая ось эллипсов *2* и *3* равна 1,07, а малая ось — 0,33 диаметра окружности.

2.3.3. Пример фронтальной диметрической проекции детали приведен на черт. 15.

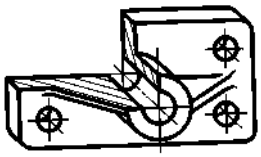


Черт. 13



1 — окружность; *2* — эллипс (большая ось составляет с осью *x* угол 7°14′); *3* — эллипс (большая ось составляет с осью *z* угол 7°14′).

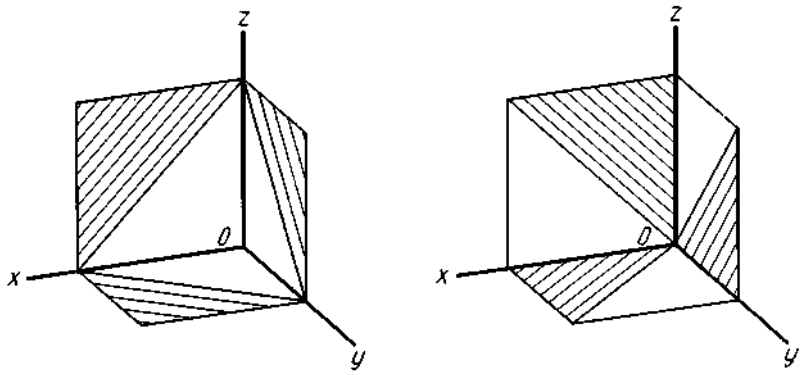
Черт. 14



Черт. 15

3. УСЛОВНОСТИ И НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ

3.1. Линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях наносят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям (черт. 16).



Черт. 16

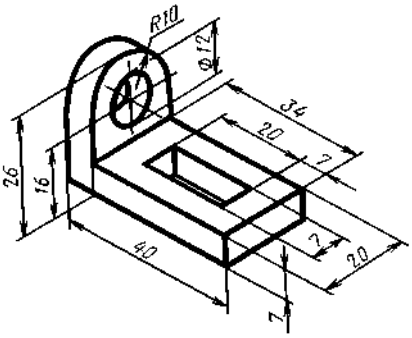
3.2. При нанесении размеров выносные линии проводят параллельно аксонометрическим осям, размерные линии — параллельно измеряемому отрезку (черт. 17).

3.3. В аксонометрических проекциях спицы маховиков и шкивов, ребра жесткости и подобные элементы штрихуют (см. черт. 6).

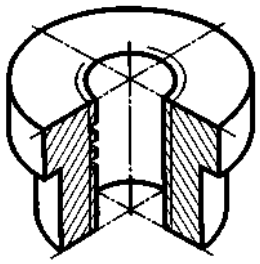
3.4. При выполнении в аксонометрических проекциях зубчатых колес, реек, червяков и подобных элементов допускается применять условности по ГОСТ 2.402—68.

В аксонометрических проекциях резьбу изображают по ГОСТ 2.311—68.

Допускается изображать профиль резьбы полностью или частично, как показано на черт. 18.



Черт. 17



Черт. 18

3.5. В необходимых случаях допускается применять другие теоретически обоснованные аксонометрические проекции.

УДК 744.4:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ПРАВИЛА УПРОЩЕННОГО НАНЕСЕНИЯ РАЗМЕРОВ ОТВЕРСТИЙ

ГОСТ 2.318—81

Unified system for design documentation.
Rules of simplified marking of hole dimensions

Дата введения 01.01.82

1. Настоящий стандарт устанавливает правила упрощенного нанесения размеров отверстий на чертежах всех отраслей промышленности и строительства.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

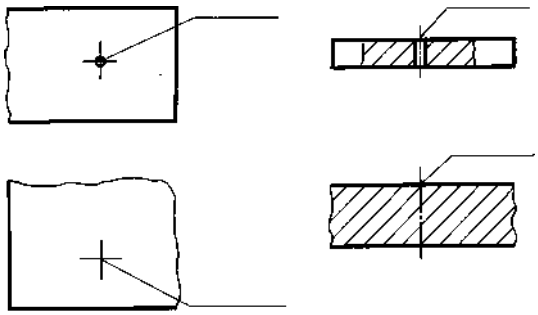
2. Размеры отверстий на чертежах допускается наносить упрощенно в следующих случаях:

диаметр отверстия на изображении — 2 мм и менее;

отсутствует изображение отверстий в разрезе (сечении) вдоль оси;

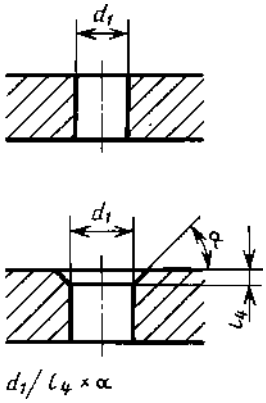
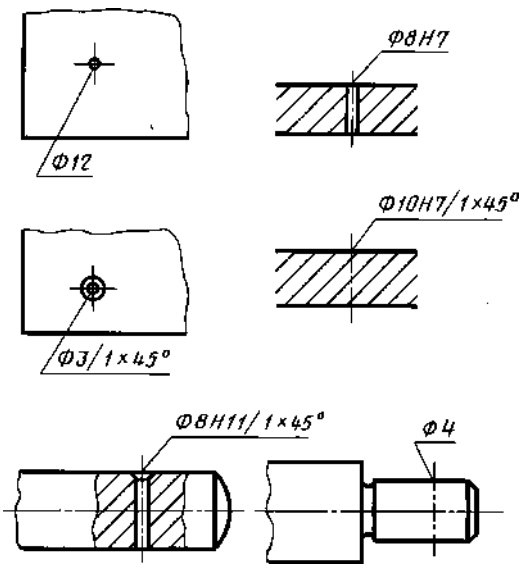
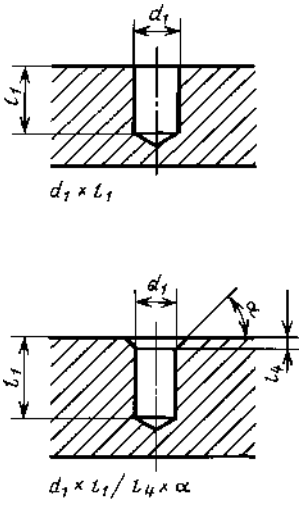
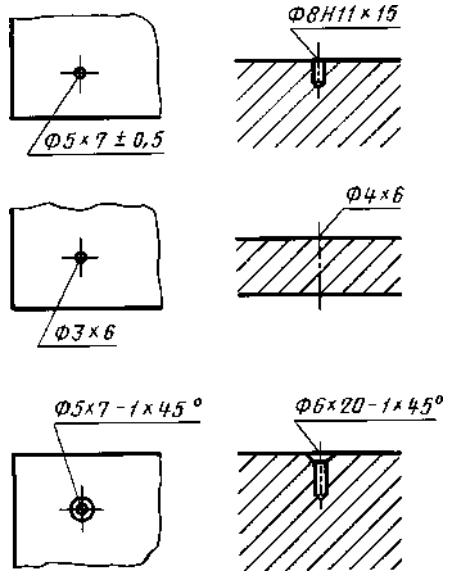
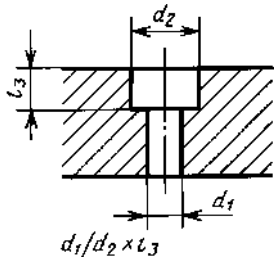
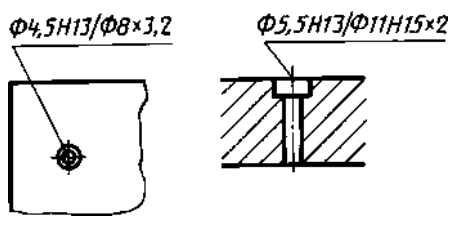
нанесение размеров отверстий по общим правилам усложняет чтение чертежа.

3. Размеры отверстий следует указывать на полке линии-выноски, проведенной от оси отверстия (см. чертеж).

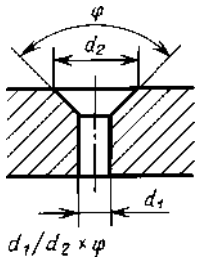
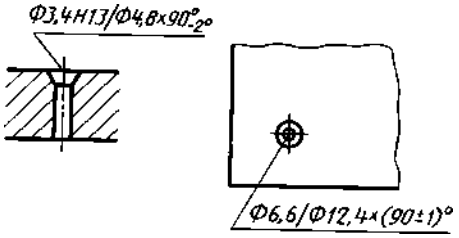
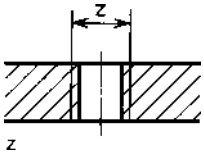
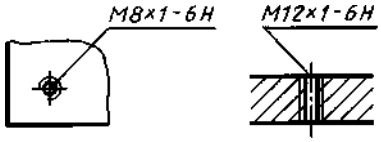
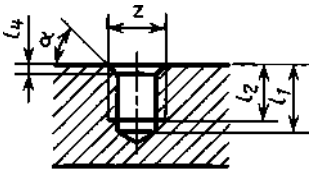
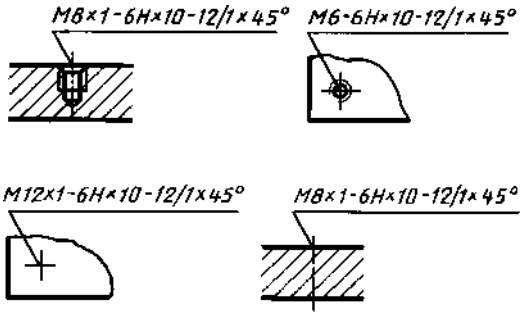
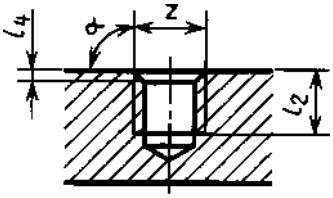
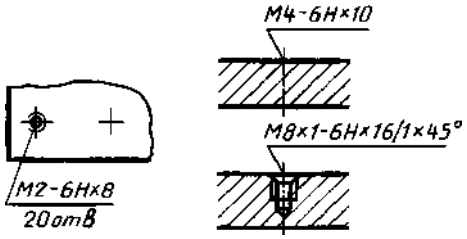
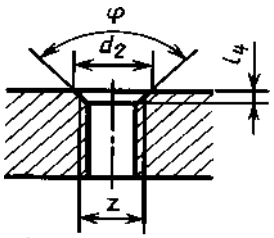
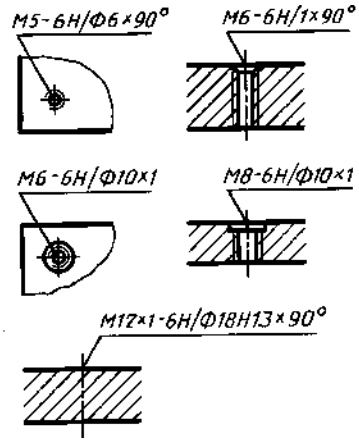


4. Примеры упрощенного нанесения размеров отверстий приведены в таблице.

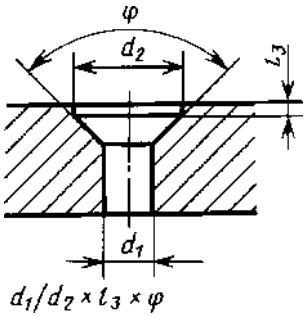
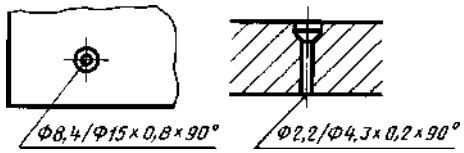
Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

Тип отверстия	Пример упрощенного нанесения размеров отверстия
1. 	
2. 	
3. 	

Продолжение

Тип отверстия	Пример упрощенного нанесения размеров отверстия
4.  $d_1/d_2 \times \varphi$	
5.  z	
6.  $z \times l_2 - l_1$ $z \times l_2 - l_1 / l_4 \times \alpha$	
7.  $z \times l_2$ $z \times l_2 / l_4 \times \alpha$	
8.  $z/l_4 \times \varphi$ $z/d_2 \times \varphi$ $z/d_2 \times l_4$	

Продолжение

Тип отверстия	Пример упрощенного нанесения размеров отверстия
9. 	

Обозначения элементов отверстий, используемые в структуре записей для различных типов отверстий:

d_1 — диаметр основного отверстия;
d_2 — диаметр зенковки;
l_1 — длина цилиндрической части основного отверстия;
l_2 — длина резьбы в глухом отверстии;
l_3 — глубина зенковки;
l_4 — глубина фаски;
z — обозначение резьбы по стандарту;
φ — центральный угол зенковки;
α — угол фаски.

(Измененная редакция, Изм. № 1).

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Государственным комитетом СССР по стандартам

2. УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 30.10.81 № 4771

3. Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 1977—79

4. ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

5. ИЗДАНИЕ (июль 2001 г.) с Изменением № 1, утвержденным в сентябре 1987 г. (ИУС 12—87)

УДК 62-434.5:621.753.1/.2:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ПРАВИЛА НАНЕСЕНИЯ РАЗМЕРОВ, ДОПУСКОВ И ПОСАДОК КОНУСОВ

ГОСТ 2.320—82

Unified system for design documentation. Rules of drawing of dimensions, tolerances and taper fits

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 30 декабря 1982 г. № 5293 дата введения установлена 01.01.84

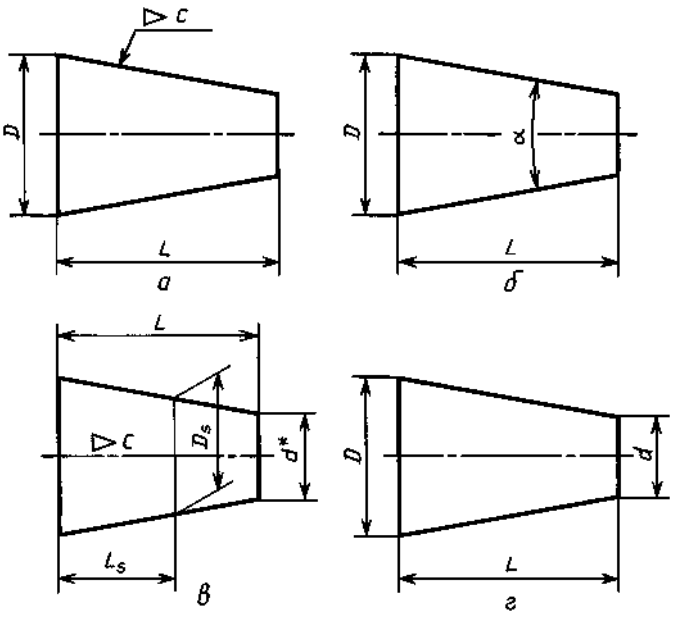
Настоящий стандарт устанавливает общие правила нанесения размеров, их предельных отклонений и допусков формы конусов и посадок конических соединений на чертежах всех отраслей промышленности.

Стандарт полностью соответствует СТ СЭВ 3332—81.

Допуски и посадки — по ГОСТ 25307—82.

1. НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ

1.1. Величину и форму конуса определяют нанесением трех из перечисленных размеров (черт. 1):



Черт. 1

1) диаметр большого основания D;
2) диаметр малого основания d;
3) диаметр в заданном поперечном сечении D_s, имеющем заданное осевое положение L_s;
4) длина конуса L;
5) угол конуса α;
6) конусность c.

Допускается указывать дополнительные размеры, как справочные (черт. 1*в*).

1.2. Размеры стандартизованных конусов на чертеже не указывают, а приводят на полке линии-выноски условное обозначение по соответствующему стандарту.

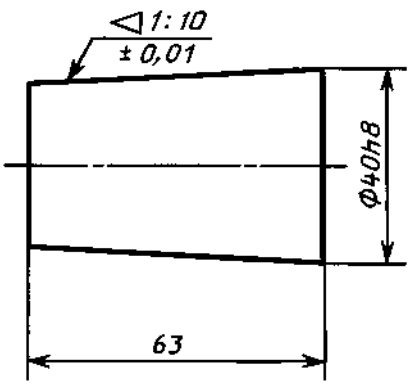
2. НАНЕСЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ РАЗМЕРОВ И ДОПУСКОВ КОНУСОВ

2.1. Предельные отклонения размеров конусов следует наносить в соответствии с требованиями ГОСТ 2.307—68 и настоящего стандарта.

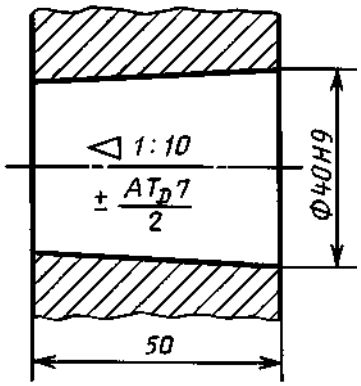
2.2. Предельные отклонения угла конуса, если конус определен конусностью, следует наносить непосредственно под обозначением конусности:

числовыми значениями AT_D (черт. 2);

условными обозначениями (черт. 3);

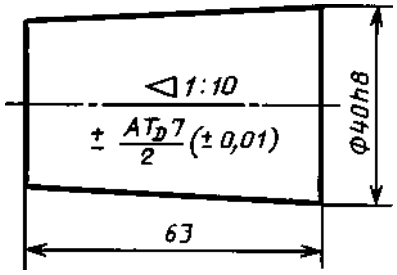


Черт. 2

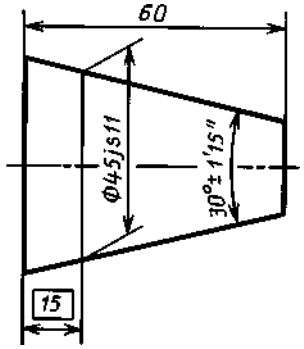


Черт. 3

условными обозначениями с указанием в скобках числовых значений соответствующих предельных отклонений (черт. 4).



Черт. 4

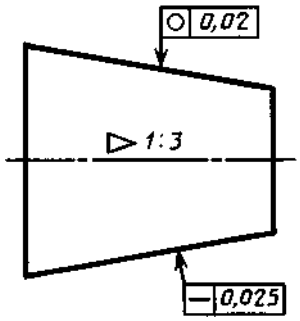


Черт. 5

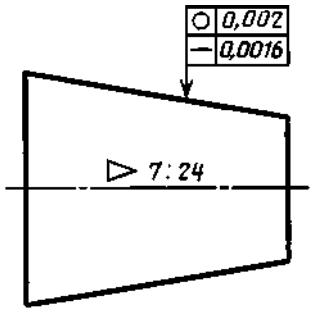
2.3. Предельные отклонения угла конуса, если конус определен углом, следует указывать числовыми значениями AT_α' непосредственно после номинального размера (черт. 5).

2.4. Допуски формы конуса (допуск круглости и допуски прямолинейности образующей) следует наносить в соответствии с требованиями ГОСТ 2.308—79 (черт. 6).

При указании допуска прямолинейности образующей на конусах с конусностью не более 1:3 допускается соединительную линию от рамки проводить перпендикулярно оси конуса (черт. 7).

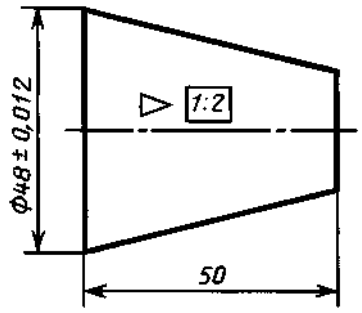


Черт. 6

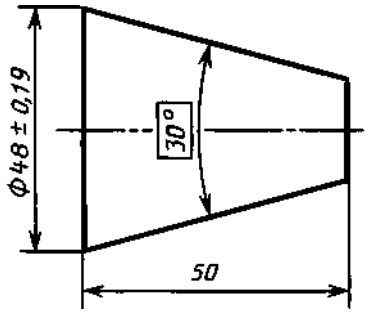


Черт. 7

2.5. Если задан допуск T_D диаметра конуса в любом сечении, то значение конусности или угла конуса следует заключить в прямоугольную рамку (черт. 8, 9).

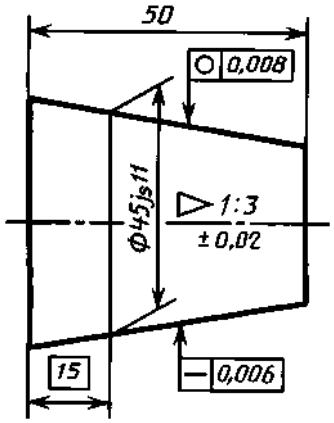


Черт. 8

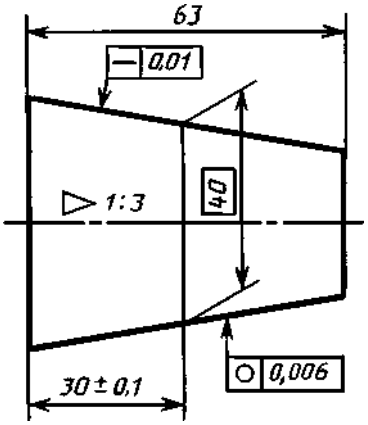


Черт. 9

2.6. Если задан допуск T_D диаметра конуса в заданном сечении, то значение расстояния L_s от базовой плоскости до основной следует заключить в прямоугольную рамку (черт. 10).



Черт. 10

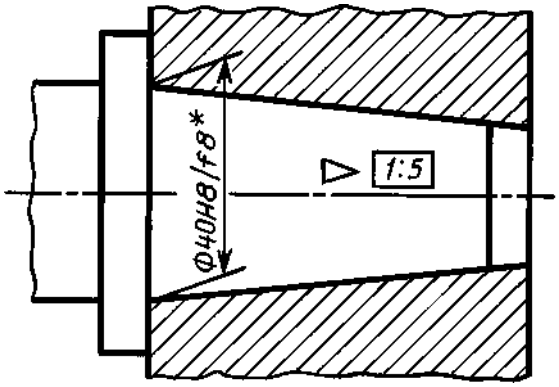


Черт. 11

2.7. Если заданы предельные отклонения размера, определяющего осевое положение основной плоскости конуса L_s, то значение номинального диаметра D_s следует заключить в прямоугольную рамку (черт. 11).

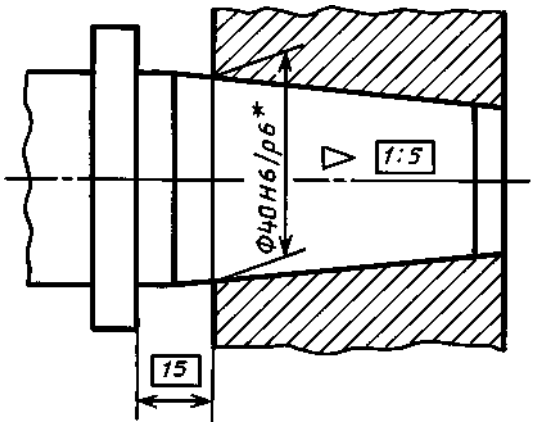
3. НАНЕСЕНИЕ РАЗМЕРОВ И ПОСАДОК НА КОНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЯХ

3.1. При посадке с фиксацией путем совмещения конструктивных элементов сопрягаемых конусов размеры, определяющие характер соединения, на сборочном чертеже могут быть указаны только как справочные (черт. 12).



Черт. 12

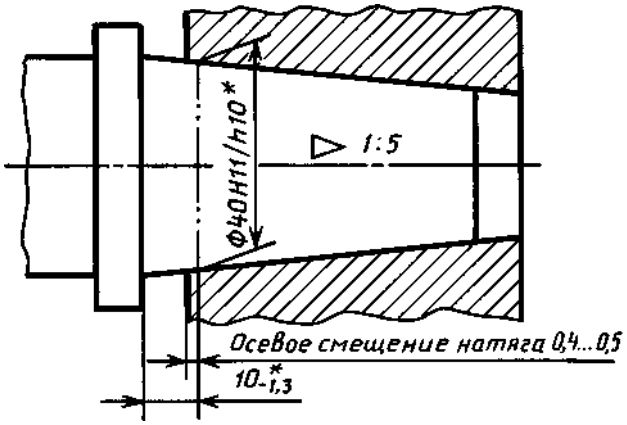
3.2. При посадке с фиксацией по заданному осевому расстоянию z_{pf} между базовыми плоскостями сопрягаемых конусов должен быть нанесен размер, определяющий расстояние между базовыми плоскостями, заключенный в прямоугольную рамку, а размер, определяющий характер соединения, может быть указан как справочный (черт. 13).



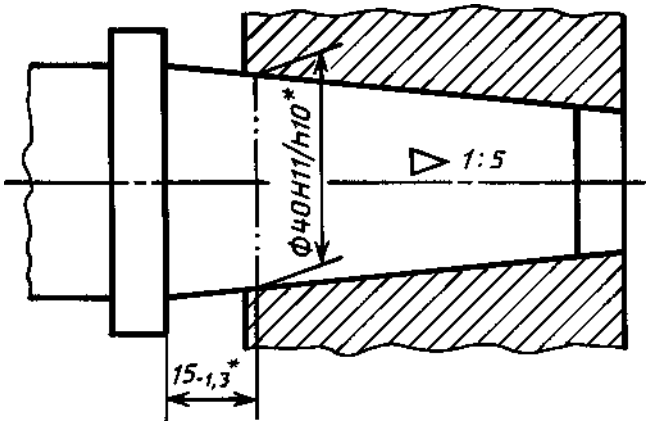
Черт. 13

3.3. При посадке с фиксацией по заданному взаимному осевому смещению сопрягаемых конусов от их начального положения должен быть указан размер осевого смещения, а начальное положение конусов отмечается штрихпунктирной тонкой линией с двумя точками. Размеры, определяющие начальное базорасстояние соединения и сочетание полей допусков сопрягаемых конусов, могут быть указаны как справочные (черт. 14).

3.4. При посадке с фиксацией по заданному усилию запрессовки F_s, прилагаемому в начальном положении сопрягаемых конусов, заданное усилие запрессовки следует указывать в технических требованиях чертежа, например, «Усилие запрессовки F_s = . . . *Н*». Размеры, определяющие начальное базорасстояние соединения и сочетание полей допусков сопрягаемых конусов, могут быть указаны как справочные (черт. 15).



Черт. 14



Черт. 15

УДК 744:003.62:006.354 Группа Т52

М Е Ж Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й С Т А Н Д А Р Т

Единая система конструкторской документации

ОБОЗНАЧЕНИЯ БУКВЕННЫЕ

Unified system for design documentation.
Letter designations

ГОСТ 2.321—84

Взамен ГОСТ 3452—59

ОКСТУ 0002

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 30 марта 1984 г. № 1148 срок введения установлен

с 01.01.85

1. Настоящий стандарт устанавливает основные буквенные обозначения, применяемые в конструкторских документах всех отраслей промышленности.

2. Для перечисленных ниже величин устанавливаются следующие буквенные обозначения:

Длина	*L, l*
Ширина	*B, b*
Высота, глубина	*H, h*
Толщина (листов, стенок, ребер и т. д.)	*s*
Диаметр	*D, d*
Радиус	*R, r*
Межосевое и межцентровое расстояние	*A, a*
Шаг: винтовых пружин, болтовых соединений, заклепочных соединений и т. п., кроме зубчатых зацеплений и резьб	*t*
Углы	α, β, γ, δ и другие строчные буквы греческого алфавита

3. Прописные буквы рекомендуется применять для обозначения габаритных и суммарных размеров.

4. В случае обозначения в одном документе различных величин одной и той же буквой следует применять цифровые или буквенные индексы, или их комбинацию, причем, первый цифровой индекс рекомендуется присваивать второй величине, обозначенной данной буквой, второй индекс — третьей величине и т. д., например: d, d_1, d_2, b_n, b_{n1}, b_{n2}.

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

★ *Переиздание. Июль 2001 г.*

Содержание

ГОСТ 2.301—68 Единая система конструкторской документации. Форматы . . . 3
ГОСТ 2.302—68 Единая система конструкторской документации. Масштабы . . . 5
ГОСТ 2.303—68 Единая система конструкторской документации. Линии . . . 6
ГОСТ 2.304—81 Единая система конструкторской документации. Шрифты чертежные . . . 12
ГОСТ 2.305—68 Единая система конструкторской документации. Изображения — виды, разрезы, сечения . . . 33
ГОСТ 2.306—68 Единая система конструкторской документации. Обозначения графические материалов и правила их нанесения на чертежах . . . 48
ГОСТ 2.307—68 Единая система конструкторской документации. Нанесение размеров и предельных отклонений . . . 54
ГОСТ 2.308—79 Единая система конструкторской документации. Указание на чертежах допусков формы и расположения поверхностей . . . 75
ГОСТ 2.309—73 Единая система конструкторской документации. Обозначения шероховатости поверхностей . . . 95
ГОСТ 2.310—68 Единая система конструкторской документации. Нанесение на чертежах обозначений покрытий, термической и других видов обработки . . . 102
ГОСТ 2.311—68 Единая система конструкторской документации. Изображение резьбы . . . 107
ГОСТ 2.312—72 Единая система конструкторской документации. Условные изображения и обозначения швов сварных соединений . . . 112
ГОСТ 2.313—82 Единая система конструкторской документации. Условные изображения и обозначения неразъемных соединений . . . 121
ГОСТ 2.314—68 Единая система конструкторской документации. Указания на чертежах о маркировании и клеймении изделий . . . 127
ГОСТ 2.315—68 Единая система конструкторской документации. Изображения упрощенные и условные крепежных деталей . . . 130
ГОСТ 2.316—68 Единая система конструкторской документации. Правила нанесения на чертежах надписей, технических требований и таблиц . . . 139
ГОСТ 2.317—69 Единая система конструкторской документации. Аксонометрические проекции . . . 144
ГОСТ 2.318—81 Единая система конструкторской документации. Правила упрощенного нанесения размеров отверстий . . . 149
ГОСТ 2.320—82 Единая система конструкторской документации. Правила нанесения размеров, допусков и посадок конусов . . . 153
ГОСТ 2.321—84 Единая система конструкторской документации. Обозначения буквенные . . . 158

ЕДИНАЯ СИСТЕМА
КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

Редактор *Р.Г. Говердовская*
Технический редактор *Н.С. Гришанова*
Корректор *В.Е. Нестерова*
Компьютерная верстка *В.И. Грищенко*

Изд. лиц. № 02354 от 14.07.2000. Сдано в набор 07.08.2001. Подписано в печать 14.09.2001. Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,60. Уч.-изд. л. 15,50. Тир. 2000 экз.
Зак. 1002. Изд. № 2772/2. С 2026.

ИПК Издательство стандартов, 107076, Москва, Колодезный пер., 14.
Набрано в Издательстве на ПЭВМ.
Калужская типография стандартов, 248021, Калуга, ул. Московская, 256
ПЛР № 040138

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный
университет»

И. Б. Белоносова

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА.

РЕЗЬБА

Методическое пособие
по теме «Условности машиностроительного черчения»
для самостоятельной работы студентов
всех специальностей и направлений»

Екатеринбург – 2018